13th-note 数学B

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 B で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π, ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ, ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω

Ver0.60(2012-4-14)

目次

第 1 章　平面のベクトル

向きのある線分がベクトルである．

力の様子（手で物を押す，紐が物を支える，風が吹く，など）を考えるとき，私たちは力の大きさだけでなく向きも考える．これが，ベクトルとも言える．

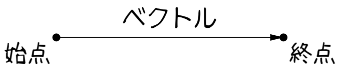
高校数学では主に，図形を調べる強力な道具として，ベクトルを学ぶ．ベクトルの大きな利点の一つは，平面図形にも空間図形にも，同じような手法が使えることにある．

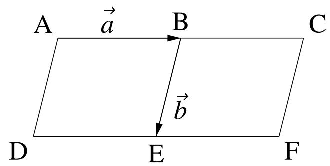
1.1　ベクトルの基礎

1.　ベクトルの定義

ベクトルにおいては，線分 AB と線分 BA を区別する．

A.　始点と終点





向きのある線分を**ベクトル** (vector) と言い，ベクトルの始まる点を**始点** (initial point)，終わる点を**終点** (terminal point) と言う．

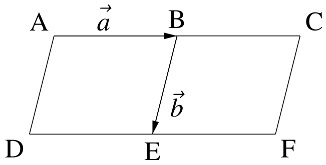
ベクトルを文字で表す方法は 2 つある．

1 つは，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のように，アルファベット小文字 1 文字の上に右向き矢印を付けて表す方法である．

もう 1 つは始点と終点を用いる方法である．たとえば，右図の $\vec{a}$ は始点が A，終点が B であるから $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とも表される[*1]．同様に，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BE}}$ である．

[*1] $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の読み方は「ベクトル A B（エイビー）」となる．

B.　等しいベクトル・逆ベクトル



向きも長さも等しいとき，2 つのベクトルは**等しい** (equal) という．たとえば，下図の $\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ は向きも長さも等しいから $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$ である．このように，ベクトルが等しいことは等号 = を用いて表す．

一方，長さが等しく向きが逆のベクトルを**逆ベクトル**という．たとえば，右図において $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ は $\vec{b}$ の逆ベクトルである．このことは，$\overrightarrow{\mathrm{DA}} = -\vec{b}$ と表される（p.2）．

C.　ベクトルの大きさ

ベクトルを，線分として見たときの長さを，ベクトルの**大きさ**と言い，絶対値記号 $|\quad|$ を付けて表す．たとえば，右上の図で線分 AB の長さが 2 のとき，ベクトルを用いて $\left|\vec{a}\right| = 2$ と表す．

D.　単位ベクトル・零ベクトル

長さが 1 のベクトルを**単位ベクトル** (unit vector) という．

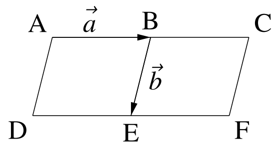
また，長さが 0 のベクトルを**零(ぜろ)ベクトル** (null vector, zero vector) と言い，$\vec{0}$ で表す．$\vec{0}$ を始点と終点が等しいベクトルと定義してもよい．

【例題 1】 右の図の ▱ABED，▱BCFE において，AB，AD，BC の長さを全てとする．

1. $\vec{a}$ と等しいベクトル，$\vec{b}$ の逆ベクトルを下の中から全て選びなさい．

   $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

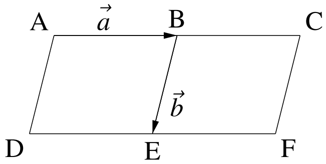
2. $\left|\vec{b}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{FD}}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CC}}\right|$ を求めよ．



2.　ベクトルの演算〜定数倍・足し算・引き算

ベクトルは，何倍かしたり，足したり引いたりできる．また，文字式のように扱える．

A.　ベクトルの定数倍



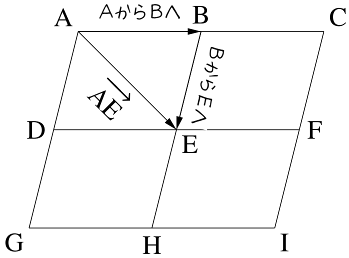
ベクトル $\vec{a}$ の長さを k 倍したベクトルは $k\vec{a}$ と表わされる．たとえば，右上図において $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\vec{a}$, $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \vec{a}$ である．

k は負の値でもよい．その場合は，向きが逆になる．特に $\vec{a}$ の -1 倍は，$\vec{a}$ の逆ベクトル $-\vec{a}$ になる*2．たとえば，右図において，$\overrightarrow{\mathrm{ED}} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{FD}} = -2\vec{a}$, $\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ になる．

*2 $\vec{a}$ の逆ベクトルを $-\vec{a}$ と表わしてよいと分かる．

B. ベクトルの和の定義

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を「A で始まり B で終わり，B で始まり E で終わる」と考えて，「A で始まり E で終わる」ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と定める．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と定義する．

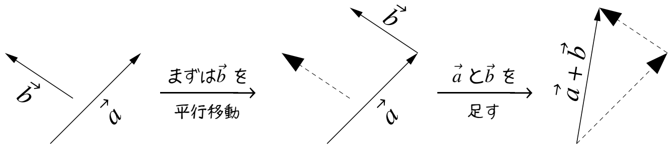


たとえば，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$$ となる．

もし，下図のように $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が離れているときは，$\vec{b}$ を平行移動してから和を考えればよい．



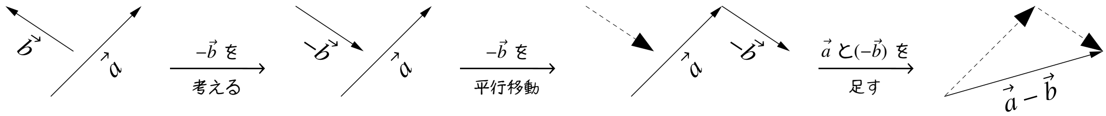
たとえば上図において

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{EI}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}\ \left(\leftarrow \overrightarrow{\mathrm{EI}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right)$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

容易に分かるように $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}+\vec{a}$ は等しい．つまり，どちらから足しても良い（p.5）．

