13th-note 数学Ⅰ

（2013 年度卒業生まで）

目次

Ver2.74(2012-9-20)

第 1 章　数と式

1.1　いろいろな数

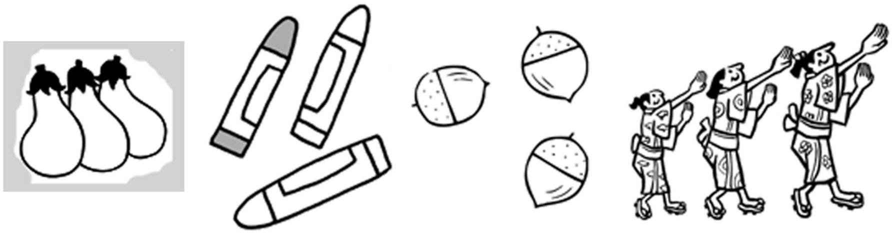
「数とは何か？」

高校数学の学習を始めるにあたって，この問題について考えてみよう．

1.　自然数・整数

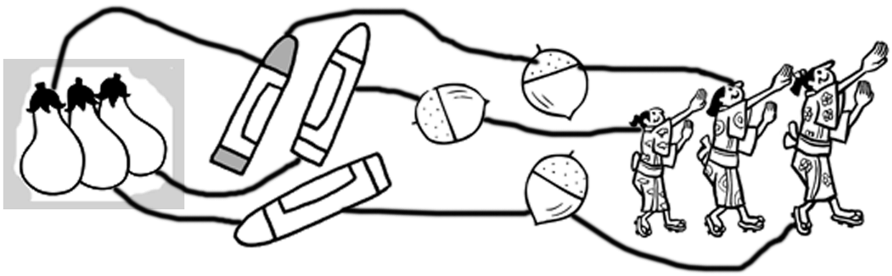
A.　「同じ数」とは～自然数の成り立ち

次の絵は左から「3 本」「3 本」「3 個」「3 人」であり，「数えた結果は 3 になる」という共通点がある．



そして，上のどの場合も，同じ数だけある．

もし，3 という数字がなかったら，「同じ数だけある」事実はどう表現すればよいだろうか．それには，次のように線を引いて考えればよい．



そして，この線の本数が数を表していると考えられる．このように，（線を引くなどして）何かと何かを対応させるやり方を**一対一対応**という[*1].

ものを数えるときに使う数字「1, 2, 3, 4, 5, ···」をまとめて**自然数** (natural number) という．

[*1] このときの線の様子は，数字を表す文字の成り立ちに深く影響している．数字の 3 を，漢字では「三」と表すのはその一例である．複数の古代文明でも同じ現象が見られ，古代エジプトであれば，「|||」で数字 3 を表したことが分かっている．

B. 負の数～何かと比べる

たとえば，あるお店に来たお客さんの数が右の表のようになったとしよう．

火曜は月曜より 4 人多い．

一方，水曜は月曜より 4 人少ない．

どちらも「4 人」だが，火曜と水曜では意味が正反対である．そこで，火曜を「+4 人」，水曜を「−4 人」のように表現する．

曜日	月	火	水	木	金	土
人数	60	64	56	54	60	63

このように，何かと値を比べるとき，自然数にマイナス (−) をつけた負の数は重要な意味を持つ．

曜日	月	火	水	木	金	土
月曜と比べた増加（人）	−	+4	−4	**−6**	**0**	**+3**

C. 0

0 の誕生は，負の数より遅い．今では子供でも 0 を使いこなすが，人類は長い間，0 を用いなかった．

たとえば，古代ローマでは，I（1），V（5），X（10），L（50），C（100），D（500），M（1000），··· などを用い，古代の中国では，一，二，三，···，十，百，千，万，億，··· などを用いた[*2]．

0 という「数」を発明したのはインド人である．7 世紀には発明されていた．0 のおかげで現在のように「筆算」や「小数」を本格的に使う事が可能になり，人類の計算技術も，数を表わす能力も，飛躍的に向上した[*3]．

【例題 1】 次の計算をしなさい．ただし，0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 を用いずに計算すること．

1. VIII + XIII　　2. XXII + XXVIII　　3. 五百四 + 二千十八　　4. 三万五千十六 + 二万四百九

【解答】

1. XVIIIIII になるが，VIIIII で X になるから答えは **XXI**.
2. XXXXVIIIII になるが，VIIIII で X だから XXXXX，答えは **L**.
3. **二千五百二十二**.　　4. **五万五千四百二十五**.

千	百	十	一
	五		四
二		一	八
二	五	一	十二

たとえば 3. であれば上のようにできる

D. 整数とは

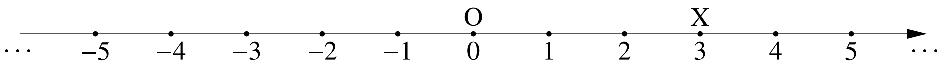
負の数と，0，自然数をまとめて**整数** (integral number) という．たとえば，次の数は全て整数である．

−2568，− 23，− 3，0，4，57

E. 自然数・整数の図示

自然数や整数を図示するには**数直線** (number line) を用いる．

数直線上のある点 X について「点 X に対応する数が a であること」を，X(a) と書く．たとえば，下図では点 X に対応する数が 3 であるので，X(3) である．



