

# 13th-note 数学B

## ギリシア文字について

24種類あるギリシア文字のうち、背景が灰色である文字は、数学Bで用いられることがある。

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	$\alpha$	nu	ニュー	N	$\nu$
beta	ベータ	B	$\beta$	xi	クシー, グサイ	$\Xi$	$\xi$
gamma	ガンマ	$\Gamma$	$\gamma$	omicron	オミクロン	O	$o$
delta	デルタ	$\Delta$	$\delta$	pi	パイ	$\Pi$	$\pi, \varpi$
epsilon	イプシロン	E	$\epsilon, \varepsilon$	rho	ロー	P	$\rho, \varrho$
zeta	ゼータ	Z	$\zeta$	sigma	シグマ	$\Sigma$	$\sigma, \varsigma$
eta	イータ	H	$\eta$	tau	タウ	T	$\tau$
theta	シータ	$\Theta$	$\theta, \vartheta$	upsilon	ユプシロン	$\Upsilon$	$\upsilon$
iota	イオタ	I	$\iota$	phi	ファイ	$\Phi$	$\phi, \varphi$
kappa	カッパ	K	$\kappa$	chi	カイ	X	$\chi$
lambda	ラムダ	$\Lambda$	$\lambda$	psi	プシー, プサイ	$\Psi$	$\psi$
mu	ミュー	M	$\mu$	omega	オメガ	$\Omega$	$\omega$

この教材を使う際は

- 表示：原著者のクレジット（「13th-note」または「13th-note & www.ftext.org」）を表示してください。
- 非営利：この教材を営利目的で利用してはいけません。ただし、学校・塾・家庭教師の授業で利用するための無償配布は可能です。
- 継承：この教材を改変した結果生じた教材には、必ず、原著者のクレジット（「13th-note」または「13th-note & www.ftext.org」）を表示してください。



---

# 目次

第 1 章	平面のベクトル	1
§1.1	ベクトルの基礎	1
§1.	ベクトルの定義	1
§2.	ベクトルの演算～定数倍・足し算・引き算	2
§1.2	ベクトルの成分表示	6
§1.	ベクトルを座標平面上に配置する	6
§2.	成分表示されたベクトルの演算	8
§1.3	ベクトルの平行と一次独立	10
§1.	ベクトルにおける「平行」	10
§2.	平面上の「全ての」ベクトルを表す	12
§1.4	ベクトルの内積	14
§1.	ベクトルの内積とは何か	14
§2.	ベクトルの内積の利用（1）～ベクトルの垂直条件・なす角の計算	16
§3.	ベクトルの内積の利用（2）～内積を掛け算のように扱う	18
§1.5	位置ベクトル	22
§1.	位置ベクトルとは	22
§2.	位置ベクトルを用いた公式	22
§3.	有向ベクトルと位置ベクトルの関係	26

# 第1章 平面のベクトル



向きのある線分がベクトルである.

力の様子（手で物を押す，紐が物を支える，風が吹く，など）を考えると，私たちは力の大きさだけでなく向きも考える．これが，ベクトルとも言える．

高校数学では主に，図形を調べる強力な道具として，ベクトルを学ぶ．ベクトルの大きな利点の一つは，平面図形にも空間図形にも，同じような手法が使えることにある．

## 1.1 ベクトルの基礎

### 1. ベクトルの定義

ベクトルにおいては，線分  $AB$  と線分  $BA$  を区別する．

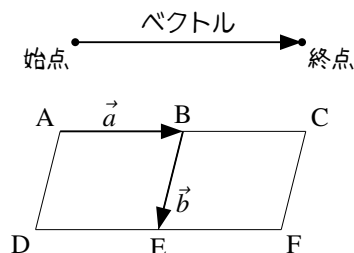
#### A. 始点と終点

向きのある線分をベクトル (vector) と言い，ベクトルの始まる点を始点 (initial point)，終わる点を終点 (terminal point) と言う．

ベクトルを文字で表す方法は2つある．

1つは， $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のように，アルファベット小文字1文字の上に右向き矢印を付けて表す方法である．

もう1つは始点と終点を用いる方法である．たとえば，右図の  $\vec{a}$  は始点が  $A$ ，終点が  $B$  であるから  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  とも表される\*1．同様に， $\vec{b} = \overrightarrow{BE}$  である．

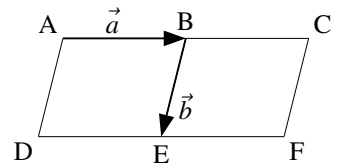


\*1  $\overrightarrow{AB}$  の読み方は「ベクトル  $\overrightarrow{AB}$ 」となる．

## B. 等しいベクトル・逆ベクトル

向きも長さも等しいとき、2つのベクトルは**等しい** (equal) という。たとえば、下図の  $\vec{a}$  と  $\overrightarrow{DE}$  は向きも長さも等しいから  $\vec{a} = \overrightarrow{DE}$  である。このように、ベクトルが等しいことは等号 = を用いて表す。

一方、長さが等しく向きが逆のベクトルを**逆ベクトル**という。たとえば、右図において  $\overrightarrow{DA}$  は  $\vec{b}$  の逆ベクトルである。このことは、 $\overrightarrow{DA} = -\vec{b}$  と表される (p.2)。



## C. ベクトルの大きさ

ベクトルを、線分として見たときの長さを、ベクトルの**大きさ**と言い、絶対値記号  $|\quad|$  を付けて表す。たとえば、右上の図で線分 AB の長さが 2 のとき、ベクトルを用いて  $|\vec{a}| = 2$  と表す。

## D. 単位ベクトル・零ベクトル

長さが 1 のベクトルを**単位ベクトル** (unit vector) という。

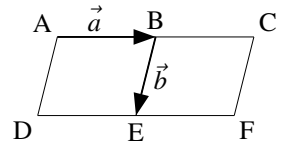
また、長さが 0 のベクトルを**零ベクトル** (null vector, zero vector) と言い、 $\vec{0}$  で表す。 $\vec{0}$  を始点と終点<sup>ゼロ</sup>が等しいベクトルと定義してもよい。

【例題 1】 右の図の  $\square ABED$ ,  $\square BCFE$  において、AB, AD, BC の長さを全てとする。

1.  $\vec{a}$  と等しいベクトル,  $\vec{b}$  の逆ベクトルを下の中から全て選びなさい。

$\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{DE}$ ,  $\overrightarrow{EF}$ ,  $\overrightarrow{FC}$ ,  $\overrightarrow{CB}$

2.  $|\vec{b}|$ ,  $|\overrightarrow{FD}|$ ,  $|\overrightarrow{CC}|$  を求めよ。



【解答】

1.  $\vec{a} = \overrightarrow{DE}$ ,  $\overrightarrow{EF}$ ,  $\vec{b}$  の逆ベクトルは  $\overrightarrow{FC}$

2.  $|\vec{b}| = 5$ ,  $|\overrightarrow{FD}| = 10$ ,  $|\overrightarrow{CC}| = 0$

◀ 零ベクトルは大きさ 0

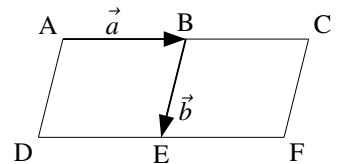
## 2. ベクトルの演算～定数倍・足し算・引き算

ベクトルは、何倍かしたり、足したり引いたりできる。また、文字式のように扱える。

### A. ベクトルの定数倍

ベクトル  $\vec{a}$  の長さを  $k$  倍したベクトルは  $k\vec{a}$  と表わされる。たとえば、右上図において  $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a}$ ,  $\frac{1}{2}\overrightarrow{DF} = \vec{a}$  である。

$k$  は負の値でもよい。その場合は、向きが逆になる。特に  $\vec{a}$  の  $-1$  倍は、 $\vec{a}$  の逆ベクトル  $-\vec{a}$  になる\*2。たとえば、右図において、 $\overrightarrow{ED} = -\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{FD} = -2\vec{a}$ ,  $\vec{a} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$  になる。



\*2  $\vec{a}$  の逆ベクトルを  $-\vec{a}$  と表わしてよいと分かる。

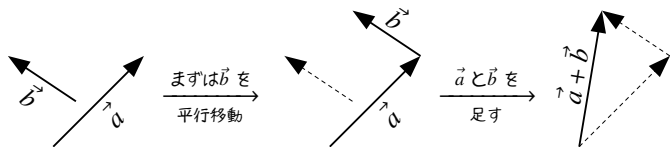
## B. ベクトルの和の定義

$\vec{AB} + \vec{BE}$  を「A で始まり B で終わり、B で始まり E で終わる」と考えて、「A で始まり E で終わる」ベクトル  $\vec{AE}$  と定める。つまり、 $\vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}$  と定義する。

たとえば、 $\vec{AC} + \vec{CF} = \vec{AF}$

$$\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DA} = \vec{AD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0} \text{ となる。}$$

もし、下図のように  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  が離れているときは、 $\vec{b}$  を平行移動してから和を考えればよい。



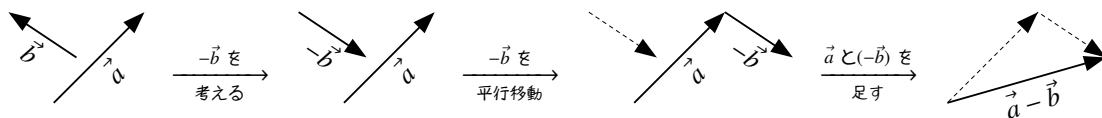
たとえば上図において

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{EI} &= \vec{AB} + \vec{BF} \quad (\leftarrow \vec{EI} = \vec{BF}) \\ &= \vec{AF} \end{aligned}$$

容易に分かるように  $\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{b} + \vec{a}$  は等しい。つまり、どちらから足しても良い (p.5)。

## C. ベクトルの差の考え方～その1～

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$  と考えれば、ベクトルの和と同じようにして考えることができる。



【例題2】 右図の  $\square ABED$ ,  $\square BCFE$  について  に正しい文字を入れなさい。

1.  $\vec{AD} + \vec{DF} = A$

2.  $\vec{GE} + \vec{BC} = G$

3.  $\vec{IC} + \vec{BG} = I$

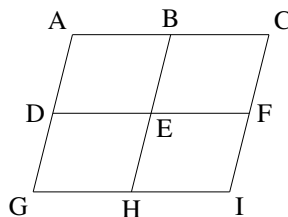
4.  $\vec{AB} - \vec{IE} = A$

5.  $\vec{CF} - \vec{GH} = C$

6.  $\vec{IC} - \vec{AC} = I$

7.  $\vec{AC} + 2\vec{EG} = I$

8.  $3\vec{AD} - \vec{CE} = A$



【解答】

1.  $\vec{AF}$  (ア)      2. (与式)  $= \vec{GE} + \vec{EF} = \vec{GF}$  (イ)