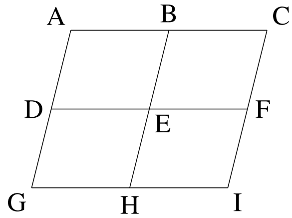
C. ベクトルの差の考え方～その１～

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ と考えれば，ベクトルの和と同じようにして考えることができる．



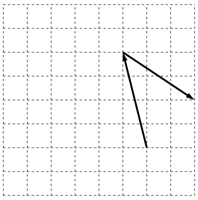
【例題 2】 右図の ▱ABED，▱BCFE について $\boxed{}$ に正しい文字を入れなさい．

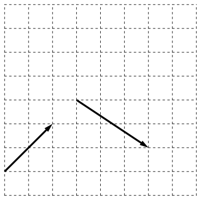
1. $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{ア}}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{GE}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{G}\boxed{イ}}$
3. $\overrightarrow{\mathrm{IC}}+\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{I}\boxed{ウ}}$
4. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{IE}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{エ}}$
5. $\overrightarrow{\mathrm{CF}}-\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\overrightarrow{\mathrm{C}\boxed{オ}}$
6. $\overrightarrow{\mathrm{IC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{I}\boxed{カ}}$
7. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\overrightarrow{\mathrm{I}\boxed{キ}}$
8. $3\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{ク}}$

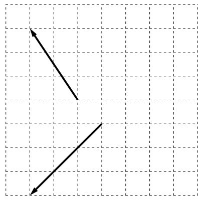


【練習 3：ベクトルの和・差】

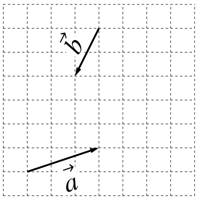
(1) それぞれについて，2 つのベクトルの和を書き込みなさい.

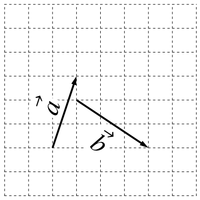
i.


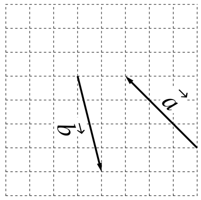
ii.


iii.


(2) それぞれについて，$\vec{a}-\vec{b}$ を書き込みなさい.

i.


ii.


iii.


【練習 4：ベクトルの定数倍・和・差】

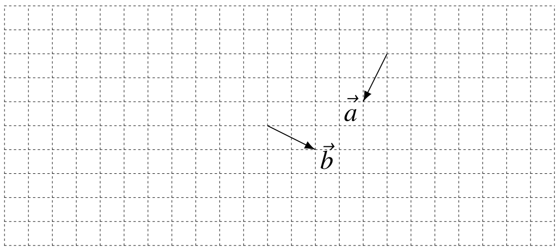
2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が右図のようにあるとき，以下のベクトルを図示しなさい.

i. $2\vec{a}$

ii. $-2\vec{b}$

iii. $-\vec{a}-2\vec{b}$

iv. $-3\vec{a}+3\vec{b}$



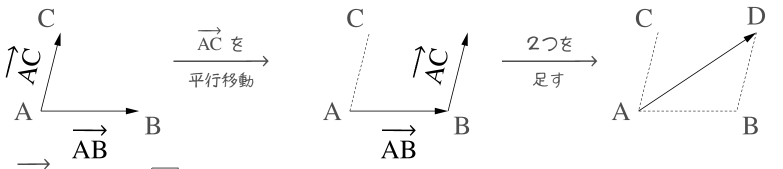
D. ベクトルの和は交換可能である～平行四辺形を用いたベクトルの和

始点の揃った 2 つのベクトルの和は，平行四辺形の対角線になる．

ベクトルの和と平行四辺形

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の和は，四角形 ABDC が平行四辺形となるよう D を取ったときの，$\overrightarrow{AD}$ になる．
ただし，A，B，C は同一直線上にないとする．

（証明）一番右の図において，AC = BD，AC // BD であるから，四角形 ABDC は 1 組の辺が平行で長さも等しくなり，平行四辺形と分かる．そして，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の和は ▱ABDC の対角線になっている．



このことから，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$ とも分かる．一般に，ベクトルの和は交換可能である．

E. ベクトルの計算 ～ 文字式のように扱う

ベクトルは，次のように文字式のように計算することができる*3.

$$\begin{aligned}
&2\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}-\vec{b} \\
=\ &2\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}-\vec{b} && \leftarrow \text{ベクトルの和は交換可能} \\
=\ &3\vec{a}+0\vec{b} && \leftarrow 2\vec{a}+\vec{a}=(2+1)\vec{a} \\
=\ &3\vec{a} && \leftarrow \vec{0}\ \text{はなし}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\vec{a}+\vec{b}-2(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b} \\
=\ &2\vec{a}+\vec{b}-2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{b} && \leftarrow 2(\quad)\ \text{を分配法則} \\
=\ &0\vec{a}+0\vec{b} && \leftarrow \vec{a},\vec{b}\ \text{をそれぞれ計算} \\
=\ &\vec{0}
\end{aligned}$$

【例題 5】 次の計算をしなさい．

1. $-4\vec{a}+3\vec{b}-3\vec{b}-4\vec{a}$　　2. $3(\vec{a}+2\vec{b})-(\vec{a}+3\vec{b})$　　3. $2(\vec{a}+2\vec{b})+4(\vec{a}-\vec{b})-6\vec{a}$

【練習 6：ベクトルを文字式のように扱う】

以下の等式を満たす $\vec{x}$(, $\vec{y}$) を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表しなさい．

(1) $-\vec{a}+3\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}$

(2) $\begin{cases} 4\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}+3\vec{b} \\ -3\vec{x}+\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b} \end{cases}$

*3 これらの計算は，ベクトルの以下の性質に基づいている．
(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$　(3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$　(4) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

【練習 7：ベクトルの和】

次の等式を示せ.

(1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$　　(2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{PS}$

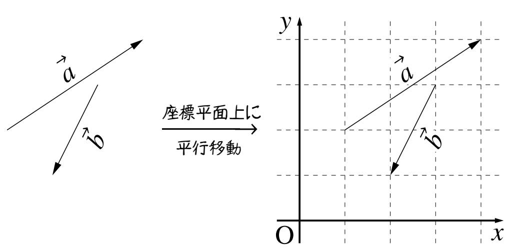
1.2　ベクトルの成分表示

座標平面上でベクトルを考えると，ベクトルは座標のように表すことができる.

