13th-note 数学A

(2013 年度卒業生まで)

目次

Ver1.731(2012-7-28)

第1章　集合・命題・証明 ～ 数学の基礎

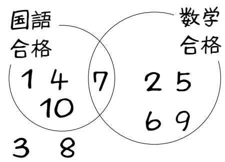
1.1　集合

1.　集合の基礎

A.　集合とは何か

たとえば，出席番号 1 から 10 までの人が受けたテスト結果が左下の表になったとき，右下のようにもまとめられる．

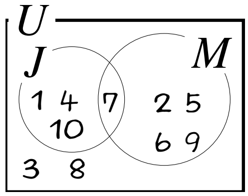
出席番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
国語	○	×	×	○	×	×	○	×	×	○
数学	×	○	×	×	○	○	○	×	○	×



ものや人の集まりを**集合** (set) といい[*1]，集合に含まれるものや人をその集合の**要素** (element) という．

さらに，次のように集合を文字で置こう[*2]．

出席番号 1 から 10 までの 10 人の集合を U
「国語を合格した人」の集合を J，「数学を合格した人」の集合を M



右下のような図を**ベン図** (Venn diagram) という．また，この例では四角の枠内の集合 U の要素のみ考えている．このような集合 U は**全体集合** (universal set) といわれる．

【例題 1】 上の例において，次にあてはまる要素を**すべて**答えよ．

1. M の要素であるもの
2. J の要素でも M の要素でもあるもの
3. M の要素で**ない**もの
4. J の要素ではあるが M の要素では**ない**もの

【解答】

1. **2, 5, 6, 7, 9**　2. **7**　3. **1, 3, 4, 8, 10**　4. **1, 4, 10**

[*1] ただし，数学では集合に含まれるか含まれないか明確にできる場合のみ扱う．「大きい数の集まり」のように，範囲が不明確なものは集合とはいわない．

[*2] たいてい，集合は大文字 $A, B, C, \cdots, Y, Z$ で表され，要素は小文字 $a, b, c, \cdots, y, z$ で表される．

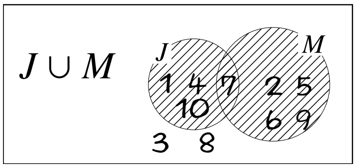
B. 集合の表し方～外延的定義

p.1 の例において，集合 J の要素は 1，4，7，10 ですべてである．このことを，次のように表す[*3]．

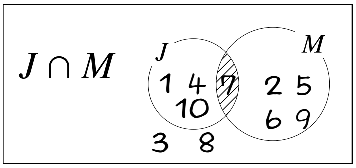
$J = \{1,\ 4,\ 7,\ 10\}$　← { 　} の間にすべての要素を書き出す

C. 「または」を表す記号 ∪,「かつ」を表す記号 ∩

集合 J, M のうち，少なくとも一方には属する要素全体の集合を $J \cup M$（または）で表す．これを集合 J と M の**和集合** (sum of sets) といい，ベン図では右の斜線部分に対応する．



集合 J, M の両方に属する要素全体の集合は $J \cap M$（かつ）で表す．これを集合 J, M の**共通部分** (common part) といい，ベン図では右下の斜線部分に対応する．



右のベン図を用いて，要素を書き並べると，次のようになる．

$J \cup M = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$，　$J \cap M = \{7\}$

要素をもたない集合を**空集合**（くう） (empty set) といい，記号 $\emptyset$ で表す[*4]．もし，集合 A, B に共通の要素がないならば，$A \cap B = \emptyset$ と表す．

【例題 2】 $A = \{1, 3, 4, 5, 8\}$，$B = \{2, 5, 7\}$，$C = \{3, 6\}$ のとき，$A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B \cap C$ を答えよ．

【解答】 $\underbrace{A}_{\{1,3,4,5,8\}} \cup \underbrace{B}_{\{2,5,7\}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

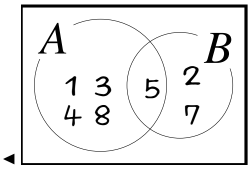
↑ A と B の少なくとも一方に含まれているもの

$\underbrace{A}_{\{1,3,4,5,8\}} \cap \underbrace{B}_{\{2,5,7\}} = \{5\}$

↑ A と B の両方に含まれているもの

$B \cup C = \{2, 3, 5, 6, 7\}$

B と C には共通する要素がないので，$B \cap C = \emptyset$ である．

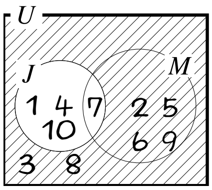


D. 補集合

全体集合 U のうち集合 J に属さ**な**い要素全体の集合を $\overline{J}$ で表す．p.1 の例では

$\overline{J} = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$

である．これを集合 J の**補集合** (complement) といい，ベン図では右の斜線部分に対応する．補集合を考えるときは，必ず全体集合を定める必要がある．



[*3] このように，要素を書き並べて集合を表すことを**外延的定義**（がいえん） (extensional definition) という．

[*4] 集合における空集合は，数におけるゼロの役割に近い．．それが由来で，空集合は 0 に斜線をいれた $\emptyset$ で表す．

【例題 3】 全体集合は $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする．

1. 1 桁の 2 の倍数の集合を A とするとき，A, $\overline{A}$ を，それぞれ要素を書き並べて表せ．
2. 1 桁の 3 の倍数の集合を B とする．$A \cap B$, $\overline{A} \cap B$ を，それぞれ要素を書き並べて表せ．

【解答】

1. $\boldsymbol{A = \{2, 4, 6, 8\}}$，$\boldsymbol{\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}}$
2. $B = \{3, 6, 9\}$ であるから，$\boldsymbol{A \cap B = \{6\}}$，$\boldsymbol{\overline{A} \cap B = \{3, 9\}}$

◂1. の答えのうち 3 の倍数のものだけ選べばよい．

E. 「属する」を表す記号 $\in$

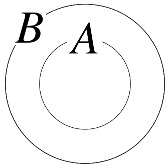
一般に，「a が集合 X の要素である」ことを「a は集合 X に**属する** (in)」という．

p.1 の例において，「1 は集合 J に属する」「3 は集合 J に属さない」．これらを次の記号で表す．

$1 \in J$ （または，$J \ni 1$[*5]），　　$3 \notin J$ （または，$J \not\ni 3$）

このように，属する・属さないは，記号 $\in$, $\notin$, $\ni$, $\not\ni$ を用いて表される．

$A \subseteqq B$



F. 部分集合を表す記号 $\subseteqq$, $\supseteqq$

2 つの集合 A，B について，A の全ての要素が B の要素であるとき，「A は B の**部分集合** (subset) である」「B は A を**含む** (contain)」と言い，次の記号で表す．

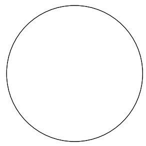
記号 $A \subseteqq B$ 　　（または，$B \supseteqq A$）[*6]

これらを否定するときは，記号 $A \nsubseteq B$, $B \nsupseteq A$ で表す．

記号 $\subseteqq$，$\supseteqq$ は，等号を省略して $\subset$，$\supset$ と書かれることも多い[*7]．

一般に，A と B の要素が完全に一致するときは，A と B は**等しい** (equal) といい $A = B$ と表す．また，等しくないときは $A \neq B$ と表す．

$A = B$



空集合 $\emptyset$ は，どんな集合にも含まれていると決められている．実際，空集合のすべての要素（1 つもないのだが）は，どんな集合にも含まれている．

【例題 4】 次のうち，正しいものをすべて選べ．

$\{1, 2, 3, 4\} \supseteqq \{1, 2, 3\}$，　$\{1, 2, 3\} \supseteqq \{2, 3\}$，　$\{1, 2\} \supseteqq \{2, 3, 5\}$，　$\{1\} \supseteqq \emptyset$

【解答】 $\boldsymbol{\{1, 2, 3, 4\} \supseteqq \{1, 2, 3\}}$，　$\boldsymbol{\{1, 2, 3\} \supseteqq \{2, 3\}}$，　$\boldsymbol{\{1\} \supseteqq \emptyset}$

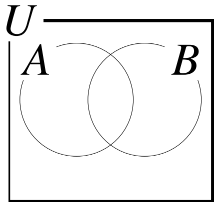
[*5] 記号の広い側が集合の方を向く．読み方は「1 は J に属する」，「1 は J の要素である」，「J は 1 を要素にもつ」など．

[*6] 記号の広い側が大きい集合の方を向く．読み方は「A は B の部分集合である」「B は A を含む」「A は B に含まれる」など．

[*7] $A \subset B$ は，「A が B の**真部分集合** (proper subset) である」ことを表す場合もある．「A が B の真部分集合である」とは，$A \subseteqq B$ であるが $A \neq B$ のときのことをいう．

【練習 5：集合の記号】

全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ とし，そのうち 12 の約数である数の集合を A，10 の約数である数の集合を B とする．



(1) 右のベン図に 1 から 12 までのすべての要素を書き入れなさい．

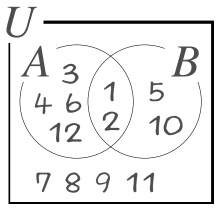
(2) 集合 $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$ を答えなさい．

(3) 次のうち，正しいものをすべて選びなさい．

$3 \in A \cap B$,　$3 \in A \cup B$,　$\overline{B} \ni 4$,　$A \cap B \not\ni 2$,　$A \cup B \supseteqq A$,　$A \supseteqq A \cap B$

【解答】

(1)



(2) $\overline{A}$ **= {5, 7, 8, 9, 10, 11}**

また，左のベン図より

$\boldsymbol{A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12\}}$

$\boldsymbol{A \cap B = \{1,\ 2\}}$ である．

(3) $\boldsymbol{3 \in A \cup B}$,　$\boldsymbol{\overline{B} \ni 4}$,　$\boldsymbol{A \cup B \supseteqq A}$,　$\boldsymbol{A \supseteqq A \cap B}$

◀ A, B がどんな集合でも，$A \cup B \supseteqq A$, $A \cup B \supseteqq B$ や，$A \supseteqq A \cap B$, $B \supseteqq A \cap B$ は成り立つ．

$\cup$ はコップのような形をしているので水がいっぱい入り，要素の個数が多くなる和集合を表すと覚えると，$\cup$, $\cap$ の区別をつけやすい．

【練習 6：部分集合】

集合 $\{1,\ 2,\ 3\}$ の部分集合をすべて挙げよ．

【解答】　**{1, 2, 3}，{1, 2}，{2, 3}，{1, 3}，{1}，{2}，{3}，$\boldsymbol{\emptyset}$**

◀ 集合 $\{1,\ 2,\ 3\}$ は $\{1,\ 2,\ 3\}$ 自身を含んでいる．

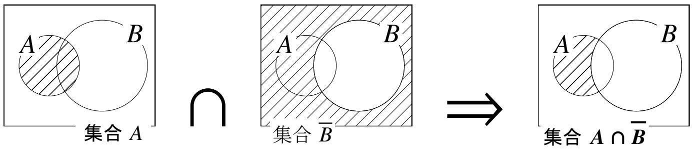
【発展 7：どんな集合でも成り立つ法則】

全体集合 U に含まれる集合 A について，集合 $A \cap \overline{A}$, $A \cup \overline{A}$ はどんな集合か．また，$\overline{A}$ の補集合である $\overline{\overline{A}}$ はどんな集合か．

【解答】　U の要素は A か $\overline{A}$ のどちらかにしか属さないので，$\boldsymbol{A \cap \overline{A} = \emptyset}$.
U のすべての要素は，A か $\overline{A}$ のいずれかに属するので $\boldsymbol{A \cup \overline{A} = U}$.
$\overline{A}$ に属さない要素はすべて A に属するので，$\boldsymbol{\overline{\overline{A}} = A}$.