3. (与式)  $= \vec{IC} + \vec{CH} = \vec{IH}$  (ウ)

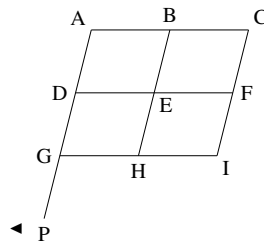
4. (与式)  $= \vec{AB} + (-\vec{IE}) = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AF}$  (エ)

5. (与式)  $= \vec{CF} + (-\vec{GH}) = \vec{CF} + \vec{FE} = \vec{CE}$  (オ)

6. (与式)  $= \vec{IC} + (-\vec{AC}) = \vec{IC} + \vec{CA} = \vec{IA}$  (カ)

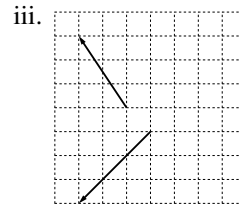
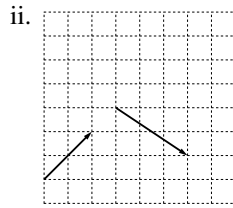
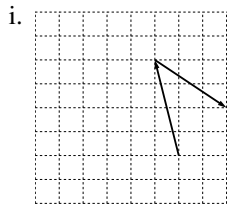
7. (与式)  $= \vec{AC} + \vec{CG} = \vec{AG}$  (キ)

8. 右欄外のように P をとると (与式)  $= \vec{AP} + \vec{PH} = \vec{AH}$  (ク)

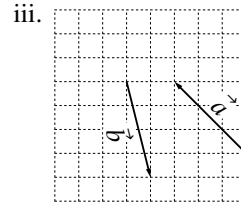
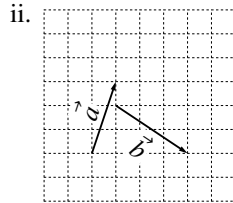
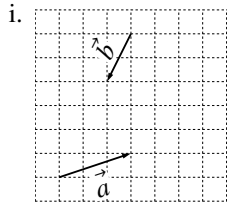


【練習3：ベクトルの和・差】

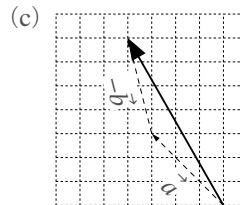
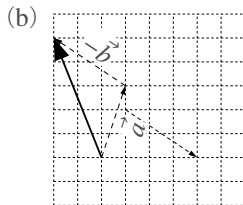
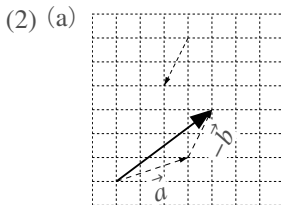
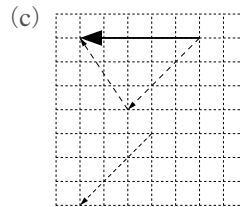
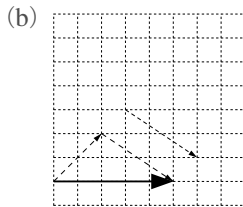
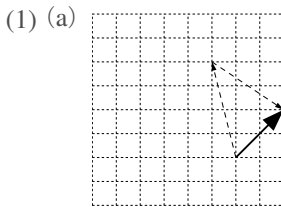
(1) それぞれについて、2つのベクトルの和を書き込みなさい。



(2) それぞれについて、 $\vec{a} - \vec{b}$ を書き込みなさい。



【解答】



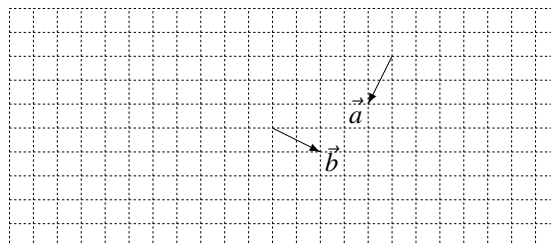
◀ 一方の終点と他方の始点を揃える

◀  $\vec{a}$ の終点と $-\vec{b}$ の始点を揃える

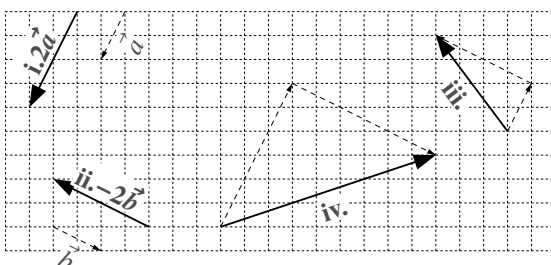
【練習4：ベクトルの定数倍・和・差】

2つのベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ が右図のようにあるとき、以下のベクトルを図示しなさい。

- i.  $2\vec{a}$
- ii.  $-2\vec{b}$
- iii.  $-\vec{a} - 2\vec{b}$
- iv.  $-3\vec{a} + 3\vec{b}$



【解答】

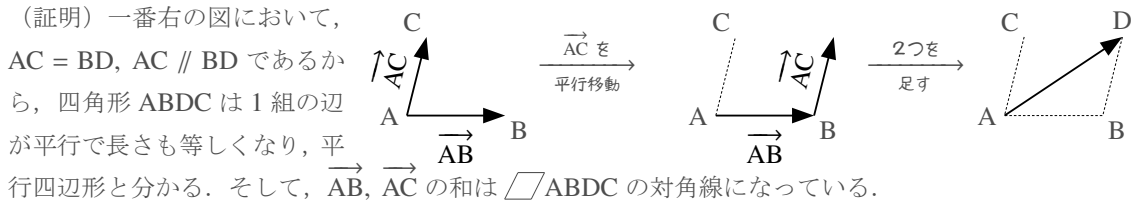


**D. ベクトルの和は交換可能である～平行四辺形を用いたベクトルの和**

始点の揃った2つのベクトルの和は、平行四辺形の対角線になる。

ベクトルの和と平行四辺形

$\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  の和は、四角形 ABDC が平行四辺形となるよう D を取ったときの、 $\vec{AD}$  になる。  
ただし、A, B, C は同一直線上にないとする。



このことから、 $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AC} + \vec{AB}$  とも分かる。一般に、ベクトルの和は交換可能である。

**E. ベクトルの計算 ～ 文字式のように扱う**

ベクトルは、次のように文字式のように計算することができる\*3。

$$\begin{aligned}
 & 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} - \vec{b} && 2\vec{a} + \vec{b} - 2(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \\
 = & 2\vec{a} + \vec{a} + \vec{b} - \vec{b} \quad \leftarrow \text{ベクトルの和は交換可能} && = 2\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{b} \quad \leftarrow 2( ) \text{を分配法則} \\
 = & 3\vec{a} + 0\vec{b} \quad \leftarrow 2\vec{a} + \vec{a} = (2+1)\vec{a} && = 0\vec{a} + 0\vec{b} \quad \leftarrow \vec{a}, \vec{b} \text{をそれぞれ計算} \\
 = & 3\vec{a} \quad \leftarrow \vec{0} \text{はなし} && = \vec{0}
 \end{aligned}$$

【例題5】 次の計算をしなさい。

1.  $-4\vec{a} + 3\vec{b} - 3\vec{b} - 4\vec{a}$       2.  $3(\vec{a} + 2\vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b})$       3.  $2(\vec{a} + 2\vec{b}) + 4(\vec{a} - \vec{b}) - 6\vec{a}$

【解答】

1. (与式)  $= -8\vec{a} + 0\vec{b} = -8\vec{a}$       2. (与式)  $= 3\vec{a} + 6\vec{b} - \vec{a} - 3\vec{b} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$   
 3. (与式)  $= 2\vec{a} + 4\vec{a} + 4\vec{b} - 4\vec{b} - 6\vec{a} = \vec{0}$

【練習6：ベクトルを文字式のように扱う】

以下の等式を満たす  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  で表しなさい。

(1)  $-\vec{a} + 3\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$       (2)  $\begin{cases} 4\vec{x} - \vec{y} = \vec{a} + 3\vec{b} \\ -3\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} \end{cases}$

【解答】

(1) (与式)  $\Leftrightarrow 3\vec{x} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$   
 $\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$

\*3 これらの計算は、ベクトルの以下の性質に基づいている。

- (1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$       (2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$       (3)  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$       (4)  $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$

$$(2) \quad \begin{array}{r} 4\vec{x} - \vec{y} = \vec{a} + 3\vec{b} \\ +) -3\vec{x} + \vec{y} = -2\vec{a} - \vec{b} \\ \hline \vec{x} = -\vec{a} + 2\vec{b} \end{array}$$

これを2つめの式に代入して  $-3(-\vec{a} + 2\vec{b}) + \vec{y} = -2\vec{a} - \vec{b}$

$$\Leftrightarrow 3\vec{a} - 6\vec{b} + \vec{y} = -2\vec{a} - \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{y} = -5\vec{a} + 5\vec{b}$$

◀連立方程式を解くように、左辺同士、右辺同士を引いた

【練習7：ベクトルの和】

次の等式を示せ.