1.　ベクトルを座標平面上に配置する

A.　ベクトルの「成分表示」とは

たとえば，左下の $\vec{a}, \vec{b}$ があったとする．これを，座標平面上に平行移動すると右下のようになる.



$\vec{a}$ は，始点から x 方向に 3，y 方向に 2 進んで終点に一致する．このことを，$\vec{a} = (3, 2)$ と表し，3 を x 成分，2 を y 成分と呼ぶ.

同じように，$\vec{b} = (-1, -2)$ と表され，$\vec{b}$ の x 成分は -1，y 成分は -2 である．つまり，進む方向が負であれば，成分の値も負になる.

ベクトルの成分表示

座標平面上にあるベクトル $\vec{a}$ が，始点から x 方向に p，y 方向に q 進んで終点に一致するならば $\vec{a}=(p,\ q)$*4 と表し，これを $\vec{a}$ の**成分表示** (component expression) という．
1 つ目の成分 p は **x 成分** (x-component)，2 つ目の成分 q は **y 成分** (y-component) と呼ばれる．

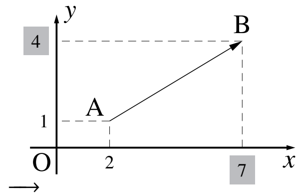
B. 「終点（まで）」引く「始点（から）」

6 時から 9 時までは，「9 時（まで）」引く「6 時（から）」の 3 時間である．

同じように，座標平面上において A から B までの $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，「B（まで）」引く「A（から）」で求められる．

たとえば，右図のように $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めることができる．

A(2，1) B(7，4)

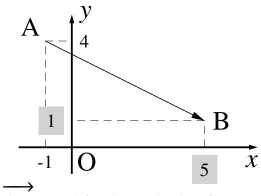


$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(7,\ 4)-(2,\ 1)$

$=(\underset{\text{Bのx}}{\boxed{7}}-\underset{\text{Aのx}}{2},\ \underset{\text{Bのy}}{\boxed{4}}-\underset{\text{Aのy}}{1})$

$=(5,\ 3)$

A(−1，4) B(5，1)



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,\ 1)-(-1,\ 4)$

$=(\underset{\text{Bのx}}{\boxed{5}}-\underset{\text{Aのx}}{(-1)},\ \underset{\text{Bのy}}{\boxed{1}}-\underset{\text{Aのy}}{4})$

$=(6,\ -3)$

C. 成分表示されたベクトルの大きさ

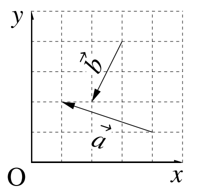
三平方の定理から次のことが導かれる．

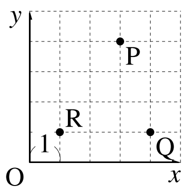
成分表示されたベクトルの大きさ

$\vec{a}=(p,\ q)$ であれば，大きさは $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{p^2+q^2}$ と求められる．
特に，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$ である．

【例題 8】

1. ベクトル $\vec{a}.\vec{b}$ を成分表示し，大きさも求めなさい．
2. 右の図のように P，Q，R があるとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を答えなさい．また，それぞれの大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|$ を求めなさい．ただし，座標の 1 目盛りの長さを 1 とする．





*4 $\vec{a}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ と表すこともある（縦ベクトル表示）．たとえば上の例において，$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ である．一方，$\vec{a}=(p,\ q)$ を横ベクトル表示という．高校数学ではたいてい横ベクトル表示を使うので，今後，平面ベクトルではそのようにする．

2. 成分表示されたベクトルの演算

A. 成分表示されたベクトルの演算

成分表示された 2 つのベクトルの定数倍，足し算，引き算は，次のように計算できる．

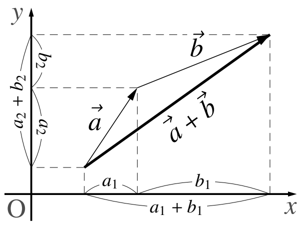
成分表示されたベクトルの演算

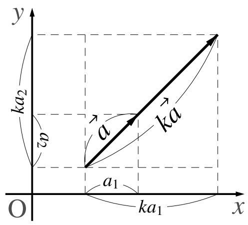
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ と，実数 k について，次のように計算できる[*5].

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2),\qquad \vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2),\qquad k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$$

$\vec{a}+\vec{b}$, $k\vec{a}$ については右図のように考えて分かる（$k\vec{a}$ については三角形の相似を用いている）．$\vec{a}-\vec{b}$ については，以下から分かる．

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})&=(a_1,\ a_2)+(-b_1,-b_2)\\&=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)\end{aligned}$$





【例題 9】 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-3,\ 1)$ のとき，以下のベクトルを答えよ．

1. $\vec{a}+\vec{b}$
2. $\vec{a}-\vec{b}$
3. $2\vec{a}+\vec{b}$
4. $3\vec{a}-2\vec{b}$
5. $\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$
6. $s\vec{a}+t\vec{b}$（s, t を用いて答えよ）
7. $2(\vec{a}+\vec{b})+3(\vec{a}-\vec{b})$
8. $3(\vec{a}-2\vec{b})-2(\vec{a}-3\vec{b})$

[*5] 縦ベクトルで書けば，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ と実数 k について $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$，$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$，$k\vec{a}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\end{pmatrix}$

B. 平行四辺形とベクトル

平行四辺形の成立条件「1 組の向かい合う辺の長さが等しく平行」は次のように言い換えられる.

平行四辺形の成立条件

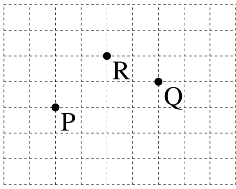
「四角形 ABCD が平行四辺形」 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば，四角形 ABDC が平行四辺形になる.

向かい合う辺の組，辺 AB，DC について，「AB = DC かつ AB // DC」$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ より示される. .

【練習 10：平行四辺形〜その１〜】

次の図のように P, Q, R がある時，以下の問に答えなさい.



(1) 四角形 PQSR が平行四辺形となるよう，S を右図に書き込みなさい.

(2) 四角形 PQRT が平行四辺形のとき，$\overrightarrow{PT}$ と等しいベクトルを下から選べ.

