

# 13th-note 数学 A

(2013 年度卒業生まで)

---

## 目次

第 1 章	集合・命題・証明 ～ 数学の基礎	1
§1.1	集合	1
§1.	集合の基礎	1
§2.	いろいろな集合の表現	6
§3.	集合の要素の個数	10
§4.	3つの集合による関係	13
§1.2	命題	16
§1.	命題の基礎	16
§2.	命題を構成する「条件」	17
§3.	条件と集合	18
§4.	必要条件と十分条件	21
§5.	逆・裏・対偶	24
§1.3	証明	26
§1.	証明の基礎	27
§2.	対偶を用いた証明	29
§3.	背理法	30
§1.4	第 1 章の補足	32
§1.	「対偶の真偽は保たれる」ことの証明	33
§2.	「または」「かつ」の証明	34

索引

この教材を使う際は

- 表示：原作者のクレジット（「13th-note」または「13th-note & www.ftext.org」）を表示してください。
- 非営利：この教材を営利目的で利用してはいけません。ただし、学校・塾・家庭教師の授業で利用するための無償配布は可能です。
- 継承：この教材を改変した結果生じた教材には、必ず、原作者のクレジット（「13th-note」または「13th-note & www.ftext.org」）を表示してください。



Ver1.731(2012-7-28)

# 第1章 集合・命題・証明～数学の基礎



## 1.1 集合

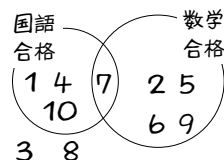


### 1. 集合の基礎

#### A. 集合とは何か

たとえば、出席番号1から10までの人が受けたテスト結果が左下の表になったとき、右下のようにもまとめられる。

出席番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
国語	○	×	×	○	×	×	○	×	×	○
数学	×	○	×	×	○	○	○	×	○	×

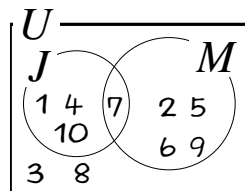


ものや人の集まりを**集合 (set)** といい\*1, 集合に含まれるものや人をその集合の**要素 (element)** という。

さらに、次のように集合を文字で置こう\*2.

出席番号1から10までの10人の集合を  $U$

「国語を合格した人」の集合を  $J$ , 「数学を合格した人」の集合を  $M$



右下のような図を**ベン図 (Venn diagram)** という。また、この例では四角の枠内の集合  $U$  の要素のみ考えている。このような集合  $U$  は**全体集合 (universal set)** といわれる。

**【例題1】** 上の例において、次にあてはまる要素をすべて答えよ。

1.  $M$  の要素であるもの
2.  $J$  の要素でも  $M$  の要素でもあるもの
3.  $M$  の要素でないもの
4.  $J$  の要素ではあるが  $M$  の要素ではないもの

\*1 ただし、数学では集合に含まれるか含まれないか明確にできる場合のみ扱う。「大きい数の集まり」のように、範囲が不明確なものは集合とはいわない。

\*2 たいてい、集合は大文字  $A, B, C, \dots, Y, Z$  で表され、要素は小文字  $a, b, c, \dots, y, z$  で表される。

## B. 集合の表し方～外延的定義

p.1 の例において、集合  $J$  の要素は 1, 4, 7, 10 ですべてである。このことを、次のように表す\*3。

$$J = \{1, 4, 7, 10\} \leftarrow \{ \quad \} \text{の間にすべての要素を書き出す}$$

## C. 「または」を表す記号 $\cup$ , 「かつ」を表す記号 $\cap$

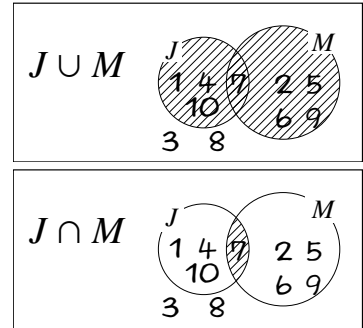
集合  $J, M$  のうち、少なくとも一方には属する要素全体の集合を  $J \cup M$  で表す。これを集合  $J$  と  $M$  の和集合 (sum of sets) といい、ベン図では右の斜線部分に対応する。

集合  $J, M$  の両方に属する要素全体の集合は  $J \cap M$  で表す。これを集合  $J, M$  の共通部分 (common part) といい、ベン図では右下の斜線部分に対応する。

右のベン図を用いて、要素を書き並べると、次のようになる。

$$J \cup M = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}, \quad J \cap M = \{7\}$$

要素をもたない集合を空集合 (empty set) といい、記号  $\emptyset$  で表す\*4。  
もし、集合  $A, B$  に共通の要素がないならば、 $A \cap B = \emptyset$  と表す。



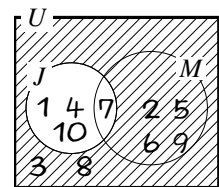
【例題 2】  $A = \{1, 3, 4, 5, 8\}$ ,  $B = \{2, 5, 7\}$ ,  $C = \{3, 6\}$  のとき,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $B \cup C$ ,  $B \cap C$  を答えよ。

## D. 補集合

全体集合  $U$  のうち集合  $J$  に属さない要素全体の集合を  $\bar{J}$  で表す。p.1 の例では

$$\bar{J} = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$$

である。これを集合  $J$  の補集合 (complement) といい、ベン図では右の斜線部分に対応する。補集合を考えるときは、必ず全体集合を定める必要がある。



\*3 このように、要素を書き並べて集合を表すことを外延的定義 (extensional definition) という。

\*4 集合における空集合は、数におけるゼロの役割に近い。それが由来で、空集合は 0 に斜線をいれた  $\emptyset$  で表す。

【例題3】 全体集合は  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  とする.

1. 1桁の2の倍数の集合を  $A$  とするとき,  $A, \bar{A}$  を, それぞれ要素を書き並べて表せ.
2. 1桁の3の倍数の集合を  $B$  とする.  $A \cap B, \bar{A} \cap B$  を, それぞれ要素を書き並べて表せ.

### E. 「属する」を表す記号 $\in$

一般に, 「 $a$  が集合  $X$  の要素である」ことを「 $a$  は集合  $X$  に属する (in)」という.

p.1 の例において, 「1 は集合  $J$  に属する」「3 は集合  $J$  に属さない」. これらを次の記号で表す.

$$1 \in J \quad (\text{または, } J \ni 1^{*5}), \quad 3 \notin J \quad (\text{または, } J \not\ni 3)$$

このように, 属する・属さないは, 記号  $\in, \notin, \ni, \not\ni$  を用いて表される.

$$A \subseteq B$$

### F. 部分集合を表す記号 $\subseteq, \supseteq$

2つの集合  $A, B$  について,  $A$  の全ての要素が  $B$  の要素であるとき, 「 $A$  は  $B$  の部分集合 (subset) である」「 $B$  は  $A$  を含む (contain)」と言い, 次の記号で表す.

$$\text{記号 } A \subseteq B \quad (\text{または, } B \supseteq A)^{*6}$$

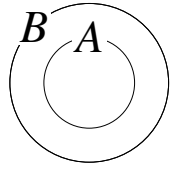
これらを否定するときは, 記号  $A \not\subseteq B, B \not\supseteq A$  で表す.

記号  $\subseteq, \supseteq$  は, 等号を省略して  $\subset, \supset$  と書かれることも多い<sup>\*7</sup>.

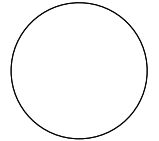
一般に,  $A$  と  $B$  の要素が完全に一致するときは,  $A$  と  $B$  は等しい (equal) といい  $A = B$  と表す. また, 等しくないときは  $A \neq B$  と表す.



空集合  $\emptyset$  は, どんな集合にも含まれていると決められている. 実際, 空集合のすべての要素 (1つも無いのだが) は, どんな集合にも含まれている.



$$A = B$$



【例題4】 次のうち, 正しいものをすべて選べ.

$$\{1, 2, 3, 4\} \supseteq \{1, 2, 3\}, \quad \{1, 2, 3\} \supseteq \{2, 3\}, \quad \{1, 2\} \supseteq \{2, 3, 5\}, \quad \{1\} \supseteq \emptyset$$

\*5 記号の広い側が集合の方を向く. 読み方は「1はJに属する」, 「1はJの要素である」, 「Jは1を要素にもつ」など.

\*6 記号の広い側が大きい集合の方を向く. 読み方は「AはBの部分集合である」「BはAを含む」「AはBに含まれる」など.