(1)  $\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC} = \vec{0}$

(2)  $\vec{PQ} + \vec{RS} = \vec{RQ} + \vec{PS}$

【解答】

(1) (左辺)  $= \vec{AB} + \vec{BC} - \vec{AC}$   
 $= \vec{AC} - \vec{AC} = \vec{0} =$  (右辺)

(2) (左辺) - (右辺)  $= \vec{PQ} + \vec{RS} - \vec{RQ} - \vec{PS}$   
 $= \vec{PQ} + \vec{RS} + \vec{QR} + \vec{SP}$   
 $= \vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RS} + \vec{SP} = \vec{PP} = \vec{0}$

よって、(左辺) = (右辺) が成り立ち、示された。



## 1.2 ベクトルの成分表示

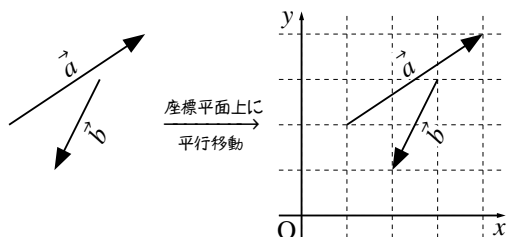


座標平面上でベクトルを考えると、ベクトルは座標のように表すことができる。

### 1. ベクトルを座標平面上に配置する

#### A. ベクトルの「成分表示」とは

たとえば、左下の  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  があったとする。これを、座標平面上に平行移動すると右下のようになる。



$\vec{a}$  は、始点から  $x$  方向に 3,  $y$  方向に 2 進んで終点に一致する。このことを、 $\vec{a} = (3, 2)$  と表し、3 を  $x$  成分、2 を  $y$  成分と呼ぶ。

同じように、 $\vec{b} = (-1, -2)$  と表され、 $\vec{b}$  の  $x$  成分は  $-1$ ,  $y$  成分は  $-2$  である。つまり、進む方向が負であれば、成分の値も負になる。



座標平面上にあるベクトル  $\vec{a}$  が、始点から  $x$  方向に  $p$ ,  $y$  方向に  $q$  進んで終点に一致するならば  $\vec{a} = (p, q)^{*4}$  と表し、これを  $\vec{a}$  の成分表示 (component expression) という。1つ目の成分  $p$  は  $x$  成分 (x-component), 2つ目の成分  $q$  は  $y$  成分 (y-component) と呼ばれる。

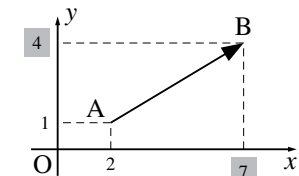
### B. 「終点 (まで)」引く「始点 (から)」

6時から9時までは、「9時 (まで)」引く「6時 (から)」の3時間である。

同じように、座標平面上においてAからBまでの  $\vec{AB}$  は、「B (まで)」引く「A (から)」で求められる。

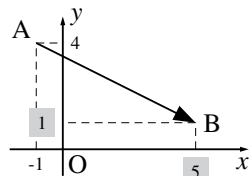
たとえば、右図のように  $\vec{AB}$  を求めることができる。

$$A(2, 1) \quad B(7, 4)$$



$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (7, 4) - (2, 1) \\ &= (7 - 2, 4 - 1) \\ &= (5, 3) \end{aligned}$$

$$A(-1, 4) \quad B(5, 1)$$



$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (5, 1) - (-1, 4) \\ &= (5 - (-1), 1 - 4) \\ &= (6, -3) \end{aligned}$$

### C. 成分表示されたベクトルの大きさ

三平方の定理から次のことが導かれる。

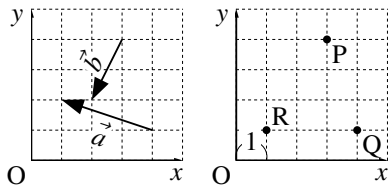
### 成分表示されたベクトルの大きさ

$\vec{a} = (p, q)$  であれば、大きさは  $|\vec{a}| = \sqrt{p^2 + q^2}$  と求められる。

特に、 $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  ならば  $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ ,  $|\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$  である。

#### 【例題 8】

- ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を成分表示し、大きさも求めなさい。
- 右の図のように P, Q, R があるとき、 $\vec{PQ}$ ,  $\vec{PR}$ ,  $\vec{QR}$  を答えなさい。また、それぞれの大きさ  $|\vec{PQ}|$ ,  $|\vec{PR}|$ ,  $|\vec{QR}|$  を求めなさい。ただし、座標の1目盛りの長さを1とする。



#### 【解答】

$$1. \vec{a} = (-3, 1), \vec{b} = (1, -2)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$2. P(3, 4), Q(4, 1), R(1, 1) \text{ であるから}$$

$$\vec{PQ} = (4, 1) - (3, 4) = (1, -3), \quad |\vec{PQ}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{PR} = (1, 1) - (3, 4) = (-2, -3), \quad |\vec{PR}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\vec{QR} = (1, 1) - (4, 1) = (-3, 0), \quad |\vec{QR}| = 3$$

◀ 公式通り計算すれば  $\sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$

\*4  $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  と表すこともある (縦ベクトル表示). たとえば上の例において,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  である. 一方,  $\vec{a} = (p, q)$  を横ベクトル表示という. 高校数学ではたいてい横ベクトル表示を使うので, 今後, 平面ベクトルではそのようにする.

## 2. 成分表示されたベクトルの演算

### A. 成分表示されたベクトルの演算

成分表示された2つのベクトルの定数倍, 足し算, 引き算は, 次のように計算できる.

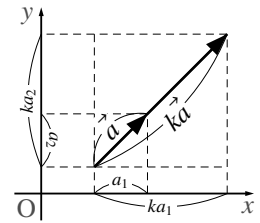
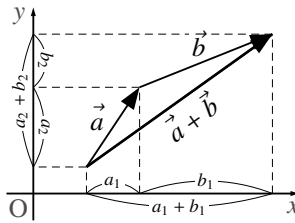
#### 成分表示されたベクトルの演算

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  と, 実数  $k$  について, 次のように計算できる\*5.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2), \quad k\vec{a} = (ka_1, ka_2)$$

$\vec{a} + \vec{b}$ ,  $k\vec{a}$  については右図のように考えて分かる ( $k\vec{a}$  については三角形の相似を用いている).  $\vec{a} - \vec{b}$  については, 以下から分かる.

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \end{aligned}$$



**【例題9】**  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-3, 1)$  のとき, 以下のベクトルを答えよ.

1.  $\vec{a} + \vec{b}$
2.  $\vec{a} - \vec{b}$
3.  $2\vec{a} + \vec{b}$
4.  $3\vec{a} - 2\vec{b}$
5.  $\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$
6.  $s\vec{a} + t\vec{b}$  ( $s, t$  を用いて答えよ)
7.  $2(\vec{a} + \vec{b}) + 3(\vec{a} - \vec{b})$
8.  $3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 2(\vec{a} - 3\vec{b})$

#### 【解答】

1.  $\vec{a} + \vec{b} = (1 + (-3), 2 + 1) = (-2, 3)$
2.  $\vec{a} - \vec{b} = (1 - (-3), 2 - 1) = (4, 1)$
3.  $2\vec{a} + \vec{b} = (2, 4) + (-3, 1) = (-1, 5)$
4.  $3\vec{a} - 2\vec{b} = (3, 6) - (-6, 2) = (9, 4)$
5.  $\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(-1, \frac{4}{5}\right)$
6.  $s\vec{a} + t\vec{b} = (s, 2s) + (-3t, t) = (s - 3t, 2s + t)$
7. (与式)  $= 2\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{a} - 3\vec{b}$   
 $= 5\vec{a} - \vec{b}$   
 $= (5, 10) - (-3, 1) = (8, 9)$
8. (与式)  $= 3\vec{a} - 6\vec{b} - 2\vec{a} + 6\vec{b}$   
 $= \vec{a} = (1, 2)$

◀ ひとまず  $\vec{a}, \vec{b}$  の文字式と見て整理した

\*5 縦ベクトルで書けば,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  と実数  $k$  について  $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$ ,  $k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$

## B. 平行四辺形とベクトル

平行四辺形の成立条件「1組の向かい合う辺の長さが等しく平行」は次のように言い換えられる。

$$\text{「四角形 } ABCD \text{ が平行四辺形」} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$$

平行四辺形の成立条件

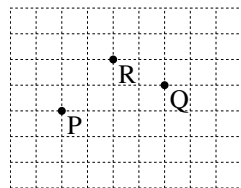
…  $\vec{AB} = \vec{CD}$  ならば、四角形  $ABDC$  が平行四辺形になる。

向かい合う辺の組、辺  $AB$ ,  $DC$  について、「 $AB = DC$  かつ  $AB \parallel DC$ 」 $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$  より示される..

### 【練習 10：平行四辺形～その 1～】

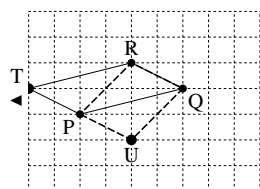
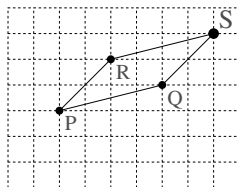
次の図のように  $P, Q, R$  がある時、以下の間に答えなさい。

- (1) 四角形  $PQSR$  が平行四辺形となるよう、 $S$  を右図に書き込みなさい。
- (2) 四角形  $PQRT$  が平行四辺形の時、 $\vec{PT}$  と等しいベクトルを下から選べ。
- (3) 四角形  $PUQR$  が平行四辺形の時、 $\vec{PU}$  と等しいベクトルを下から選べ。  
 a.  $\vec{PR}$     b.  $\vec{RP}$     c.  $\vec{PQ}$     d.  $\vec{QP}$     e.  $\vec{QR}$     f.  $\vec{RQ}$



### 【解答】

- (1)  $\vec{QS} = \vec{PR} = (2, 2)$  より右のようになる。
- (2) 右欄外のようになって、 $\vec{PT} = \vec{QR}$  から **e**。
- (3) 右欄外のようになって、 $\vec{PU} = \vec{RQ}$  から **f**。



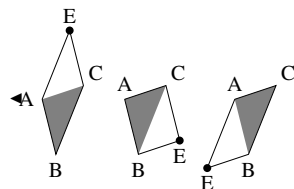
### 【練習 11：平行四辺形～その 2～】

座標平面上に  $A(1, 3)$ ,  $B(2, -1)$ ,  $C(4, 4)$  があるとき

- (1) 平行四辺形  $ABCD$  となるよう  $D$  の座標を定めよ。
- (2) 4点  $A, B, C, E$  を結んで平行四辺形ができるとき、 $E$  の座標をすべて求めよ。

### 【解答】

- (1)  $\vec{DC} = \vec{AB} = (1, -4)$  であればよい。  $D(x, y)$  とすると、  
 $\vec{DC} = (4 - x, 4 - y) = (1, -4)$  より  $x = 3, y = 0$  なので **D(3, 0)**。
- (2) 右欄外の図より、条件を満たす  $E$  は 3 点しかない。  
 四角形  $ABCE$  が平行四辺形となる時、(1) より  $E(3, 8)$ 。  
 四角形  $ABEC$  が平行四辺形となる時、 $\vec{CE} = \vec{AB} = (1, -4)$  とすればよい。  $E(x, y)$  とすると、 $\vec{CE} = (x - 4, y - 4) = (1, -4)$  より  $E(5, 0)$ 。  
 四角形  $AEBC$  が平行四辺形となる時、 $\vec{AE} = \vec{CB} = (-2, -5)$  とすればよい。  $E(x, y)$  とすると、 $\vec{AE} = (x - 1, y - 3) = (-2, -5)$  より  $E(-1, -2)$ 。  
 以上より、**(3, 0), (5, 8), (-1, -2)** のいずれか。



$\triangle ABC$  の辺のどれか 1 つだけが、平行四辺形の対角線になるので、3 点しかない。

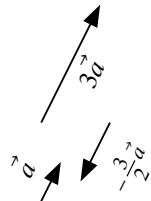
## 1. ベクトルにおける「平行」

### A. 「平行」とは $k$ 倍のこと

$\vec{a} = k\vec{b}$  となる実数  $k$  が存在するとき、 $\vec{a}, \vec{b}$  は平行であると言い、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$  と表される。平行でないときは  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$  と表される。ただし、 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, k \neq 0$  とする。