(3) 四角形 PUQR が平行四辺形のとき，$\overrightarrow{PU}$ と等しいベクトルを下から選べ.

a. $\overrightarrow{PR}$　b. $\overrightarrow{RP}$　c. $\overrightarrow{PQ}$　d. $\overrightarrow{QP}$　e. $\overrightarrow{QR}$　f. $\overrightarrow{RQ}$

【練習 11：平行四辺形〜その２〜】

座標平面上に A(1, 3)，B(2, −1)，C(4, 4) があるとき

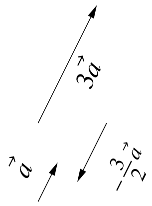
(1) 平行四辺形 ABCD となるよう D の座標を定めよ.

(2) 4 点 A，B，C，E を結んで平行四辺形ができるとき，E の座標をすべて求めよ.

1.3 ベクトルの平行と一次独立

1. ベクトルにおける「平行」

A. 「平行」とは k 倍のこと



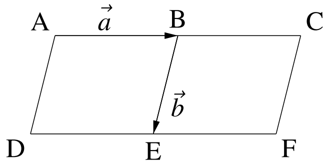
$\vec{a} = k\vec{b}$ となる実数 k が存在するとき，$\vec{a}, \vec{b}$ は**平行**であると言い，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ と表される．平行でないときは $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ と表される．ただし，$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $k \neq 0$ とする．

たとえば，$3\vec{a}$ と $\vec{a}$ は平行であり，$3\vec{a} \parallel \vec{a}$ である．

また，$\vec{a}$ と $-\vec{a}$ は向きは違うが，やはり $\vec{a} \parallel (-\vec{a})$ である．このように，k が負の値の時，$\vec{a}, k\vec{a}$ は逆向きとなるが，平行なベクトルと定義される．

【例題 12】 右の図の ▱ABED，▱BCFE について，以下の $\boxed{}$ に $\parallel$ か $\nparallel$ のいずれかを入れなさい．

$\vec{a}$ $\boxed{ア}$ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\vec{a}$ $\boxed{イ}$ $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$, $\vec{b}$ $\boxed{ウ}$ $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$, $\vec{b}$ $\boxed{エ}$ $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$



B. 成分表示から考えた「平行」

たとえば，$\vec{a} = (2,\ 3)$, $\vec{b} = (6,\ 9)$ のとき，$2 : 3 = 6 : 9$ であり，$\vec{b} = 3\vec{a}$ となるから $\vec{b} \parallel \vec{a}$ である．

また，$\vec{a} = (1,\ 3)$, $\vec{b} = (x, -6)$ が平行となるとき，$1 : 3 = x : (-6)$ でないといけない．これを解いて，$3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$ を得る．このときは $\vec{b} = -2\vec{a}$ である．

【例題 13】 それぞれの場合について，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ となるよう x の値を定めよ．

1. $\vec{a} = (3,\ 1)$, $\vec{b} = (x, -3)$
2. $\vec{a} = (-2,\ x)$, $\vec{b} = (4,\ x + 3)$
3. $\vec{a} = (2x,\ 3)$, $\vec{b} = (x + 4,\ 3x - 2)$

ベクトルの平行

$k \neq 0$ を実数とする．2 つのベクトル $\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0}$ が平行であることは

(1) $\vec{a} = k\vec{b}$ となる実数 k が存在すること

と定義される．もし，$\vec{a} = (a_1,\ a_2),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ と成分表示されていれば，次のように言い換えられる．

(2) $a_1 = kb_1$ かつ $a_2 = kb_2$ となる実数 k が存在すること

(3) $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$

【練習 14：2 つのベクトルの平行】

(1) 2 つのベクトル $\vec{a} = (x-1,\ x^2)$. $\vec{b} = (x+5,\ 2x)$ が平行となるような，x の値を求めよ．

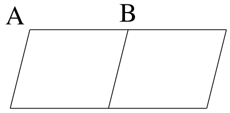
(2) $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b},\ \vec{y} = \vec{a} - 2\vec{b}$ とする．$\left(\vec{x}+\vec{y}\right) /\!/ \left(t\vec{x}-\vec{y}\right)$ となるよう実数 t の値を定めよ．ただし，$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a} \not\parallel \vec{b}$ とする．

C.　ベクトルの一次独立

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ について，$\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k が存在しないとき，$\vec{a},\ \vec{b}$ は**一次独立** (linear dependence) [*6] という [*7].

平面のベクトルにおいては，「$\vec{a},\ \vec{b}$ が一次独立でないこと」と「$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a} \not\parallel \vec{b}$」は一致する．

【例題 15】 右図について，次のベクトルの組のうち，一次独立なものを全て答えなさい．



1. $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{DF}}$　　2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{CF}}$　　3. $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{EC}}$　　4. $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{ED}}$　　5. $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{FF}}$

[*6] 「$\vec{a},\ \vec{b}$ が一次独立」という言葉の由来は「$\vec{a},\ \vec{b}$ のどちらも，他のベクトルの一次結合で表せない」ためである（今は「他のベクトル」は 1 つしかない）．この意味は，空間ベクトルの一次独立を学んだときにさらに明確になる．

[*7] 逆に，$\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k が存在するとき，$\vec{a},\ \vec{b}$ は**一次従属** (linear independence) という．これは，$\vec{a},\ \vec{b}$ が平行であったり，どちらかが $\overrightarrow{0}$ であることと一致する．

2.　平面上の「全ての」ベクトルを表す

A.　ベクトルの一次結合

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と実数 p, q について，$p\vec{a}+q\vec{b}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ の**一次結合** (linear combination) という．

…… 2 つのベクトルを 1 次式でつないで $p\vec{a}+q\vec{b}$ になるから，一次結合と言う．ベクトルには掛け算は存在せず 2 次式が作れないので，二次結合，三次結合，…は存在しない．