G. 「ベン図」による集合の図示

集合 $A \cap \overline{B}$ は，ベン図の A, $\overline{B}$ のどちらも斜線になる部分であるので，次のように図示できる．



H. ド・モルガンの法則

たとえば，$\overline{A \cap B}$ によって「$A \cap B$ の補集合」を表す．この集合について，重要な法則がある．

【暗記 8：集合の性質～その１～】

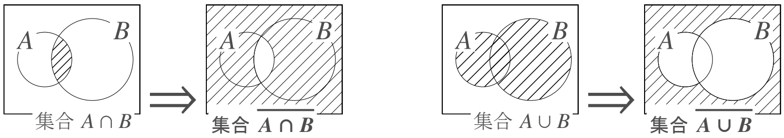
(1) 集合 $\overline{A \cap B}$，$\overline{A \cup B}$ について，それぞれベン図を用いて図示しなさい．

(2) 集合 $\overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A} \cup \overline{B}$，$\overline{A} \cup B$ について，それぞれベン図を用いて図示しなさい．

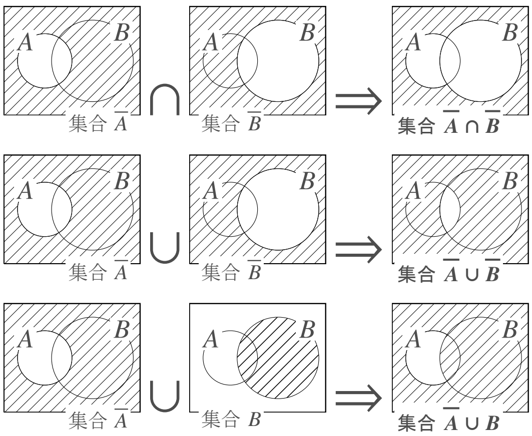
(3) (1)，(2) で図示した集合のうち，等しい集合を 2 組選び，等号で結びなさい．

【解答】

(1)



(2)



(3) ベン図において，(2) の上から 1 番目と (1) の右が同じ図になるので $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$，(2) の上から 2 番目と (1) の左が同じ図になるので $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$.

ド・モルガンの法則

どんな集合 A，B に関しても，次の**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) が成り立つ．

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

この法則を「補集合を表す線を切ると，$\cap$ や $\cup$ がひっくり返る」と覚えてもよい．

【練習 9：ベン図による図示とド・モルガンの法則】

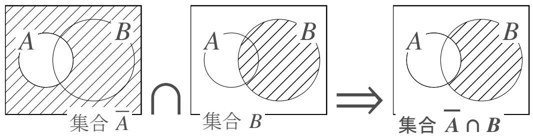
(1) 集合 $\overline{A} \cap B$ をベン図を用いて図示しなさい.

(2) 全体集合を $U = \left\{ n \,\middle|\, n \text{ は 1 桁の整数} \right\}$ とし，$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする.

$\overline{A} \cap B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ を，それぞれ要素を書き並べて表せ.

【解答】

(1)

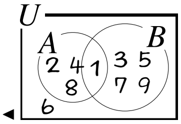


(2) $\overline{A} \cap B = \{3, 5, 7, 9\}$，$A \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 6, 8\}$

また，ド・モルガンの法則より

$A \cap B = \{1\}$ であるので，$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ であるので，$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \{6\}$



◀ (1) で塗られた部分の要素だけ選べば，$\overline{A} \cap B$ になっている．また，次のように考えてもよい．

$\underset{\{3,5,6,7,9\}}{\overline{A}} \cap \underset{\{1,3,5,7,9\}}{B} = \{3, 5, 7, 9\}$

$\underset{\{1,2,4,8\}}{A} \cup \underset{\{2,4,6,8\}}{\overline{B}} = \{1, 2, 4, 6, 8\}$

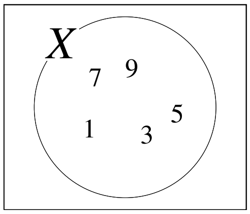
2. いろいろな集合の表現

A. 集合の表し方〜内包的定義

集合 $X = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ は，要素の満たす条件を示す方法を用いて，次のように表すことができる[*8].

$$X = \left\{ a \,\middle|\, a \text{ は 10 以下の正の奇数} \right\}$$

aで要素を代表↑　　　↑要素が満たす条件



【例題 10】 集合 $A = \left\{ a \,\middle|\, a \text{ は 18 の正の約数} \right\}$，$B = \left\{ p \,\middle|\, p \text{ は 20 以下の正の素数} \right\}$ とする.

1. 集合 A, B を要素を書き並べる方法で表せ.　　2. $6 \in A$, $6 \in B$ は正しいか，それぞれ答えよ.

3. $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\} = \left\{ y \,\middle|\, y \text{ は } \boxed{} \text{ の正の約数} \right\}$ において，$\boxed{}$ に適する数字を答えよ.

【解答】

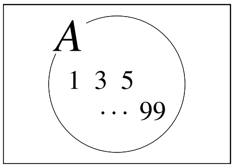
1. $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$，$B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$
2. $6 \in A$ は正しい，$6 \in B$ は間違い（$6 \notin B$ である）.
3. 12

◀ **素数** (prime number) とは，1 より大きい整数で，1 とその数自身以外に約数をもたないような数をいう.

[*8] このような書き方を**内包的定義**（ないほう）(intensional definition) ともいう.

B. 集合のいろいろな表現

たとえば，集合 $A=\left\{y \,\middle|\, y\text{ は 100 以下の正の奇数}\right\}$ の要素を並べて書き表すと $A=\{1,\ 3,\ 5, \cdots,\ 99\}$ となる．このように，集合の要素の数が多いときは $\cdots$ を用いて表すことがある[*9]．



また，奇数は一般に $2n-1$ と表すことができ，式 $2n-1$ は

$n=1$ を代入すれば，$2\cdot 1-1=1$　←記号"・"は掛け算を表す
$n=2$ を代入すれば，$2\cdot 2-1=3$
$n=3$ を代入すれば，$2\cdot 3-1=5$
$\vdots$
$n=50$ を代入すれば，$2\cdot 50-1=99$

となるから，$A=\left\{2n-1 \,\middle|\, 1\leqq n\leqq 50,\ n\text{ は自然数}\right\}$ や $A=\{2\cdot 1-1,\ 2\cdot 2-1,\ 2\cdot 3-1,\ \cdots,\ 2\cdot 50-1\}$ と書いてもよい．このように，一つの集合に対していろいろな表現ができる．

また，要素の個数は無限にあってよい[*10]．

$B=\left\{z \,\middle|\, z\text{ は正の 3 の倍数}\right\}=\left\{3n \,\middle|\, n\text{ は自然数}\right\}=\{3,6,9,\cdots\}=\{3\cdot 1,\ 3\cdot 2,\ 3\cdot 3,\cdots\}$

【例題 11】 次の $\boxed{}$ に適する値・集合を答えなさい．

1. 式 $3n+1$ は $n=1$ のとき $\boxed{ア}$，$n=2$ のとき $\boxed{イ}$，$n=3$ のとき $\boxed{ウ}$，$n=4$ のとき $\boxed{エ}$ である．
   だから，集合 $C=\left\{3n+1 \,\middle|\, n=1,2,3,4\right\}$ の要素を書き並べて表すと，$C=\boxed{オ}$ となる．
2. 式 $3n+1$ は $n=30$ のとき $\boxed{カ}$ である．
   だから，集合 $D=\left\{3n+1 \,\middle|\, n\text{ は 30 以下の自然数}\right\}$ の要素を書き並べて表すと，$D=\boxed{キ}$ となる．

【解答】

1. ア : $3\cdot 1+1=\mathbf{4}$　イ : **7**　ウ : **10**　エ : **13**　オ : $\{\mathbf{4,\ 7,\ 10,\ 13}\}$
2. カ : **91**　キ : $\{\mathbf{4,7,10,\cdots,91}\}$

要素を書き並べるときに $\cdots$ を用いるは，たいてい，$\cdots$ の前に 3 つは要素を書き並べる．

【例題 12】 次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

1. $A=\left\{2k \,\middle|\, k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\right\}$
2. $B=\left\{2a+1 \,\middle|\, a\text{ は 1 桁の自然数}\right\}$
3. $C=\left\{5a \,\middle|\, a\text{ は 100 以下の自然数}\right\}$
4. $D=\left\{2n-1 \,\middle|\, n\text{ は正の整数}\right\}$

【解答】

1. $\boldsymbol{A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,10\}}$
2. $\boldsymbol{B=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}}$
3. $\boldsymbol{C=\{5,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ 500\}}$
4. $\boldsymbol{D=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots\}}$

◀ $a=1$ のとき $2a+1=3$，$a=2$ のとき $2a+1=5$，$\cdots$

[*9] $\cdots$ の部分に厳密さが欠けるという欠点はあるが，表現が具体的で分かり易いという利点を持つ．
[*10] 要素が有限個の集合は**有限集合** (finite set)，要素が無限個存在する集合は**無限集合** (finite set) といわれる．

【練習 13：集合の表し方〜その１〜】

次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

i) $A = \left\{2n-1 \,\middle|\, n\text{ は整数，}1 \leqq n \leqq 5\right\}$　　ii) $B = \left\{2k \,\middle|\, k\text{ は整数，}1 \leqq k \leqq 50\right\}$

iii) $C = \left\{2^n \,\middle|\, n\text{ は自然数，}1 \leqq n \leqq 6\right\}$　　iv) $D = \left\{2a-1 \,\middle|\, 0 \leqq a \leqq 3,\ a\text{ は整数}\right\}$

【解答】

(1) $\boldsymbol{A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}}$　　(2) $\boldsymbol{B = \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 100\}}$

(3) $\boldsymbol{C = \{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}}$　　(4) $\boldsymbol{D = \{-1,\ 1,\ 3,\ 5\}}$

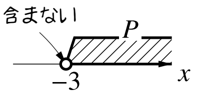
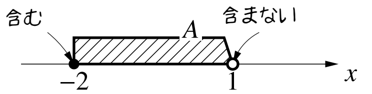
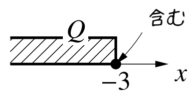
◀ $A = \left\{2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6\right\}$

C. 実数を全体集合とする集合

実数全体を全体集合とした，$A = \left\{x \,\middle|\, -2 \leqq x < 1,\ x\text{ は実数}\right\}$ のような集合を考えることもできる．このような集合では，要素を書き並べることはできない．要素が無数に連続して存在するからである．

$-1 \in A,\ 0 \in A,\ \dfrac{1}{2} \in A,\ -\sqrt{3} \in A,\ -2 \in A$

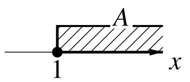
A のような集合を図示するには，数直線を用いて以下のように図示する．

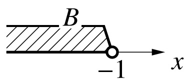
$P = \left\{x \,\middle|\, -3 < x\right\}$	$A = \left\{x \,\middle|\, -2 \leqq x < 1\right\}$	$Q = \left\{x \,\middle|\, x \leqq -3\right\}$
		

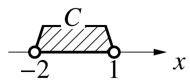
不等号 $<,\ >$ は，境目を「白丸」「斜め線」で表し，不等号 $\leqq,\ \geqq$ は，境目を「黒丸」「垂直線」で表す．

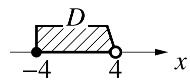
【例題 14】

1. それぞれの図が表す集合を答えなさい．

(a)


(b)


(c)


(d)


2. 集合 $A = \left\{x \,\middle|\, -1 < x \leqq 2\right\}$ について，次の $\boxed{}$ に $\in,\ \notin$ のいずれかを入れなさい．

$0\,\boxed{}\,A,\ 0.8\,\boxed{}\,A,\ \dfrac{1}{2}\,\boxed{}\,A,\ -\sqrt{3}\,\boxed{}\,A,\ -1\,\boxed{}\,A,\ 2\,\boxed{}\,A$

【解答】

1. (a) $\boldsymbol{A = \left\{x \,\middle|\, 1 \leqq x\right\}}$　　(b) $\boldsymbol{B = \left\{x \,\middle|\, x < -1\right\}}$