たとえば、 $3\vec{a}$  と  $\vec{a}$  は平行であり、 $3\vec{a} \parallel \vec{a}$  である。

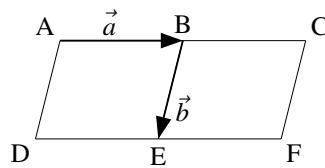
また、 $\vec{a}$  と  $-\vec{a}$  は向きは違うが、やはり  $\vec{a} \parallel (-\vec{a})$  である。このように、 $k$  が負の値の時、 $\vec{a}, k\vec{a}$  は逆向きとなるが、平行なベクトルと定義される。



【例題 12】 右の図の  $\square ABED$ ,  $\square BCFE$  について、以下の

に  $\parallel$  か  $\nparallel$  のいずれかを入れなさい。

$\vec{a} \parallel \boxed{\text{ア}} \overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{a} \parallel \boxed{\text{イ}} \overrightarrow{CF}$ ,  $\vec{b} \parallel \boxed{\text{ウ}} \overrightarrow{FE}$ ,  $\vec{b} \parallel \boxed{\text{エ}} \overrightarrow{EB}$



【解答】 ア :  $\vec{a} \parallel \overrightarrow{BC}$ , イ :  $\vec{a} \nparallel \overrightarrow{CF}$ , ウ :  $\vec{b} \nparallel \overrightarrow{FE}$ , エ :  $\vec{b} \parallel \overrightarrow{EB}$

### B. 成分表示から考えた「平行」

たとえば、 $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (6, 9)$  のとき、 $2:3 = 6:9$  であり、 $\vec{b} = 3\vec{a}$  となるから  $\vec{b} \parallel \vec{a}$  である。

また、 $\vec{a} = (1, 3), \vec{b} = (x, -6)$  が平行になるとき、 $1:3 = x:(-6)$  でないといけない。これを解いて、 $3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$  を得る。このときは  $\vec{b} = -2\vec{a}$  である。

【例題 13】 それぞれの場合について、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$  となるよう  $x$  の値を定めよ。

1.  $\vec{a} = (3, 1), \vec{b} = (x, -3)$

2.  $\vec{a} = (-2, x), \vec{b} = (4, x+3)$

3.  $\vec{a} = (2x, 3), \vec{b} = (x+4, 3x-2)$

### 【解答】

1.  $3:1 = x:(-3)$  が成り立てばよい。これを解いて  $x = -9$ 。

2.  $-2:x = 4:(x+3)$  が成り立てばよい。これより  $4x = -2(x+3)$  となり、これを解いて  $x = -1$ 。

3.  $2x:3 = (x+4):(3x-2)$  が成り立てばよい。よって

$$3(x+4) = 2x(3x-2)$$

$$\Leftrightarrow 3x+12 = 6x^2-4x$$

$$\Leftrightarrow 0 = 6x^2-x-12$$

$$\Leftrightarrow 0 = (2x-3)(3x+4)$$

$$\text{よって、 } x = \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}.$$

◀ 【別解】  $y$  成分から  $\vec{b} = -3\vec{a}$  を用いる

◀ 【別解】  $x$  成分から  $\vec{b} = -2\vec{a}$  である。よって、 $(4, x+3) = -2\vec{a} = (4, -2x)$  となつて、 $x+3 = -2x$

◀ 【別解】  $y$  成分を見て、 $\vec{b} = \frac{3x-2}{3}\vec{a}$  とする。  $x$  成分を見て、 $x+4 = 2x \cdot \frac{3x-2}{3}$  となり、これを解いても得られる。

$k \neq 0$  を実数とする. 2つのベクトル  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  が平行であることは

(1)  $\vec{a} = k\vec{b}$  となる実数  $k$  が存在すること

と定義される. もし,  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  と成分表示されていれば, 次のように言い換えられる.

(2)  $a_1 = kb_1$  かつ  $a_2 = kb_2$  となる実数  $k$  が存在すること

(3)  $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$

【練習 14 : 2つのベクトルの平行】

(1) 2つのベクトル  $\vec{a} = (x-1, x^2)$ ,  $\vec{b} = (x+5, 2x)$  が平行となるような,  $x$  の値を求めよ.

(2)  $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{y} = \vec{a} - 2\vec{b}$  とする.  $(\vec{x} + \vec{y}) \parallel (t\vec{x} - \vec{y})$  となるよう実数  $t$  の値を定めよ. ただし,  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$  とする.

【解答】

(1)  $(x-1) : x^2 = (x+5) : 2x$  が成り立てばよい. よって

$$x^2(x+5) = 2x(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x+2) = 0 \quad \therefore x = 0, -1, -2$$

いずれの場合も  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  となって適し,  $x = 0, -1, -2$ .

(2)  $\vec{x} + \vec{y} = 3\vec{a} - \vec{b}$ ,  $t\vec{x} - \vec{y} = (2t-1)\vec{a} + (t+1)\vec{b}$  である.

$$t\vec{x} - \vec{y} = k(\vec{x} + \vec{y})$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)\vec{a} + (t+1)\vec{b} = 3k\vec{a} - k\vec{b}$$

よって,  $2t-1 = 3k$ ,  $t+1 = -k$  であればよいから

$$2t-1 = 3(t+1) \quad \therefore t = -4$$

◀ 係数を見て  $3 : (-1) = (2t-1) : (t+1)$  が成り立てばよいと気づけば, 計算は楽になる.

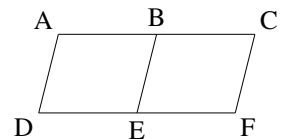
C. ベクトルの一次独立

$\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について,  $\vec{b} = k\vec{a}$  となる実数  $k$  が存在しないとき,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  は一次独立 (linear dependence) \*6 という\*7.

平面のベクトルにおいては, 「 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が一次独立でないこと」と 「 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 」 は一致する.

【例題 15】 右図について, 次のベクトルの組のうち, 一次独立なものを全て答えなさい.

1.  $\vec{AB}, \vec{DF}$     2.  $\vec{AB}, \vec{CF}$     3.  $\vec{AB}, \vec{EC}$     4.  $\vec{AB}, \vec{ED}$     5.  $\vec{AB}, \vec{FF}$



【解答】 1. は  $\vec{AB} \parallel \vec{DF}$  のため, 4. は  $\vec{AB} \parallel \vec{ED}$  のため, 5. は  $\vec{FF} = \vec{0}$  のため, 一次独立でない. 一次独立なものは 2, 3.    ▶  $\vec{AB} = 2\vec{DF}$ ,  $\vec{AB} = -\vec{ED}$

\*6 「 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が一次独立」という言葉の由来は「 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のどちらも, 他のベクトルの一次結合で表せない」ためである (今は「他のベクトル」は1つしかない). この意味は, 空間ベクトルの一次独立を学んだときにさらに明確になる.

\*7 逆に,  $\vec{b} = k\vec{a}$  となる実数  $k$  が存在するとき,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  は一次従属 (linear independence) という. これは,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が平行であったり, どちらかが  $\vec{0}$  であることと一致する.

## 2. 平面上の「全ての」ベクトルを表す

### A. ベクトルの一次結合

ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  と実数  $p$ ,  $q$  について,  $p\vec{a} + q\vec{b}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  の一次結合 (linear combination) という.

2つのベクトルを1次式でつないで  $p\vec{a} + q\vec{b}$  になるから, 一次結合と言う. ベクトルには掛け算は存在せず2次式が作れないので, 二次結合, 三次結合, …は存在しない.

### B. 平面上の「全ての」ベクトルを表す

平面のベクトルを表すには, 一次独立な2つのベクトルが必要であり, 同時に, 2つで十分である.

「全ての」平面上のベクトルを表す

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が一次独立とする. このとき, 平面上のどんなベクトル  $\vec{x}$  も  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  の一次結合で表される. つまり

$$\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

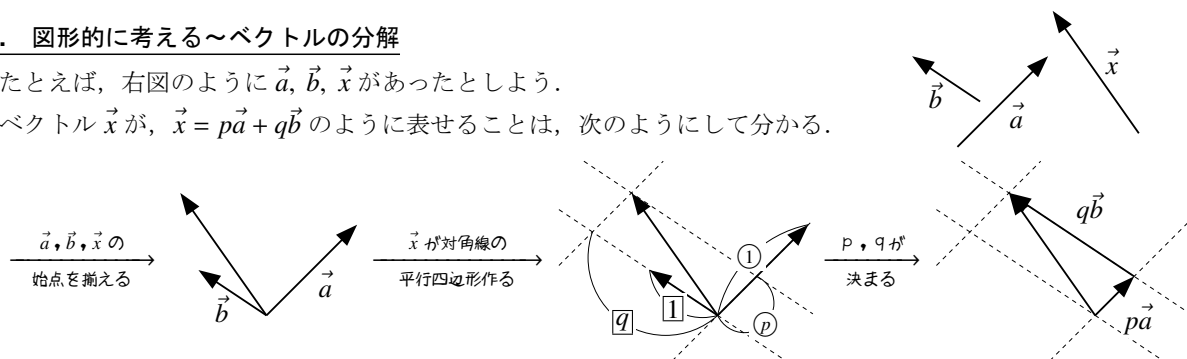
を満たす, 実数  $p$ ,  $q$  が必ず存在する. さらに,  $p$ ,  $q$  は必ず1通りに定まる.

この事実について, 「図形的」「成分表示」の2つの側面から考えてみよう.

### C. 図形的に考える～ベクトルの分解

たとえば, 右図のように  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{x}$  があつたとしよう.

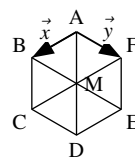
ベクトル  $\vec{x}$  が,  $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b}$  のように表せることは, 次のようにして分かる.



この操作を,  $\vec{x}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  に分解 (resolution) すると言う.

【例題 16】 右の正六角形 ABCDEF について, 以下のベクトルを  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  で表せ.

- |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 1. $\vec{AM}$ | 2. $\vec{AE}$ | 3. $\vec{AD}$ |
| 4. $\vec{FD}$ | 5. $\vec{DB}$ | 6. $\vec{CE}$ |



#### 【解答】

- $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{x} + \vec{y}$
- $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{x} + 2\vec{y}$
- $\vec{AD} = 2\vec{AM} = 2\vec{x} + 2\vec{y}$
- $\vec{FD} = \vec{FC} + \vec{CD} = 2\vec{x} + \vec{y}$
- $\vec{DB} = \vec{DE} + \vec{EB} = -\vec{x} - 2\vec{y}$
- $\vec{CE} = \vec{CM} + \vec{ME} = -\vec{x} - \vec{y}$

◀ 【別解】  $\vec{AM} = \vec{AF} + \vec{FM} = \vec{y} + \vec{x}$

◀ 【別解】  
 $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{MC} + \vec{CD}$   
 $= \vec{x} + \vec{y} + \vec{x} + \vec{y} = 2\vec{x} + 2\vec{y}$   
 他にも別解は多数ある.

