13th-note
2015年1月センター試験
数学ⅠA・解説

Ver1.01（2015-1-20）

①を平方完成して

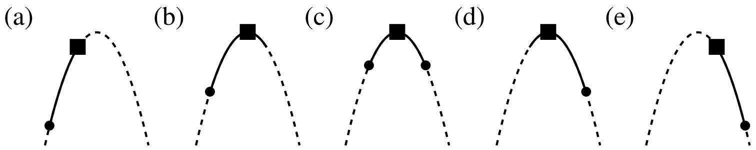
$$y = -(x^2 - 2x) + 2 = -\{(x-1)^2 - 1\} + 2 = -(x-1)^2 + 3$$

であるから，①のグラフの頂点の座標は $\left(\underline{\mathbf{1}}_{ア},\ \underline{\mathbf{3}}_{イ}\right)$ である．

これを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した②のグラフ $y = f(x)$ の頂点は，$(1+p,\ 3+q)$ になる．

(1) p の値によって，定義域 $2 \leqq x \leqq 4$ における $y = f(x)$ のグラフは以下のいずれかになる（y 座標が最大になる点を■，最小になる点を ● で表している）．

◀ 13th-note 数学 I『文字定数を含む 2 次関数の最大・最小』(p.184)



$2 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最大値が $f(2)$，つまりグラフの左端になるのは，上の (e) である．

これは，軸 $x = 1+p$ が，定義域の左端 2 より，左または等しければよいので

◀ (d) と (e) の境目も適する．

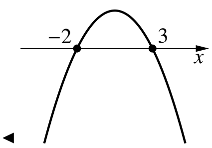
$$1 + p \leqq 2 \iff p \leqq 1 \quad （よって，\underline{\mathbf{3}}_{ウ},\ \underline{\mathbf{1}}_{エ}）$$

また，最小値が $f(2)$ になる，つまりグラフの左端になるのは (a), (b), (c) である．

これは，定義域の中央 3 が，軸 $x = 1+p$ より，左または等しければよいので

$$3 \leqq 1 + p \iff 2 \leqq p \iff p \geqq 2 \quad （よって，\underline{\mathbf{2}}_{オ},\ \underline{\mathbf{2}}_{カ}）$$

(2) 2 次不等式 $f(x) > 0$ の解が $-2 < x < 3$ になるとき，$y = f(x)$ のグラフは右欄外のようになっている．



◀ 13th-note 数学 I『2 次不等式の解からグラフを考える』(p.224)

よって，$f(-2) = 0$, $f(3) = 0$ である．

◀ 別解として $f(x) = -\{x - (1+p)\}^2 + 3 + q$ にこれを代入しても良い．

また，②のグラフの作り方から x^2 の係数は -1 となるから $f(x) = -(x+2)(x-3)$ である．これを展開して平方完成すると

◀ 13th-note 数学 I『2 次関数・因数分解型 $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ の決定』(p.213)

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - x - 6) \\ &= -\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6\right\} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

よって，頂点は $\left(\frac{1}{2},\ \frac{25}{4}\right)$ である．つまり $1 + p = \frac{1}{2}$，$3 + q = \frac{25}{4}$ であるから，$p = \underline{\mathbf{\frac{-1}{2}}}_{キクケ}$，$q = \underline{\mathbf{\frac{13}{4}}}_{コサシ}$

解答番号	正解	配点
(ア , イ)	**(1, 3)**	5
ウ , エ	**3, 1**	5
オ , カ	**2, 2**	5
キク / ケ	$\mathbf{\frac{-1}{2}}$	2
コサ / シ	$\mathbf{\frac{13}{4}}$	3

第 2 問 ［1］

(1) 命題「$(p_1 \text{かつ } p_2) \Longrightarrow (q_1 \text{かつ } q_2)$」の対偶は

$$\overline{(q_1 \text{かつ } q_2)} \Longrightarrow \overline{(p_1 \text{かつ } p_2)}$$

であるが，ド・モルガンの法則より

$$\overline{(q_1 \text{かつ } q_2)} = \overline{q_1} \text{または} \overline{q_2}$$
$$\overline{(p_1 \text{かつ } p_2)} = \overline{p_1} \text{または} \overline{p_2}$$

であるから，求める対偶は

$$\overline{q_1} \text{または} \overline{q_2} \Longrightarrow \overline{p_1} \text{または} \overline{p_2}$$

である．よって $\underline{①}_{ア}$.