(c) $\boldsymbol{C = \left\{x \,\middle|\, -2 < x < 1\right\}}$　　(d) $\boldsymbol{D = \left\{x \,\middle|\, -4 \leqq x < 4\right\}}$

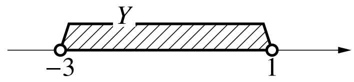
2. $\boldsymbol{0 \in A,\ 0.8 \in A,\ \dfrac{1}{2} \in A,\ -\sqrt{3} \notin A,\ -1 \notin A,\ 2 \in A}$

【練習 15：集合の表し方〜その２〜】

全体集合を実数全体，$X=\left\{x \mid -2 \leqq x \leqq 2\right\}$，$Y$ を右下の数直線で表される集合とする．

(1) 集合 X を右の数直線上に書き入れなさい．

(2) $X \cap Y$, $X \cup Y$ をそれぞれ求めなさい．



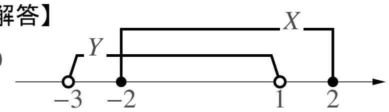
(3) 集合 $\overline{X}$ は次のどれに等しいか，答えなさい．

(a) $\left\{x \mid x < -2\right\}$　(b) $\left\{x \mid 2 \leqq x\right\}$　(c) $\left\{x \mid x \leqq -2,\ 2 \leqq x\right\}$　(d) $\left\{x \mid x < -2,\ 2 < x\right\}$

(4) 集合 $\overline{Y}$ を答えなさい．

【解答】

(1)



(2) 上の数直線より，$\boldsymbol{X \cap Y = \left\{x \mid -2 \leqq x < 1\right\}}$,

$\boldsymbol{X \cup Y = \left\{x \mid -3 < x \leqq 2\right\}}$

(3) **(d)**

(4) $\boldsymbol{\overline{Y} = \left\{x \mid x \leqq -3,\ 1 \leqq x\right\}}$

◀ $X=\left\{x \mid -3 < x < 1\right\}$
◀ $\pm 2 \in X$ なので $\pm 2 \notin \overline{X}$

【発展 16：ド・モルガンの法則】

$A \cap B=\left\{x \mid -1 \leqq x < 4\right\}$, $A \cup B=\left\{x \mid -3 \leqq x\right\}$ であるとき，$\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ を求めよ．

【解答】　$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \boldsymbol{\left\{x \mid x < -3\right\}}$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \boldsymbol{\left\{x \mid x < -1,\ 4 \leqq x\right\}}$

◀ $\left\{x \mid -3 \leqq x\right\}$ の補集合は，$x=-3$ を含まないので，$\left\{x \mid x < -3\right\}$ となることに注意．

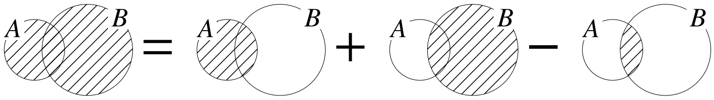
3. 集合の要素の個数

A. 集合の要素の個数

集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す（ただし，集合 A の要素は有限個であるとする）．たとえば，$A = \{1, 3\}$ ならば $n(A) = 2$ である．また，空集合の要素の個数は $n(\emptyset) = 0$ と定める．

B. 和集合の要素の個数（包含と排除の原理）

和集合 $A \cup B$ の要素の個数は $n(A \cup B)$ と表される．これは，下のベン図を用いて，次のように求められる．



包含と排除の原理（2 集合版）

2 つの集合 A，B に関して

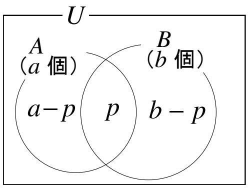
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \underbrace{n(A \cap B)}_{A \cap B \text{ の要素の個数}}$$

が成り立つ．これを**包含と排除の原理**（ほうがん・はいじょ） (principle of inclusion and exclusion) という．
特に，$A \cap B = \emptyset$ のときには，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ となる．

この法則は，$n(A) = a$, $n(B) = b$, $n(A \cap B) = p$ とおいたときに

$$n(A \cap \overline{B}) = a - p,\quad n(\overline{A} \cap B) = b - p$$

であることからも確かめられる．



【例題 17】 40 人がいるクラスでアンケートをとった．

1. 兄がいるのは 12 人，姉がいるのは 8 人，兄も姉もいるのは 3 人だという．兄か姉がいるのは全部で何人か．
2. クラス全員が，電車か自転車で通学しており，電車を使うのは 17 人，自転車を使うのは 30 人だという．電車も自転車も使うのは何人いるか．

【解答】

1. 兄がいる人の集合を A，姉がいる人の集合を B とすると

   $$n(A) = 12,\ n(B) = 8,\ n(A \cap B) = 3$$

   であるので，兄か姉がいる人の集合 $A \cup B$ について

   $$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 12 + 8 - 3 = 17$$

   となって，**17 人**であることが分かる．

2. 電車を使う人の集合を A，自転車を使う人の集合を B とすると

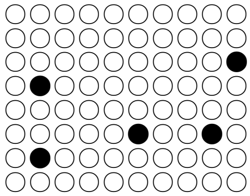
   $$n(A) = 17,\ n(B) = 30,\ n(A \cup B) = 40$$

であるので，電車も自転車も使う人の集合 $A \cap B$ について

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \iff 40 = 17 + 30 - n(A \cap B)$$

これを解いて $n(A \cap B) = 7$ であるので，**7 人**である．

C. 補集合の要素の個数 〜 “着目しないもの”に着目する



たとえば，右の丸のうち，白丸○の個数は

（全ての丸の個数）－（黒丸●の個数）

$= 8 \times 10 - 5 = 75$ 個

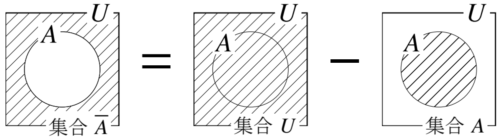
と求めるとよい．この考え方を集合に応用して，次を得る．

補集合の要素の個数

全体集合を U とする集合 A と，その補集合 $\overline{A}$ の要素の個数について次が成り立つ．

$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$

この法則をベン図で表すと右図のようになる．
簡単な法則だが，よく使われる法則である．



【例題 18】 全体集合を $U = \left\{ x \,\middle|\, x \text{ は 100 以下の自然数} \right\}$ とする．
$A = \left\{ x \,\middle|\, x \text{ は 3 の倍数} \right\}$，$B = \left\{ x \,\middle|\, x \text{ は 5 の倍数} \right\}$ とするとき，次の値を求めよ．

1. $n(A)$　　2. $n(B)$　　3. $n(A \cap B)$　　4. $n(A \cup B)$　　5. $n(\overline{A})$　　6. $n(\overline{B})$

【解答】

1. $100 \div 3 = 33 \cdots 1$ より $A = \{3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 33\}$
となるのがわかる．よって，$\boldsymbol{n(A) = 33}$ である．
2. $100 \div 5 = 20$ より $B = \{5 \cdot 1,\ 5 \cdot 2,\ \cdots,\ 5 \cdot 20\}$
となるのがわかる．よって，$\boldsymbol{n(B) = 20}$ である．
3. $A \cap B$ は，3 の倍数かつ 5 の倍数である数，つまり，15 の倍数の集合である．$100 \div 15 = 6 \cdots 10$ より
$$A \cap B = \{15 \cdot 1,\ 15 \cdot 2,\ \cdots,\ 15 \cdot 6\}$$
となるのがわかる．よって，$\boldsymbol{n(A \cap B) = 6}$ である．
4. 1.〜3. を代入すれば
$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 33 + 20 - 6 = \mathbf{47} \end{aligned}$$
◀『包含と排除の原理』(p.10)
5. $n(\overline{A}) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = \mathbf{67}$
6. $n(\overline{B}) = n(U) - n(B) = 100 - 20 = \mathbf{80}$

【練習 19：補集合の要素の個数と包含と排除の原理〜その１〜】

全体集合 U と集合 A, B について，

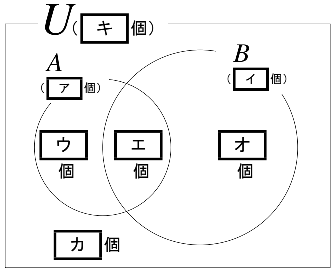
$n(U) = 50,\ n(A) = 20,\ n(A \cup B) = 42,\ n(A \cap B) = 6$

であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 右のベン図の $\boxed{}$ にあてはまる値を入れよ．

(2) 次の値を求めよ．

1) $n(A \cap \overline{B})$　　2) $n(\overline{A} \cap \overline{B})$　　3) $n(A \cup \overline{B})$



【解答】

(1) **キ**：$n(U) = \mathbf{50}$，**ア**：$n(A) = \mathbf{20}$

イ：$n(B)$ を求めればよい．

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow\ 42 = 20 + n(B) - 6 \qquad \therefore\ \ n(B) = \mathbf{28}$$

ウ：**ア**から**エ**を引けばよいので $20 - 6 = \mathbf{14}$，　**エ**：$n(A \cap B) = \mathbf{6}$

オ：**イ**から**エ**を引けばよいので $28 - 6 = \mathbf{22}$

カ：**キ**から $n(A \cup B)$ を引けばよいので $50 - 42 = \mathbf{8}$

(2) 1) **ウ**の個数に一致するので $n(A \cap \overline{B}) = \mathbf{14}$.

2) $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = 50 - 42 = \mathbf{8}$.

◄『ド・モルガンの法則 (p.19)』

3) 全体から**オ**を除けばよいので，$50 - 22 = \mathbf{28}$.

【練習 20：補集合の要素の個数と包含と排除の原理〜その２〜】

総世帯数が 191 のある地区では，新聞をとっている世帯が 170 ある．このうち A 新聞をとっている世帯は 89，B 新聞をとっている世帯は 108 ある．その他の新聞はこの地区には無いものとして，以下の問に答えよ．

(1) この地区では新聞をとっていない世帯はいくつか．

(2) A，B 両方の新聞をとっている世帯はいくつか．

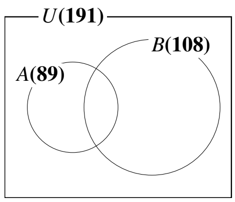
【解答】

U：「ある地区の総世帯」

A：「A 新聞をとっている世帯」　B：「B 新聞をとっている世帯」

とおく．問題文より，次のことが分かる．

◄



$n(U) = 191$，$n(A \cup B) = 170$，$n(A) = 89$，$n(B) = 108$

◄「新聞を取っている世帯」は，A か B のどちらかをとっている．

(1) $n(\overline{A \cup B})$ を求めればよい．

$n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 191 - 170 = 21$ なので，**21 世帯**.

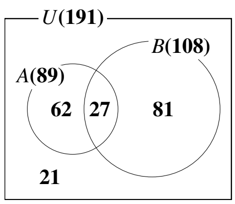
(2) $n(A \cap B)$ を求めればよい．

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ に代入して，

$$170 = 89 + 108 - n(A \cap B)$$

より，**27 世帯**.

◄



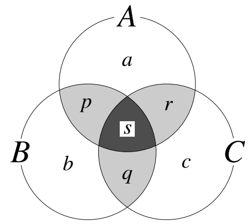
4.　3つの集合による関係

A.　3つの集合によるベン図

【暗記 21：3つ以上の集合によるベン図】

右の図のように，a, b, c, p, q, r, s に分かれている．次の集合が表す部分を答えよ（たとえば，集合 A が表す部分は a, p, r, s になる）．

1. $(A \cup B) \cup C$　　2. $A \cup (B \cup C)$　　3. $(A \cap B) \cap C$
4. $A \cap (B \cap C)$　　5. $A \cup (B \cap C)$　　6. $A \cap (B \cup C)$
7. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$　　8. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



【解答】

1. 「a, b, p, q, r, s」「c, q, r, s」の和集合なので，$\boldsymbol{a, b, c, p, q, r, s}$.
2. 「a, p, r, s」「b, c, q, r, p, s」の和集合なので，$\boldsymbol{a, b, c, p, q, r, s}$.
3. 「p, s」「c, q, r, s」の共通部分なので，$\boldsymbol{s}$.
4. 「a, p, r, s」「q, s」の共通部分なので，$\boldsymbol{s}$.
5. 「a, p, r, s」「q, s」の和集合なので，$\boldsymbol{a, q, r, p, s}$.
6. 「a, p, r, s」「b, c, p, q, r, s」の共通部分なので，$\boldsymbol{p, r, s}$.
7. 「a, b, p, q, r, s」「a, c, p, q, r, s」の共通部分なので，$\boldsymbol{a, p, q, r, s}$.
8. 「p, s」「p, r」の和集合なので，$\boldsymbol{p, r, s}$.