#### D. 成分表示を用いて考える

成分表示を用いると、 $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b}$  となる  $p, q$  は、計算で求められる。

たとえば、 $\vec{a} = (2, 1)$ 、 $\vec{b} = (-1, 3)$  とする。 $\vec{x} = (4, -5)$  について  $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b}$  とおくと

$$p\vec{a} + q\vec{b} = (3p - q, 2p + 3q)$$

であり、これが  $\vec{x} = (4, -5)$  と等しいので、連立方程式 
$$\begin{cases} 2p - q = 4 \\ p + 3q = -5 \end{cases}$$
 が成り立つ。

これを解いて  $p = 1$ 、 $q = -2$  を得るから、 $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$  であると分かる。

#### 【例題 17】

1. ベクトル  $\vec{a} = (-1, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, 1)$ 、 $\vec{c} = (-5, -1)$  について、 $\vec{c}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  で表せ。
2. ベクトル  $\vec{a} = (-2, 3)$ 、 $\vec{b} = (-3, 1)$ 、 $\vec{c} = (-2, 10)$  について、 $\vec{c}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  で表せ。

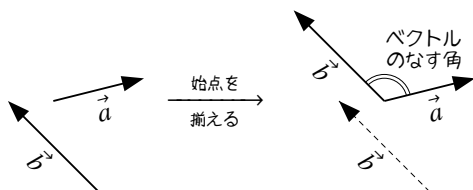
#### 【解答】

1.  $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$  とおく。  $p\vec{a} + q\vec{b} = (-p + q, p + q)$ 、 $\vec{c} = (-5, -1)$  より、
$$\begin{cases} -p + q = -5 \\ p + q = -1 \end{cases}$$
 が成り立つ。これを解いて  $(p, q) = (2, -3)$  であるから、 $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ 。
2.  $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$  とおく。  $p\vec{a} + q\vec{b} = (-2p - 3q, 3p + q)$ 、 $\vec{c} = (-2, 10)$  より、
$$\begin{cases} -2p - 3q = -2 \\ 3p + q = 10 \end{cases}$$
 が成り立つ。これを解いて  $(p, q) = (4, -2)$  であるから、 $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ 。

## 1. ベクトルの内積とは何か

### A. 2つのベクトルのなす角

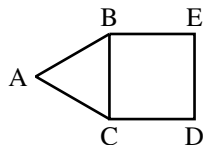
$\vec{0}$ でない、2つのベクトルの始点を揃えたときにできる角を、「2つのベクトルのなす角<sup>\*8</sup>」または「2つのベクトルのつくる角」という。



**【例題 18】** 右図のように正三角形 ABC, 正方形 BCDE があり,  $AB = 2$  とする。

次の2つのベクトルのなす角を求めよ。

- |                         |                         |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. $\vec{AC}, \vec{AB}$ | 2. $\vec{CD}, \vec{CE}$ | 3. $\vec{CD}, \vec{CA}$ | 4. $\vec{CD}, \vec{CB}$ |
| 5. $\vec{CD}, \vec{AB}$ | 6. $\vec{CD}, \vec{EB}$ | 7. $\vec{CD}, \vec{AC}$ | 8. $\vec{AC}, \vec{CB}$ |



### 【解答】

- |                                |                                 |                                |                                 |
|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1. $\theta = 60^\circ$         | 2. $\theta = 45^\circ$          | 3. $\theta = 150^\circ$        | 4. $\theta = 90^\circ$          |
| 5. 始点を揃えて, $\theta = 30^\circ$ | 6. 始点を揃えて, $\theta = 180^\circ$ | 7. 始点を揃えて, $\theta = 30^\circ$ | 8. 始点を揃えて, $\theta = 120^\circ$ |

### B. 2つあるベクトルの内積の定義

#### ベクトルの内積

2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  について, 次の2つの値は一致し, **内積** (inner product) <sup>\*9</sup> と呼ばれる。

(1) (成分表示使わない)  $\vec{a}, \vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とするとき,  $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

(2) (成分表示使う)  $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$  のとき,  $a_1b_1 + a_2b_2$

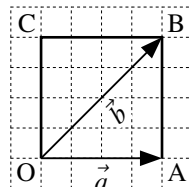
この内積は  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  で表される。つまり,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2$  である。

たとえば, 内積の計算は次のようになる。

(1) (成分表示使わない)  $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 4\sqrt{2}$ , なす角は  $45^\circ$  なので,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 16$$

(2) (成分表示使う)  $\vec{a} = (4, 0), \vec{b} = (4, 4)$  となり,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 4 + 0 \cdot 4 = 16$



<sup>\*8</sup> 「つくる角」と言う方が分かりやすいが, 「なす角」「角をなしている」などの表現で, しばしば用いられる。

<sup>\*9</sup> 内積の値は常に実数である。そのため, 内積のことをスカラー積ともいう。ここでのスカラーは「実数」を意味する。一方, 外積という計算も存在し, こちらはベクトル積ともいう。外積を計算した結果は必ずベクトルになるからである。



(2つの定義が一致することの証明・ $\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立のとき  
 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$  について,  $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2$  が成り立つことを示せばよい.  
 $\vec{a}, \vec{b}$ の始点をOに揃え, それぞれの終点をA, Bとする.  $\triangle OAB$ \*10について余弦定理より

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta \quad \dots\dots\dots ①$$

である. ここで,  $|\overrightarrow{OA}|^2 = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2, |\overrightarrow{OB}|^2 = |\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$  であり  $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$  から  
 $|\overrightarrow{AB}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$  であるので, これらを①に代入して

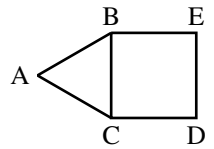
$$\begin{aligned} (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 &= (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta \\ \Leftrightarrow b_1^2 - 2a_1b_1a_1 + b_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 &= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta \\ \Leftrightarrow -2a_1b_1 - 2a_2b_2 &= -2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \end{aligned}$$

両辺を-2で割って,  $a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$  を得る.

**【例題 19】** 右図のように正三角形 ABC, 正方形 BCDE があり,  $AB = 2$  とする.

内積の定義 (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$  を用いて, 次の内積の値を求めよ.

- |  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| 1. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ | 2. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$ | 3. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$ | 4. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$ |
| 5. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$ | 6. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EB}$ | 7. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}$ | 8. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ |



**【解答】**

1.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$
2.  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$
3.  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = 2 \cdot 2 \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$
4.  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 0 = 0$
5.  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$
6.  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$
7.  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$
8.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

**【例題 20】** 内積の定義 (2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$  を用いて, 次の内積を計算しなさい.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\vec{a} = (3, 1), \vec{b} = (-1, 2)$ のときの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ | 2. $\vec{a} = (-4, -2), \vec{b} = (-3, 5)$ のときの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ |
|---|---|

**【解答】**

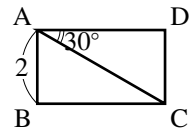
1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = -1$
2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-4) \cdot (-3) + (-2) \cdot 5 = 2$

\*10  $\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立であることと,  $\triangle OAB$ は存在することは, 同値である.

【練習 21 : 内積の計算】

(1) 右図の長方形について次の内積を計算しなさい。

1.  $\vec{AD} \cdot \vec{AC}$       2.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$       3.  $\vec{BC} \cdot \vec{AC}$       4.  $\vec{DC} \cdot \vec{CA}$



(2)  $\vec{a}, \vec{b}$  が次のようになるとき、内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値を計算しなさい。

1.  $\vec{a} = (3, 1), \vec{b} = (-1, 2)$  のとき      2.  $\vec{a} = (-4, -2), \vec{b} = (-3, 5)$  のとき

【解答】

(1) 直角三角形 ADC は辺の比が  $1 : 2 : \sqrt{3}$  であるから、 $|\vec{AC}| = 4, |\vec{AD}| = 2\sqrt{3}$  である。

1.  $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = 2\sqrt{3} \cdot 4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$

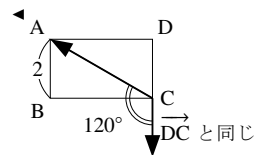
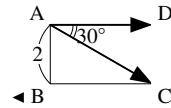
2.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \cdot 4 \cos 60^\circ = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$

3.  $\vec{BC} = \vec{AD}$  から、 $\vec{AD}, \vec{AC}$  の大きさとなす角を考えて  
(与式)  $= 2 \cdot 4 \cos 60^\circ = 4$

4. 右図のように考えて  
(与式)  $= 2 \cdot 4 \cos 120^\circ = 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$

(2) 1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = -1$

2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-4) \cdot (-3) + (-2) \cdot 5 = 2$



2. ベクトルの内積の利用 (1) ~ベクトルの垂直条件・なす角の計算

A. ベクトルの垂直

$\vec{a}, \vec{b}$  のなす角が  $90^\circ$  のとき、 $\vec{a}, \vec{b}$  は垂直 (perpendicular) であると言い、 $\vec{a} \perp \vec{b}$  と表される。

$\vec{0}$  でないベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  について、 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  が成り立つ。

ベクトルの垂直

(証明)  $\cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90^\circ$  であるから、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .

【例題 22】

1.  $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (x, 4)$  が  $\vec{a} \perp \vec{b}$  を満たすとき、 $x$  の値を求めよ。

2.  $\vec{a} = (-1, x-1), \vec{b} = (2x-5, 3)$  が  $\vec{a} \perp \vec{b}$  を満たすとき、 $x$  の値を求めよ。

【解答】

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x + 3 \cdot 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 12 = 0 \quad \therefore x = -6$

2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot (2x-5) + (x-1) \cdot 3 = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 5 + 3x - 3 = 0 \quad \therefore x = -2$

## B. ベクトルのなす角を求める

右図の  $\vec{a} = (2, 4)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2)$  について

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 8 = 6$$

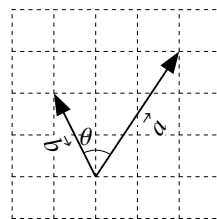
である. 一方,  $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$  より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \cos\theta = 10\cos\theta$$

である. こうして, 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を 2 通りで求められたので

$$10\cos\theta = 6 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$$

と分かる. このように, 内積を用いてベクトルのなす角を計算できる.



**【例題 23】** 以下のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角  $\theta$  について,  $\cos\theta$  をそれぞれ求めよ. また,  $\theta$  が求められる場合は  $\theta$  の値も求めよ.