*2 しかし，これらのやり方では，数が大きくなるたびに新しい記号を作らなければならない．

*3 とはいえ，筆算や小数が考え出されて一般的に使用されるまでに何百年という時間がかかっている．筆算が考え出されるまで，計算には大変な時間がかかった．また，小数が存在しないだけでなく，分数の表し方は今と異なり，計算はとても複雑だった．

2.　有理数

A.　分数〜2 つの数の比

6 は 3 の何倍か？これは，$6 \div 3 = 2$ によって 2 倍と求められ，6 の 3 に対する**比** (ratio) の値を表している．

一方，12 は 5 の何倍になるだろうか．$10 < 12 < 15$ なので，2 倍よりは大きく，3 倍よりは小さいが，整数では表せない．そこで新しい数，分数 $\dfrac{12}{5}$ をつくる．

一般に，「a の b に対する比」を分数を $\dfrac{a}{b}$ で表わす．

「に対する」の付けられた値・言葉が，その文脈中では基準となる．

B.　有理数とは何か

分数で表現できる数を**有理数** (rational number) [*4]という．整数は $\dfrac{(\text{整数})}{1}$ と表すことができるので有理数である．たとえば，次の数は全て有理数である．

$-\dfrac{8}{3}$，-2，0，$\dfrac{11}{19}$，$\dfrac{18}{9}$，26

特に，**約分** (reduction) できない分数を**既約分数** (irreducible fraction) という．

有理数どうしの比も有理数になる．詳しくは，『複分数 (p.149)』で学ぶ.

【例題 2】　次の分数を，既約分数で答えなさい．

1. 5 の 9 に対する比の値
2. 7 の 35 に対する比の値
3. 12 に対する，9 の比の値
4. -10 に対する，15 の比の値

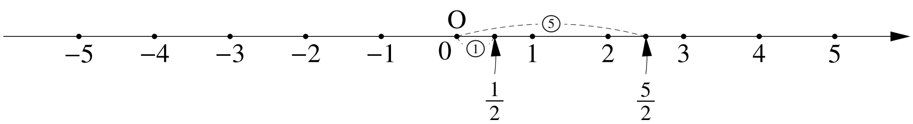
【解答】

1. $\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$　2. $\dfrac{7}{35} = \boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$　3.「12 に対する」なので，$\dfrac{9}{12} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

4. $\dfrac{15}{-10} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$

C.　有理数の図示

たとえば，$\dfrac{1}{2}$ を数直線上で表すには，下図のように 0 と 1 をつなぐ線分の 2 等分点をとり，その点に $\dfrac{1}{2}$ を対応させればよい．また，$\dfrac{5}{2}$ ならば $\dfrac{1}{2} \times 5$ と考えて，0 と $\dfrac{1}{2}$ をつなぐ線分を 5 つつないで得られる線分の右端の点を対応させればよい．



[*4] ratio が「比」を意味するのだから，rational number は“有比数”とでも訳されるべきだったのかもしれない．

D. 有理数の間には必ず有理数がある

たとえば，$\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{2}{7}$ の間の有理数は，次のようにして得られる．

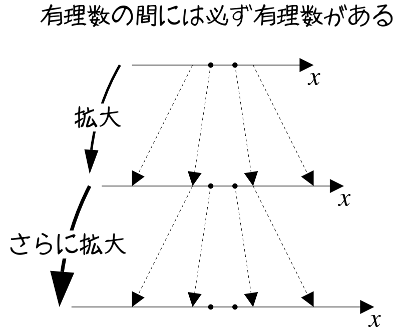
$$\frac{2}{7}=\frac{12}{42}<\frac{\overset{\text{12 と 14 の平均値}}{13}}{42}<\frac{14}{42}=\frac{1}{3}$$

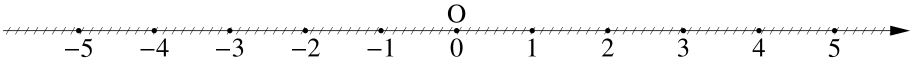
一般に，2 つの有理数 $\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{c}{d}$ $\left(\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\right)$ において

$$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}<\frac{\overset{\text{ad と bc の平均値}}{\frac{ad+bc}{2}}}{bd}<\frac{bc}{bd}=\frac{c}{d}$$

とすれば，2 つの有理数の間に新しい有理数を考えることができる．

こうして，2 つの異なる有理数の間には，必ず有理数が存在する[*5]ことがわかる．





有理数はぴっしり詰まっているイメージ

【練習 3：有理数の稠密性】

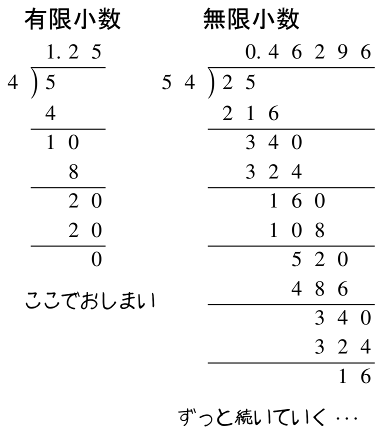
2 つの有理数 $\dfrac{6}{25}$，$\dfrac{1}{4}$ の間にある分数のうち，分母が 200 であるものを求めよ．