(2) 30 以下の自然数 n の中から，まず p_1かつ p_2 であるもの，つまり「n, $n+2$ も素数であるもの」を考える．

32 以下の素数は

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

であるから，$n = 3, 5, 11, 17, 29$ が適する．

このうち，「$\overline{q_1}$かつ q_2」を満たさない n が反例である．

$n = 3$ のとき $n+1 = 4$ は，5 の倍数でも 6 の倍数でもない．

$n = 5$ のとき $n+1 = 6$ は，5 の倍数でないが 6 の倍数である．

$n = 11$ のとき $n+1 = 12$ は，5 の倍数でないが 6 の倍数である．

$n = 17$ のとき $n+1 = 18$ は，5 の倍数でないが 6 の倍数である．

$n = 29$ のとき $n+1 = 30$ は，5 の倍数でも 6 の倍数でもある．

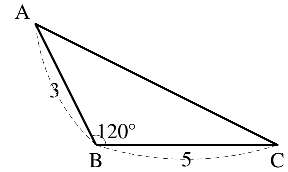
よって，「$\overline{q_1}$かつ q_2」を満たさないのは $n = \underline{\mathbf{3}}_{イ}$, $\underline{\mathbf{29}}_{ウエ}$ である．

◀ 13th-note 数学 I『対偶とは何か』(p.35)

◀ 13th-note 数学 I『ド・モルガンの法則（命題版）』(p.29)

解答番号	正解	配点
ア	**1**	4
イ	**3**	3
ウエ	**29**	3

〔2〕 図の概形は右欄外のようになる．

◀ 

点 B から見た余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 49 \qquad \therefore\ AC = \underline{\mathbf{7}}_{\text{オ}} \end{aligned}$$

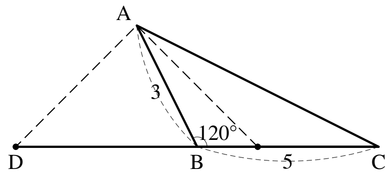
◀ 13th-note 数学 I『余弦定理』(p.127)

また，$\sin \angle ABC = \sin 120^\circ = \underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{カキ}}$ であり，正弦定理より

◀ 13th-note 数学 I『正弦定理』(p.132)

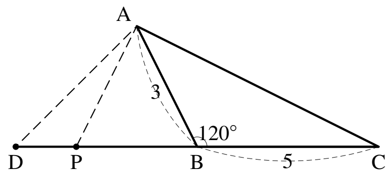
$$\frac{7}{\sin B} = \frac{3}{\sin \angle BCA}$$

$$\Leftrightarrow\ \sin \angle BCA = \frac{3}{7} \sin B = \frac{3}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{3\sqrt{3}}{14}}_{\text{クケコサ}}$$

◀ 

直線 BC 上に点 D をとって，$AD = 3\sqrt{3}$ となる点は右欄外図のように 2 つ考えられる．

しかし，$\angle ADC$ が鋭角なので，$\triangle ABC$ の外になる．そのうえで P をとると，右欄外の図のようになる．

◀ 

そのうえで，線分 BD 上に P をとると，$\triangle APC$ の外接円の半径 R は

$$2R = \frac{AC}{\sin \angle APC} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{7}{2 \sin \angle APC}$$