1.  $\vec{a} = (3, -1)$ ,  $\vec{b} = (2, -1)$

2.  $\vec{a} = (2, 3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 5)$

3.  $\vec{a} = (4, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 4)$

### 【解答】

1. 成分を用いて  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 1 = 7$ .

一方,  $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$  であるから,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{10}\sqrt{5}\cos\theta = 5\sqrt{2}\cos\theta$ . よって

$$5\sqrt{2}\cos\theta = 7 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

2. 成分を用いて  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 15 = 13$ .

一方,  $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$  であるから,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{13}\sqrt{26}\cos\theta = 13\sqrt{2}\cos\theta$ . よって

$$13\sqrt{2}\cos\theta = 13 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

また,  $\theta = 45^\circ$  である.

3. 成分を用いて  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 4 = 8$ .

一方,  $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$  であるから,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{17}\sqrt{17}\cos\theta = 17\cos\theta$ . よって

$$17\cos\theta = 8 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{8}{17}$$

— 2 つのベクトルのなす角 —

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると,  $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$  が成り立つ.

特に,  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  であるとき,  $\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$  となる.

### C. 直交する単位ベクトルを求める

#### 【練習 24 : 直交する単位ベクトル】

$\vec{x} = (2, 1)$  と直交する単位ベクトル  $\vec{e}$  を求めよ。

【解答】  $\vec{e} = (x, y)$  とおく.  $\vec{x} = (2, 1)$  と直交するので

$$\vec{x} \cdot \vec{e} = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

一方,  $|\vec{e}| = 1$  であるから

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①より  $y = -2x$  であるから, ②に代入して

$$x^2 + (-2x)^2 = 1 \Leftrightarrow 5x^2 = 1$$

よって,  $x^2 = \frac{1}{5}$  となるから  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$  のとき  $y = -2x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$  のとき  $y = -2x = \frac{2}{\sqrt{5}}$  であ

るから,  $\vec{e} = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ .

## 3. ベクトルの内積の利用 (2) ~内積を掛け算のように扱う

### A. 結合法則・交換法則・分配法則~内積と掛け算の類似

実数  $a, b, c$  は結合法則  $a(bc) = (ab)c$ , 交換法則  $ab = ba$ , 分配法則  $a(b+c) = ab+ac$  を満たす. これらと類似の法則は, ベクトルの内積においても成立する.

#### 内積の交換法則・分配法則

どんなベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  についても, 次の等式が成り立つ.

- (I) (掛け算との関係) 実数  $k$  について,  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}), \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- (II) (交換法則)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- (III) (分配法則)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$



(I) から, たとえば  $(2\vec{a}) \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot (2\vec{b}), 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$  の括弧は省略でき, それぞれ  $2\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot 2\vec{b}, 2\vec{a} \cdot \vec{b}$  と書かれる.

(証明) 成分を計算すればよい. たとえば, 成分表示によって  $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$  になつたとすると, (I) の 1 つ目の式について

$$(\text{左辺}) = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 = ka_1b_1 + ka_2b_2, \quad (\text{右辺}) = k(a_1b_1 + a_2b_2) = ka_1b_1 + ka_2b_2$$

となるから (左辺) = (右辺) である.

## B. 大きさの2乗～内積と掛け算の違い

ベクトル  $\vec{a}$  の2乗は存在しない。しかし、それに類似した式  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  は次のようになる。

—— 同じベクトルの内積 ——

(IV) (同じベクトルの内積) どんなベクトル  $\vec{a}$  についても,  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$  になる。

(証明)  $\vec{a} = \vec{0}$  のときは明らか。  $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき,  $\vec{a}, \vec{a}$  のなす角は  $0^\circ$  なので  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ 。

【例題 25】  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$ ,  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 3$  とするとき, 以下の値を計算しなさい。

1.  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$       2.  $(\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot \vec{c}$       3.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$       4.  $(\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 2\vec{c})$

### 【解答】

1. (与式)  $= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 + 3 = 4$

2. (与式)  $= \vec{a} \cdot \vec{c} - 3\vec{b} \cdot \vec{c} = 3 - 6 = -3$

3. (与式)  $= \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}$   
 $= 2 + 3 + 1 + 2 = 8$

4. (与式)  $= 5|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 20\vec{b} \cdot \vec{a} + 8\vec{b} \cdot \vec{c}$   
 $= 5 \times 2 - 2 \times 3 - 20 \times 1 + 8 \times 2 = 0$

◀  $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 3$

◀  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

◀  $|\vec{a}|^2 = 2$

◀ つまり,  $(\vec{a} - 4\vec{b}) \perp (5\vec{a} - 2\vec{c})$  が成り立っている。

## C. 内積の計算を文字式の展開のように扱う

ここまでで学んだ内積の性質 (I)-(IV) によって, 以下のような計算ができる。

$$\begin{aligned} |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 &= (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) && \leftarrow \text{性質(IV)を使った} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot 2\vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot 2\vec{b} && \leftarrow \text{性質(III)を使った} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{b} && \leftarrow \text{性質(I),(II)を使った} \\ &= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 && \leftarrow \text{性質(IV)を使った} \end{aligned}$$

こうして, 文字式の展開  $(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$  に似た結果を得る。同じようにして, 一般に次のような等式を得る。

—— 文字式の展開との類似 ——

任意のベクトル  $\vec{x}, \vec{y}$ , 実数  $k$  について, 以下の等式が成り立つ。

(1)  $|\vec{x} + k\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + 2k\vec{x} \cdot \vec{y} + k^2|\vec{y}|^2$       (2)  $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2$

(3)  $(\vec{x} + k\vec{y}) \cdot (\vec{x} + l\vec{y}) = |\vec{x}|^2 + (k+l)\vec{x} \cdot \vec{y} + kl|\vec{y}|^2$

⋮ ベクトルには2乗が存在しないが, 代わりに, 大きさの2乗となることに注意しよう。

【例題 26】

$|\vec{a}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3, |\vec{b}| = 4$  とする. 以下の値を求めよ.

1.  $|3\vec{a} + \vec{b}|^2$

2.  $|5\vec{a} - 2\vec{b}|^2$

3.  $|\vec{a} + \vec{b}|$

4.  $|\vec{a} - 2\vec{b}|$

【解答】

1. (与式)  $= 9|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 36 + 18 + 16 = 70$

2. (与式)  $= 25|\vec{a}|^2 - 20\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 100 - 60 + 64 = 104$

3.  $|\vec{a} + \vec{b}|^2$  を計算すると  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$   
 $= 4 + 6 + 16 = 26$

$|\vec{a} + \vec{b}| > 0$  より,  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{26}$ .

4.  $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2$  を計算すると  $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$   
 $= 4 - 12 + 64 = 56$

$|\vec{a} - 2\vec{b}| > 0$  より,  $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ .



ベクトルの和の大きさ, たとえば  $|\vec{a} + 2\vec{b}|$  を求めるには, まず 2 乗を計算しよう.

【練習 27 : 内積の計算の利用~その 1~】

(1)  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4$  で,  $\vec{a}, \vec{b}$  のなす角が  $60^\circ$  のとき,  $|2\vec{a} - \vec{b}|$  を求めよ.

(2)  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 5, |4\vec{a} - \vec{b}| = 7$  であるとき, 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ.

(3)  $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = -2$  のとき,  $\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{a} + t\vec{b}$  が垂直となるよう  $t$  の値を定めなさい.

【解答】

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 2$  であるから

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= 4 - 8 + 16 = 12$$

$|2\vec{a} - \vec{b}| > 0$  より,  $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

(2)  $|4\vec{a} - \vec{b}| = 7$  の両辺を 2 乗して

$$16|\vec{a}|^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot 1 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 25 = 49$$

$$\Leftrightarrow -8\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$$

(3)  $\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{a} + t\vec{b}$  が垂直である必要十分条件は

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot (t\vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot (t\vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + (t+1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 2(t+1) + 4t = 0$$

$$\Leftrightarrow 14 + 2t = 0 \quad \therefore t = -7$$

### D. ベクトルの大きさの最小値

【練習 28：ベクトルの大きさの最小値～その 1・成分がない場合～】

$\vec{a} = 1, \vec{b} = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$  のとき、 $|\vec{t}\vec{a} + \vec{b}|$  の最小値と、そのときの  $t$  の値を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{【解答】 } |\vec{t}\vec{a} + \vec{b}|^2 &= t^2|\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= t^2 + 2t + 4 = (t+1)^2 + 2 \end{aligned}$$

であるから、 $t = -1$  のときに  $|\vec{t}\vec{a} + \vec{b}|^2$  は最小値 2 をとる。よって、 $|\vec{t}\vec{a} + \vec{b}|$  は  $t = -1$  のとき最小値  $\sqrt{2}$  をとる。

【練習 29：ベクトルの大きさの最小値～その 2・成分がある場合～】

$\vec{a} = (t, 2), \vec{b} = (1-t, t)$  のとき、 $|2\vec{a} + \vec{b}|$  の最小値と、そのときの  $t$  の値を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{【解答】 } 2\vec{a} + \vec{b} &= (2t, 4) + (1-t, t) = (1+t, 4+t) \text{ であるから} \\ |2\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(1+t)^2 + (4+t)^2} \\ &= \sqrt{2t^2 + 10t + 17} \\ &= \sqrt{2(t^2 + 5t) + 17} \\ &= \sqrt{2\left\{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right\} + 17} = \sqrt{2\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \end{aligned}$$

よって、 $|2\vec{a} + \vec{b}|$  は  $t = \frac{5}{2}$  のとき、最小値  $\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$  をとる。

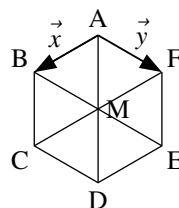
◀  $|\vec{a}|^2 = t^2 + 4, |\vec{b}|^2 = (1-t)^2 + t^2,$   
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = t(1-t) + 2t$  を  
 $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$  に  
 代入しても解けるが、計算量は多  
 くなる。

【練習 30：ベクトルの大きさの最小値～その 3・図形から考える～】

1 辺が 1 の正六角形 ABCDEF があり、対角線の交点を M とする。

$\vec{x} = \vec{AB}, \vec{y} = \vec{AF}$  とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1)  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  の値を求めよ。
- (2)  $|\vec{x} + t\vec{y}|$  の最小値と、そのときの  $t$  の値を求めよ。
- (3)  $(\vec{x} + t\vec{y}) \perp \vec{y}$  となるときの  $t$  の値を求めよ。



【解答】

$$(1) \vec{x} \cdot \vec{y} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad |\vec{x} + t\vec{y}|^2 &= |\vec{x}|^2 + 2t\vec{x} \cdot \vec{y} + t^2|\vec{y}|^2 = 1^2 + 2t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + t^2 \cdot 1^2 \\ &= t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