B.　平面上の「全ての」ベクトルを表す

平面のベクトルを表すには，一次独立な 2 つのベクトルが必要であり，同時に，2 つで十分である．

「全ての」平面上のベクトルを表す

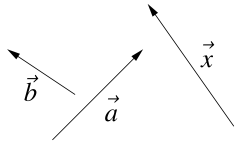
$\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立とする．このとき，平面上のどんなベクトル $\vec{x}$ も $\vec{a}, \vec{b}$ の一次結合で表される．つまり

$$\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

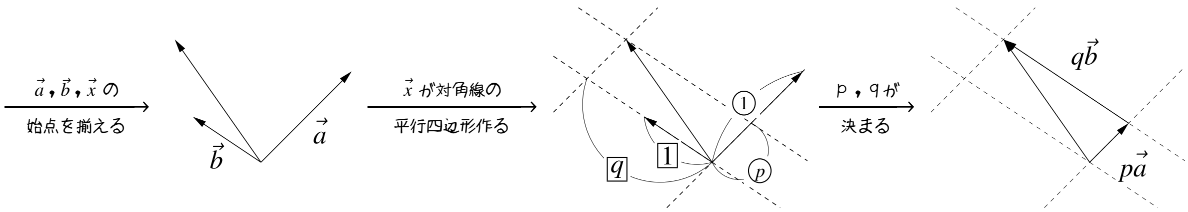
を満たす，実数 p, q が必ず存在する．さらに，p, q は必ず 1 通りに定まる．

この事実について，「図形的」「成分表示」の 2 つの側面から考えてみよう．

C.　図形的に考える～ベクトルの分解

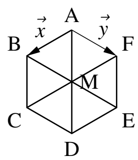


たとえば，右図のように $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$ があったとしよう．
ベクトル $\vec{x}$ が，$\vec{x} = p\vec{a}+q\vec{b}$ のように表せることは，次のようにして分かる．



この操作を，$\vec{x}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ に**分解** (resolution) すると言う．

【例題 16】　右の正六角形 ABCDEF について，以下のベクトルを $\vec{x}, \vec{y}$ で表せ．



1. $\overrightarrow{AM}$　　2. $\overrightarrow{AE}$　　3. $\overrightarrow{AD}$
4. $\overrightarrow{FD}$　　5. $\overrightarrow{DB}$　　6. $\overrightarrow{CE}$

D.　成分表示を用いて考える

成分表示を用いると，$\vec{x}=p\vec{a}+q\vec{b}$ となる $p,\ q$ は，計算で求められる．

たとえば，$\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$ とする．$\vec{x}=(4,-5)$ について $\vec{x}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおくと

$$p\vec{a}+q\vec{b}=(3p-q,\ 2p+3q)$$

であり，これが $\vec{x}=(4,-5)$ と等しいので，連立方程式 $\begin{cases} 2p-q=4 \\ p+3q=-5 \end{cases}$ が成り立つ.

これを解いて $p=1,\ q=-2$ を得るから，$\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}$ であると分かる.

【例題 17】

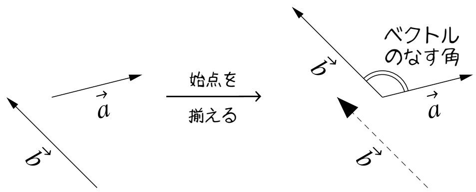
1. ベクトル $\vec{a}=(-1,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 1)$, $\vec{c}=(-5,-1)$ について, $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ.
2. ベクトル $\vec{a}=(-2,\ 3)$, $\vec{b}=(-3,\ 1)$, $\vec{c}=(-2,10)$ について, $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ.

1.4　ベクトルの内積

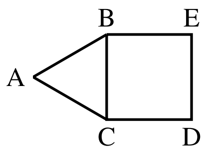
1.　ベクトルの内積とは何か

A.　2 つのベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない，2 つのベクトルの始点を揃えたときにできる角を，「2 つのベクトルのなす角[*8]」または「2 つのベクトルのつくる角」という．



【例題 18】　右図のように正三角形 ABC，正方形 BCDE があり，AB = 2 とする．次の 2 つのベクトルのなす角を求めよ．



1. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$　　2. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$　　3. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$　　4. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$

5. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$　　6. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EB}$　　7. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$　　8. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$

B.　2 つあるベクトルの内積の定義

ベクトルの内積

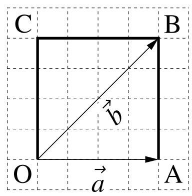
2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，次の 2 つの値は一致し，**内積** (inner product) [*9]と呼ばれる．

(1)（成分表示使わない）$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

(2)（成分表示使う）$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ のとき，$a_1b_1 + a_2b_2$

この内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表される．つまり，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2$ である．

たとえば，内積の計算は次のようになる．



(1)（成分表示使わない）$|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 4\sqrt{2}$，なす角は 45° なので，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 4\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ = 4\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 16$$

(2)（成分表示使う）$\vec{a} = (4,\ 0)$, $\vec{b} = (4,\ 4)$ となり，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 4 + 0\cdot 4 = 16$

[*8] 「つくる角」と言う方が分かりやすいが，「なす角」「角をなしている」などの表現で，しばしば用いられる．

[*9] 内積の値は常に実数である．そのため，内積のことをスカラー積ともいう．ここでのスカラーは「実数」を意味する．
一方，外積という計算も存在し，こちらはベクトル積ともいう．外積を計算した結果は必ずベクトルになるからである．

（2 つの定義が一致することの証明・$\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立のとき
$\vec{a} = (a_1,\ a_2),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ について，$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2$ が成り立つことを示せばよい．
$\vec{a}, \vec{b}$ の始点を O に揃え，それぞれの終点を A，B とする．△OAB[*10]について余弦定理より

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である．ここで，$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 = a_1^2 + a_2^2$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = \left|\vec{b}\right|^2 = b_1^2 + b_2^2$ であり $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, `b_2 - a_2)$ から $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$ であるので，これらを①に代入して

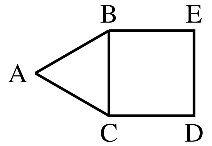
$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow\ b_1^2 - 2a_1b_1a_1^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow\ -2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

両辺を -2 で割って，$a_1b_1 + a_2b_2 = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ を得る．

【例題 19】 右図のように正三角形 ABC，正方形 BCDE があり，AB = 2 とする．
内積の定義 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ を用いて，次の内積の値を求めよ．

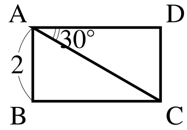


1. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$　　2. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}$　　3. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}$　　4. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}$
5. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}$　　6. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EB}$　　7. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}$　　8. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$

【例題 20】 内積の定義 (2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ を用いて，次の内積を計算しなさい．
1. $\vec{a} = (3,\ 1),\ \vec{b} = (-1,\ 2)$ のときの内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　2. $\vec{a} = (-4, -2),\ \vec{b} = (-3,\ 5)$ のときの内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$

[*10] $\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立であることと，△OAB は存在することは，同値である．

【練習 21：内積の計算】



(1) 右図の長方形について次の内積を計算しなさい.

1. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$　2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　3. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$　4. $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CA}$

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ が次のようになるとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を計算しなさい.

1. $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき　2. $\vec{a}=(-4,-2)$, $\vec{b}=(-3,\ 5)$ のとき

2. ベクトルの内積の利用（１）〜ベクトルの垂直条件・なす角の計算

A. ベクトルの垂直

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ は**垂直** (perpendicular) であると言い，$\vec{a}\perp\vec{b}$ と表される.

ベクトルの垂直

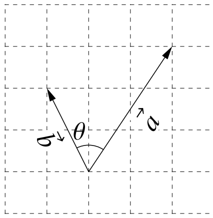
$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，　$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$　が成り立つ.

（証明）$\cos\theta=0 \Leftrightarrow \theta=90^\circ$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0 \Leftrightarrow \cos\theta=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

【例題 22】

1. $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(x,\ 4)$ が $\vec{a}\perp\vec{b}$ を満たすとき，x の値を求めよ.
2. $\vec{a}=(-1,\ x-1)$, $\vec{b}=(2x-5,\ 3)$ が $\vec{a}\perp\vec{b}$ を満たすとき，x の値を求めよ.

B.　ベクトルのなす角を求める



右図の $\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ について

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2+8=6$

である．一方，$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\cos\theta=10\cos\theta$

である．こうして，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を 2 通りで求められたので

$$10\cos\theta=6 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\theta=\frac{3}{5}$$

と分かる．このように，内積を用いてベクトルのなす角を計算できる．

【例題 23】　以下のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ について，$\cos\theta$ をそれぞれ求めよ．また，θ が求められる場合は θ の値も求めよ．

1. $\vec{a}=(3,-1)$, $\vec{b}=(2,-1)$
2. $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 5)$
3. $\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 4)$

2 つのベクトルのなす角

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ が成り立つ．

特に，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ であるとき，$\cos\theta=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$ となる．

C.　直交する単位ベクトルを求める

【練習 24：直交する単位ベクトル】

$\vec{x} = (2,\ 1)$ と直交する単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ．

3.　ベクトルの内積の利用（２）～内積を掛け算のように扱う

A.　結合法則・交換法則・分配法則～内積と掛け算の類似

実数 $a,\ b,\ c$ は結合法則 $a(bc) = (ab)c$，交換法則 $ab = ba$，分配法則 $a(b + c) = ab + ac$ を満たす．これらと類似の法則は，ベクトルの内積においても成立する．

内積の交換法則・分配法則

どんなベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ についても，次の等式が成り立つ．

(I) **（掛け算との関係）** 実数 k について，$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$,　$\vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(II) **（交換法則）** $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

(III) **（分配法則）** $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$,　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}+\vec{c}$

(I) から，たとえば $(2\vec{a})\cdot\vec{b}$,　$\vec{a}\cdot(2\vec{b})$,　$2(\vec{a}\cdot\vec{b})$ の括弧は省略でき，それぞれ $2\vec{a}\cdot\vec{b}$,　$\vec{a}\cdot 2\vec{b}$,　$2\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書かれる．

（証明）成分を計算すればよい．たとえば，成分表示によって $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ になったとすると，(I) の 1 つ目の式について

（左辺）$= (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 = ka_1b_1 + ka_2b_2$,　（右辺）$= k(a_1b_1 + a_2b_2) = ka_1b_1 + ka_2b_2$

となるから（左辺）=（右辺）である．

B. 大きさの 2 乗〜内積と掛け算の違い

ベクトル $\vec{a}$ の 2 乗は存在しない．しかし，それに類似した式 $\vec{a}\cdot\vec{a}$ は次のようになる．

同じベクトルの内積

(IV) **（同じベクトルの内積）** どんなベクトル $\vec{a}$ についても，$\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$ になる．

（証明）$\vec{a} = \vec{0}$ のときは明らか．$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$\vec{a}$, $\vec{a}$ のなす角は $0°$ なので $\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0° = \left|\vec{a}\right|^2$.

【例題 25】 $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = 2$, $\vec{c}\cdot\vec{a} = 3$ とするとき，以下の値を計算しなさい．

1. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$
2. $(\vec{a}-3\vec{b})\cdot\vec{c}$
3. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})$
4. $(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(5\vec{a}-2\vec{c})$

C. 内積の計算を文字式の展開のように扱う

ここまでで学んだ内積の性質 (I)-(IV) によって，以下のような計算ができる．

$$\begin{aligned}
\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2 &= \left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right) && \leftarrow \text{性質（IV）を使った}\\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot 2\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot 2\vec{b} && \leftarrow \text{性質（III）を使った}\\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b} && \leftarrow \text{性質（I）,（II）を使った}\\
&= \left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2 && \leftarrow \text{性質（IV）を使った}
\end{aligned}$$

こうして，文字式の展開 $(a+2b)^2 = a^2+4ab+4b^2$ に似た結果を得る．同じようにして，一般に次のような等式を得る．

文字式の展開との類似

任意のベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$，実数 k について，以下の等式が成り立つ．

(1) $\left|\vec{x}+k\vec{y}\right|^2 = \left|\vec{x}\right|^2 + 2k\vec{x}\cdot\vec{y} + k^2\left|\vec{y}\right|^2$　(2) $(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = \left|\vec{x}\right|^2 - \left|\vec{y}\right|^2$

(3) $(\vec{x}+k\vec{y})\cdot(\vec{x}+l\vec{y}) = \left|\vec{x}\right|^2 + (k+l)\vec{x}\cdot\vec{y} + kl\left|\vec{y}\right|^2$

ベクトルには 2 乗が存在しないが，代わりに，大きさの 2 乗となることに注意しよう．

【例題 26】

$\left|\vec{a}\right| = 2,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 4$ とする．以下の値を求めよ．

1. $\left|3\vec{a}+\vec{b}\right|^2$　　2. $\left|5\vec{a}-2\vec{b}\right|^2$　　3. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$　　4. $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|$

ベクトルの和の大きさ，たとえば $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$ を求めるには，まず 2 乗を計算しよう．

【練習 27：内積の計算の利用〜その１〜】

(1) $\left|\vec{a}\right| = 1,\ \left|\vec{b}\right| = 4$ で，$\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角が 60° のとき，$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$ を求めよ．

(2) $\left|\vec{a}\right| = 1,\ \left|\vec{b}\right| = 5,\ \left|4\vec{a}-\vec{b}\right| = 7$ であるとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(3) $\left|\vec{a}\right| = 4,\ \left|\vec{b}\right| = 2,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -2$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直となるよう t の値を定めなさい．

D.　ベクトルの大きさの最小値

【練習 28：ベクトルの大きさの最小値〜その１・成分がない場合〜】

$|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 2,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ のとき，$\left|t\vec{a}+\vec{b}\right|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ.