【解答】 $\dfrac{6}{25}=\dfrac{48}{200}$，$\dfrac{1}{4}=\dfrac{50}{200}$ であるので，求める値は $\boldsymbol{\dfrac{49}{200}}$ である．

E. 有理数と小数

有理数は筆算により**小数** (decimal number) になおすことができるが，次の 2 種類が存在する．

- $\dfrac{5}{4}=1.25$ のような，**有限小数** (finite decimal)
- $\dfrac{25}{54}=0.4629629\cdots$ のような，**無限小数** (infinite decimal)
  ただし，同じ数の並びが繰り返し現れるので，
  $\dfrac{25}{54}=0.4629629629\cdots=0.4\dot{6}2\dot{9}$ のように，循環の始まりと終わりに「˙」を付ける．このような小数は**循環小数** (circulating decimal) とよぶ．



逆に，どんな小数も分数に直すことができる．

有限小数は，$0.234=\dfrac{234}{1000}=\dfrac{117}{500}$ のようにすればよい．

循環小数の場合，たとえば $0.4\dot{6}2\dot{9}$ を小数に直すには，

$x=0.4\dot{6}2\dot{9}=0.4629629629\cdots$ とおき，次のようにすればよい[*6]．

$$\begin{array}{rrl} & 1000x = & 462.9629629\cdots \quad \text{←循環の周期に合わせ，1000倍した} \\ -) & x = & 0.4629629\cdots \\ \hline & 999x = & 462.5 \end{array}$$

$$\therefore\ x=\frac{462.5}{999}=\frac{4625}{9990}=\frac{25}{54}$$

←記号 "∴" は「だから」「つまり」を意味する．たいていは「だから」と読む．

[*5] このことを，有理数の稠密（ちゅうみつ）性 (density) という．

[*6] 小数点以降，無限に数が続く数を普通の数のように足したり引いたりできることについての，厳密な根拠は数学 III で学ぶ．

【練習 4：有理数と循環小数】

分数は小数で，小数は分数で表せ．

(1) $\dfrac{9}{16}$　　(2) $\dfrac{5}{37}$　　(3) 0.625　　(4) $0.\dot{4}2\dot{9}$

【解答】

(1) $\mathbf{0.5625}$　　(2) $0.135135135\cdots = \mathbf{0.\dot{1}3\dot{5}}$　　(3) $0.625 = \dfrac{625}{1000} = \mathbf{\dfrac{5}{8}}$

(4) $x = 0.429429429\cdots$（ ⋯⋯⋯ ①）とおく．これを 1000 倍すると $1000x = 429.429429\cdots$（ ⋯⋯⋯ ②）となる．② − ① より

$$\begin{array}{rrl} & 1000x = & 429.429429\cdots \\ -) & x = & 0.429429429\cdots \\ \hline & 999x = & 429 \end{array}$$

$\therefore x = \dfrac{429}{999} = \mathbf{\dfrac{143}{333}}$

3.　実数

A.　無理数

有理数でない数のことを**無理数** (irrational number) と言う[*7]．言い換えると，分数で表せない数が無理数である[*8]．p.6 で見るように，無理数の例として $\sqrt{2}$ が挙げられる．

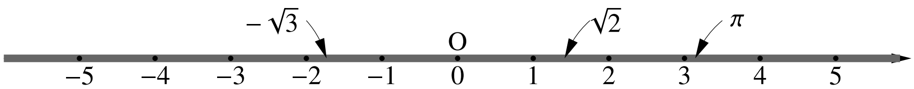
⋯⋯ 根号 $\sqrt{\quad}$ の近似値は，「開平法について (p.47)」のようにして，筆算で求められる．

B.　実数

数直線上に表すことのできる数すべてを，**実数** (real number) という．

すべての小数は数直線上に表すことができる[*9]ので，無理数はすべて実数である．

無理数は有理数どうしの間をみっちり埋めている[*10]．



みっちり詰まった実数のイメージ

無理数には次のような数が知られている．

$-\sqrt{23}$，$5\sqrt{2}$，**3 乗して 2 になる数** $\sqrt[3]{2}$，**円周率** $\pi = 3.1415926\cdots$，**ネイピア数**[*11] $e = 2.7182818\cdots$

今後，a，b，x などで数を表すとき，特に断りが無ければ，その数は実数であるとする．

[*7] ir-rational の ir は否定を表す接頭語であり，irrational とは rational でない，つまり，比で表せないという意味である．

[*8] 有理数はすべて循環小数になり，循環小数はすべて有理数になった (p.5)．
ここから，循環しない小数が有理数ではないことが分かる．

[*9] この事実を厳密に示すことは，より厳密な実数の定義と，デデキントの切断という考え方を必要とし，高校の学習範囲を超えてしまう．ただし，たとえば $\sqrt{2}$ のような数は右のようにすれば数直線上に表すことができる．

[*10] 実数の**連続性** (continuity) といい，有理数の稠密性と区別される．詳しくは数学 III で学ぶ．

[*11] ネイピア数 e について，詳しくは数学 III で学ぶ．

以上見てきたいろいろな数について，まとめると次のようになる．

数の分類

- **実数**
  - **有理数**
    - **整数**
      - 正の整数（**自然数**）
      - 0
      - 負の整数
    - 整数でない有理数
      - 有限小数
      - 循環小数 } 無限小数
  - **無理数** ………… 循環しない無限小数 } 無限小数