◀ この時点で，$\angle APC = 90^\circ$ のときが，R の最小値だと気づけば，最小値は求めても良い．

で計算できる．ここで，図より

$$\angle ADC \leqq \angle APC \leqq \angle ABC = 120^\circ$$

の範囲をとり，$\angle ADC$ が鋭角であることから

$$(\sin \angle ADC,\ \sin 120^\circ \text{の小さい方}) \leqq \sin \angle APC \leqq 1$$

をとる．ここで，$\triangle ADC$ について正弦定理より

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin \angle ACB} = \frac{7}{\sin \angle ADC}$$

$$\Leftrightarrow\ \sin \angle ADC = \frac{7}{3\sqrt{3}} \sin \angle ACB = \frac{7}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{1}{2}$$

である．よって，

$$\frac{1}{2} \leqq \sin \angle APC \leqq 1 \Leftrightarrow 1 \leqq \frac{1}{\sin \angle APC} \leqq 2$$

◀ 逆数をとると大小関係は逆転する

$$\frac{7}{2} \leqq \frac{7}{2 \sin \angle APC} \leqq 7 \qquad \therefore\ \underline{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}}_{\text{シス}} \leqq R \leqq \underline{\mathbf{7}}_{\text{セ}}$$

◀ 各辺に $\dfrac{7}{2}$ をかけた
13th-note 数学 I『取り得る範囲を求める』(p.82)

解答番号	正解	配点
$\boxed{\text{オ}}$	**7**	3
$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	3
$\dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コサ}}}$	$\dfrac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{14}}$	3
$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$	$\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$	3
$\boxed{\text{セ}}$	**7**	3

第 3 問

［1］(1) 40 人のデータなので，データは上位 20 人，下位 20 人に分けられる．
第 3 四分位数は上位 20 人の中央値であるから，上から 10 番目と 11 番目の成績の中央値となる．
ヒストグラムから，それは 25 m 以上 30 m 未満の範囲にあるので **4** ア．

◀ ヒストグラムから代表値を見つける問題が，13th-note 数学 I(p.247) にある．
◀ 13th-note 数学 I『四分位数』(p.248)

(2) 最小値，最大値はどの箱ひげ図も正しい．
第 3 四分位数が 25 m 以上 30 m 未満の範囲にない 0，2，3 は矛盾．
第 1 四分位数は，下から 10 番目と 11 番目の成績の中央値であるから，15 m 以上 20 m 未満の範囲にある．これと矛盾するのは 2，3，5．
これから，**0**，**2**，**3**，**5** イウエオ と分かる．
実際，残りの 1，4 は，中央値がたしかに 20 m 以上 25 m 未満にある．

◀ 箱ひげ図から四分位数を見つける問題が，13th-note 数学 I『箱ひげ図から読み取る』(p.250) にある．

(3) 5 m 刻みで上がっているか下がっているか，順に考えると

0 は，a は第 1 四分位数が上がっているので，A に矛盾．
1 は，b は最小値，四分位数，最大値いずれも上がっているので，B に矛盾しない．
2 は，c は最大値が下がっているので，C に矛盾．
3 は，d は最小値，第 1 四分位数が下がり，最大値，第 3 四分位数が上がっているので，D に矛盾しない．

よって，矛盾するのは **0**，**2** カキ．

［2］相関係数の定義より，$\dfrac{54.30}{8.21 \cdot 6.98} = 0.947 \cdots$ であるから，**7** ク．

◀ 13th-note 数学 I『相関係数の性質』(p.259)

解答番号	正解	配点
ア	**4**	3
イ，ウ，エ，オ	**0, 2, 3, 5**(順不同)	4
カ，キ	**0, 2**(順不同)	6
ク	**7**	2

第 4 問

(1) 左から順に塗ると

一番左は 3 通り，右隣は一番左に塗らなかった 2 通り，

その右隣も同様に 2 通り，その右隣も 2 通り，右端も 2 通り

であるから，$3 \times 2^4 = \underline{\mathbf{48}}_{アイ}$ 通り.

(2) 真ん中に 3 通り．右隣は，真ん中と異なる色で 2 通りであり，右端もその隣と異なる色で 2 通り.