\*7  $A \subset B$  は, 「AがBの真部分集合 (proper subset) である」ことを表す場合もある. 「AがBの真部分集合である」とは,  $A \subseteq B$  であるが  $A \neq B$  のときのことをいう.

【練習 5 : 集合の記号】

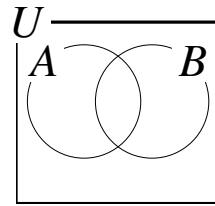
全体集合を  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  とし, そのうち 12 の約数である数の集合を  $A$ , 10 の約数である数の集合を  $B$  とする.

(1) 右のベン図に 1 から 12 までのすべての要素を書き入れなさい.

(2) 集合  $\bar{A}$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  を答えなさい.

(3) 次のうち, 正しいものをすべて選びなさい.

$3 \in A \cap B$ ,  $3 \in A \cup B$ ,  $\bar{B} \ni 4$ ,  $A \cap B \ni 2$ ,  $A \cup B \supseteq A$ ,  $A \supseteq A \cap B$



$U$  はコップのような形をしているので水がいっぱい入り, 要素の個数が多くなる和集合を表すと覚えると,  $\cup$ ,  $\cap$  の区別をつけやすい.

【練習 6 : 部分集合】

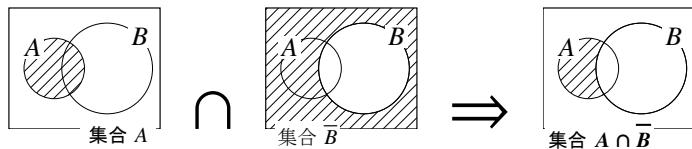
集合  $\{1, 2, 3\}$  の部分集合をすべて挙げよ.

【発展 7 : どんな集合でも成り立つ法則】

全体集合  $U$  に含まれる集合  $A$  について, 集合  $A \cap \bar{A}$ ,  $A \cup \bar{A}$  はどんな集合か. また,  $\bar{A}$  の補集合である  $\overline{\bar{A}}$  はどんな集合か.

### G. 「ベン図」による集合の図示

集合  $A \cap \bar{B}$  は、ベン図の  $A$ ,  $\bar{B}$  のどちらも斜線になる部分であるので、次のように図示できる。



### H. ド・モルガンの法則

たとえば、 $\overline{A \cap B}$  によって「 $A \cap B$  の補集合」を表す。この集合について、重要な法則がある。

#### 【暗記 8: 集合の性質～その1～】

- (1) 集合  $\overline{A \cap B}$ ,  $\overline{A \cup B}$  について、それぞれベン図を用いて図示しなさい。
- (2) 集合  $\overline{A \cap \bar{B}}$ ,  $\overline{A \cup \bar{B}}$ ,  $\overline{A \cup B}$  について、それぞれベン図を用いて図示しなさい。
- (3) (1), (2) で図示した集合のうち、等しい集合を2組選び、等号で結びなさい。

#### ド・モルガンの法則

どんな集合  $A$ ,  $B$  に関しても、次のド・モルガンの法則 (law of de Morgan) が成り立つ。

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

この法則を「補集合を表す線を切ると、 $\cap$  や  $\cup$  がひっくり返る」と覚えてもよい。

【練習 9：ベン図による図示とド・モルガンの法則】

(1) 集合  $\bar{A} \cap B$  をベン図を用いて図示しなさい。

(2) 全体集合を  $U = \{n \mid n \text{ は } 1 \text{ 桁の整数}\}$  とし、 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  とする。

$\bar{A} \cap B$ ,  $A \cup \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cup \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B}$  を、それぞれ要素を書き並べて表せ。

## 2. いろいろな集合の表現

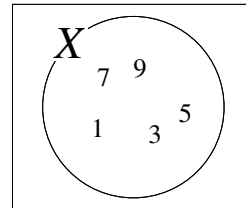
### A. 集合の表し方～内包的定義

集合  $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  は、要素の満たす条件を示す方法を用いて、次のように表すことができる\*8。

$$X = \left\{ a \mid a \text{ は } 10 \text{ 以下の正の奇数} \right\}$$

$a$  で要素を代表 ↑

↑ 要素が満たす条件



【例題 10】 集合  $A = \{a \mid a \text{ は } 18 \text{ の正の約数}\}$ ,  $B = \{p \mid p \text{ は } 20 \text{ 以下の正の素数}\}$  とする。

1. 集合  $A$ ,  $B$  を要素を書き並べる方法で表せ。      2.  $6 \in A$ ,  $6 \in B$  は正しいか、それぞれ答えよ。

3.  $Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{y \mid y \text{ は } \square \text{ の正の約数}\}$  において,  $\square$  に適する数字を答えよ。

\*8 このような書き方を内包的定義 (intensional definition) ともいう。



## B. 集合のいろいろな表現

たとえば、集合  $A = \{y \mid y \text{ は } 100 \text{ 以下の正の奇数}\}$  の要素を並べて書き表すと  $A = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$  となる。このように、集合の要素の数が多ときは…を用いて表すことがある\*9。

また、奇数は一般に  $2n - 1$  と表すことができ、式  $2n - 1$  は

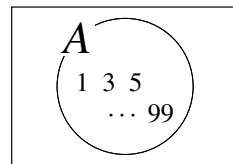
$$n = 1 \text{ を代入すれば, } 2 \cdot 1 - 1 = 1 \quad \leftarrow \text{記号“\cdot”は掛け算を表す}$$

$$n = 2 \text{ を代入すれば, } 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$n = 3 \text{ を代入すれば, } 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

⋮

$$n = 50 \text{ を代入すれば, } 2 \cdot 50 - 1 = 99$$



となるから、 $A = \{2n - 1 \mid 1 \leq n \leq 50, n \text{ は自然数}\}$  や  $A = \{2 \cdot 1 - 1, 2 \cdot 2 - 1, 2 \cdot 3 - 1, \dots, 2 \cdot 50 - 1\}$  と書いてもよい。このように、一つの集合に対していろいろな表現ができる。

また、要素の個数は無限にあってもよい\*10。

$$B = \{z \mid z \text{ は正の } 3 \text{ の倍数}\} = \{3n \mid n \text{ は自然数}\} = \{3, 6, 9, \dots\} = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots\}$$

**【例題 11】** 次の  に適する値・集合を答えなさい。

1. 式  $3n + 1$  は  $n = 1$  のとき  ア ,  $n = 2$  のとき  イ ,  $n = 3$  のとき  ウ ,  $n = 4$  のとき  エ である。

だから、集合  $C = \{3n + 1 \mid n = 1, 2, 3, 4\}$  の要素を書き並べて表すと、 $C =$   オ となる。

2. 式  $3n + 1$  は  $n = 30$  のとき  カ である。

だから、集合  $D = \{3n + 1 \mid n \text{ は } 30 \text{ 以下の自然数}\}$  の要素を書き並べて表すと、 $D =$   キ となる。



要素を書き並べるときに…を用いるは、たいてい、…の前に3つは要素を書き並べる。

**【例題 12】** 次の集合を、要素を書き並べる方法で表せ。

1.  $A = \{2k \mid k = 1, 2, 3, 4, 5\}$

2.  $B = \{2a + 1 \mid a \text{ は } 1 \text{ 桁の自然数}\}$

3.  $C = \{5a \mid a \text{ は } 100 \text{ 以下の自然数}\}$

4.  $D = \{2n - 1 \mid n \text{ は正の整数}\}$

\*9 …の部分に厳密さが欠けるという欠点はあるが、表現が具体的で分かり易いという利点を持つ。

\*10 要素が有限個の集合は**有限集合** (finite set)、要素が無限個存在する集合は**無限集合** (infinite set) といわれる。

【練習 13：集合の表し方～その 1～】

次の集合を、要素を書き並べる方法で表せ.