【例題 5】 次の実数について，以下の問に答えよ．

$$3,\quad -2,\quad 0,\quad \frac{2}{5},\quad -\frac{2}{5},\quad \sqrt{3},\quad 1.\dot{5}\dot{2},\quad \frac{36}{6},\quad -\sqrt{16},\quad \left(\sqrt{5}\right)^2,\quad 2\pi$$

(1) 自然数を選べ．　(2) 整数を選べ．　(3) 有理数を選べ．　(4) 無理数を選べ．

【解答】

(1) $\mathbf{3,\ \frac{36}{6},\ \left(\sqrt{5}\right)^2}$

◀ $\frac{36}{6} = 6,\ \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

(2) $\mathbf{3,\ -2,\ 0,\ \frac{36}{6},\ -\sqrt{16},\ \left(\sqrt{5}\right)^2}$

◀ $-\sqrt{16} = -4$

(3) $\mathbf{3,\ -2,\ 0,\ \frac{2}{5},\ -\frac{2}{5},\ 1.\dot{5}\dot{2},\ \frac{36}{6},\ -\sqrt{16},\ \left(\sqrt{5}\right)^2}$

◀ $1.\dot{5}\dot{2} = \frac{151}{99}$ (p.5 例題参照)

(4) $\mathbf{\sqrt{3},\ 2\pi}$

【発展 6：$\sqrt{2}$ は有理数ではないことの証明】

数学 A で詳しく学ぶ**背理法**[*12] (reduction to absurdity) を用いて $\sqrt{2}$ が有理数でないことを証明せよ．

【解答】 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．つまり，$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ と表される「既約(きやく)分数である」と仮定する．ただし，a は整数，b は 0 でない整数である．この両辺を 2 乗すると

◀ 既約分数 (p.3)

◀ 証明したい事柄を間違っていると仮定する．

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \qquad \therefore\ 2b^2 = a^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，左辺は 2 の倍数なので，右辺 a^2 も 2 の倍数である．したがって，a も 2 の倍数である．そこで，$a = 2a'$ (a' は整数) とおくと，①は

$$2b^2 = (2a')^2$$

$$\Leftrightarrow\ 2b^2 = 4a'^2 \qquad \therefore\ b^2 = 2a'^2$$

◀ もし，a が 2 の倍数でない(奇数)とすると，a^2 が 2 の倍数(偶数)であることに反してしまう(この説明も背理法を用いている)．

ここで，右辺は 2 の倍数なので，左辺 b^2 も 2 の倍数となり，b も 2 の倍数となる．これは，a，b がともに 2 の倍数であることを意味し，最初の「既約分数である」という仮定に矛盾する．

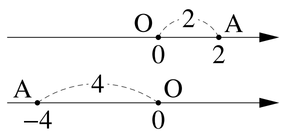
したがって，$\sqrt{2}$ は有理数ではない． ■

◀ 矛盾が生じてしまった，証明したい事柄を間違いとしたのが誤り．

[*12] これは，示すべき内容が間違っているものと仮定して矛盾を導き，示すべき内容が正しいと結論する論法である．

4.　絶対値

A.　絶対値とは



数直線上で，原点 O と点 A(a) の距離のことを a の**絶対値** (absolute value) といい，$|a|$ と書く[*13]．たとえば

$|2| = 2$，$|-4| = 4$

である．正の数に絶対値記号を付けても値は変わらない．
また，負の数に絶対値記号を付けると，値は -1 倍になる．

【例題 7】 1. から 3. の値を計算し，4. の問いに答えなさい．

1. $|-3| + |2|$　　2. $|-3-5|$　　3. $x = -2$ のときの，$|x+4|$ の値
4. $\left|\sqrt{2}-2\right|$ の値は $\sqrt{2}-2$ に等しいか，$-\left(\sqrt{2}-2\right)$ に等しいか．

【解答】
1. $|-3| + |2| = 3 + 2 = \mathbf{5}$　　2. $|-3-5| = |-8| = \mathbf{8}$
3. $|-2+4| = \mathbf{2}$
4. $\sqrt{2}-2$ は負の値なので，その絶対値は $\mathbf{-\left(\sqrt{2}-2\right)}$ に等しい．

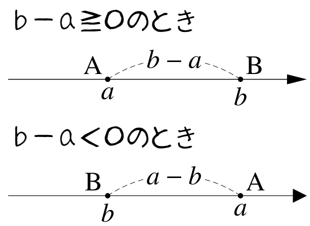
絶対値

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$　← a が負の値なので $-a$ は正の値

と表すことができる．絶対値については次式が成り立つ．

$|a| \geqq 0$ ，$|a| = |-a|$

B.　絶対値と 2 点間の距離



絶対値記号を用いると，数直線上の 2 点 A(a) と B(b) の距離 AB は

$\mathrm{AB} = |b-a|$

で表すことができる．この $|b-a|$ は，2 つの数 a と b の差も表している．

【例題 8】 数直線上に A(−4), B(−1), C(2), D(5) をとる．CD, BC, AD, CA をそれぞれ求めよ．

【解答】 $\mathrm{CD} = |5-2| = \mathbf{3}$，$\mathrm{BC} = |2-(-1)| = \mathbf{3}$，
$\mathrm{AD} = |5-(-4)| = \mathbf{9}$，$\mathrm{CA} = |-4-2| = |-6| = \mathbf{6}$

[*13] $|a|$ は「a（の）絶対値」と読まれることが多い．たとえば，$|2|$ ならば「2（の）絶対値」と読む．

【例題 9】 $|5|^2$, $|3||-4|$, $\dfrac{|5|}{|-10|}$ を計算しなさい.