【練習 29：ベクトルの大きさの最小値〜その２・成分がある場合〜】

$\vec{a} = (t,\ 2),\ \vec{b} = (1-t,\ t)$ のとき，$\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ.

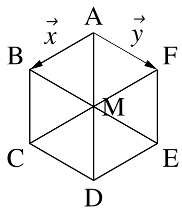
【練習 30：ベクトルの大きさの最小値〜その３・図形から考える〜】

1 辺が 1 の正六角形 ABCDEF があり，対角線の交点を M とする.
$\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{y} = \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $\vec{x}\cdot\vec{y}$ の値を求めよ.

(2) $\left|\vec{x}+t\vec{y}\right|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ.

(3) $(\vec{x}+t\vec{y}) \perp \vec{y}$ となるときの t の値を求めよ.



1.5 位置ベクトル

ベクトルの始点を固定することによって，ベクトルの有用性はさらに高まる．

1. 位置ベクトルとは

A. 始点を固定する

ベクトルとは「向きのある線分」であった．しかし，「始点と終点のペアを決めればベクトルが決まる」と言ってもよい．たとえば「始点を A，終点を B」と決めれば $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が決まる．

位置ベクトル (position vector) とは，始点を固定して考えられたベクトルのことである．位置ベクトルにおいて，始点として固定された点は**基点**とも言う．

これに対し，従来の「向きのある線分」としてのベクトルを**有向ベクトル** (oriented vector) と言う*11．

B. 「位置ベクトルで考える」という「宣言」

位置ベクトルで考えるときは，上のように書き始めることが多い．

「O を基点とし，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ とする」

この一文の意味は以下のようになる．

「(O を基点とした位置ベクトルを考え，) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする」

2. 位置ベクトルを用いた公式

A. ベクトルの差の考え方〜その２・終点から始点を引く〜

次の公式によって，どんなベクトルも位置ベクトルに直すことができる．

ベクトルの差 〜 位置ベクトルへの変換

O を基点とし，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$ である．　←『まで』引く『から』

（証明）ベクトルの和の定義から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，移項して $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$ を得る．

….たとえば，6 時から 9 時までの時間は，$9-6=3$ 時間になる．
同様に，A から B まで の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，$\vec{b}-\vec{a}$ になる，と考えられるとよい．

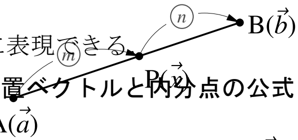
【例題 31】 O を基点とし，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$ とする．$\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=-\vec{a}-\vec{b}$ であるとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

1. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　2. $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　　3. $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　4. $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　　5. $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

*11 この用語は 13th-note 独自のものである．一般には**有向線分** (oriented segment) と呼ばれるが，「位置ベクトル」と対をなすようにした．

B.　内分点の位置ベクトル

位置ベクトルを用いると，線分の内分点（数学 A p.106）は，次のように表現できる．



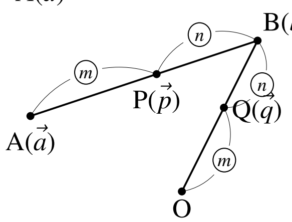
位置ベクトルと内分点の公式

O を基点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とする．

(1) 線分 AB を $m:n$ に内分する点を P($\vec{p}$) とすると $\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

(2) 特に，AB の中点を M($\vec{m}$) とすると，$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ である．

(3) 線分 OB を $m:n$ に内分する点 Q($\vec{q}$) は，$\vec{q}=\dfrac{m}{m+n}\vec{b}$ である．



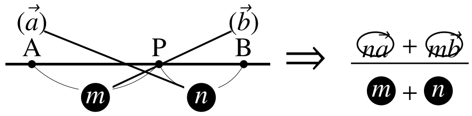
（証明）(1) AP : PB $= m:n$ から $n\text{AP}=m\text{PB}$ であり，$\overrightarrow{\text{AP}}$, $\overrightarrow{\text{PB}}$ は平行で向きも等しいから

$$
\begin{aligned}
n\overrightarrow{\text{AP}}=m\overrightarrow{\text{PB}} &\Leftrightarrow n\left(\vec{p}-\vec{a}\right)=m\left(\vec{b}-\vec{p}\right)\\
&\Leftrightarrow n\vec{p}-n\vec{a}=m\vec{b}-m\vec{p}\\
&\Leftrightarrow (m+n)\vec{p}=n\vec{a}+m\vec{b} \qquad \therefore\ \vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}
\end{aligned}
$$

(2) は，(1) に $m=n=1$ を代入すればよい．

(3) 図を描けば $\overrightarrow{\text{OQ}}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\text{OB}}$ と分かり，$\overrightarrow{\text{OQ}}=\vec{q}$, $\overrightarrow{\text{OB}}=\vec{b}$ を代入すればよい[*12]．

上の公式は，右のような図を描き「比だけを足すと分母，ベクトルと比を交差して掛けて足すと分子になる」と考えると計算しやすい．



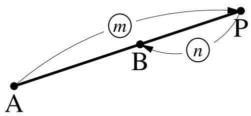
【例題 32】 O を基点として A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とする．次の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

1. 線分 AB を 2 : 3 に内分する点 C($\vec{c}$)，7 : 3 に内分する点 P($\vec{p}$)，1 : 4 に内分する点 Q($\vec{q}$)
2. 1. の P，Q について，線分 PQ の中点 M($\vec{m}$)
3. 線分 OB を 3 : 2 に内分する点 R($\vec{r}$)

*12 他の考え方として，外分の時のように，(1) の公式に $\vec{a}=\overrightarrow{\text{OO}}=\vec{0}$ を代入しても，示される．

C. 外分点の公式

m＞nの時

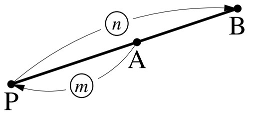


直線 AB 上の点 P が AP : PB = m : n であり，線分 AB の外にあるとき，P が線分 AB を m : n に**外分** (exterior division) するといった（数学 A，p.106）.