左側は右側と対称に塗ればよいので 1 通り.

よって，$3 \times 2 \times 2 = \underline{\mathbf{12}}_{ウエ}$ 通り.

(3) 左から「青，緑，青，緑，青」または「緑，青，緑，青，緑」の$_{オ}\underline{\mathbf{2}}$通り.

(4) 赤である 3 枚は，両端と真ん中しかない．残り 2 枚はどのように塗っても良いので，$2 \times 2 = \underline{\mathbf{4}}_{カ}$ 通り.

(5)
- 左端が赤の時，その隣は「緑，青，緑，青」であるか「青，緑，青，緑」の 2 通り．右端の場合と合わせて $2 \times 2 = \underline{\mathbf{4}}_{キ}$ 通り.
- 真ん中が赤の時は，「青，緑」か「緑，青」が左または右に独立に入るので $2 \times 2 = 4$ 通り.

  左から 2 番目が赤の時は，「青」「緑」と「青，緑，青」「緑，青，緑」が独立に入るので $2 \times 2 = 4$ 通り.

  右から 2 番目が赤の時も 4 通り．すべて合わせて $4 \times 3 = \underline{\mathbf{12}}_{クケ}$ 通り.

よって，合わせて $4 + 12 = \underline{\mathbf{16}}_{コサ}$ 通り.

(6) (3) より赤が 0 枚は 2 通り，(5) より赤が 1 枚は 16 枚，(4) より赤が 3 枚は 4 枚．赤が 4 枚以上にはならないので，赤が 2 枚なのは $48 - 2 - 16 - 4 = \underline{\mathbf{26}}_{シス}$ 通り.

解答番号	正解	配点
アイ	**48**	3
ウエ	**12**	2
オ	**2**	3
カ	**4**	3
キ	**4**	2
クケ	**12**	2
コサ	**16**	2
シス	**26**	3

第 5 問

(1) 右の素因数分解から，$756 = 2^{\underline{2}_{ア}} \cdot 3^{\underline{3}_{イ}} \cdot \underline{7}_{ウ}$ である．

$$\begin{array}{r|l} 2 & 756 \\ 2 & 378 \\ 3 & 189 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array}$$

よって，正の約数の個数は $(2+1)(3+1)(1+1) = \underline{\mathbf{12}}_{エオ}$ 個である．

◀ 13th-note 数学 A『正の約数の個数』(p.66, 4)

(2) $\sqrt{am}$ が自然数となるのは，am の指数部分が偶数の時である．そうなる最小の m は，$m = 3 \cdot 7 = \underline{\mathbf{21}}_{カキ}$ である．また

$$\sqrt{am} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 21k^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot k^2} = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot k = {}_{クケコ}\underline{\mathbf{126}}k$$

(3) 不定方程式 $126k - 11l = 1$ を解く．

◀ 13th-note 数学 A『不定方程式の解の 1 つを求める』(p.89)

$$\begin{cases} 126 \div 11 = 11 \cdots 5 \\ 11 \div 5 = 2 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5 = 126 - 11 \cdot 11 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 1 = 11 - 5 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 = 11 - 5 \cdot 2 &= 11 - (126 - 11 \cdot 11) \cdot 2 \\ &= 11 - 126 \cdot 2 + 11 \cdot 22 \\ &= -126 \cdot 2 + 11 \cdot (1 + 22) \\ &= 126 \cdot (-2) + 11 \cdot 23 \end{aligned}$$

◀ ②へ①を代入した

◀ ·2 を分配した

つまり，$126 \cdot (-2) - 11 \cdot (-23) = 1$ となるので，$126k - 11l = 1$ の解の一つが $(k, l) = (-2, -23)$ と求められる．

$$\begin{array}{rl} 126k - 11l & = 1 \\ -)\ 126 \cdot (-2) - 11 \cdot (-23) & = 1 \\ \hline 126\{k - (-2)\} - 11\{l - (-23)\} & = 0 \end{array} \Leftrightarrow 126(k+2) = 11(l+23)$$

126 と 11 は互いに素なので，整数 p に対して $k + 2 = 11p$, $l + 23 = 126p$ となる．

このような自然数 $k = 11p - 2$ で最小のものは $p = 1$ のときの $k = \underline{\mathbf{9}}_{サ}$ であり，このとき $l = 126 \cdot 1 - 23 = \underline{\mathbf{103}}_{シスセ}$.