【解答】 $|5|^2 = 5^2 = \mathbf{25}$, $|3||-4| = 3 \times 4 = \mathbf{12}$

$\dfrac{|5|}{|-10|} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

【練習 10：絶対値の値】

次の値を計算しなさい.

1. $x = 2$ のときの, $|x-3|$ の値　　2. $\left|-\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3}\right|$　　3. $\left|-3+\sqrt{5}\right|$

【解答】

1. $|2-3| = |-1| = \mathbf{1}$
2. $\left|-\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} + \sqrt{3} = \mathbf{2\sqrt{3}}$.
3. $\sqrt{5} = 2.2\cdots$ なので, $-3+\sqrt{5} = -0.7\cdots < 0$.

   つまり, $\left|-3+\sqrt{5}\right| = -\left(-3+\sqrt{5}\right) = \mathbf{3-\sqrt{5}}$.

◀ $-\sqrt{3}$ は負の値なので $\left|-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

◀ 符号を逆転させて正の値にするには, -1 倍すればよい.

C. 絶対値の値と場合分け

【例題 11】 次の x の条件において, $|x-2|$ と $x-2$ が等しい値になるものをすべて選べ.

1. $x = 3$　　2. $x = -1$　　3. $x = 1$　　4. $x = 4$　　5. $x < 2$ のとき　　6. $2 \leqq x$ のとき

【解答】

1. $x-2 = 1$　より, 等しい.　　2. $x-2 = -3$ より, 等しくない.
3. $x-2 = -1$ より, 等しくない.　　4. $x-2 = 2$ より, 等しい.
5. $x-2$ が負の値なので, $|x-2| = -(x-2)$ となり, 等しくない.
6. $x-2$ が 0 以上の値なので, $|x-2| = x-2$ となって, 等しい.

以上より, 等しくなるものは **(1), (4), (6)** である.

◀ 正の値の絶対値は, そのまま外せばよい.

【練習 12：絶対値の場合分け】

以下のそれぞれの場合について，式 $|x-4|+|2x+2|$ の値を計算せよ．

(1) $x=5$　(2) $x=1$　(3) $x=a$，ただし $4 \leqq a$　(4) $x=a$，ただし $-1<a<4$

【解答】

(1)（与式）$=|1|+|12|=1+12=\mathbf{13}$

(2)（与式）$=|-3|+|4|=3+4=\mathbf{7}$

(3) $4 \leqq a$ より，$a-4 \geqq 0$ なので $|a-4|=a-4$

$4 \leqq a$ より，$2a+2 \geqq 0$ なので $|2a+2|=2a+2$

つまり，（与式）$=(a-4)+(2a+2)=\mathbf{3a-2}$

◀ $a=5$ とすると，(1) の結果に一致することを確認できる．

(4) $-1<a<4$ より，$a-4<0$ なので $|a-4|=-(a-4)$

$-1<a<4$ より，$2a+2>0$ なので $|2a+2|=2a+2$

つまり，（与式）$=-(a-4)+(2a+2)=\mathbf{a+6}$

◀ $a=1$ とすると，(2) の結果に一致することを確認できる．

この問題のように場合に分けて問題を解くことは，高校の数学において極めて重要である．絶対値を含む問題の他にも，数学 A で学ぶ場合の数・確率などにおいて頻繁に必要とされる．

余談になるが，日常でも場合に分けて考えることは大切である．たとえば，晴れと雨で場合に分けて遠足の予定を立てないと，大変なことになってしまう．

【発展 13：絶対値の性質】

a，b に関して次の等式が成り立つことを証明せよ．ただし，(3) では $b \neq 0$ とする．

(1) $|a|^2=a^2$　(2) $|ab|=|a||b|$　(3) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$

これらの性質についてイメージがしやすいよう，具体例を挙げておく．

(1) $a=-3$ のとき

$|-3|^2=9$，$(-3)^2=9$

(2) $a=-3$，$b=4$ のとき

$|(-3)\times 4|=12$，$|-3||4|=12$

(3) $a=-\sqrt{5}$，$b=2$ のとき

$\left|\dfrac{-\sqrt{5}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{|-\sqrt{5}|}{|2|}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

絶対値の中が「0 以上か」「負か」で，絶対値の外し方が違うので，場合に分けて示す．

上の等式は，以下のように記憶するとよい．

(1) 2 乗すると絶対値は外れる（付く）

(2) 掛け算のところで絶対値は切れる（つながる）

(3) 割り算のところで絶対値は切れる（つながる）

【解答】

(1) i) $a \geqq 0$ のとき，$|a| = a$ であるから

$$(\text{左辺}) = |a|^2 = a^2 = (\text{右辺})$$

ii) $a < 0$ のとき，$|a| = -a$ であるから

$$(\text{左辺}) = |a|^2 = (-a)^2 = a^2 = (\text{右辺})$$

以上 i)，ii) より，$|a|^2 = a^2$ が成り立つ．■

(2) 右欄外の表のように，4 つの場合に分けて考える．

	$a \geqq 0$ のとき	$a < 0$ のとき
$b \geqq 0$ のとき	i)	iii)
$b < 0$ のとき	ii)	iv)