よって、 $|\vec{x} + t\vec{y}|$  は  $t = \frac{1}{2}$  のとき最小値  $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  をとる。

$$(3) (\vec{x} + t\vec{y}) \cdot \vec{y} = -\frac{1}{2} + t = 0 \text{ を解いて } t = \frac{1}{2}.$$

◀ (2) と答えが一致する。  $\vec{x} + t\vec{y} = \vec{AP}$  とおくと P は直線 BM 上にあり、AP が最小になるのは AP ⊥ BM の時だからである。

ベクトルの始点を固定することによって、ベクトルの有用性はさらに高まる。

## 1. 位置ベクトルとは

### A. 始点を固定する

ベクトルとは「向きのある線分」であった。しかし、「始点と終点のペアを決めればベクトルが決まる」と言ってもよい。たとえば「始点を A、終点を B」と決めれば  $\overrightarrow{AB}$  が決まる。

**位置ベクトル** (position vector) とは、始点を固定して考えられたベクトルのことである。位置ベクトルにおいて、始点として固定された点は**基点**とも言う。

これに対し、従来の「向きのある線分」としてのベクトルを**有向ベクトル** (oriented vector) と言う\*11。

### B. 「位置ベクトルで考える」という「宣言」

位置ベクトルで考えるときは、上のように書き始めることが多い。

「O を基点とし、A( $\vec{a}$ )、B( $\vec{b}$ )、C( $\vec{c}$ ) とする」

この一文の意味は以下ようになる。

「(O を基点とした位置ベクトルを考え、)  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とする」

## 2. 位置ベクトルを用いた公式

### A. ベクトルの差の考え方～その2・終点から始点を引く～

次の公式によって、どんなベクトルも位置ベクトルに直すことができる。

ベクトルの差～位置ベクトルへの変換

O を基点とし、A( $\vec{a}$ )、B( $\vec{b}$ ) とするとき、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$  である。 ← 「まで」引く「から」

(証明) ベクトルの和の定義から  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$  であり、移項して  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$  を得る。

…たとえば、6時から9時までの時間は、 $9 - 6 = 3$  時間になる。

同様に、A から B までの  $\overrightarrow{AB}$  は、 $\vec{b} - \vec{a}$  になる、と考えられるとよい。

【例題 31】 O を基点とし、A( $\vec{a}$ )、B( $\vec{b}$ )、C( $\vec{c}$ )、D( $\vec{d}$ ) とする。  $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ 、 $\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b}$  であるとき、次のベクトルを  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  で表せ。

1.  $\overrightarrow{AC}$

2.  $\overrightarrow{AD}$

3.  $\overrightarrow{BC}$

4.  $\overrightarrow{BD}$

5.  $\overrightarrow{CD}$

【解答】

\*11 この用語は 13th-note 独自のものである。一般には**有向線分** (oriented segment) と呼ばれるが、「位置ベクトル」と対をなすようにした。



1.  $\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (2\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$
2.  $\vec{AD} = \vec{d} - \vec{a} = (-\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} = -2\vec{a} - \vec{b}$
3.  $\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (2\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} = 2\vec{a}$
4.  $\vec{BD} = \vec{d} - \vec{b} = (-\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}$
5.  $\vec{CD} = \vec{d} - \vec{c} = (-\vec{a} - \vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b}) = -3\vec{a} - 2\vec{b}$

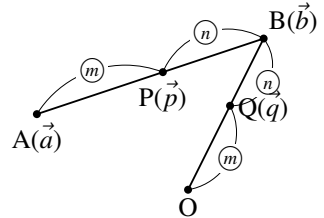
## B. 内分点の位置ベクトル

位置ベクトルを用いると、線分の内分点（数学 A p.106）は、次のように表現できる。

位置ベクトルと内分点の公式

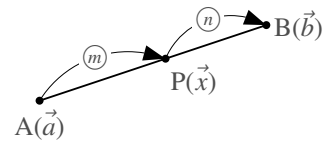
O を基点とし、 $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  とする。

- (1) 線分 AB を  $m : n$  に内分する点を  $P(\vec{p})$  とすると  $\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$
- (2) 特に、AB の中点を  $M(\vec{m})$  とすると、 $\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$  である。
- (3) 線分 OB を  $m : n$  に内分する点  $Q(\vec{q})$  は、 $\vec{q} = \frac{m}{m+n}\vec{b}$  である。



(証明) (1)  $AP : PB = m : n$  から  $nAP = mPB$  であり、 $\vec{AP}$ ,  $\vec{PB}$  は平行で向きも等しいから

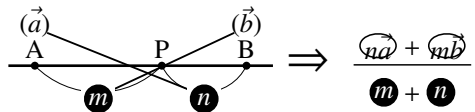
$$\begin{aligned} n\vec{AP} = m\vec{PB} &\Leftrightarrow n(\vec{p} - \vec{a}) = m(\vec{b} - \vec{p}) \\ &\Leftrightarrow n\vec{p} - n\vec{a} = m\vec{b} - m\vec{p} \\ &\Leftrightarrow (m+n)\vec{p} = n\vec{a} + m\vec{b} \quad \therefore \vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \end{aligned}$$



(2) は、(1) に  $m = n = 1$  を代入すればよい。

(3) 図を描けば  $\vec{OQ} = \frac{m}{m+n}\vec{OB}$  と分かり、 $\vec{OQ} = \vec{q}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  を代入すればよい\*12。

… 上の公式は、右のような図を描き「比だけを足すと分母、ベクトルと比を交差して掛けて足すと分子になる」と考えると計算しやすい。



【例題 32】 O を基点として  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  とする。次の位置ベクトルを  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  で表せ。

1. 線分 AB を 2 : 3 に内分する点  $C(\vec{c})$ , 7 : 3 に内分する点  $P(\vec{p})$ , 1 : 4 に内分する点  $Q(\vec{q})$
2. 1. の P, Q について、線分 PQ の中点  $M(\vec{m})$
3. 線分 OB を 3 : 2 に内分する点  $R(\vec{r})$

【解答】

1.  $\vec{c} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{2+3} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$ ,  $\vec{p} = \frac{3\vec{a} + 7\vec{b}}{7+3} = \frac{3\vec{a} + 7\vec{b}}{10}$ ,  $\vec{q} = \frac{4\vec{a} + \vec{b}}{5}$
2.  $\vec{m} = \frac{\vec{p} + \vec{q}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3\vec{a} + 7\vec{b}}{10} + \frac{4\vec{a} + \vec{b}}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11\vec{a} + 9\vec{b}}{10} = \frac{11\vec{a} + 9\vec{b}}{20}$
3.  $\vec{OR} = \frac{3}{5}\vec{OB}$  であるから、 $\vec{r} = \frac{3}{5}\vec{b}$

◀ もちろん、 $\vec{c} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$  のように答えても良い。

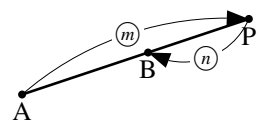
\*12 他の考え方として、外分の時のように、(1) の公式に  $\vec{a} = \vec{OO} = \vec{0}$  を代入しても、示される。

### C. 外分点の公式

直線 AB 上の点 P が  $AP : PB = m : n$  であり、線分 AB の外にあるとき、P が線分 AB を  $m : n$  に外分 (exterior division) するといった (数学 A, p.106).

外分の場合は、A から P へ向かう向きと、P から B へ向かう向きが逆なので、結果的には、次の 3 つの表現が同じことを表す。

$m > n$  の時



位置ベクトルの外分点の座標

位置ベクトルにおいては

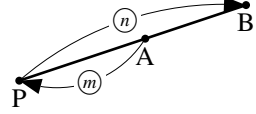
- AP : PB を  $m : n$  に外分する点 P を考える
- AP : PB を  $m : (-n)$  に内分する点 P を考える
- AP : PB を  $(-m) : n$  に内分する点 P を考える

ことは同じことである (ただし、 $m \neq n$ )。つまり、O を基点とし、 $A(\vec{a})$ 、 $B(\vec{b})$  とするとき

(1) 線分 AB を  $m : n$  に内分する点を  $P(\vec{p})$  とすると、 $\vec{p} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m - n}$  または  $\vec{p} = \frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{-m + n}$

(2) 線分 OB を  $m : n$  に内分する点を  $Q(\vec{q})$  とすると、 $\vec{q} = \frac{m\vec{b}}{m - n}$  または  $\vec{q} = \frac{-m\vec{b}}{-m + n}$

$m < n$  の時



…  $m > n$  の時は  $\vec{p} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m - n}$ 、 $m < n$  の時は  $\vec{p} = \frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{-m + n}$  を用いると、分母に負の数表れず、計算ミスが起こりにくい。

(証明) (1)  $AP : PB = m : n$  から  $nAP = mPB$  であり、 $\vec{AP}$ 、 $\vec{PB}$  は平行、向きは逆になるから

$$n\vec{AP} = -m\vec{PB} \quad \text{または} \quad -n\vec{AP} = m\vec{PB}$$

これは、内分の公式の証明において、 $m$  を  $-m$  に置き換えるか、 $n$  を  $-n$  に置き換えた場合に一致するので、示された。(2) は、 $\vec{a} = \vec{OO} = \vec{0}$  を代入して得られる。

**【例題 33】** O を基点として  $A(\vec{a})$ 、 $B(\vec{b})$  とする。次の位置ベクトルを  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  で表せ。

1. 線分 AB を 3 : 5 に外分する点  $P(\vec{p})$ 、7 : 3 に外分する点  $Q(\vec{q})$ 、2 : 3 に外分する点  $R(\vec{r})$
2. 線分 OB を 5 : 2 に外分する点  $C(\vec{c})$ 、2 : 3 に外分する点  $D(\vec{d})$

**【解答】**

1. AB を  $(-3) : 5$  に内分した点が P と考え、 $\vec{p} = \frac{5\vec{a} - 3\vec{b}}{-3 + 5} = \frac{5\vec{a} - 3\vec{b}}{2}$

AB を  $7 : (-3)$  に内分した点が Q と考え、 $\vec{q} = \frac{-3\vec{a} + 7\vec{b}}{7 - 3} = \frac{-3\vec{a} + 7\vec{b}}{4}$

AB を  $(-2) : 3$  に内分した点が R と考え、 $\vec{r} = \frac{3\vec{a} - 2\vec{b}}{-2 + 3} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

2. OB を  $5 : (-2)$  に内分した点が C と考え、 $\vec{c} = \frac{-2 \cdot \vec{0} + 5\vec{b}}{5 - 2} = \frac{5}{3}\vec{b}$

OB を  $(-2) : 3$  に内分した点が D と考え、 $\vec{d} = \frac{3 \cdot \vec{0} - 2\vec{b}}{-2 + 3} = -2\vec{b}$

#### D. 重心の公式

三角形の中線を3本引くと、三角形の重心で交わり、中線を2:1に内分していた(数学A p.118).