集合の性質～その１～

集合 A，B，C に関して次のことが成り立つ．

i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　　←括弧を省略して $A \cup B \cup C$ と書く

ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$　　←括弧を省略して $A \cap B \cap C$ と書く

iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

iii) は式の分配法則 $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ と関連付けて理解できる．

B.　3つの集合によるド・モルガンの法則

3集合の場合もド・モルガンの法則が成り立つ．たとえば

$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{(A \cup B) \cup C}$　　←$A \cup B$ を1かたまりとして考える

$= \overline{A \cup B} \cap \overline{C}$　　←$A \cup B$ と C について『ド・モルガンの法則』

$= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$　　←『ド・モルガンの法則』より，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

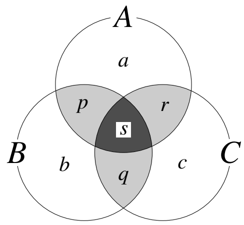
【暗記 22：3 集合の場合のド・モルガンの法則】
先の例にならって，$\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ を示せ.

【解答】 $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{(A\cap B)\cap C}$
$=\overline{A\cap B}\cup\overline{C}$
$=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ ■

◀ $A\cap B$ を 1 かたまりとして考える
◀ $A\cap B$ と C について『ド・モルガンの法則』

C. 3 つの集合による包含と排除の原理

$n(A\cup B\cup C)$ を求めるには，3 集合の場合の『包含と排除の法則 (p.10)』を用いる. この等式について，右図を見ながら理解しよう.



$$n(A\cup B\cup C)$$
$$=\underbrace{n(A)+n(B)+n(C)}_{\substack{p,\,q,\,r\text{ を 2 重に，}\\ s\text{ を 3 重に足してしまう}}}-\underbrace{n(A\cap B)}_{\substack{p,\,s\text{ を}\\ \text{引く}}}-\underbrace{n(B\cap C)}_{\substack{q,\,s\text{ を}\\ \text{引く}}}-\underbrace{n(C\cap A)}_{\substack{r,\,s\text{ を}\\ \text{引く}}}+\underbrace{n(A\cap B\cap C)}_{\substack{\text{引きすぎた}\\ s\text{ を足す}}}$$

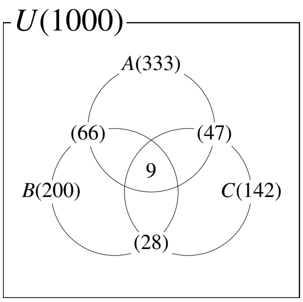
包含と排除の原理（3 集合版）

3 つの集合 A，B，C に関して，次の等式が成り立つ.
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

【練習 23：補集合の要素の個数と包含と排除の原理（3 集合版）〜その１〜】
3，5，7 の少なくとも一つで割り切れる 1000 以下の自然数は，全部で何個あるか.

【解答】 全体集合 U：「1000 までの自然数」
集合 A：「3 の倍数」 B：「5 の倍数」 C：「7 の倍数」
とおいて，$n(A\cup B\cup C)$ を求めればよい.
A の要素は 3 の倍数なので，$1000\div 3=333\cdots 1$ より $n(A)=333$.
B の要素は 5 の倍数なので，$1000\div 5=200$ より $n(B)=200$.
C の要素は 7 の倍数なので，$1000\div 7=142\cdots 6$ より $n(C)=142$.
$A\cap B$ の要素は 3 と 5 の公倍数，つまり 15 の倍数である.
よって，$1000\div 15=66\cdots 10$ より $n(A\cap B)=66$.
$B\cap C$ の要素は 5 と 7 の公倍数，つまり 35 の倍数である.
よって，$1000\div 35=28\cdots 20$ より $n(A\cap B)=28$.
$C\cap A$ の要素は 7 と 3 の公倍数，つまり 21 の倍数である.
よって，$1000\div 21=47\cdots 13$ より $n(A\cap B)=47$.
$A\cap B\cap C$ の要素は 3 と 5 と 7 の公倍数，つまり 105 の倍数である. よって，$1000\div 105=9\cdots 55$ より $n(A\cup B)=9$.
以上の値を代入して
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$
$\quad-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

◀ p.11 の【例題】と同じようにして求めた.



◀

◀『包含と排除の原理（3 集合版）』(p.14)

$$= 333 + 200 + 142 - 66 - 28 - 47 + 9 = 543$$

よって，**543 個**である．

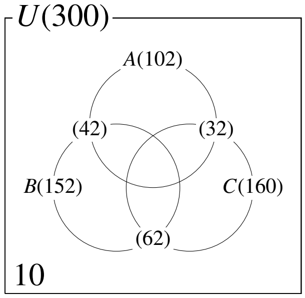
【発展 24：補集合の要素の個数と包含と排除の原理（3 集合版）～その２～】

300 人の高校生に A，B，C の 3 種のテストを行った．A テストに 102 人，B テストに 152 人，C テストに 160 人が合格したが，これらの中で，A，B 両テストに 42 人，B，C 両テストに 62 人，C，A 両テストに 32 人が合格している．3 種のテストのどれにも合格しなかった人は 10 人であった．このとき，3 種のテストにすべて合格した人は何人か．

【解答】

全体集合 U :「テストを受けた高校生全員」
集合 A :「A テストに合格した人」
集合 B :「B テストに合格した人」
集合 C :「C テストに合格した人」

とおくと，$n(A \cap B \cap C)$ を求めればよい．



問題文から次のことが分かる．

$n(A) = 102,\quad n(B) = 152,\quad n(C) = 160$
$n(A \cap B) = 42,\quad n(B \cap C) = 62,\quad n(C \cap A) = 32$

「3 種のテストのどれにも合格しなかった人」は $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$ で表され，その人数は 10 人である．

$$n\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = n(U) - n(A \cup B \cup C)$$
$$\Leftrightarrow\ 10 = 300 - n(A \cup B \cup C)$$

◀『補集合の要素の個数』(p.11)

から，$n(A \cup B \cup C) = 290$ である．

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

◀『包含と排除の原理（3 集合版）』(p.14)

に，それぞれ値を代入して

$$290 = 102 + 152 + 160 - 42 - 62 - 32 + n(A \cap B \cap C)$$
$$\Leftrightarrow 290 = 278 + n(A \cap B \cap C)$$
$$\Leftrightarrow n(A \cap B \cap C) = 12$$

よって，**12 人**である．

1.2　命題

1.　命題の基礎

A.　数学とは何か？

「数学とは何か？」この質問に対する一つの答えとして，次のように言うことができる[*11].

「正しいか間違っているかが確定できる方法のみを用い，物事を扱う学問である」

たとえば「20 歳という年齢は，若いと言えるか」という問題の答えは確定できない．答える人の価値観によって答えが異なる．だから，この問いは数学では扱われない[*12].

正しいか間違っているかが定まる問題のことを**命題**(めいだい) (proposition) という[*13]．つまり，数学で扱う問題は命題に限る.

【例題 25】 次の問題は命題ではないので，数学では扱われない．なぜ命題でないか，説明しなさい.

1. 身長 190 cm のバスケットボールの選手がいる．この人の身長は高いだろうか？
2. 2003 年にアメリカはイラクに侵攻した．これは正しい判断だったろうか？

【解答】

1. （例）ほとんどの人は「身長が高い（正しい)」と言うだろうが，2 m 以上の身長がある人にとってはそうとは限らないだろうから.
2. （例）戦争をすると決めたブッシュ大統領にとっては「正しい」であろうが，「間違い」と言うイラク人は少なからずいるだろうから.

B.　真偽と反例

命題が正しいとき，その命題は**真**(しん) (true) であるといい，命題が正しくないとき，その命題は**偽**(ぎ) (false) であるという．命題が偽であるとき，その命題が正しくない例を**反例** (counterexample) という.

例えば，命題「実数 x が $x^2 = 1$ を満たすなら $x = 1$ に限る」は偽であり，その反例は $x = -1$ である.

【例題 26】 次の命題について真偽を答え，偽であるものには反例を一つ挙げなさい.

1. 1 m 40 cm は 1 m よりも長い
2. 自然数は無限個存在する.
3. 奇数を 2 倍すれば偶数である.
4. 奇数と奇数を足すと奇数になる.

【解答】

(1) **真**　(2) **真**　(3) **真**

(4) **偽**である．反例は，$3 + 5 = 8$ など多数ある.

[*11] 物理学，化学，生物学など，多くの自然科学においても「正しいか間違っているか」は重要であるが，いつも確定できるとは限らない．これらの科学においては，たとえば「実験の結果と一致しているか」もやはり重要である.

[*12] 世の中には，正しいか間違っているか，完全に決定することができない問題も多い．しかし，正しいか間違っているかを完全に決定できる範囲だけで物事を考えても，有用なことがたくさんある.

[*13] 未解決問題のように，将来的に正しいか間違っているかを確定できると考えられている問題も命題と言われる.

2.　命題を構成する「条件」

A.　「仮定」の役割

「ab は 0 に等しいか？」という問いには真偽が定まらないが，次の 2 つはいずれも真偽が定まる．

i) 「$a = 0$ であるとき，ab は 0 に等しいか？」（真）
ii) 「a, b とも正の数ならば，ab は 0 に等しいか？」（偽）

命題において，前提となる事柄を**仮定** (assumption)，真偽を確定するべき事柄を**結論** (conclusion) という．また，単独では真偽が定まらないが，命題の仮定や結論になりうる内容を**条件** (condition) という．

たとえば，上の 2 つの命題は次のように表される．

i) 「$a = 0$」　　　　　$\Longrightarrow$「ab は 0 に等しい」（真）
ii) 「a, b とも正の数」$\Longrightarrow$「ab は 0 に等しい」（偽）
　（仮定）　　　　　　　（結論）

このように，仮定と結論を結ぶ「であるとき」「ならば」などの言葉を，記号「$\Rightarrow$」で表すこともある．

【例題 27】 以下のように仮定と結論が与えられた命題の，真偽を答えよ，偽であれば反例を一つあげよ．
1. 「仮定：a, b は整数」「結論：ab は整数」　　2. 「仮定：$a + b$ は整数」「結論：ab は整数」

【解答】
1. 「a, b は整数ならば ab は整数である」，この命題は**真**である．
2. 「$a + b$ は整数ならば ab は整数である」
　この命題は**偽**，**反例は** $a = b = \dfrac{1}{2}$

◀ 反例は，$a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ など多数ある

B.　命題「$p \Rightarrow q$」

条件 p を「$x > 0$」，条件 q を「$x + 10 > 0$」とすると，命題「$p \Rightarrow q$」とは命題「$x > 0$ ならば $x + 10 > 0$ である」のことであり，これは真である．

このように，一般に命題を「$p \Rightarrow q$」と表すことが多い．ここで，文字 p, q は条件を表す．

p：「$x > 0$」，　q：「$x + 10 > 0$」のとき
命題　p　$\Rightarrow$　q　　とは
　　　↓　　　↓
命題「$x > 0$」ならば「$x + 10 > 0$」のこと

【例題 28】
1. p：「$a = b$」，q：「$a^2 = b^2$」のとき，命題「$p \Rightarrow q$」の真偽を答え，偽である場合は反例をあげよ．
2. p：「$ac = bc$」，q：「$a = b$」のとき，命題「$p \Rightarrow q$」の真偽を答え，偽である場合は反例をあげよ．