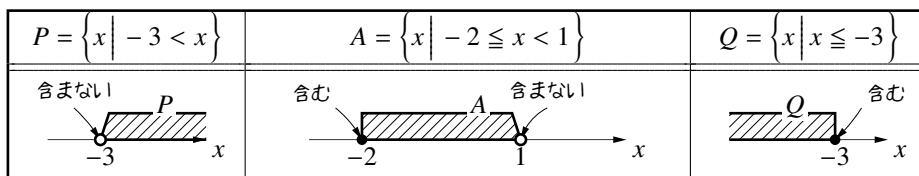
- i)  $A = \{2n - 1 \mid n \text{ は整数}, 1 \leq n \leq 5\}$       ii)  $B = \{2k \mid k \text{ は整数}, 1 \leq k \leq 50\}$   
 iii)  $C = \{2^n \mid n \text{ は自然数}, 1 \leq n \leq 6\}$       iv)  $D = \{2a - 1 \mid 0 \leq a \leq 3, a \text{ は整数}\}$

C. 実数を全体集合とする集合

実数全体を全体集合とした、 $A = \{x \mid -2 \leq x < 1, x \text{ は実数}\}$  のような集合を考えることもできる. このような集合では、要素を書き並べることはできない. 要素が無数に連続して存在するからである.

$$-1 \in A, 0 \in A, \frac{1}{2} \in A, -\sqrt{3} \in A, -2 \in A$$

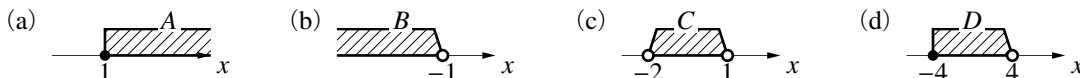
A のような集合を図示するには、数直線を用いて以下のように図示する.



不等号  $<$ ,  $>$  は、境目を「白丸」「斜め線」で表し、不等号  $\leq$ ,  $\geq$  は、境目を「黒丸」「垂直線」で表す.

【例題 14】

1. それぞれの図が表す集合を答えなさい.



2. 集合  $A = \{x \mid -1 < x \leq 2\}$  について、次の  $\square$  に  $\in$ ,  $\notin$  のいずれかを入れなさい.

$$0 \square A, 0.8 \square A, \frac{1}{2} \square A, -\sqrt{3} \square A, -1 \square A, 2 \square A$$

【練習 15：集合の表し方～その 2～】

全体集合を実数全体,  $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ ,  $Y$  を右下の数直線で表される集合とする.

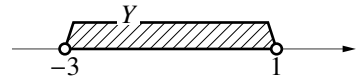
(1) 集合  $X$  を右の数直線に書き入れなさい.

(2)  $X \cap Y$ ,  $X \cup Y$  をそれぞれ求めなさい.

(3) 集合  $\bar{X}$  は次のどれに等しいか, 答えなさい.

- (a)  $\{x \mid x < -2\}$     (b)  $\{x \mid 2 \leq x\}$     (c)  $\{x \mid x \leq -2, 2 \leq x\}$     (d)  $\{x \mid x < -2, 2 < x\}$

(4) 集合  $\bar{Y}$  を答えなさい.



【発展 16：ド・モルガンの法則】

$A \cap B = \{x \mid -1 \leq x < 4\}$ ,  $A \cup B = \{x \mid -3 \leq x\}$  であるとき,  $\bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cup \bar{B}$  を求めよ.

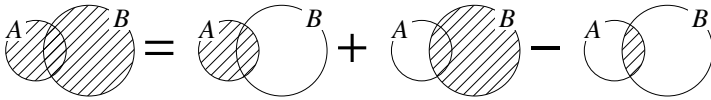
### 3. 集合の要素の個数

#### A. 集合の要素の個数

集合  $A$  の要素の個数を  $n(A)$  で表す (ただし, 集合  $A$  の要素は有限個であるとする). たとえば,  $A = \{1, 3\}$  ならば  $n(A) = 2$  である. また, 空集合の要素の個数は  $n(\emptyset) = 0$  と定める.

#### B. 和集合の要素の個数(包含と排除の原理)

和集合  $A \cup B$  の要素の個数は  $n(A \cup B)$  と表される. これは, 下のベン図を用いて, 次のように求められる.



#### 包含と排除の原理(2集合版)

2つの集合  $A, B$  に関して

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \underbrace{n(A \cap B)}_{A \cap B \text{ の要素の個数}}$$

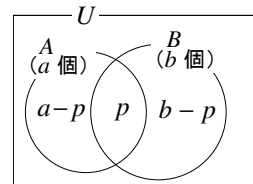
が成り立つ. これを<sup>ほうがん</sup>包含と<sup>はいじょ</sup>排除の原理 (principle of inclusion and exclusion) という.

特に,  $A \cap B = \emptyset$  のときには,  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  となる.

この法則は,  $n(A) = a, n(B) = b, n(A \cap B) = p$  とおいたときに

$$n(A \cap \bar{B}) = a - p, n(\bar{A} \cap B) = b - p$$

であることから確かめられる.



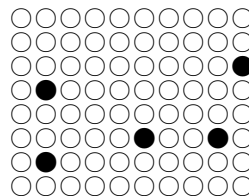
**【例題 17】** 40 人がいるクラスでアンケートをとった.

1. 兄がいるのは 12 人, 姉がいるのは 8 人, 兄も姉もいるのは 3 人だという. 兄か姉がいるのは全部で何人か.
2. クラス全員が, 電車か自転車で通学しており, 電車を使うのは 17 人, 自転車を使うのは 30 人だという. 電車も自転車も使うのは何人いるか.

**C. 補集合の要素の個数 ~ “着目しないもの”に着目する**

たとえば、右の丸のうち、白丸○の個数は

$$\begin{aligned} & (\text{全ての丸の個数}) - (\text{黒丸●の個数}) \\ & = 8 \times 10 - 5 = 75 \text{ 個} \end{aligned}$$



と求めるとよい。この考え方を集合に応用して、次を得る。

補集合の要素の個数

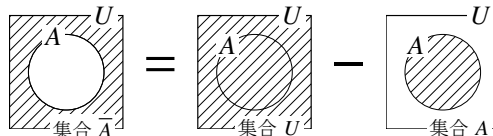
全体集合を  $U$  とする集合  $A$  と、その補集合  $\bar{A}$  の要素の個数について次が成り立つ。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$



この法則をベン図で表すと右図のようになる。

簡単な法則だが、よく使われる法則である。



**【例題 18】** 全体集合を  $U = \{x \mid x \text{ は } 100 \text{ 以下の自然数}\}$  とする。

$A = \{x \mid x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{ は } 5 \text{ の倍数}\}$  とするとき、次の値を求めよ。

1.  $n(A)$     2.  $n(B)$     3.  $n(A \cap B)$     4.  $n(A \cup B)$     5.  $n(\bar{A})$     6.  $n(\bar{B})$

【練習 19：補集合の要素の個数と包含と排除の原理～その 1～】

全体集合  $U$  と集合  $A, B$  について、

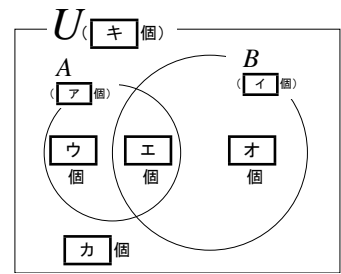
$$n(U) = 50, n(A) = 20, n(A \cup B) = 42, n(A \cap B) = 6$$

であるとき、以下の問いに答えよ。

(1) 右のベン図の  にあてはまる値を入れよ。

(2) 次の値を求めよ。

1)  $n(A \cap \bar{B})$     2)  $n(\bar{A} \cap \bar{B})$     3)  $n(A \cup \bar{B})$



【練習 20：補集合の要素の個数と包含と排除の原理～その 2～】

総世帯数が 191 のある地区では、新聞をとっている世帯が 170 ある。このうち A 新聞をとっている世帯は 89, B 新聞をとっている世帯は 108 ある。その他の新聞はこの地区には無いものとして、以下の問いに答えよ。

(1) この地区では新聞をとっていない世帯はいくつか。

(2) A, B 両方の新聞をとっている世帯はいくつか。

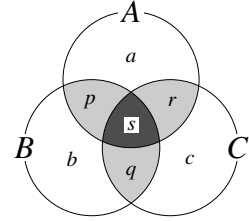
## 4. 3つの集合による関係

### A. 3つの集合によるベン図

#### 【暗記 21 : 3つ以上の集合によるベン図】

右の図のように,  $a, b, c, p, q, r, s$  に分かれている. 次の集合が表す部分を答えよ (たとえば, 集合  $A$  が表す部分は  $a, p, r, s$  になる).

- |                                 |                                 |                        |
|---------------------------------|---------------------------------|------------------------|
| 1. $(A \cup B) \cup C$          | 2. $A \cup (B \cup C)$          | 3. $(A \cap B) \cap C$ |
| 4. $A \cap (B \cap C)$          | 5. $A \cup (B \cap C)$          | 6. $A \cap (B \cup C)$ |
| 7. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ | 8. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ |                        |



### 集合の性質～その1～

集合  $A, B, C$  に関して次のことが成り立つ.