i) $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき

$ab \geqq 0$，$|a| = a$，$|b| = b$ であるから

$$(\text{左辺}) = |ab| = ab, \qquad (\text{右辺}) = |a||b| = ab$$

となり成立．

ii) $a \geqq 0$，$b < 0$ のとき

$ab \leqq 0$，$|a| = a$，$|b| = -b$ であるから

$$(\text{左辺}) = |ab| = -ab, \qquad (\text{右辺}) = |a||b| = a(-b) = -ab$$

◀ b は負の値なので，$-b$ は正の値である．

となり成立．

iii) ii) の証明において，a と b を入れ替えれば iii) の証明になっているので，成立する．

◀ a と b の役割が同じなので，このような証明ができる．たとえば，(3) においては，a と b の役割が異なるので，このような証明手段は使えない．

iv) $a < 0$，$b < 0$ のとき

$ab > 0$，$|a| = -a$，$|b| = -b$ であるから

$$(\text{左辺}) = |ab| = ab, \qquad (\text{右辺}) = |a||b| = (-a)(-b) = ab$$

以上より，いずれの場合も $|ab| = |a||b|$ が成り立つ．■

(3) まず，$\left|\dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{1}{|b|}$ ……… ① を示す．

i) $b > 0$ のとき，$\dfrac{1}{b} > 0$，$|b| = b$ であるから

$$(\text{①の左辺}) = \left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{b}, \qquad (\text{①の右辺}) = \frac{1}{|b|} = \frac{1}{b}$$

となり成立．

ii) $b < 0$ のとき，$\dfrac{1}{b} < 0$，$|b| = -b$ であるから

$$(\text{①の左辺}) = \left|\frac{1}{b}\right| = -\frac{1}{b}, \qquad (\text{①の右辺}) = \frac{1}{|b|} = \frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$$

となり成立．

以上 i)，ii) より①が成立．これより

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \cdot \frac{1}{b}\right| = |a|\left|\frac{1}{b}\right|$$

◀ (2) を使った

$$= |a|\frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

◀ ①を使った

となり，$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ が成り立つ．■

1.2　式の計算

この章では，まず，高校で学ぶような複雑な式を，見通しよく扱うための方法を学ぶ．
そして，展開(3.〜4.)と因数分解(5.〜7.)を学ぶ．

1.　単項式

A.　単項式と次数

$3abx^2$ のように，いくつかの文字や数を掛け合わせた式を**単項式** (monomial) といい，掛け合わせる文字の個数を**次数** (degree) という．1 や -3 などの数は，文字を含まない単項式とみなし，次数は 0 とする*14．また，数の部分を**係数** (coefficient) という．

文字 a, b, x について考える

$$\underbrace{3}_{\text{係数}}abx^2$$

文字が 4 個掛けてあるので次数は 4

次数の大小は,「高い」「低い」で表されることが多い．たとえば，式 ab は，式 $4x$ よりも次数が「高い」．

【例題 14】　式 $3b^2$,　$-5x^2y$,　-6,　$\frac{1}{3}xz$ について

1. それぞれ係数と次数を答えよ．
2. 一番次数の高い式，低い式をそれぞれ選べ．

【解答】

1. $3b^2$：係数は **3**，次数は **2**，　$-5x^2y$：係数は $\mathbf{-5}$，次数は **3**
   -6：係数は $\mathbf{-6}$，次数は **0**，　$\frac{1}{3}xz$：係数は $\mathbf{\frac{1}{3}}$，次数は **2**
2. 高い式：$\mathbf{-5x^2y}$，低い式：$\mathbf{-6}$

B.　特定の文字に着目する

単項式において，特定の文字に着目することがある．このとき，その他の文字を数と同様に扱う．たとえば，単項式 $3abx^2$ では以下のようになる．

文字 x の単項式と考えた場合　　$3abx^2 = (3ab)x^2$，次数は 2，係数は $3ab$
文字 a の単項式と考えた場合　　$3abx^2 = (3bx^2)a$，次数は 1，係数は $3bx^2$

文字 x に着目する

$$\overbrace{3ab}^{\text{係　数}}x^2$$

x 2個なので次数は 2

【例題 15】　以下のそれぞれについて，式 $3ka^4b^5$ の次数と係数を答えよ．

1. 文字 a の式と考えたとき
2. 文字 b の式と考えたとき
3. 文字 a, b の式と考えたとき

【解答】

1. a に着目すると，次数は **4**，係数は $\mathbf{3kb^5}$ である．　◀ $3ka^4b^5 = (3kb^5)a^4$
2. b に着目すると，次数は **5**，係数は $\mathbf{3ka^4}$ である．　◀ $3ka^4b^5 = (3ka^4)b^5$
3. a と b に着目すると，次数は **9**，係数は $\mathbf{3k}$ である．

---

*14　ただし，単項式 0 については次数を考えない．
通常，次数が m の式と次数が n の式の積は次数 $m+n$ の式になるが，単項式 0 の次数を考えると，この規則が成り立たなくなってしまう．

$$\underbrace{3ab}_{\text{次数は 2}} \times \underbrace{2xyz}_{\text{次数は 3}} = \underbrace{6abxyz}_{\text{次数は 5 (= 2 + 3)}}$$