【解答】
1. **真**　　2. **偽**，**反例は** $(a, b, c) = (1, 2, 0)$

◀ $c = 0$ とおけば多数の反例を作ることができる．

3. 条件と集合

A. 「全体集合」の役割

命題「a は自然数とする．$a+1$ は正である．」は真である．

しかし，「$a+1$ は正である．」の一文に真偽を定めることはできない．a を自然数だと考えた人にとっては真であるが，a を整数だと考えた人には $a=-2$ という反例があって偽となるからである．

このように，与えられた文字をどの範囲で考えているかを明示する必要がある[*14]．

B. 条件の否定

条件 p に対し，条件「p でない」を p の**否定** (negation) といい，記号 $\overline{p}$ で表される．

例えば，自然数 m について，条件 p「m は 3 の倍数」の否定 $\overline{p}$ は「m は 3 の倍数でない」である．

また，実数 a について，条件 q「$a \leqq 10$」の否定 $\overline{q}$ は「a は 10 以下ではない」，つまり「$10 < a$」である．

【例題 29】 a は実数，n は自然数とする．以下の条件を述べよ．

1. 条件 p「n は 10 の倍数」の否定 $\overline{p}$
2. 条件 q「n は奇数」の否定 $\overline{q}$
3. 条件 r「$3 \leqq a$」の否定 $\overline{r}$
4. 条件 s「$4 < a$」の否定 $\overline{s}$

【解答】

1. $\overline{p}$「n は 10 の倍数でない」
2. $\overline{q}$「n は偶数」
3. $\overline{r}$「$a < 3$」
4. $\overline{s}$「$a \leqq 4$」

C. 条件の「または」と「かつ」

たとえば，条件「$a>0$ または $b>0$」は，「$a>0$ か $b>0$ のどちらかは成立する」ことを意味する．

一方，条件「$a>0$ かつ $b>0$」は，「$a>0$ と $b>0$ のどちらも成立する」ことを意味する．

「または」「かつ」をまとめると，右のようになる[*15]．

「p または q」には「p も q も成立」する場合も含まれることに注意しよう，

○：「成立する」　×：「成立しない」

	p	q	p または q	p かつ q
i)	○	○	○	○
ii)	○	×	○	×
iii)	×	○	○	×
iv)	×	×	×	×

【例題 30】 実数 a, b について，条件 p：「$a>0$」，q：「$b>0$」とする．

1. $a=3,\ b=-1$ のとき，条件「$\overline{p}$」「p または q」「p かつ q」が成立するかどうか，それぞれ答えよ．
2. $a=2,\ b=2$ のとき，条件「$\overline{p}$」「p または q」「p かつ q」が成立するかどうか，それぞれ答えよ．
3. $a=0,\ b=0$ のとき，条件「$\overline{p}$」「p または q」「p かつ q」が成立するかどうか，それぞれ答えよ．

【解答】

1. $\overline{p}$：成立しない，p または q：成立する，　p かつ q：成立しない

[*14] 文脈から明らかなときは省略されることもある．とはいえ，書く必要があるか迷ったら書いた方がよい．
[*15] 論理学などにおいては，条件の「または」「かつ」を記号 ∨, ∧ で表すこともある．高校数学ではほとんど用いられない．

2. $\overline{p}$：成立しない，p または q：成立する，　p かつ q：成立する
3. $\overline{p}$：成立する，　p または q：成立しない，p かつ q：成立しない

◀ $a > 0$ の否定は $a \leqq 0$ である．

【例題 31】　次の $\boxed{\quad}$ に，「または」「かつ」のどちらかを入れなさい．

1. 「$a = 3,\ b = -1$ のとき $a + b = 2$」は「$a = 3$ $\boxed{\quad}$ $b = -1$ のとき $a + b = 2$」と同じ意味である．
2. 「実数 a, b について」は「a が実数 $\boxed{\quad}$ b が実数のときについて」と同じ意味である．
3. 「$x^2 = 1$ の解は $x = 1,\ -1$」は「$x^2 = 1$ の解は $x = 1$ $\boxed{\quad}$ $x = -1$」と同じ意味である．

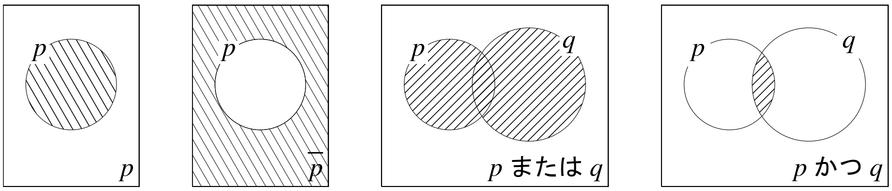
【解答】

1. かつ　　2. かつ　　3. または

カンマ（,）は「かつ」を意味することが多い．ただし，方程式の解を列挙するときなどは「または」を意味する．条件の意味を考えて判断しよう．

D.　条件と集合

全体集合 U のうち，条件 p が成立する U の要素の集合を，同じく p で表して，ベン図で図示することができる．



こうして，条件も集合と同じように考えることができ，特に次の事実を得る．

ド・モルガンの法則

どんな条件 p，q に関しても，次の**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) が成り立つ．

$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$,　　$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}$

「$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$」の具体例として，条件「$a = 0$ または $b = 0$ が成り立たない」ときを考えよう．これは，$a \neq 0,\ b \neq 0$ の両方が成り立つときに限る．つまり「$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$」でないといけない．

【例題 32】　a, b は実数，m, n は整数とする．次の条件の否定を述べよ．

1. $a = 1$ かつ $b = 1$　　2. $a = 2$ または $b = 2$　　3. $a \neq 3$ かつ $b = 3$　　4. m, n は偶数
5. m または n が 5 で割り切れる　　6. $a > 0$ または $b < 0$

【解答】

1. $\boldsymbol{a \neq 1}$ **または** $\boldsymbol{b \neq 1}$　　2. $\boldsymbol{a \neq 2}$ **かつ** $\boldsymbol{b \neq 2}$
3. $\boldsymbol{a = 3}$ **または** $\boldsymbol{b \neq 3}$　　4. $\boldsymbol{m}$ **は奇数または** $\boldsymbol{n}$ **は奇数**
5. $\boldsymbol{m}$ **も** $\boldsymbol{n}$ **も 5 で割り切れない**　　6. $\boldsymbol{a \leqq 0}$ **かつ** $\boldsymbol{b \geqq 0}$

◀「m, n は偶数」ということは，m も n も偶数ということである．

【練習 33：または・かつ・否定】

（例）にならって右の表を埋めなさい．
ただし，○は「成立する」，×は「成立しない」を表す．

	p	q	p かつ q	$\overline{p \text{ かつ } q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$ または $\overline{q}$
（例）	○	○	○	×	×	×	×
i)	○	×					
ii)	×	○					
iii)	×	×					

【解答】

	p	q	p かつ q	$\overline{p \text{ かつ } q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$ または $\overline{q}$
（例）	○	○	○	×	×	×	×
i)	○	×	×	○	×	○	○
ii)	×	○	×	○	○	×	○
iii)	×	×	×	○	○	○	○

◀ この表から，$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p}$ または $\overline{q}$ を確かめることができる．

【練習 34：または・かつ・否定〜その２〜】

自然数 a, b について，以下の命題の真偽を答えよ．偽である場合は反例を一つあげよ．

(1) a, b が奇数ならば，ab は奇数である．

(2) a または b が奇数ならば，ab は奇数である．

(3) a が 3 で割り切れないならば，$2a$ は 3 で割り切れない．

(4) $2a = 3b$ ならば，a は 3 の倍数，b は 2 の倍数である．

【解答】

(1) 真

(2) 偽，反例は $a = 1, b = 2$

(3) 真

(4) 真

◀ $a = 2k + 1, b = 2l + 1$ とおけば $ab = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1$

◀ a か b のどちらかを偶数にすればよい．

◀ $a = 3k \pm 1$ とおけば，$2a = 6k \pm 2$ となって 3 では割り切れないと分かる．

◀ $2a$ が 3 の倍数となるには a は 3 の倍数となり，$3b$ が 2 の倍数になるには b は 2 の倍数とならなければいけない．

E. 発展 「すべての」「ある」の否定

ある新幹線が事故を起こせば、「すべての新幹線は事故を起こさない」ことは否定される*16.
一方,「すべての人が行方が分かっている」ことによって「行方不明者がいる」ことは否定される*17.
一般に,「ある〜」が「すべての〜」の否定となり,「すべての〜」が「ある〜」の否定となる.

【発展 35：「すべての」「ある」の否定】

① 条件「すべての自然数 n について，$(n + 1)(n - 1)$ は 4 で割り切れる」の否定を述べよ．

② 条件「ある実数 x について，$x^2 + 1 = 0$ である」の否定を述べよ．

【解答】

① ある自然数 n について，$(n + 1)(n - 1)$ は 4 で割り切れない

② すべての実数 x について，$x^2 + 1 \neq 0$ である

◀ $(n+1)(n-1)$ が 4 で割り切れない n が 1 つでも存在すれば，条件の否定になる．

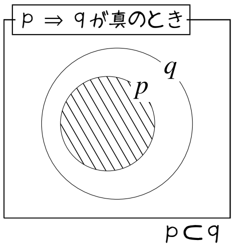
*16 他のすべての新幹線が事故を起こさなくても，否定になる．

*17 ある人の行方がわかるだけでは否定にならない．すべての人の行方が分からないといけない．

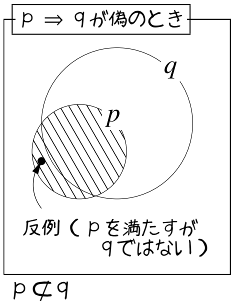
4.　必要条件と十分条件

A.　命題 $p \Rightarrow q$ の真偽の図示

命題 $p \Rightarrow q$ が真であるとは，全体集合内の「p を満たす要素は全て q を満たす」ことになる．ベン図で表すと左下図のように，条件 p, q は集合として $p \subset q$ である．



逆に，命題 $p \Rightarrow q$ が偽ならば，その反例は「p を満たすが q を満たさない要素」である．それは，ベン図で表すと右図の ● に相当する．



B.　逆

仮定と結論を交換してできる命題を，**逆** (converse) の命題という．たとえば

「$a = 1$ ならば，$a^2 = 1$ である」　（真）

という命題の逆は，次のようになる．

「$a^2 = 1$ ならば，$a = 1$ である」　（偽）

上の例のように，もとの命題の真偽と，逆の命題の真偽が一致するとは限らない．

文字を使って表せば，命題「$p \Rightarrow q$」の逆は，命題「$q \Rightarrow p$」となる．

【例題 36】　以下の命題の真偽を答えよ．次に，逆の命題を書き，その真偽も答えよ．

1. $x = 0$ ならば，$x^3 = 0$ である．
2. x, y が有理数ならば，$x + y$ は有理数である．

【解答】

1. もとの命題は**真**．逆の命題は「$x^3 = 0$ **ならば**，$x = 0$ **である**」，これは**真**．
2. もとの命題は**真**．逆の命題は「$x + y$ **が有理数ならば**，x, y **は有理数である**」，これは**偽**．反例は $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$.