- i)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  ←括弧を省略して  $A \cup B \cup C$  と書く
- ii)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  ←括弧を省略して  $A \cap B \cap C$  と書く
- iii)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ,  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



iii) は式の分配法則  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$  と関連付けて理解できる.

### B. 3つの集合によるド・モルガンの法則

3集合の場合もド・モルガンの法則が成り立つ. たとえば

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B \cup C} &= \overline{(A \cup B) \cup C} && \leftarrow A \cup B \text{ を1かたまりとして考える} \\ &= \overline{A \cup B} \cap \overline{C} && \leftarrow A \cup B \text{ と } C \text{ について『ド・モルガンの法則』} \\ &= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} && \leftarrow \text{『ド・モルガンの法則』より, } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

【暗記 22 : 3 集合の場合のド・モルガンの法則】

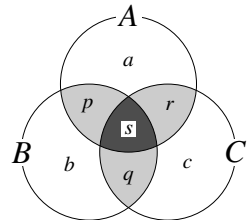
先の例にならって、 $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$  を示せ.

C. 3 つの集合による包含と排除の原理

$n(A \cup B \cup C)$  を求めるには、3 集合の場合の『包含と排除の法則 (p.10)』を用いる.

この等式について、右図を見ながら理解しよう.

$$\begin{aligned}
 & n(A \cup B \cup C) \\
 = & \underbrace{n(A) + n(B) + n(C)}_{\substack{p, q, r \text{ を 2 重に,} \\ s \text{ を 3 重に足してしまう}}} - \underbrace{n(A \cap B)}_{p, s \text{ を引く}} - \underbrace{n(B \cap C)}_{q, s \text{ を引く}} - \underbrace{n(C \cap A)}_{r, s \text{ を引く}} + \underbrace{n(A \cap B \cap C)}_{\substack{\text{引きすぎた} \\ s \text{ を足す}}}
 \end{aligned}$$



包含と排除の原理 (3 集合版)

3 つの集合  $A, B, C$  に関して、次の等式が成り立つ.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

【練習 23 : 補集合の要素の個数と包含と排除の原理 (3 集合版) ~ その 1 ~】

3, 5, 7 の少なくとも一つで割り切れる 1000 以下の自然数は、全部で何個あるか.



【発展 24 : 補集合の要素の個数と包含と排除の原理 (3 集合版) ~その2~】

300 人の高校生に A, B, C の 3 種のテストを行った. A テストに 102 人, B テストに 152 人, C テストに 160 人が合格したが, これらの中で, A, B 両テストに 42 人, B, C 両テストに 62 人, C, A 両テストに 32 人が合格している. 3 種のテストのどれにも合格しなかった人は 10 人であった. このとき, 3 種のテストにすべて合格した人は何人か.

## 1. 命題の基礎

## A. 数学とは何か？

「数学とは何か？」この質問に対する一つの答えとして、次のように言うことができる\*11。

「正しいか間違っているかが確定できる方法のみを用い、物事を扱う学問である」

たとえば「20歳という年齢は、若いと言えるか」という問題の答えは確定できない。答える人の価値観によって答えが異なる。だから、この問いは数学では扱われない\*12。

正しいか間違っているかが定まる問題のことを命題 (proposition) という\*13。つまり、数学で扱う問題は命題に限る。

【例題 25】 次の問題は命題ではないので、数学では扱われない。なぜ命題でないか、説明しなさい。

- 身長 190 cm のバスケットボールの選手がいる。この人の身長は高いだろうか？
- 2003 年にアメリカはイラクに侵攻した。これは正しい判断だったろうか？

## B. 真偽と反例

命題が正しいとき、その命題は真 (true) であるといい、命題が正しくないとき、その命題は偽 (false) であるという。命題が偽であるとき、その命題が正しくない例を反例 (counterexample) という。

例えば、命題「実数  $x$  が  $x^2 = 1$  を満たすなら  $x = 1$  に限る」は偽であり、その反例は  $x = -1$  である。

【例題 26】 次の命題について真偽を答え、偽であるものには反例を一つ挙げなさい。

- 1 m 40 cm は 1 m よりも長い
- 自然数は無限個存在する。
- 奇数を 2 倍すれば偶数である。
- 奇数と奇数を足すと奇数になる。

\*11 物理学、化学、生物学など、多くの自然科学においても「正しいか間違っているか」は重要であるが、いつも確定できるとは限らない。これらの科学においては、たとえば「実験の結果と一致しているか」もやはり重要である。

\*12 世の中には、正しいか間違っているか、完全に決定することができない問題も多い。しかし、正しいか間違っているかを完全に決定できる範囲だけで物事を考えても、有用なことがたくさんある。

\*13 未解決問題のように、将来的に正しいか間違っているかを確定できると考えられている問題も命題と言われる。

## 2. 命題を構成する「条件」

### A. 「仮定」の役割

「 $ab$  は 0 に等しいか？」という問いには真偽が定まらないが、次の 2 つはいずれも真偽が定まる。

- i) 「 $a = 0$  であるとき、 $ab$  は 0 に等しいか？」（真）
- ii) 「 $a, b$  とも正の数ならば、 $ab$  は 0 に等しいか？」（偽）

命題において、前提となる事柄を**仮定** (assumption)、真偽を確定するべき事柄を**結論** (conclusion) という。また、単独では真偽が定まらないが、命題の仮定や結論になりうる内容を**条件** (condition) という。たとえば、上の 2 つの命題は次のように表される。

- i) 「 $a = 0$ 」  $\Rightarrow$  「 $ab$  は 0 に等しい」 (真)
- ii) 「 $a, b$  とも正の数」  $\Rightarrow$  「 $ab$  は 0 に等しい」 (偽)  
(仮定) (結論)

このように、仮定と結論を結ぶ「であるとき」「ならば」などの言葉を、記号「 $\Rightarrow$ 」で表すこともある。

**【例題 27】** 以下のように仮定と結論が与えられた命題の、真偽を答えよ、偽であれば反例を一つあげよ。

- 1. 「仮定： $a, b$  は整数」「結論： $ab$  は整数」
- 2. 「仮定： $a + b$  は整数」「結論： $ab$  は整数」

### B. 命題「 $p \Rightarrow q$ 」

条件  $p$  を「 $x > 0$ 」、条件  $q$  を「 $x + 10 > 0$ 」とすると、命題「 $p \Rightarrow q$ 」とは命題「 $x > 0$  ならば  $x + 10 > 0$  である」のことであり、これは真である。

このように、一般に命題を「 $p \Rightarrow q$ 」と表すことが多い。ここで、文字  $p, q$  は条件を表す。

$p$ :	「 $x > 0$ 」,	$q$ :	「 $x + 10 > 0$ 」のとき	
命題	$p$	$\Rightarrow$	$q$	とは
	$\downarrow$		$\downarrow$	
命題	「 $x > 0$ 」ならば		「 $x + 10 > 0$ 」	のこと

**【例題 28】**

- 1.  $p$  : 「 $a = b$ 」,  $q$  : 「 $a^2 = b^2$ 」のとき、命題「 $p \Rightarrow q$ 」の真偽を答え、偽である場合は反例をあげよ。
- 2.  $p$  : 「 $ac = bc$ 」,  $q$  : 「 $a = b$ 」のとき、命題「 $p \Rightarrow q$ 」の真偽を答え、偽である場合は反例をあげよ。

### 3. 条件と集合

#### A. 「全体集合」の役割

命題「 $a$  は自然数とする.  $a+1$  は正である.」は真である.

しかし、「 $a+1$  は正である.」の一文に真偽を定めることはできない.  $a$  を自然数だと考えた人にとっては真であるが,  $a$  を整数だと考えた人には  $a = -2$  という反例があつて偽となるからである.

このように, 与えられた文字をどの範囲で考えているかを明示する必要がある\*14.

#### B. 条件の否定

条件  $p$  に対し, 条件「 $p$  でない」を  $p$  の否定 (negation) といい, 記号  $\bar{p}$  で表される.

例えば, 自然数  $m$  について, 条件  $p$  「 $m$  は 3 の倍数」の否定  $\bar{p}$  は「 $m$  は 3 の倍数でない」である.

また, 実数  $a$  について, 条件  $q$  「 $a \leq 10$ 」の否定  $\bar{q}$  は「 $a$  は 10 以下ではない」, つまり「 $10 < a$ 」である.

【例題 29】  $a$  は実数,  $n$  は自然数とする. 以下の条件を述べよ.