【練習 16：単項式の次数】

次の多項式について，[ ] 内の文字に着目したときの次数と係数を答えよ．

(1) $3x^4y^5$　　[x], [y], [x と y]　　(2) $2abxy^2$　　[x], [y], [x と y]

【解答】

(1) i) x に着目すると，次数は **4**，係数は $\boldsymbol{3y^5}$ である．　◂ $3x^4y^5 = (3y^5)x^4$

ii) y に着目すると，次数は **5**，係数は $\boldsymbol{3x^4}$ である．　◂ $3x^4y^5 = (3x^4)y^5$

iii) x と y に着目すると，次数は **9**，係数は **3** である．

(2) i) x に着目すると，次数は **1**，係数は $\boldsymbol{2aby^2}$ である．　◂ $2abxy^2 = (2aby^2)x$

ii) y に着目すると，次数は **2**，係数は $\boldsymbol{2abx}$ である．　◂ $2abxy^2 = (2abx)y^2$

iii) x と y に着目すると，次数は **3**，係数は $\boldsymbol{2ab}$ である．　◂ $2abxy^2 = (2ab)xy^2$

C. 累乗と指数法則

実数 a を n 個（$n \geqq 2$）掛け合わせた式 $\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}}$ は a^n で表され「a の n 乗」と読む．このとき，a の右上に書かれた数 n のことを**指数** (exponent) という．

a^2 のことを a の**平方** (square)，a^3 のことを a の**立方** (cube) といい，$a, a^2, a^3, \cdots$ を総称して a の**累乗** (power) という．

$$\underbrace{6 \times 6 \times 6 \times 6}_{4\text{ 個}} = 6^4 \quad \text{←指数は 4}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{3\text{ 個}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \text{←指数は 3}$$

累乗に関して，一般に次のような**指数法則** (exponential law) が成り立つ[*15]．

指数法則

m，n が自然数のとき一般に次のような性質が成り立つ．

i) $a^m a^n = a^{m+n}$　　ii) $(a^m)^n = a^{mn}$　　iii) $(ab)^n = a^n b^n$

この指数法則は，暗記するようなものではない．仕組みを理解して慣れよう．なお，「$\cdot$」は掛け算を表す．たとえば，$4 \cdot 2x = 8x$ となる．今後，頻繁に用いられる記号なので覚えておこう．

i) $a^2 \times a^4 = \underbrace{(a \times a)}_{2\text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a \times a \times a)}_{4\text{ 個}} = a^6 \ (= a^{2+4})$

ii) $(a^2)^4 = \underbrace{(a \times a)}_{2\text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a)}_{2\text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a)}_{2\text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a)}_{2\text{ 個}} = a^8 \ (= a^{2\times4})$

iii) $(a \times b)^4 = \underbrace{(a \times b) \cdot (a \times b) \cdot (a \times b) \cdot (a \times b)}_{a\text{ も }b\text{ も 4 個ずつ}} = a^4 \times b^4$

【例題 17】 次の式を計算して簡単にせよ．

1. $x^2 \times x^3$　2. $(x^2)^3$　3. $(x^3)^5$　4. $(xy^2)^3$　5. $(2a^3)^2$　6. $(-a)^3$

【解答】

1. $x^2 \times x^3 = x^{2+3} = \boldsymbol{x^5}$　◂『指数法則 i)』を使った
2. $(x^2)^3 = x^{2\times3} = \boldsymbol{x^6}$　◂『指数法則 ii)』
3. $(x^3)^5 = x^{3\times5} = \boldsymbol{x^{15}}$
4. $(xy^2)^3 = x^3(y^2)^3 = \boldsymbol{x^3y^6}$　◂『指数法則 iii)』『指数法則 ii)』
5. $(2a^3)^2 = 2^2(a^3)^2 = \boldsymbol{4a^6}$
6. $(-a)^3 = (-1)^3a^3 = \boldsymbol{-a^3}$　◂『指数法則 iii)』

[*15] 今のところ，指数は自然数だが，数学 II においては整数や有理数などへと拡張させていく．

2.　多項式

A.　多項式 — 複数の「項」の式

$2a - 3b^2 + ab$ のように，いくつかの単項式の和や差として表される式を**多項式** (polynomial) という（**整式** (integral expression) ともいう[*16]）．

多項式を構成する単項式を，**項** (term) という．特に，0 次の項のことを**定数項** (constant term) という．たとえば，多項式 $2a - 3b^2 - 4 + ab$ の項は，$2a, -3b^2, -4, ab$（または $+ab$）であり，定数項は -4 である．負の符号も含めて項ということに注意しよう[*17]．

B.　同類項をまとめる

多項式の項のうち，文字の部分が同じである項どうしを**同類項** (similar term) という．多項式の加法と減法は，同類項をまとめることによって行われる．

同類項

$$\begin{aligned} 5a^2b + 3ab + 3 - a^2b + 2ab &= (5a^2b - a^2b) + (3ab + 2ab) + 3 \\ &= 4a^2b + 5ab \underbrace{+\,3}_{\text{定数項}} \end{aligned}$$

同類項

たとえば，$A = 3x^2 - 2x + 1$，$B = 2x^2 + 7x - 3$ のとき

多項式の加法

$$\begin{aligned} A + B &= (3x^2 - 2x + 1) + (2x^2 + 7x - 3) \\ &= 3x^2 - 2x + 1 + 2x^2 + 7x - 3 \\ &= (3x^2 + 2x^2) + (-2x + 7x) + (1 - 3) \\ &= 5x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