【発展 37：逆はいつも正しいとは限らない】

もとの命題が真であっても，逆の命題が偽であるかもしれないことは，次のように説明できる．$\boxed{}$ に適する式を答えなさい．

命題 P： $p \Rightarrow q$ が真であるとき，条件 p, q には，集合として $\boxed{ア}$ という関係が成り立つ．一方，命題 P の逆 $\boxed{イ}$ が成り立つには，条件 p, q には，集合として $\boxed{ウ}$ という関係が成り立たないといけない．

しかし，$\boxed{ア}$ のときに $\boxed{ウ}$ が成り立つとは限らないので，逆が成り立つとは限らない．

【解答】　ア：$p \subset q$，イ：$q \Rightarrow p$，ウ：$q \subset p$

C. 必要条件と十分条件

たとえば,「試験に通るには努力しないといけない」としよう．このとき,「試験に通る」には「努力する」ことが必要である．

一方,「努力すれば必ず試験に通る」と仮定しよう．このとき,「試験に通る」には「努力する」ことで十分である[*18]．

数学においても，真になる命題「$p \Rightarrow q$」があれば，条件 p と，条件 q に「必要」「十分」と呼ばれる論理的な関係を考えることができる[*19]．

必要条件と十分条件

命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき,（p に対して）q は**必要条件** (neccessary condition) であるといい,
命題「$q \Rightarrow p$」が真であるとき,（p に対して）q は**十分条件** (sufficient condition) であるという．
命題「$p \Rightarrow q$」も「$q \Rightarrow p$」も真であるときは,（p に対して）q は**必要十分条件** (neccessary and sufficient condition) である，または，p と q は**同値** (equivalence) である，という．

【例題 38】 a, b は整数とする．条件 p :「a, b はともに奇数」, q :「ab は奇数」, r :「$a+b$ は偶数」とする．次の $\boxed{}$ に,「真」「偽」「ある」「ない」のいずれかで答えよ．

1. 命題 $p \Rightarrow q$ は $\boxed{\text{ア}}$ であり，命題 $q \Rightarrow p$ は $\boxed{\text{イ}}$ である．
   よって,（p に対して）q は必要条件で $\boxed{\text{ウ}}$．また，十分条件で $\boxed{\text{エ}}$．
2. 命題 $q \Rightarrow r$ は $\boxed{\text{オ}}$ であり，命題 $r \Rightarrow q$ は $\boxed{\text{カ}}$ である．
   よって，r は（q に対して）必要条件で $\boxed{\text{キ}}$．また，十分条件で $\boxed{\text{ク}}$．
3. r は，p について必要条件で $\boxed{\text{ケ}}$．また，十分条件で $\boxed{\text{コ}}$．
   なぜなら，命題 $p \Rightarrow r$ は $\boxed{\text{サ}}$ であり，命題 $r \Rightarrow p$ は $\boxed{\text{シ}}$ であるから．
4. p と q は同値で $\boxed{\text{ス}}$．q と r は同値で $\boxed{\text{セ}}$．r と p は同値で $\boxed{\text{ソ}}$．

「（p に対して）q は必要条件」という表現は，以下のいずれとも同じ意味である．

- q は p に対して必要条件
- q は p の必要条件
- q は p について必要条件

何は必要条件であるのかを，読み間違えないようにしよう．

【解答】

1. ア : 真，イ : 真，ウ : ある，エ : ある
2. オ : 真，カ : 偽，キ : ある，ク : ない
3. ケ : ある，コ : ない，サ : 真，シ : 偽
4. ス : ある，セ : ない，ソ : ない

---

*18 もちろん，これがいつも成り立つとは限らない．試験が難しすぎれば,「試験に通る」には「努力する」ことで十分とは限らない．

*19 もう 1 つ別の例を挙げておく。たとえば,「オリンピックの金メダリストは努力している」ことは正しいと認める。そうすれば、「努力」しないと「金メダル」がとれない。つまり、「努力」は「金メダル」の必要条件である。また、ある人の「オリンピックで金メダルを取りました」は、その人が「努力した」ことの十分な根拠と考えてよい。つまり、「金メダル」は「努力した」の十分条件である。

p が q の必要条件・十分条件であるかを調べるには，2 つの命題 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ の真偽を求めればよい．

【例題 39】 次の $\boxed{}$ に，①から④のいずれかを選んで答えなさい．

1. $a = b$ であることは，$ac = bc$ であることの $\boxed{}$.
2. $x^2 = 4$ であることは，$x = 2$ であることの $\boxed{}$.
3. a が 4 の倍数であることは，a が 6 の倍数であることの $\boxed{}$.
4. $a = b = 0$ であることは，$a^2 + b^2 = 0$ であることの $\boxed{}$.

① 必要十分条件である　② 必要条件であるが十分条件でない
③ 十分条件であるが必要条件でない　④ 必要条件でも十分条件でもない

【解答】

1. 命題「$a = b \Rightarrow ac = bc$」は真なので，十分条件である．
   命題「$ac = bc \Rightarrow a = b$」は偽なので，必要条件でない．答えは③
2. 命題「$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$」は偽なので，十分条件でない．
   命題「$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$」は真なので，必要条件である．答えは②
3. 命題「a が 4 の倍数 $\Rightarrow a$ が 6 の倍数」は偽なので，十分条件でない．
   命題「a が 6 の倍数 $\Rightarrow a$ が 4 の倍数」は偽なので，十分条件でない．
   答えは④
4. 命題「$a = b = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0$」は真なので，十分条件である．
   命題「$a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$」は真なので，必要条件である．
   答えは①

◀ $p \Rightarrow q$ が真ならば p は十分条件

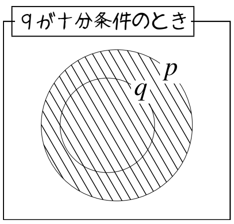
◀ 反例は $x = -2$

◀ 反例は $a = 8$

◀ 反例は $a = 6$

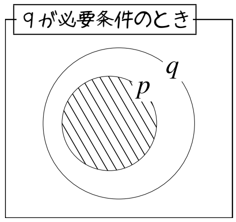
D.　必要条件・十分条件の図示

q が（p に対して）必要条件ならば，命題 $p \Rightarrow q$ が真なので左のベン図のように表される．



また，q が（p に対して）十分条件ならば，命題 $p \Rightarrow q$ が真なので左のベン図のように表される．

もし，左右どちらの図も成立すれば，結局，条件 p と条件 q は一致することになる．これが，必要十分条件のことを「同値[*20]」とも言われる理由である．



[*20] 本来，「同値」を意味する"equivalence"は「同等」と訳された方が分かり易かったかもしれない．しかし，「同値」という訳語が一般的なので今後もこれを用いる．

【練習 40：必要条件と十分条件～その１～】

次の$\boxed{}$に，①から④のいずれかを選んで答えなさい．

(1) $x^2 < 1$ は，$x < 1$ であることの$\boxed{}$.

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形であることは，AB∥DC であることの$\boxed{}$.

(3) $a < 1,\ b < 1$ であることは，$ab < 1$ であることの$\boxed{}$.

① 必要十分条件である　② 必要条件であるが十分条件でない

③ 十分条件であるが必要条件でない　④ 必要条件でも十分条件でもない

【解答】

(1) 命題「$x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$」は真なので，十分条件である．
命題「$x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$」は偽なので，必要条件でない．答えは③

◀ 反例は $x = -3$

(2) 命題「四角形 ABCD が平行四辺形 ⇒AB∥DC」は真なので，十分条件である．
命題「AB∥DC⇒ 四角形 ABCD が平行四辺形」は偽なので，必要条件でない．答えは③

◀ AD∦BC とすれば反例になる

(3) 命題「$a < 1,\ b < 1 \Rightarrow ab < 1$」は偽なので，十分条件でない．
命題「$ab < 1 \Rightarrow a < 1,\ b < 1$」は偽なので，必要条件でない．
答えは④

◀ 反例は $a = -1,\ b = -2$

◀ 反例は $a = -1,\ b = -2$

E. 必要条件・十分条件の調べ方

5. 逆・裏・対偶

命題「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」を $p \Rightarrow q$ の**裏** (converse of contraposition) という．たとえば

「$a = 1$ ならば，$a^2 = 1$ である」　（真）

という命題の裏は，次のようになる．

「$a \neq 1$ ならば，$a^2 \neq 1$ である」　（偽）

上の例のように，もとの命題の真偽と，裏の命題の真偽が一致するとは限らない．

【例題 41】 以下の命題の真偽を答えよ．次に，裏の命題を書き，その真偽も答えよ．

1. $x = 0$ ならば，$x^3 = 0$ である．　2. $x,\ y$ が有理数ならば，$x + y$ は有理数である．

【解答】

1. もとの命題は真．裏の命題は「$x \neq 0$ ならば，$x^3 \neq 0$」，これは真．
2. もとの命題は真．裏の命題は「x または y が無理数ならば，$x + y$ は無理数である」，これは偽，反例は $x = \sqrt{2},\ y = -\sqrt{2}$.

◀「有理数ではない」ことが，無理数の定義である．

A.　対偶とは何か

命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」を $p \Rightarrow q$ の**対偶**(たいぐう) (contraposition) という．たとえば

「$a = 1$ ならば，$a^2 = 1$ である」　**（真）**

という命題の対偶は，次のようになる．

「$a^2 \neq 1$ ならば，$a \neq 1$ である」　**（真）**

【例題 42】　以下の命題の対偶を書き，その真偽も答えよ．

1. $x = 0$ ならば，$x^3 = 0$ である．
2. x, y が有理数ならば，$x + y$ は有理数である．

【解答】

1. 対偶の命題は「$x^3 \neq 0$ ならば，$x \neq 0$」，これは**真**.
2. 対偶の命題は「$x + y$ **が無理数ならば，** x **または** y **は無理数である**」，これは**真**.

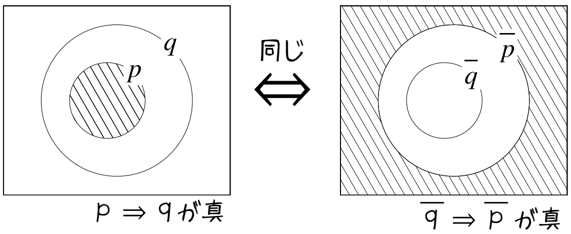
◀真であることを示すには，『対偶を用いた証明』が必要になる．

B.　対偶の真偽は保たれる

もとの命題の真偽と，対偶の命題の真偽は必ず一致する．

p.21 の A. のような図を用いて，右の 2 つの図から考えてみよう．どちらも，条件 p（斜線部分）が q に含まれていることがわかる．

補足 (p.33) に，より詳しい証明がある．

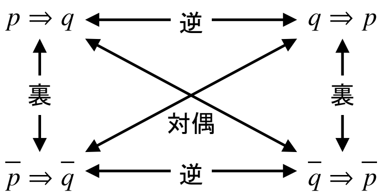


C.　逆・裏・対偶のまとめ

命題 $\overline{p}$，$\overline{q}$ の否定は，もとの命題 p，q であるから，命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の対偶は $p \Rightarrow q$ である．つまり，対偶の対偶はもとに戻る．

また，命題 $q \Rightarrow p$ の対偶は命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ になる．このことから，逆の対偶は裏になることも分かる．

逆・裏・対偶の関係をまとめると，右図のようになる．



【例題 43】　命題「$x = 2$ ならば $x^2 = 4$ である」を P とし，P の逆・裏・対偶の命題をそれぞれ P_1, P_2, P_3 とする．P_1, P_2, P_3 の命題を書き，それらの真偽も答えよ．

【解答】　逆 $\boldsymbol{P_1}$:「$\boldsymbol{x^2 = 4}$ **ならば** $\boldsymbol{x = 2}$ **である**」，この命題は**偽，反例は** $\boldsymbol{x = -2}$

裏 $\boldsymbol{P_2}$:「$\boldsymbol{x \neq 2}$ **ならば** $\boldsymbol{x^2 \neq 4}$ **である**」，この命題は**偽，反例は** $\boldsymbol{x = -2}$

対偶 $\boldsymbol{P_3}$:「$\boldsymbol{x^2 \neq 4}$ **ならば** $\boldsymbol{x \neq 2}$ **である**」，この命題は**真**

◀$x = -2$ は，$x \neq 2$ であるのに $x^2 = 4$ になってしまう．

【練習 44：対偶の真偽は保たれる】

「背が高い友人Ａ」と待ち合わせしている人の考えとして正しくなるよう，選択肢から選びなさい．

「向こうから誰かが来る．その誰かは，背が $\left\{\begin{matrix}\text{高い}\\\text{低い}\end{matrix}\right\}$ ので，友人Ａで $\left\{\begin{matrix}\text{ある}\\\text{ない}\end{matrix}\right\}$.」

【解答】　「友人Ａ」⇒「背が高い」ので，「背が高くない」⇒「友人Ａではない」も正しい．よって，「背が**低い**ので友人Ａで**ない**」が正しい考えになる．

◀ 背が高い人が来たとしても、それが友人Ａとは限らない。背の高い人は友人Ａだけではない。

【練習 45：逆・裏・対偶】

以下の命題の，逆・裏・対偶の命題を書きなさい．また，それぞれについて真偽を答えなさい．

ただし，(4) の「$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{POR}$」は「$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積が等しい」を意味する．

(1) 「$x = 1$」⇒「$x^2 - x = 0$」

(2) 「$x,\ y$ は整数」⇒「xy は整数」

(3) 「$x + y = 5$」 ⇒「$x = 2$ かつ $y = 3$」

(4)「$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{POR}$」 ⇒ 「$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{POR}$」

【解答】

(1) 逆：**「$\boldsymbol{x^2 - x = 0}$」⇒「$\boldsymbol{x = 1}$」**これは**偽**，反例は $x = 0$.