1. 条件  $p$  「 $n$  は 10 の倍数」の否定  $\bar{p}$
2. 条件  $q$  「 $n$  は奇数」の否定  $\bar{q}$
3. 条件  $r$  「 $3 \leq a$ 」の否定  $\bar{r}$
4. 条件  $s$  「 $4 < a$ 」の否定  $\bar{s}$

#### C. 条件の「または」と「かつ」

たとえば, 条件「 $a > 0$  または  $b > 0$ 」は, 「 $a > 0$  か  $b > 0$  のどちらかは成立する」ことを意味する.

一方, 条件「 $a > 0$  かつ  $b > 0$ 」は, 「 $a > 0$  と  $b > 0$  のどちらも成立する」ことを意味する.

「または」「かつ」をまとめると, 右のようになる\*15.

「 $p$  または  $q$ 」には「 $p$  も  $q$  も成立」する場合も含まれることに注意しよう,

○ : 「成立する」    × : 「成立しない」

	$p$	$q$	$p$ または $q$	$p$ かつ $q$
i)	○	○	○	○
ii)	○	×	○	×
iii)	×	○	○	×
iv)	×	×	×	×

【例題 30】 実数  $a, b$  について, 条件  $p$ : 「 $a > 0$ 」,  $q$ : 「 $b > 0$ 」とする.

1.  $a = 3, b = -1$  のとき, 条件「 $\bar{p}$ 」「 $p$  または  $q$ 」「 $p$  かつ  $q$ 」が成立するかどうか, それぞれ答えよ.
2.  $a = 2, b = 2$  のとき, 条件「 $\bar{p}$ 」「 $p$  または  $q$ 」「 $p$  かつ  $q$ 」が成立するかどうか, それぞれ答えよ.
3.  $a = 0, b = 0$  のとき, 条件「 $\bar{p}$ 」「 $p$  または  $q$ 」「 $p$  かつ  $q$ 」が成立するかどうか, それぞれ答えよ.

\*14 文脈から明らかなき場合は省略されることもある. とはいえ, 書く必要があるか迷ったら書いた方がよい.

\*15 論理学などにおいては, 条件の「または」「かつ」を記号  $\vee, \wedge$  で表すこともある. 高校数学ではほとんど用いられない.

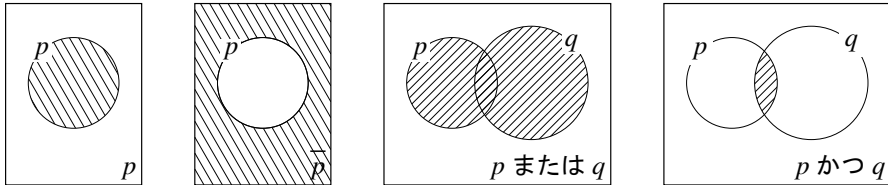
【例題 31】 次の  に、「または」「かつ」のどちらかを入れなさい。

1. 「 $a = 3, b = -1$  のとき  $a + b = 2$ 」は「 $a = 3$    $b = -1$  のとき  $a + b = 2$ 」と同じ意味である。
2. 「実数  $a, b$  について」は「 $a$  が実数   $b$  が実数のときについて」と同じ意味である。
3. 「 $x^2 = 1$  の解は  $x = 1, -1$ 」は「 $x^2 = 1$  の解は  $x = 1$    $x = -1$ 」と同じ意味である。

…カンマ (,) は「かつ」を意味することが多い。ただし、方程式の解を列挙するときなどは「または」を意味する。条件の意味を考えて判断しよう。

#### D. 条件と集合

全体集合  $U$  のうち、条件  $p$  が成立する  $U$  の要素の集合を、同じく  $p$  で表して、ベン図で図示することができる。



こうして、条件も集合と同じように考えることができ、特に次の事実を得る。

#### ド・モルガンの法則

どんな条件  $p, q$  に関しても、次のド・モルガンの法則 (law of de Morgan) が成り立つ。

$$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}, \quad p \text{ かつ } q \iff \overline{\overline{p} \text{ または } \overline{q}}$$

…「 $\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$ 」の具体例として、条件「 $a = 0$  または  $b = 0$  が成り立たない」ときを考えよう。これは、 $a \neq 0, b \neq 0$  の両方が成り立つときに限る。つまり「 $a \neq 0$  かつ  $b \neq 0$ 」でないといけない。

【例題 32】  $a, b$  は実数,  $m, n$  は整数とする。次の条件の否定を述べよ。

1.  $a = 1$  かつ  $b = 1$
2.  $a = 2$  または  $b = 2$
3.  $a \neq 3$  かつ  $b = 3$
4.  $m, n$  は偶数
5.  $m$  または  $n$  が 5 で割り切れる
6.  $a > 0$  または  $b < 0$

【練習 33 : または・かつ・否定】

(例) にならって右の表を埋めなさい.

ただし,  $\bigcirc$  は「成立する」,  $\times$  は「成立しない」を表す.

	$p$	$q$	$p$ かつ $q$	$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$ または $\overline{q}$
(例)	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
i)	$\bigcirc$	$\times$					
ii)	$\times$	$\bigcirc$					
iii)	$\times$	$\times$					

【練習 34 : または・かつ・否定～その 2～】

自然数  $a, b$  について, 以下の命題の真偽を答えよ. 偽である場合は反例を一つあげよ.

- (1)  $a, b$  が奇数ならば,  $ab$  は奇数である.
- (2)  $a$  または  $b$  が奇数ならば,  $ab$  は奇数である.
- (3)  $a$  が 3 で割り切れないならば,  $2a$  は 3 で割り切れない.
- (4)  $2a = 3b$  ならば,  $a$  は 3 の倍数,  $b$  は 2 の倍数である.

E. ⑨⑩ 「すべての」「ある」の否定

ある新幹線が事故を起こせば、「すべての新幹線は事故を起こさない」ことは否定される\*16.

一方、「すべての人が行方が分かっている」ことによって「行方不明者がいる」ことは否定される\*17.

一般に、「ある～」が「すべての～」の否定となり、「すべての～」が「ある～」の否定となる.

【⑨⑩ 35 : 「すべての」「ある」の否定】

- ① 条件「すべての自然数  $n$  について,  $(n+1)(n-1)$  は 4 で割り切れる」の否定を述べよ.
- ② 条件「ある実数  $x$  について,  $x^2 + 1 = 0$  である」の否定を述べよ.

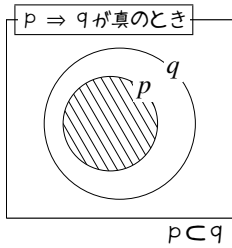
\*16 他のすべての新幹線が事故を起こさなくても, 否定になる.

\*17 ある人の行方がわかるだけでは否定にならない. すべての人の行方が分からないといけない.

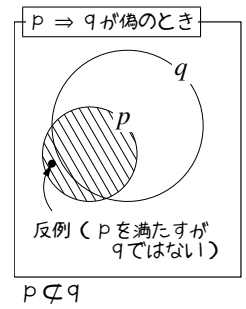
## 4. 必要条件と十分条件

### A. 命題 $p \Rightarrow q$ の真偽の図示

命題  $p \Rightarrow q$  が真であるとは、全体集合内の「 $p$  を満たす要素は全て  $q$  を満たす」ことになる。ベン図で表すと左下図のように、条件  $p, q$  は集合として  $p \subset q$  である。



逆に、命題  $p \Rightarrow q$  が偽ならば、その反例は「 $p$  を満たすが  $q$  を満たさない要素」である。それは、ベン図で表すと右図の●に相当する。



### B. 逆

仮定と結論を交換してできる命題を、**逆** (converse) の命題という。たとえば

「 $a = 1$  ならば、 $a^2 = 1$  である」 (真)

という命題の逆は、次のようになる。

「 $a^2 = 1$  ならば、 $a = 1$  である」 (偽)

上の例のように、もとの命題の真偽と、逆の命題の真偽が一致するとは限らない。

文字を使って表せば、命題「 $p \Rightarrow q$ 」の逆は、命題「 $q \Rightarrow p$ 」となる。

**【例題 36】** 以下の命題の真偽を答えよ。次に、逆の命題を書き、その真偽も答えよ。

1.  $x = 0$  ならば、 $x^3 = 0$  である。

2.  $x, y$  が有理数ならば、 $x + y$  は有理数である。

**【発展 37 : 逆はいつも正しいとは限らない】**

もとの命題が真であっても、逆の命題が偽であるかもしれないことは、次のように説明できる。

に適する式を答えなさい。

命題  $P$ :  $p \Rightarrow q$  が真であるとき、条件  $p, q$  には、集合として **ア** という関係が成り立つ。一方、命題  $P$  の逆 **イ** が成り立つには、条件  $p, q$  には、集合として **ウ** という関係が成り立たないといけない。