三角形の重心

Oを基点とし、 $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$ とする。△ABCの重心 $G(\vec{g})$ は $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ となる。

(証明) 辺BCの中点を $N(\vec{n})$ とすると、 $\vec{n} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$ である。

重心Gは線分ANを2:1に内分するので $\vec{g} = \frac{\vec{a} + 2\vec{n}}{2+1} = \frac{\vec{a} + 2 \cdot \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ 。

☞ 三角形の重心の位置ベクトルは、三角形の3頂点の位置ベクトルの平均だと覚えると良い。

**【例題34】** Oを基点として $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$ とする。 $\vec{c} = 4\vec{a} + \vec{b}$ のとき、次のベクトルを $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ で表せ。

1. △ABCの重心 $G(\vec{g})$
2. ABの中点をM, ACの中点をNとすると、△MNCの重心 $P(\vec{p})$

**【解答】**

$$1. \vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{5\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

$$2. M(\vec{m}), N(\vec{n})とすると\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \vec{n} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} = \frac{5\vec{a} + \vec{b}}{2}であるから$$

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\vec{m} + \vec{n} + \vec{c}}{3} = \frac{\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{5\vec{a} + \vec{b}}{2} + 4\vec{a} + \vec{b}}{3} \\ &= \frac{3\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{7\vec{a} + 2\vec{b}}{3} \end{aligned}$$

### 3. 有向ベクトルと位置ベクトルの関係

#### A. 有向ベクトルにおいて、内分・外分の公式を用いる

有向ベクトルで書かれた問題も、位置ベクトルを用いると計算しやすくなることもある。

(例)  $\triangle ABC$  において、線分  $BC$  を  $2:1$  に内分する点を  $D$  とするとき、 $\vec{AD}$  を  $\vec{AB}$ 、 $\vec{AC}$  で表せ。

(解1・位置ベクトルを用いる)  $A$  を基点として  $B(\vec{b})$ 、 $C(\vec{c})$ 、 $D(\vec{d})$  とする。 $D$  は線分  $BC$  を  $2:1$  に内分しているので  $\vec{d} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}$ 、すべて始点は  $A$  であるから、 $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ 。

結局、始点が揃っていれば、有向ベクトルにおいても位置ベクトルの公式を用いてよいと分かる。

(例)  $\triangle ABC$  において、線分  $BC$  を  $2:1$  に内分する点を  $D$  とするとき、 $\vec{AD}$  を  $\vec{AB}$ 、 $\vec{AC}$  で表せ。

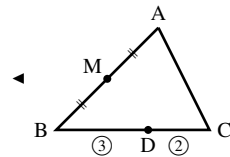
(解2・位置ベクトルの公式&有向ベクトル)  $A$  を始点として内分の公式より  $\vec{AD} = \frac{\vec{AB} + 2\vec{AC}}{3}$ 。  
始点が揃っていればOK ↑

【例題35】  $\triangle ABC$  において、辺  $BC$  を  $3:2$  に内分する点を  $D$ 、辺  $AB$  の中点を  $M$  とする。

- $\vec{AD}$  を  $\vec{AB}$ 、 $\vec{AC}$  で表せ。
- $\vec{AM}$  を  $\vec{AB}$ 、 $\vec{AC}$  で表せ。
- 辺  $MC$  を  $3:4$  に内分する点を  $E$  とする。 $\vec{AE}$  を  $\vec{AB}$ 、 $\vec{AC}$  で表せ。
- 辺  $MD$  を  $5:4$  に外分する点を  $F$  とする。 $\vec{AF}$  を  $\vec{AB}$ 、 $\vec{AC}$  で表せ。

【解答】 すべて、 $A$  を始点として内分・外分の公式を用いる。

- $\vec{AD} = \frac{2\vec{AB} + 3\vec{AC}}{3+2} = \frac{2\vec{AB} + 3\vec{AC}}{5}$
- 右欄外の図より  $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$
- $\vec{AE} = \frac{4\vec{AM} + 3\vec{AC}}{3+4} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}\vec{AB} + 3\vec{AC}}{7} = \frac{2\vec{AB} + 3\vec{AC}}{7}$
- $5:(-4)$  に内分すると考えて  
 $\vec{AF} = \frac{-4\vec{AM} + 5\vec{AD}}{5+(-4)} = -\frac{1}{2} \cdot 4\vec{AB} + 5 \cdot \frac{2\vec{AB} + 3\vec{AC}}{5} = 3\vec{AC}$



## B. 有向ベクトルにおいて、重心の公式を用いる

重心の公式についても考えてみよう。

(例)  $\triangle ABC$  の重心を  $G$  とする。  $\vec{AG}$  を  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  で表せ。

(解・位置ベクトルの公式&有向ベクトル)  $A$  を始点として重心の公式より  $\vec{AG} = \frac{\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AC}}{3}$ .  
 $\vec{AA} = \vec{0}$  より,  $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$  である。 始点が揃っていればOK ↑

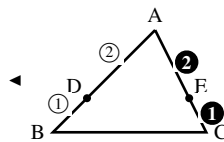
【例題 36】  $\triangle ABC$  において、辺  $AB$ ,  $AC$  を  $2:1$  に内分する点をそれぞれ  $D$ ,  $E$  とする。

1.  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AE}$  を  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  で表せ。 2.  $\triangle ADE$  の重心を  $G$  とする。  $\vec{AG}$  を  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  で表せ。

【解答】

$$1. \vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB}, \quad \vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AC}$$

$$2. \vec{AG} = \frac{\vec{AA} + \vec{AD} + \vec{AE}}{3} = \frac{\vec{0} + \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}}{3} = \frac{2}{9}\vec{AB} + \frac{2}{9}\vec{AC}$$



## C. 有向ベクトルの問題を位置ベクトルで考える

「ベクトルの差 ~ 位置ベクトルへの変換 (p.22)」により有向ベクトルは位置ベクトルに書き換えられる。

(例)  $\triangle ABC$  において、線分  $BC$  を  $2:1$  に内分する点を  $D$ , 線分  $AC$  の中点を  $E$  とするとき、  $\vec{DE}$  を  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  で表せ。

(解)  $\vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD}$  なので、  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AE}$  を求めればよい。  $A$  を始点として内分の公式より  $\vec{AD} = \frac{\vec{AB} + 2\vec{AC}}{3}$ ,  $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AC}$  なので、  $\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{\vec{AB} + 2\vec{AC}}{3} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AC}$ .

【例題 37】  $\triangle ABC$  において、辺  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  を  $2:1$  に内分する点をそれぞれ  $D$ ,  $E$ ,  $F$  とする。

$\vec{AB} = \vec{b}$ ,  $\vec{AC} = \vec{c}$  とするとき、  $\vec{DF}$ ,  $\vec{EF}$  を  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  で表せ。

【解答】  $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{b}$ ,  $\vec{AE} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}$ ,  $\vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{c}$  であるから

$$\vec{DF} = \vec{AF} - \vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

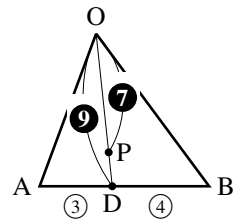
$$\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3} = -\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$$

◀  $\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b}$  を答えとしてもよい。

### D. 点の「精確な」位置

$\vec{OP} = \frac{4\vec{OA} + 3\vec{OB}}{9}$  となる P の精確な位置を求めてみよう. 分母を  $4 + 3 = 7$  に変え  $\frac{4\vec{OA} + 3\vec{OB}}{7} = \vec{OD}$  とおくと, D は線分 AB を 3 : 4 に内分する点を表している.

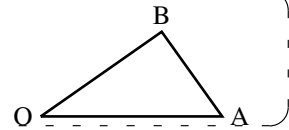
これを用いて  $\vec{OP} = \frac{7}{9} \cdot \frac{4\vec{OA} + 3\vec{OB}}{7} = \frac{7}{9}\vec{OD}$  となり, 右の図のようになる. つまり, P は OD を 7 : 2 に内分した点とわかる.



【例題 38】 次の P, Q の場所を  $\triangle OAB$  の中に図示せよ.

1.  $\vec{OP} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{8}$

2.  $\vec{OQ} = \frac{3\vec{OA} + 5\vec{OB}}{10}$



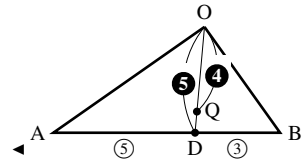
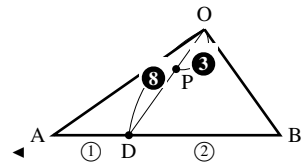
【解答】

1.  $\frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{3} = \vec{OD}$  とおくと, D は辺 AB を 1 : 2 に内分した点を表し

$\vec{OP} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{3} = \frac{3}{8}\vec{OD}$  となり, 右欄外のように図示できる.

2.  $\frac{3\vec{OA} + 5\vec{OB}}{8} = \vec{OD}$  とおくと, D は辺 AB を 5 : 3 に内分した点を表し

$\vec{OQ} = \frac{8}{10} \cdot \frac{3\vec{OA} + 5\vec{OB}}{8} = \frac{4}{5}\vec{OD}$  となり, 右欄外のように図示できる.



【練習 39 : P の精確な位置と面積比】

$\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{0}$  になるよう P を定める.

(1)  $\vec{AP}$  を  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  で表せ.

(2)  $\triangle BPD$  の面積を何倍すると,  $\triangle ABC$  の面積に等しいか.

【解答】

(1) A を始点にして考えると  $\vec{PA} = -\vec{AP}$ ,  $\vec{PB} = \vec{AB} - \vec{AP}$ ,  $\vec{PC} = \vec{AC} - \vec{AP}$  であるから

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow -\vec{AP} + 2(\vec{AB} - \vec{AP}) + 3(\vec{AC} - \vec{AP}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{AB} + 3\vec{AC} = 6\vec{AP} \quad \therefore \vec{AP} = \frac{2\vec{AB} + 3\vec{AC}}{6}$$

(2)  $\frac{2\vec{AB} + 3\vec{AC}}{6} = \vec{AD}$  とおくと, D は辺 BC を 3 : 2 に内分した点を表し

$\vec{AP} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2\vec{AB} + 3\vec{AC}}{5}$  となり, P は右欄外のようになる. よって

底辺は  $\frac{5}{3}$  倍

$\triangle BPD \Rightarrow \triangle ABC$  となり,  $\frac{5}{3} \times \frac{6}{1} = 10$  倍である.

高さは  $\frac{6}{1}$  倍