裏：**「$\boldsymbol{x \neq 1}$」⇒「$\boldsymbol{x^2 - x \neq 0}$」**これは**偽**，反例は $x = 0$.

対偶：**「$\boldsymbol{x^2 - x \neq 0}$」⇒「$\boldsymbol{x \neq 1}$」**，これは**真**.

(2) 逆：**「$\boldsymbol{xy}$ は整数」⇒「$\boldsymbol{x,\ y}$ は整数である」**

これは**偽**，反例は $x = y = \sqrt{2}$.

裏：**「$\boldsymbol{x}$ または $\boldsymbol{y}$ は整数でない」⇒「$\boldsymbol{xy}$ は整数でない」**

これは**偽**，反例は $x = y = \sqrt{2}$.

対偶：**「$\boldsymbol{xy}$ は整数でない」⇒「$\boldsymbol{x}$ または $\boldsymbol{y}$ は整数でない」**，これは**真**.

◀ $x,\ y$ のどちらかは整数にはならない．

(3) 逆：**「$\boldsymbol{x = 2}$ かつ $\boldsymbol{y = 3}$」⇒「$\boldsymbol{x + y = 5}$」**これは**真**.

裏：**「$\boldsymbol{x + y \neq 5}$」⇒「$\boldsymbol{x \neq 2}$ または $\boldsymbol{y \neq 3}$」**これは**真**.

対偶：**「$\boldsymbol{x \neq 2}$ または $\boldsymbol{y \neq 3}$」⇒「$\boldsymbol{x + y \neq 5}$」**

これは**偽**，反例は $x = 0,\ y = 5$.

(4) 逆：**「$\boldsymbol{\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{POR}}$」⇒「$\boldsymbol{\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{POR}}$」**これは**真**.

裏：**「$\boldsymbol{\triangle\mathrm{ABC} \neq \triangle\mathrm{POR}}$」⇒「$\boldsymbol{\triangle\mathrm{ABC} \not\equiv \triangle\mathrm{POR}}$」**これは**真**.

対偶：**「$\boldsymbol{\triangle\mathrm{ABC} \not\equiv \triangle\mathrm{POR}}$」⇒「$\boldsymbol{\triangle\mathrm{ABC} \neq \triangle\mathrm{POR}}$」**

これは**偽**，反例は，底辺と高さは異なるが面積は等しい 2 つの三角形.

◀ 底辺も高さが等しくても，面積の異なる 2 つの三角形は多数ある

1.3　証明

どんな命題にも通用する証明方法は無い．

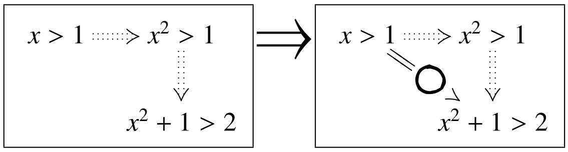
しかし，多くの証明に使われる基本的な方法や，ある形の命題にはきわめて有効な証明方法はある．

それらの中には，普段，人に説明する場面でも有効な方法論もある．

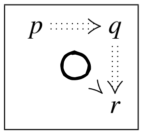
1.　証明の基礎

A.　$p \Rightarrow q \Rightarrow r$

たとえば，次の 2 つの命題は真である．



- $x > 1$ ならば $x^2 > 1$ である．
- $x^2 > 1$ ならば $x^2 + 1 > 2$ である．



上の 2 つの命題から出来る，新しい命題「$x > 1$ ならば $x^2 + 1 > 2$ である」も真になる．一般に，命題 $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow r$ が真ならば，新しい命題 $p \Rightarrow r$ も真である．

【例題 46】　次の 2 つの正しい命題から，新しい命題を作りなさい．

1. 「$x^2 - x - 2 = 0$ ならば $x = 2,\ -1$ である」「$x = 2,\ -1$ ならば $x^3 - 3x - 2 = 0$ である」
2. 「$\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{5}$ ならば，定数 k を用いて $a = 3k,\ b = 2k,\ c = 5k$ と表せる」
「定数 k を用いて $a = 3k,\ b = 2k,\ c = 5k$ と表せるならば，$a : b : c = 3 : 2 : 5$ である」

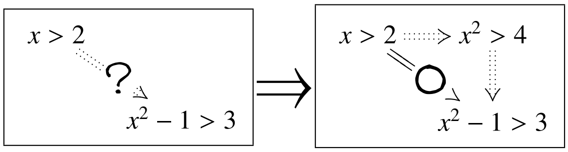
【解答】

1. 「$\boldsymbol{x^2 - x - 2 = 0}$ **ならば** $\boldsymbol{x^3 - 3x - 2 = 0}$ **である」**
2. 「$\boldsymbol{\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{5}}$ **ならば，**$\boldsymbol{a : b : c = 3 : 2 : 5}$ **である」**

B.　三段論法

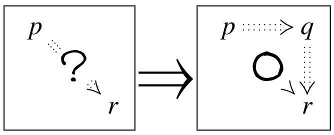
たとえば，命題「$x > 2$ ならば $x^2 - 1 > 3$」を証明するには，次の 2 段階に分けて考えればよい．

- $x > 2$ ならば $x^2 > 4$ であり，
- $x^2 > 4$ ならば $x^2 - 1 > 3$ である．



この考え方のポイントは，条件「$x^2 > 4$」を間に挟んだことにある．

命題 $p \Rightarrow r$ が真であることを示すために，新たな条件 q を考え，命題 $p \Rightarrow q$ と命題 $q \Rightarrow r$ の両方を示してもよいと分かる．



この命題の証明方法を**三段論法** (syllogism) という．

【例題 47】　命題「a が偶数ならば a^2 は偶数である」の証明が完成するよう，$\boxed{}$ に適する語句を答えなさい．

仮定より，整数 k を用いて $a = 2k$ と表すことができる．

$a = 2k$ ならば $a^2 = \boxed{ア}$ となって a^2 は $\boxed{イ}$ と分かる．よって，命題は正しいと証明された．

【解答】　ア : $\boldsymbol{4k^2}$，イ : **偶数**

三段論法における中間的な条件 q を見つけることは，問題によって異なる．

C. 同値であることの証明

「p と q が同値である」という命題を示すには，2 つの命題「$p \Rightarrow q$」「$q \Rightarrow p$」を証明すればよい．

命題「$p \Rightarrow q$」と「$q \Rightarrow p$」はまとめて，命題「$p \Leftrightarrow q$」とも表される．

【例題 48】 a, b を整数とする．2 つの条件「$a - b$ が偶数である」「$a + b$ が偶数である」は同値であることを示そう．

まず，「$a - b$ が偶数ならば $a + b$ が偶数である」ことを示す．

$a - b$ は偶数なので $a - b = 2m$（m は整数）とおく．$a - b$ に $\boxed{\text{ウ}}$ を足せば $a + b$ になるので

$$a + b = 2m + \boxed{\text{ウ}} = 2\left(\boxed{\text{エ}}\right)$$

である．$\boxed{\text{エ}}$ は整数なので，$a + b$ は偶数である．

次に，逆の「$a + b$ が偶数ならば $a - b$ が偶数である」ことを示す．

$a + b$ は偶数なので，$a + b = 2n$（n は整数）とおくと

$$a - b = 2n - \boxed{\text{ウ}} = 2\left(\boxed{\text{オ}}\right)$$

であり，$\boxed{\text{オ}}$ は整数なので $a - b$ も偶数である．

以上から，2 つの条件「$a - b$ が偶数である」「$a + b$ が偶数である」は同値であることが示された．

【解答】 ウ : $\boldsymbol{2b}$，エ : $\boldsymbol{m + b}$，オ : $\boldsymbol{n - b}$

【練習 49：同値であることの証明】

a, b を整数とする．$a + 2b$ が 4 の倍数であることと $a - 2b$ が 4 の倍数であることは，同値な条件であることを示せ．

【解答】 まず，「$a + 2b$ が 4 の倍数ならば $a - 2b$ が 4 の倍数」を示す．
$a + 2b$ は 4 の倍数なので $a + 2b = 4m$（m は整数）とおく．このとき

$$a - 2b = (a + 2b) - 4b = 4m - 4b = 4(m - b)$$

である．$m - b$ は整数なので，$a - 2b$ も 4 の倍数である．

次に，逆の命題「$a - 2b$ が 4 の倍数ならば $a + 2b$ が 4 の倍数」を示す．
$a - 2b$ は 4 の倍数なので $a - 2b = 4n$（n は整数）とおく．このとき

$$a + 2b = (a - 2b) + 4b = 4n + 4b = 4(n + b)$$

である．$n + b$ は整数なので，$a - 2b$ も 4 の倍数である．

以上から，$a + 2b$ が 4 の倍数であることと $a - 2b$ が 4 の倍数であることが同値であると示された． ■

2. 対偶を用いた証明

もとの命題と対偶の命題は真偽が一致した (p.25)．そこで，命題 $p \Rightarrow q$ の証明が難しいときには，命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を証明してもよい．

【暗記 50：対偶証明法】

a^2 が奇数ならば a が奇数であることを，対偶法を用いて示せ．

【解答】 対偶「a が偶数ならば，a^2 は偶数である」を示せばよい．

a が偶数ならば, $a = 2k$ (整数 k) と表すことができる．このとき, $a^2 = 4k^2$ なので a^2 は奇数である．よって，もとの命題は示された． ■

【例題 51】 平面上の 3 点 A，B，P がある．以下の $\boxed{}$ に当てはまる文章・言葉を答えよ．

「$\angle \mathrm{APB} \neq 90^\circ$ ならば，線分 AB を直径とする円の周上に P はない」の対偶は $\boxed{カ}$ であり，これは $\boxed{キ}$ の定理から正しい．よって，もとの命題も正しいことが分かる．

【解答】

カ：「線分 AB を直径とする円の周上に P があれば，$\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$ である」

キ：円周角

【暗記 52：$x = a$ かつ $y = b$ と同値な条件】

実数 x, y について，命題「$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$ ならば $x = 1$ かつ $y = 1$」を対偶を用いて示せ．

【解答】 対偶「$x \neq 1$ または $y \neq 1$ ならば $(x-1)^2 + (y-1)^2 \neq 0$」を示せばよい．

$x \neq 1$ とすると，$(x-1)^2 > 0$ である．一方，$(y-1)^2 \geqq 0$ なので $(x-1)^2 + (y-1)^2 > 0$ になるから $(x-1)^2 + (y-1)^2 \neq 0$ と分かる．

$y \neq 1$ とすると，$(y-1)^2 > 0$ である．一方，$(x-1)^2 \geqq 0$ なので $(x-1)^2 + (y-1)^2 > 0$ になるから $(x-1)^2 + (y-1)^2 \neq 0$ と分かる．

以上より，対偶が示されたので元の命題も示された． ■

◀「対称性より，$y \neq 1$ のときも同様にして $(x-1)^2 + (y-1)^2 \neq 0$ となる」と書くこともできる．

上の命題の逆も成立する．同じようにして，一般に，実数 x, y, a, b について「$x = a$ かつ $y = b$」と「$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$」は同値と示され，この事実自体が証明に用いることもある．詳しくは p.34 を参照のこと．