しかし、**ア** のときに **ウ** が成り立つとは限らないので、逆が成り立つとは限らない。

### C. 必要条件と十分条件

たとえば、「試験に通るには努力しないとイケない」としよう。このとき、「試験に通る」には「努力する」ことが必要である。

一方、「努力すれば必ず試験に通る」と仮定しよう。このとき、「試験に通る」には「努力する」ことで十分である\*18。

数学においても、真になる命題「 $p \Rightarrow q$ 」があれば、条件  $p$  と、条件  $q$  に「必要」「十分」と呼ばれる論理的な関係を考えることができる\*19。

#### 必要条件と十分条件

命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真であるとき、( $p$  に対して)  $q$  は**必要条件** (necessary condition) であるといい、命題「 $q \Rightarrow p$ 」が真であるとき、( $p$  に対して)  $q$  は**十分条件** (sufficient condition) であるという。命題「 $p \Rightarrow q$ 」も「 $q \Rightarrow p$ 」も真であるときは、( $p$  に対して)  $q$  は**必要十分条件** (necessary and sufficient condition) である、または、 $p$  と  $q$  は**同値** (equivalence) である、という。

**【例題 38】**  $a, b$  は整数とする。条件  $p$ : 「 $a, b$  はともに奇数」、 $q$ : 「 $ab$  は奇数」、 $r$ : 「 $a + b$  は偶数」とする。次の□に、「真」「偽」「ある」「ない」のいずれかで答えよ。

- 命題  $p \Rightarrow q$  は **ア** であり、命題  $q \Rightarrow p$  は **イ** である。  
よって、( $p$  に対して)  $q$  は必要条件で **ウ**。また、十分条件で **エ**。
- 命題  $q \Rightarrow r$  は **オ** であり、命題  $r \Rightarrow q$  は **カ** である。  
よって、 $r$  は ( $q$  に対して) 必要条件で **キ**。また、十分条件で **ク**。
- $r$  は、 $p$  について必要条件で **ケ**。また、十分条件で **コ**。  
なぜなら、命題  $p \Rightarrow r$  は **サ** であり、命題  $r \Rightarrow p$  は **シ** であるから。
- $p$  と  $q$  は同値で **ス**。 $q$  と  $r$  は同値で **セ**。 $r$  と  $p$  は同値で **ソ**。

… 「( $p$  に対して)  $q$  は必要条件」という表現は、以下のいずれとも同じ意味である。

- $q$  は  $p$  に対して必要条件
- $q$  は  $p$  の必要条件
- $q$  は  $p$  について必要条件

何は必要条件であるのかを、読み間違えないようにしよう。

\*18 もちろん、これがいつも成り立つとは限らない。試験が難しすぎれば、「試験に通る」には「努力する」ことで十分とは限らない。

\*19 もう 1 つ別の例を挙げておく。たとえば、「オリンピックの金メダリストは努力している」ことは正しいと認める。そうすれば、「努力」しないと「金メダル」がとれない。つまり、「努力」は「金メダル」の必要条件である。また、ある人の「オリンピックで金メダルを取りました」は、その人が「努力した」ことの十分な根拠と考えてよい。つまり、「金メダル」は「努力した」の十分条件である。





【練習 40：必要条件と十分条件～その 1～】

次の□に、①から④のいずれかを選んで答えなさい。

(1)  $x^2 < 1$  は、 $x < 1$  であることの□。

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形であることは、 $AB \parallel DC$  であることの□。

(3)  $a < 1, b < 1$  であることは、 $ab < 1$  であることの□。

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが十分条件でない

③ 十分条件であるが必要条件でない

④ 必要条件でも十分条件でもない

E. 必要条件・十分条件の調べ方

5. 逆・裏・対偶

命題「 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ 」を  $p \Rightarrow q$  の裏 (converse of contraposition) という。たとえば

「 $a = 1$  ならば、 $a^2 = 1$  である」 (真)

という命題の裏は、次のようになる。

「 $a \neq 1$  ならば、 $a^2 \neq 1$  である」 (偽)

上の例のように、もとの命題の真偽と、裏の命題の真偽が一致するとは限らない。

【例題 41】 以下の命題の真偽を答えよ。次に、裏の命題を書き、その真偽も答えよ。

1.  $x = 0$  ならば、 $x^3 = 0$  である。

2.  $x, y$  が有理数ならば、 $x + y$  は有理数である。

### A. 対偶とは何か

命題「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」を  $p \Rightarrow q$  の対偶 (contraposition) という。たとえば

「 $a = 1$  ならば、 $a^2 = 1$  である」 (真)

という命題の対偶は、次のようになる。

「 $a^2 \neq 1$  ならば、 $a \neq 1$  である」 (真)

【例題 42】 以下の命題の対偶を書き、その真偽も答えよ。

1.  $x = 0$  ならば、 $x^3 = 0$  である。

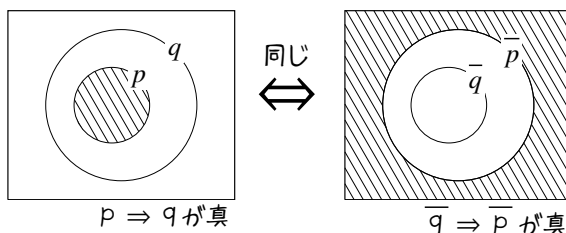
2.  $x, y$  が有理数ならば、 $x + y$  は有理数である。

### B. 対偶の真偽は保たれる

もとの命題の真偽と、対偶の命題の真偽は必ず一致する。

p.21 の A. のような図を用いて、右の 2 つの図から考えてみよう。どちらも、条件  $p$  (斜線部分) が  $q$  に含まれていることがわかる。

補足 (p.33) に、より詳しい証明がある。

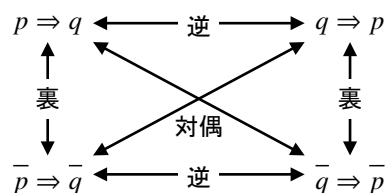


### C. 逆・裏・対偶のまとめ

命題  $\bar{p}, \bar{q}$  の否定は、もとの命題  $p, q$  であるから、命題  $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$  の対偶は  $p \Rightarrow q$  である。つまり、対偶の対偶はもとに戻る。

また、命題  $q \Rightarrow p$  の対偶は命題  $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$  になる。このことから、逆の対偶は裏になることも分かる。

逆・裏・対偶の関係をまとめると、右図のようになる。



【例題 43】 命題「 $x = 2$  ならば  $x^2 = 4$  である」を  $P$  とし、 $P$  の逆・裏・対偶の命題をそれぞれ  $P_1, P_2, P_3$  とする。  $P_1, P_2, P_3$  の命題を書き、それらの真偽も答えよ。

【練習 44 : 対偶の真偽は保たれる】

「背が高い友人A」と待ち合わせしている人の考えとして正しくなるよう、選択肢から選びなさい。

「向こうから誰かが来る。その誰かは、背が  $\begin{cases} \text{高い} \\ \text{低い} \end{cases}$  ので、友人Aで  $\begin{cases} \text{ある} \\ \text{ない} \end{cases}$  .」

【練習 45 : 逆・裏・対偶】

以下の命題の、逆・裏・対偶の命題を書きなさい。また、それぞれについて真偽を答えなさい。

ただし、(4)の「 $\triangle ABC = \triangle POR$ 」は「 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の面積が等しい」を意味する。

(1) 「 $x = 1$ 」 $\Rightarrow$ 「 $x^2 - x = 0$ 」

(2) 「 $x, y$ は整数」 $\Rightarrow$ 「 $xy$ は整数」

(3) 「 $x + y = 5$ 」 $\Rightarrow$ 「 $x = 2$ かつ $y = 3$ 」

(4) 「 $\triangle ABC = \triangle POR$ 」 $\Rightarrow$ 「 $\triangle ABC \equiv \triangle POR$ 」

## 1.3 証明

どんな命題にも通用する証明方法は無い。

しかし、多くの証明に使われる基本的な方法や、ある形の命題にはきわめて有効な証明方法はある。

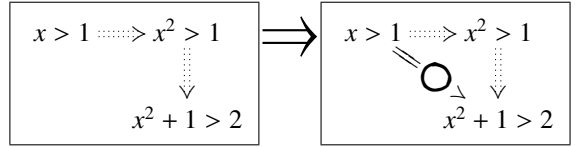
それらの中には、普段、人に説明する場面でも有効な方法論もある。

# 1. 証明の基礎

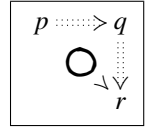
## A. $p \Rightarrow q \Rightarrow r$

たとえば, 次の2つの命題は真である.