外分の場合は，A から P へ向かう向きと，P から B へ向かう向きが逆なので，結果的には，次の 3 つの表現が同じことを表す.

位置ベクトルの外分点の座標

m＜nの時



位置ベクトルにおいては

- AP : PB を m : n に外分する点 P を考える
- AP : PB を m : $(-n)$ に内分する点 P を考える
- AP : PB を $(-m)$: n に内分する点 P を考える

ことは同じことである（ただし，$m \neq n$）．つまり，O を基点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とするとき

(1) 線分 AB を m : n に内分する点を P($\vec{p}$) とすると，$\vec{p} = \dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$ または $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$

(2) 線分 OB を m : n に内分する点を Q($\vec{q}$) とすると，$\vec{q} = \dfrac{m\vec{b}}{m-n}$ または $\vec{q} = \dfrac{-m\vec{b}}{-m+n}$

・・・ $m > n$ の時は $\vec{p} = \dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$，$m < n$ の時は $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$ を用いると，分母に負の数が表れず，計算ミスが起こりにくい.

（証明）(1) AP : PB = m : n から nAP = mPB であり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は平行，向きは逆になるから

$n\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -m\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ または $-n\overrightarrow{\mathrm{AP}} = m\overrightarrow{\mathrm{PB}}$

これは，内分の公式の証明において，m を $-m$ に置き換えるか，n を $-n$ に置き換えた場合に一致するので，示された．(2) は，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OO}} = \vec{0}$ を代入して得られる.

【例題 33】 O を基点として A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とする．次の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ.

1. 線分 AB を 3 : 5 に外分する点 P($\vec{p}$)，7 : 3 に外分する点 Q($\vec{q}$)，2 : 3 に外分する点 R($\vec{r}$)
2. 線分 OB を 5 : 2 に外分する点 C($\vec{c}$)，2 : 3 に外分する点 D($\vec{d}$)

D. 重心の公式

三角形の中線を 3 本引くと，三角形の重心で交わり，中線を 2 : 1 に内分していた（数学 A p.118）.

三角形の重心

O を基点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) とする．△ABC の重心 G($\vec{g}$) は $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ となる.

（証明）辺 BC の中点を N($\vec{n}$) とすると，$\vec{n} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ である.

重心 G は線分 AN を 2 : 1 に内分するので $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+2\vec{n}}{2+1} = \dfrac{\vec{a}+2\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{3} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$.

三角形の重心の位置ベクトルは，三角形の 3 頂点の位置ベクトルの平均だと覚えると良い.

【例題 34】 O を基点として A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) とする．$\vec{c} = 4\vec{a}+\vec{b}$ のとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ.

1. △ABC の重心 G($\vec{g}$)
2. AB の中点を M，AC の中点を N とするとき，△MNC の重心 P($\vec{p}$)

3.　有向ベクトルと位置ベクトルの関係

A.　有向ベクトルにおいて，内分・外分の公式を用いる

有向ベクトルで書かれた問題も，位置ベクトルを用いると計算しやすくなることがある．

（例）△ABC において，線分 BC を 2 : 1 に内分する点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

（解１・位置ベクトルを用いる）A を基点として B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) とする．D は線分 BC を 2 : 1 に内分しているので $\vec{d} = \dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$，すべて始点は A であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

結局，始点が揃っていれば，有向ベクトルにおいても位置ベクトルの公式を用いてよいと分かる．

（例）△ABC において，線分 BC を 2 : 1 に内分する点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

（解２・位置ベクトルの公式＆有向ベクトル）A を始点として内分の公式より $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$.

始点が揃っていればＯＫ ↑

【例題 35】　△ABC において，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を D，辺 AB の中点を M とする．

1. $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．
2. $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．
3. 辺 MC を 3 : 4 に内分する点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．
4. 辺 MD を 5 : 4 に外分する点を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

B. 有向ベクトルにおいて，重心の公式を用いる

重心の公式についても考えてみよう．

（例）$\triangle$ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

（解・位置ベクトルの公式＆有向ベクトル）A を始点として重心の公式より $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$．

$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．　始点が揃っていればOK ↑

【例題 36】 $\triangle$ABC において，辺 AB，AC を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D，E とする．

1. $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．
2. $\triangle$ADE の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

C. 有向ベクトルの問題を位置ベクトルで考える

「ベクトルの差 〜 位置ベクトルへの変換 (p.22)」により有向ベクトルは位置ベクトルに書き換えられる．

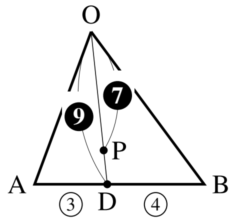
（例）$\triangle$ABC において，線分 BC を 2 : 1 に内分する点を D，線分 AC の中点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

（解）$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を求めればよい．A を始点として内分の公式より $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

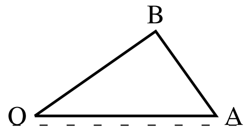
【例題 37】 $\triangle$ABC において，辺 AB，BC，CA を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

D. 点の「精確な」位置

$\overrightarrow{OP} = \dfrac{4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{9}$ となる P の精確な位置を求めてみよう．分母を $4 + 3 = 7$ に変え $\dfrac{4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{7} = \overrightarrow{OD}$ とおくと，D は線分 AB を $3 : 4$ に内分する点を表している．これを用いて $\overrightarrow{OP} = \dfrac{7}{9} \cdot \dfrac{4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{7} = \dfrac{7}{9}\overrightarrow{OD}$ となり，右の図のようになる．つまり，P は OD を $7 : 2$ に内分した点とわかる．



【例題 38】 次の P，Q の場所を △OAB の中に図示せよ．



1. $\overrightarrow{OP} = \dfrac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{8}$
2. $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}}{10}$

【練習 39：P の精確な位置と面積比】

$\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ になるよう P を定める．

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(2) △BPD の面積を何倍すると，△ABC の面積に等しいか．