3.　背理法

A.　背理法とは何か

命題 $p \Rightarrow q$ を示すのに，以下のように証明を進めてもよい．

i. 仮定 p のもと，条件 q が成り立たないと仮定する．

ii. i. のとき，つじつまが合わないこと，すなわち**矛盾**（むじゅん） (contradiction) を導く．

iii. 条件 q が成り立たないと仮定したのが間違いだったので，条件 q が成り立っている，と結論づける．

この証明方法を**背理法**（はいりほう） (reduction to absurdity) という[*21]．

【例題 53】　$a+b=2$ のとき，a または b は 1 以上であることを示せ．

【解答】　「a または b は 1 以上」ではないと仮定（……… ①）し，背理法で示す．つまり，a も b も 1 より小さいとする．

このとき，$a<1$ かつ $b<1$ から $a+b<2$ であり，$a+b=2$ に矛盾する。つまり、仮定①は間違っている．

よって，a または b は 1 以上であることが示された．　■

命題 $p \Rightarrow q$ を背理法で示すとき，条件 q が成り立たないと仮定して話を進めるが，仮定である p を否定しないように注意しよう．結果的には，条件 p と条件 $\overline{q}$ が同時に成り立つと仮定して，話を進めることになる．

【暗記 54：$x=a$ または $y=b$ と同値な条件】

実数 x, y について，命題「$(x-1)(y-1)=0$ ならば $x=1$ または $y=1$」を背理法を用いて示せ．

【解答】　「$x=1$ または $y=1$」でないと仮定（……… ①）し，背理法で示す．つまり，「$x \neq 1$ かつ $y \neq 1$」とする．

◀『ド・モルガンの法則 (p.19)』

このとき，$x-1 \neq 0$ かつ $y-1 \neq 0$ となるので $(x-1)(y-1) \neq 0$ となる．これは $(x-1)(y-1)=0$ に矛盾し，仮定①が間違っていると分かる．

よって，$x=1$ または $y=1$ であることが示された．　■

上の命題の逆も成立する．同じようにして，一般に，実数 x, y, a, b について「$x=a$ または $y=b$」と「$(x-a)(y-b)=0$」は同値と示され，この事実自体が証明に用いることもある．詳しくは p.35 を参照のこと．

[*21] この証明が有効であるのは，命題は真か偽かに定まることに由来する．
命題「$p \Rightarrow q$」か命題「$p \Rightarrow \overline{q}$」のどちらかは真である．そこで，「$p \Rightarrow q$」の真を示すために，「$p \Rightarrow \overline{q}$」の偽を示すのである．

B.　無理数であることの証明

ある数が無理数であることを示すには，背理法を用いる[*22].

「無理数どうしの足し算や引き算が無理数になる」ことは偽なので，書いてはいけない[*23].

一方，有理数どうしの四則計算が有理数になることは，断りなく用いても良い.

【暗記 55：無理数であることの証明】

$2\sqrt{2}-3$ が無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい.

【解答】　$a=2\sqrt{2}-3$ は有理数（……… ①）と仮定し，背理法で示す.

$a=2\sqrt{2}-3$ を変形すると

$$a+3=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{a+3}{2}=\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．②の左辺 $\dfrac{a+3}{2}$ は有理数，$\sqrt{2}$ は無理数であるから，等式②は矛盾している．よって，仮定①は誤っているので $2\sqrt{2}-3$ は無理数であることが示された. ■

【練習 56：背理法〜その１〜】

$\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ が無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは用いてもよい.

【解答】　$a=\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ は有理数（……… ①）と仮定し，背理法で示す.

$a=\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ を変形すると

$$4a=\sqrt{3}+2 \Leftrightarrow 4a-2=\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．②の左辺 $4a-2$ は有理数，$\sqrt{3}$ は無理数であるから，等式②は矛盾している．よって，仮定①は誤っているので $\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ は無理数であることが示された. ■

[*22] ある数 x が無理数であることの定義が「x が分数では表せないこと」である．だから，x が無理数であることを示すには，基本的に「x が有理数である（分数で表すことができる）」と仮定して矛盾を導くしかない.

[*23] たとえば，2 つの無理数 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ について，互いに足しても掛けても割っても無理数にならない.

【発展 57：背理法～その２～】

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{6}$ が無理数であることは用いてもよい．

【解答】 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は有理数（ ……… ①）と仮定し，背理法で示す．

$a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の両辺を 2 乗して変形すると

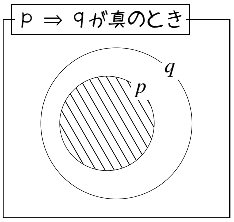
$$a^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow a^2=5+2\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-5}{2}=\sqrt{6} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

となる．②の左辺 $\frac{a^2-5}{2}$ は有理数，$\sqrt{6}$ は無理数であるので，等式②は矛盾している．よって，仮定①は誤っているので $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数であることが示された． ■

1.4　第 1 章の補足

1.　「対偶の真偽は保たれる」ことの証明



A.　「$p \Rightarrow q$ は真である」の言い換え

「$p \Rightarrow q$ が真である」は「条件 $\overline{p} \cup q$ は常に真である」と言い換えられる．
これは，p.21 で学んだベン図でも確認することが出来る．

むしろ逆に「$p \Rightarrow q$ が真である」を「条件 $\overline{p} \cup q$ は常に真である」として定義することもある．

B.　「すべての命題は真か偽か定まる」ことの言い換え

p.16「数学とは何か？」にあるように，数学においては「真偽が定まる命題」しか考えない．
このことは，次のように表すことができる．

「どんな命題 p についても，$p \cup \overline{p}$ は必ず真である」

これを**排中律** (law of excluded middle) といい，これを用いて，次が成立すると分かる．

「条件 p の否定の否定は，条件 p と同値である」

直感的に，これが正しいことは分かるだろうが，排中律を使って厳密に示すことは，かなり難しい[*24]．

C.　「対偶の真偽は保たれる」ことの証明

次の 3 つの事実から，命題 $p \Rightarrow q$ の真偽と命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する．

(I)　（上の A. より）「$p \Rightarrow q$ が真である」と「条件 $\overline{p} \cup q$ は常に真である」は同値である．
(II)　（上の B. より）どんな命題 p についても，同値関係 $p \iff \overline{\overline{p}}$ が成り立つ
(III)　どんな命題 p, q についても，$p \cup q$ と $q \cup p$ の真偽は必ず一致する

対偶の真偽は保たれる

どんな条件 p，q に関しても，命題「$p \Rightarrow q$」と，その対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」は真偽が一致する．

（証明）「命題 $p \Rightarrow q$ が真である」$\iff$「$\overline{p} \cup q$ は常に正しい」（上の (I) より）
$\iff$「$q \cup \overline{p}$ は常に正しい」（上の (III) より）
$\iff$「$\overline{\overline{q}} \cup \overline{p}$ は常に正しい」（上の (II) より）
$\iff$「命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ は真である」（上の (I) より）　■

[*24]　「厳密に」とは，ベン図などを使わず，記号の定義のみ用いることを意味する．この $p \iff \overline{\overline{p}}$ を示すには，「$q \Rightarrow r$ が真ならば，$p \cup q \Rightarrow p \cup r$ が真である　……… ③」を認める必要がある．

そのうえで，概略を示す．まず「排中律が等しい事」を言い換えて「$p \Rightarrow \overline{\overline{p}}$」が示される．逆の「$\overline{\overline{p}} \Rightarrow p$」を示すには「$\overline{\overline{p}} \cup p$」を示せばよい．それには，たった今示した $p \Rightarrow \overline{\overline{p}}$ と③から $\overline{p} \cup p \Rightarrow \overline{p} \cup \overline{\overline{p}}$ が正しいので，これに排中律などを用いればよい．

2. 「または」「かつ」の証明

「q かつ r」を示す方が，「q または r」を示すよりも，分かりやすい．

A. 基本的な「q かつ r」の証明

一般に，「q かつ r を示す」ためには，「q であること」「r であること」をどちらも示せばよい．

B. $x = a$ かつ $y = b$ の証明

p.29 で学んだように，「$x = a$ かつ $y = b$」と「$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$」は同値である．
そのため，「$x = a$ かつ $y = b$」を示すために，「$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$」を示してもよい．
特に，$x = y = z$ を示すために，「$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$」を示すこともある．

【練習 58 :「かつ」の証明】

(1) k は自然数とする．$n = 2k + 1$ のとき，$n^2 - n$ は偶数であり，かつ，$n^2 - 1$ は 8 で割り切れることを示せ．かつ，$n^4 - 1$ も 16 で割り切れることを示せ．
(2) $x^2 + y^2 = x + y = 2$ のとき，$x = 1$ かつ $y = 1$ であることを示せ．
(3) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ のとき，$x = y = z$ であることを示せ．

【解答】

(1) まず，$n^2 - n$ について

$$n^2 - n = (2k + 1)^2 - (2k + 1) = 4k^2 + 2k = 2k(2k + 1)$$

であるから偶数になる．また，$n^2 - 1$ について

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$$

である．k と $k + 1$ は必ずどちらかが偶数であるから，$k(k + 1)$ は偶数になる．よって，$4k(k + 1) = n^2 - 1$ は 8 の倍数になる．

◀ $n^2 - n = n(n - 1)$ であり，n と $n - 1$ は必ずどちらかが偶数であることからも示される．

(2) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (y - 1)^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1\\ &= (x^2 + y^2) - 2(x + y) + 2 = 2 - 4 + 2 = 0\end{aligned}$$

となって，示された．

【別解】$y = 2 - x$ を $x^2 + y^2 = 2$ に代入して

$$x^2 + (x - 2)^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

よって，$x = 1$ である．$y = 2 - x$ に代入して $y = 1$ も成り立つ．

(3) $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 &= 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy - 2yz - 2zx\\ &= 2(xy + yz + zx) - 2xy - 2yz - 2zx = 0\end{aligned}$$

となって，示された．

C.　基本的な「q または r」の証明

一般に，「q または r を示す」ためには，「条件 q が成り立たないならば r である」ことを示せばよい*25.

【練習 59：「または」の証明〜その１〜】

(1) $ac = bc$ ならば，$c = 0$ または $a = b$ を示せ.

(2) $ab = 0$ ならば，$a = 0$ または $b = 0$ を示せ.

【解答】

(1) $c \neq 0$ ならば $a = b$ を示せばよい．$c \neq 0$ のとき，$ac = bc$ の両辺を c で割って $a = b$ を得る.

(2) $a \neq 0$ ならば $b = 0$ を示せばよい．$a \neq 0$ のとき，$ab = 0$ の両辺を a で割って $b = 0$ を得る.

D.　$x = a$ または $y = b$ の証明

p.30 で学んだように，「$x = a$ または $y = b$」と「$(x-a)(y-b) = 0$」は同値である.

そのため，「$x = a$ または $y = b$」を示すために「$(x-a)(y-b) = 0$」を示してもよい.

【練習 60：「または」の証明〜その２〜】

$ab + 1 = a + b$ のとき，$a = 1$ または $b = 1$ を示せ.

【解答】　$(a-1)(b-1) = ab - a - b + 1 = (ab+1) - a - b = a + b - a - b = 0$ であるから，$a = 1$ または $b = 1$ が成り立つ.

【発展 61：「少なくとも 1 つは 1」の証明】

$a + b + c = abc,\ ab + bc + ca = -1$ のとき，$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 つは 1 であることを示せ.

【解答】「a, b, c の少なくとも 1 つは 1 である」ことと,「$(a-1)(b-1)(c-1) = 0$ が成り立つ」ことは同値である．ここで

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1\\ &= abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1\\ &= abc - (-1) + abc - 1 = 0\end{aligned}$$

よって，$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 つは 1 であることが示された.

*25 もしくは「条件 r が成り立たないならば q である」ことを示せばよい.

索引