- $x > 1$  ならば  $x^2 > 1$  である.
- $x^2 > 1$  ならば  $x^2 + 1 > 2$  である.



上の2つの命題から出来る, 新しい命題「 $x > 1$  ならば  $x^2 + 1 > 2$  である」も真になる. 一般に, 命題  $p \Rightarrow q$  と  $q \Rightarrow r$  が真ならば, 新しい命題  $p \Rightarrow r$  も真である.



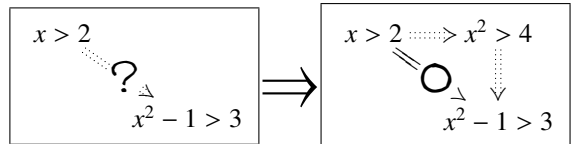
**【例題 46】** 次の2つの正しい命題から, 新しい命題を作りなさい.

1. 「 $x^2 - x - 2 = 0$  ならば  $x = 2, -1$  である」 「 $x = 2, -1$  ならば  $x^3 - 3x - 2 = 0$  である」
2. 「 $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5}$  ならば, 定数  $k$  を用いて  $a = 3k, b = 2k, c = 5k$  と表せる」  
「定数  $k$  を用いて  $a = 3k, b = 2k, c = 5k$  と表せるならば,  $a : b : c = 3 : 2 : 5$  である」

## B. 三段論法

たとえば, 命題「 $x > 2$  ならば  $x^2 - 1 > 3$ 」を証明するには, 次の2段階に分けて考えればよい.

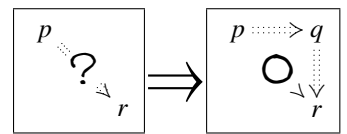
- $x > 2$  ならば  $x^2 > 4$  であり,
- $x^2 > 4$  ならば  $x^2 - 1 > 3$  である.



この考え方のポイントは, 条件「 $x^2 > 4$ 」を間に挟んだことにある.

命題  $p \Rightarrow r$  が真であることを示すために, 新たな条件  $q$  を考え, 命題  $p \Rightarrow q$  と命題  $q \Rightarrow r$  の両方を示してもよいと分かる.

この命題の証明方法を三段論法 (syllogism) という.



**【例題 47】** 命題「 $a$  が偶数ならば  $a^2$  は偶数である」の証明が完成するよう,  に適する語句を答えなさい.

仮定より, 整数  $k$  を用いて  $a = 2k$  と表すことができる.

$a = 2k$  ならば  $a^2 =$   となって  $a^2$  は  と分かる. よって, 命題は正しいと証明された.



三段論法における中間的な条件  $q$  を見つけることは, 問題によって異なる.

### C. 同値であることの証明

「 $p$  と  $q$  が同値である」という命題を示すには、2つの命題「 $p \Rightarrow q$ 」「 $q \Rightarrow p$ 」を証明すればよい。

☞ 命題「 $p \Rightarrow q$ 」と「 $q \Rightarrow p$ 」はまとめて、命題「 $p \Leftrightarrow q$ 」とも表される。

**【例題 48】**  $a, b$  を整数とする. 2つの条件「 $a-b$  が偶数である」「 $a+b$  が偶数である」は同値であることを示そう.

まず、「 $a-b$  が偶数ならば  $a+b$  が偶数である」ことを示す.

$a-b$  は偶数なので  $a-b=2m$  ( $m$  は整数) とおく.  $a-b$  に  $\boxed{\text{ウ}}$  を足せば  $a+b$  になるので

$$a+b=2m+\boxed{\text{ウ}}=2(\boxed{\text{エ}})$$

である.  $\boxed{\text{エ}}$  は整数なので,  $a+b$  は偶数である.

次に, 逆の「 $a+b$  が偶数ならば  $a-b$  が偶数である」ことを示す.

$a+b$  は偶数なので,  $a+b=2n$  ( $n$  は整数) とおくと

$$a-b=2n-\boxed{\text{ウ}}=2(\boxed{\text{オ}})$$

であり,  $\boxed{\text{オ}}$  は整数なので  $a-b$  も偶数である.

以上から, 2つの条件「 $a-b$  が偶数である」「 $a+b$  が偶数である」は同値であることが示された.

#### 【練習 49 : 同値であることの証明】

$a, b$  を整数とする.  $a+2b$  が 4 の倍数であることと  $a-2b$  が 4 の倍数であることは, 同値な条件であることを示せ.

## 2. 対偶を用いた証明

もとの命題と対偶の命題は真偽が一致した (p.25). そこで, 命題  $p \Rightarrow q$  の証明が難しいときには, 命題  $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$  を証明してもよい.

### 【暗記 50 : 対偶証明法】

$a^2$  が奇数ならば  $a$  が奇数であることを, 対偶法を用いて示せ.

【例題 51】 平面上の 3 点 A, B, P がある. 以下の  に当てはまる文章・言葉を答えよ.

「 $\angle APB \neq 90^\circ$  ならば, 線分 AB を直径とする円の周上に P はない」の対偶は  であり, これは  の定理から正しい. よって, もとの命題も正しいことが分かる.

### 【暗記 52 : $x = a$ かつ $y = b$ と同値な条件】

実数  $x, y$  について, 命題 「 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$  ならば  $x = 1$  かつ  $y = 1$ 」を対偶を用いて示せ.



上の命題の逆も成立する. 同じようにして, 一般に, 実数  $x, y, a, b$  について 「 $x = a$  かつ  $y = b$ 」 と 「 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ 」 は同値と示され, この事実自体が証明に用いることもある. 詳しくは p.34 を参照のこと.

### 3. 背理法

#### A. 背理法とは何か

命題  $p \Rightarrow q$  を示すのに、以下のように証明を進めてもよい。

- i. 仮定  $p$ のもと、条件  $q$  が成り立たないと仮定する。
- ii. i. のとき、つじつまが合わないこと、すなわち矛盾 (contradiction) を導く。
- iii. 条件  $q$  が成り立たないと仮定したのが間違いだったので、条件  $q$  が成り立っている、と結論づける。

この証明方法を<sup>はいりほう</sup>背理法 (reduction to absurdity) という\*21。

【例題 53】  $a + b = 2$  のとき、 $a$  または  $b$  は 1 以上であることを示せ。

… 命題  $p \Rightarrow q$  を背理法で示すとき、条件  $q$  が成り立たないと仮定して話を進めるが、仮定である  $p$  を否定しないように注意しよう。結果的には、条件  $p$  と条件  $\bar{q}$  が同時に成り立つと仮定して、話を進めることになる。

【暗記 54 :  $x = a$  または  $y = b$  と同値な条件】

実数  $x, y$  について、命題「 $(x - 1)(y - 1) = 0$  ならば  $x = 1$  または  $y = 1$ 」を背理法を用いて示せ。

… 上の命題の逆も成立する。同じようにして、一般に、実数  $x, y, a, b$  について「 $x = a$  または  $y = b$ 」と「 $(x - a)(y - b) = 0$ 」は同値と示され、この事実自体が証明に用いることもある。詳しくは p.35 を参照のこと。

\*21 この証明が有効であるのは、命題は真か偽かに定まることに由来する。

命題「 $p \Rightarrow q$ 」か命題「 $p \Rightarrow \bar{q}$ 」のどちらかは真である。そこで、「 $p \Rightarrow q$ 」の真を示すために、「 $p \Rightarrow \bar{q}$ 」の偽を示すのである。



## B. 無理数であることの証明

ある数が無理数であることを示すには、背理法を用いる\*22.

「無理数どうしの足し算や引き算が無理数になる」ことは偽なので、書いてはいけない\*23.

一方、有理数どうしの四則計算が有理数になることは、断りなく用いても良い.

### 【暗記 55 : 無理数であることの証明】

$2\sqrt{2}-3$  が無理数であることを示せ. ただし,  $\sqrt{2}$  が無理数であることは用いてもよい.

### 【練習 56 : 背理法～その1～】

$\frac{\sqrt{3}+2}{4}$  が無理数であることを示せ. ただし,  $\sqrt{3}$  が無理数であることは用いてもよい.

\*22 ある数  $x$  が無理数であることの定義が「 $x$  が分数では表せないこと」である. だから,  $x$  が無理数であることを示すには, 基本的に「 $x$  が有理数である (分数で表すことができる)」と仮定して矛盾を導くしかない.