(4) $\sqrt{am} = 126k$ が 11 で割って 1 余るとき，商を q とすると

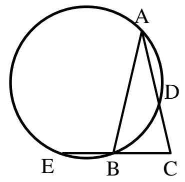
$$126k = 11q + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 126k - 11q = 1$$

であるから，(3) より $k = 11p - 2$ となる整数 p がある．$\sqrt{am} = 126k > 0$ より，k が最小の自然数 9 の時，$m = 21k^2$ が最小の自然数となる．よって，求める値は $21 \cdot 9^2 = \underline{\mathbf{1701}}_{ソタチツ}$.

解答番号	正解	配点
$2^{\boxed{ア}} \cdot 3^{\boxed{イ}} \cdot \boxed{ウ}$	$\mathbf{2^2 \cdot 3^3 \cdot 7}$	4
$\boxed{エオ}$	**24**	3
$\boxed{カキ}$	**21**	3
$\boxed{クケコ}$	**126**	3
$\boxed{サ}$	**9**	2
$\boxed{シスセ}$	**103**	2
$\boxed{ソタチツ}$	**1701**	4

第 6 問

図を描くと右欄外のようになる．

◀ 

方べきの定理より

$$\begin{aligned} CE\cdot CB &= CD\cdot CA \\ &= 2\cdot 5 = \underline{\mathbf{10}}_{\text{アイ}} \end{aligned}$$

であり，$BE = x$ とおくと，$CB = \sqrt{5}$, $CE = \sqrt{5} + x$ であるから

◀ 13th-note 数学 A『方べきの定理』(p.142)

$$\sqrt{5}(\sqrt{5} + x) = 10 \Leftrightarrow 5 + \sqrt{5}x = 10$$

$$\sqrt{5}x = 5 \qquad \therefore x = \underline{\boldsymbol{\sqrt{5}}}_{\text{ウ}}$$

結局，AB が A から引いた中線であるので，$AG = \dfrac{2}{3}AB = \underline{\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}}_{\text{エオカ}}$．

ここで，$\triangle$ECD と直線 BA についてのメネラウスの定理より

◀ 13th-note 数学 A『メネラウスの定理』(p.149)

$$\frac{EB}{BC}\cdot\frac{CA}{AD}\cdot\frac{DP}{PE} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{DP}{PE} = 1$$

これより，$\dfrac{DP}{PE} = \underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}}_{\text{キク}}$．

$\triangle ABC$ と $\triangle EDC$ において，$\angle CAB = \angle CED$ と $\angle C$ 共通から，$\triangle ABC \backsim \triangle EDC$ なので

$$\begin{aligned} AB : BC = ED : DC &\Leftrightarrow 5 : \sqrt{5} = ED : 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5}ED = 10 \qquad \therefore ED = \underline{\mathbf{2}\boldsymbol{\sqrt{5}}}_{\text{ケコ}} \end{aligned}$$

よって，$EP = \dfrac{5}{3+5}DE = \underline{\dfrac{\mathbf{5}\boldsymbol{\sqrt{5}}}{\mathbf{4}}}_{\text{サシス}}$．

解答番号	正解	配点
$\boxed{\text{アイ}}$	**10**	3
$\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$	$\boldsymbol{\sqrt{5}}$	3
$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$	$\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}$	3
$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$	$\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$	4
$\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$	$\mathbf{2}\boldsymbol{\sqrt{5}}$	4
$\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$	$\dfrac{\mathbf{5}\boldsymbol{\sqrt{5}}}{\mathbf{4}}$	3