\*23 たとえば, 2 つの無理数  $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$  について, 互いに足しても掛けても割っても無理数にならない.

【発展 57：背理法～その2～】

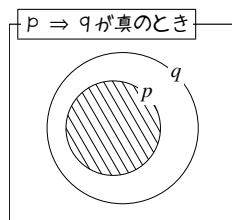
$\sqrt{2} + \sqrt{3}$  が無理数であることを示せ。ただし、 $\sqrt{6}$  が無理数であることは用いてもよい。



## 1.4 第1章の補足



# 1. 「対偶の真偽は保たれる」ことの証明



## A. 「 $p \Rightarrow q$ は真である」の言い換え

「 $p \Rightarrow q$  が真である」は「条件  $\bar{p} \cup q$  は常に真である」と言い換えられる。  
これは、p.21 で学んだベン図でも確認することが出来る。

…むしろ逆に「 $p \Rightarrow q$  が真である」を「条件  $\bar{p} \cup q$  は常に真である」として定義することもある。

## B. 「すべての命題は真か偽か定まる」ことの言い換え

p.16 「数学とは何か？」にあるように、数学においては「真偽が定まる命題」しか考えない。  
このことは、次のように表すことができる。

「どんな命題  $p$  についても、 $p \cup \bar{p}$  は必ず真である」

これを排中律 (law of excluded middle) といい、これを用いて、次が成立すると分かる。

「条件  $p$  の否定の否定は、条件  $p$  と同値である」

直感的に、これが正しいことは分かるだろうが、排中律を使って厳密に示すことは、かなり難しい\*24。

## C. 「対偶の真偽は保たれる」ことの証明

次の3つの事実から、命題  $p \Rightarrow q$  の真偽と命題  $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$  の真偽は一致する。

- (I) (上の A. より) 「 $p \Rightarrow q$  が真である」と「条件  $\bar{p} \cup q$  は常に真である」は同値である。
- (II) (上の B. より) どんな命題  $p$  についても、同値関係  $p \iff \bar{\bar{p}}$  が成り立つ
- (III) どんな命題  $p, q$  についても、 $p \cup q$  と  $q \cup p$  の真偽は必ず一致する

### 対偶の真偽は保たれる

どんな条件  $p, q$  に関しても、命題「 $p \Rightarrow q$ 」と、その対偶「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」は真偽が一致する。

(証明) 「命題  $p \Rightarrow q$  が真である」  
 $\iff$  「 $\bar{p} \cup q$  は常に正しい」 (上の (I) より)  
 $\iff$  「 $q \cup \bar{p}$  は常に正しい」 (上の (III) より)  
 $\iff$  「 $\bar{q} \cup \bar{p}$  は常に正しい」 (上の (II) より)  
 $\iff$  「命題  $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$  は真である」 (上の (I) より) ■

\*24 「厳密に」とは、ベン図などを使わず、記号の定義のみ用いることを意味する。この  $p \iff \bar{\bar{p}}$  を示すには、「 $q \Rightarrow r$  が真ならば、 $p \cup q \Rightarrow p \cup r$  が真である …… ①」を認める必要がある。

そのうえで、概略を示す。まず「排中律が等しい事」を言い換えて「 $p \Rightarrow \bar{\bar{p}}$ 」が示される。逆の「 $\bar{\bar{p}} \Rightarrow p$ 」を示すには「 $\bar{\bar{p}} \cup p$ 」を示せばよい。それには、たった今示した  $p \Rightarrow \bar{\bar{p}}$  と①から  $\bar{p} \cup p \Rightarrow \bar{\bar{p}} \cup p$  が正しいので、これに排中律などを用いればよい。

## 2. 「または」「かつ」の証明

「 $q$  かつ  $r$ 」を示す方が、「 $q$  または  $r$ 」を示すよりも、分かりやすい。

### A. 基本的な「 $q$ かつ $r$ 」の証明

一般に、「 $q$  かつ  $r$ を示す」ためには、「 $q$ であること」「 $r$ であること」をどちらも示せばよい。

### B. $x = a$ かつ $y = b$ の証明

p.29 で学んだように、「 $x = a$  かつ  $y = b$ 」と「 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$ 」は同値である。

そのため、「 $x = a$  かつ  $y = b$ 」を示すために、「 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$ 」を示してもよい。

特に、 $x = y = z$ を示すために、「 $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$ 」を示すこともある。

#### 【練習 58 : 「かつ」の証明】

- (1)  $k$  は自然数とする.  $n = 2k + 1$  のとき,  $n^2 - n$  は偶数であり, かつ,  $n^2 - 1$  は 8 で割り切れることを示せ. かつ,  $n^4 - 1$  も 16 で割り切れることを示せ.
- (2)  $x^2 + y^2 = x + y = 2$  のとき,  $x = 1$  かつ  $y = 1$  であることを示せ.
- (3)  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$  のとき,  $x = y = z$  であることを示せ.

### C. 基本的な「 $q$ または $r$ 」の証明

一般に、「 $q$  または  $r$  を示す」ためには、「条件  $q$  が成り立たないならば  $r$  である」ことを示せばよい\*25.

【練習 59 : 「または」の証明～その 1～】

- (1)  $ac = bc$  ならば,  $c = 0$  または  $a = b$  を示せ.
- (2)  $ab = 0$  ならば,  $a = 0$  または  $b = 0$  を示せ.

### D. $x = a$ または $y = b$ の証明

p.30 で学んだように, 「 $x = a$  または  $y = b$ 」と 「 $(x - a)(y - b) = 0$ 」は同値である.

そのため, 「 $x = a$  または  $y = b$ 」を示すために 「 $(x - a)(y - b) = 0$ 」を示してもよい.

【練習 60 : 「または」の証明～その 2～】

$ab + 1 = a + b$  のとき,  $a = 1$  または  $b = 1$  を示せ.

【発展 61 : 「少なくとも 1 つは 1」の証明】

$a + b + c = abc$ ,  $ab + bc + ca = -1$  のとき,  $a, b, c$  の少なくとも 1 つは 1 であることを示せ.

\*25 もしくは「条件  $r$  が成り立たないならば  $q$  である」ことを示せばよい.

# 索引

- 裏, 24
- 円順列, 53
- オイラー線, 121
- 外延的定義, 2
- 階乗, 49
- 外心, 114
- 外接円, 114
- 外分, 106
- 確率, 80
- 確率の加法定理, 86
- 確率の木, 91
- 確率分布, 100
- 仮定, 17
- 偽, 16
- 期待値, 101
- 逆, 21
- 共通部分, 2
- 空集合, 2
- 組合せ, 44, 57
- 結論, 17
- 根元事象, 82
- 三段論法, 27
- 試行, 80
- 事象, 80
- シムソン線, 127
- 集合, 1
- 重心, 118
- 従属, 92
- 従属試行, 92
- 十分条件, 22
- 樹形図, 39
- 数珠順列, 55
- 順列, 44, 48
- 条件, 17
- 条件付き確率, 92
- 商の法則, 55
- 真, 16
- 真部分集合, 3
- 垂心, 120
- 正弦定理, 116
- 積事象, 86
- 積の法則, 39
- 接弦定理, 128
- 接線
- 共通接線, 136
- 接線の長さ, 111
- 全事象, 80
- 全体集合, 1
- 属する, 3
- 素数, 6
- 対偶, 25
- 大数の法則, 79
- 重複組合せ, 68
- 重複試行 (= 反復試行), 96
- 重複順列, 45
- 同値, 22
- 同様に確からしい, 80
- 独立, 92
- 独立試行, 92
- ド・モルガンの法則, 5, 19, 90
- 内心, 109, 112
- 内接円, 112
- 内分, 106
- 内包的定義, 6
- 2 項係数, 55
- 2 項定理, 72
- ネックレス順列, 55
- 場合の数, 37
- 排中律, 33
- 排反, 86
- 背理法, 30
- パスカルの三角形, 77
- 反復試行 (= 重複試行), 96
- 反例, 16
- 必要十分条件, 22
- 必要条件, 22
- 否定, 18
- 等しい, 3
- 含む, 3
- 部分集合, 3
- ベン図, 1
- 包含と排除の原理, 10
- 傍心, 109, 120
- 傍接円, 120
- 方べきの定理, 130
- 補集合, 2
- 無作為に, 80
- 矛盾, 30
- 命題, 16
- 有限集合, 7
- 要素, 1
- 余事象, 88
- 和事象, 86
- 和集合, 2