←かっこをはずした→

←同類項をまとめた→

多項式の減法

$$\begin{aligned} A - B &= (3x^2 - 2x + 1) - (2x^2 + 7x - 3) \\ &= 3x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - 7x + 3 \\ &= (3x^2 - 2x^2) + (-2x - 7x) + (1 + 3) \\ &= x^2 - 9x + 4 \end{aligned}$$

同類項を縦に並べると，計算がしやすくなる．

$$\begin{array}{rl} A + B = & 3x^2 - 2x + 1 \\ & +\,2x^2 + 7x - 3 \\ = & 5x^2 + 5x - 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} A - B = & 3x^2 - 2x + 1 \\ & -\,2x^2 - 7x + 3 \\ = & x^2 - 9x + 4 \end{array}$$

←かっこをはずし，同類項を縦に並べた

【例題 18】

1. $2ab + a^2c - 3c - 2a^2c$ の同類項をまとめ，項をすべて答え，定数項があれば答えよ．
2. $X = a^2 + 3a - 5$, $Y = 2a^2 + 3a + 5$ のとき，$X + Y$, $X - Y$ を求めよ．

【解答】

1. $2ab + a^2c - 3c - 2a^2c = \boldsymbol{2ab - a^2c - 3c}$

   項は $\boldsymbol{2ab, \ -a^2c, \ -3c}$ であり，定数項はない．

2. $$\begin{array}{rl} X + Y = & a^2 + 3a - 5 \\ & +\,2a^2 + 3a + 5 \\ = & \boldsymbol{3a^2 + 6a} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} X - Y = & a^2 + 3a - 5 \\ & -\,2a^2 - 3a - 5 \\ = & \boldsymbol{-a^2 - 10} \end{array}$$

---

*16 「多項式」と「単項式」をまとめて「整式」と定める言い方もある．

*17 単項式は多項式の特別なものであり，「項が 1 つの多項式」が単項式であると言える．

【練習 19：指数法則】

次の計算をしなさい.

(1) $2a^3b \times (a^2)^2$　　(2) $(4x^2y)^2 \times 2xy$　　(3) $(3xy^3)^2 \times \dfrac{1}{3}xy^2$

(4) a の平方の立方は，a の何乗か.

【解答】

(1)（与式）$= 2a^3b \times a^4 = \boldsymbol{2a^7b}$　　(2)（与式）$= 16x^4y^2 \times 2xy = \boldsymbol{32x^5y^3}$

(3)（与式）$= \cancel{9}^3x^2y^6 \times \dfrac{1}{\cancel{3}}xy^2 = \boldsymbol{3x^3y^8}$

(4) a の平方は a^2，その立方は $(a^2)^3 = \boldsymbol{a^6}$ になる.

C.　多項式の次数

多項式の次数は，各項の次数のうち最大のもので定義される．次数が n の多項式を，単に **n 次式** (expression of degree n) という．たとえば，$4a^2b + 5ab$ は（a と b について）3 次式である（右図参照）.

$$\underbrace{\underset{\text{次数は }3}{4a^2b} + \underset{\text{次数は }2}{5ab}}_{\text{多項式の次数は（大きい方の）}3\text{　つまり }3\text{ 次式}}$$

D.　降べきの順 — 式が見やすいように

多項式の項を，次数が低くなる順に並べ替えることを，「**降べきの順** (descending order of power) に整理する」という[*18]．たとえば，多項式 $-3x^2 - 7 + 4x^3 + x$ を（x について）降べきの順に整理してみよう.

$$\underbrace{\underset{2\text{ 次}}{-3x^2} \underset{0\text{ 次}}{-\ 7} \underset{3\text{ 次}}{+4x^3} \underset{1\text{ 次}}{+\ x}}_{\text{次数の大きさがばらばら}} = \underbrace{\underset{3\text{ 次}}{\boldsymbol{4x^3}} \underset{2\text{ 次}}{\boldsymbol{-3x^2}} \underset{1\text{ 次}}{\boldsymbol{+\ x}} \underset{0\text{ 次}}{\boldsymbol{-\ 7}}}_{\text{次数が順に低くなる}}$$

これによって式が見やすくなり，展開・因数分解・値の代入などがやりやすくなる.

…今後は，降べきの順に整理する習慣をつけよう[*19].

【例題 20】

1. 多項式 $3x^3 - 3x^2 + 1 + x^3$ の同類項をまとめ，降べきの順に整理すると $\boxed{\text{ア}}$ となる.
   この式の次数は $\boxed{\text{イ}}$ であり，項をすべて挙げると $\boxed{\text{ウ}}$，定数項は $\boxed{\text{エ}}$ である.
2. 多項式 $2x + 3x^2 - x^2 - 4x - 5$ の同類項をまとめ，降べきの順に整理すると $\boxed{\text{オ}}$ となる.
   この式の次数は $\boxed{\text{カ}}$ であり，項をすべて挙げると $\boxed{\text{キ}}$，定数項は $\boxed{\text{ク}}$ である.

【解答】

1. **ア**：$\boldsymbol{4x^3 - 3x^2 + 1}$，　**イ**：項 $4x^3$ の次数が一番高いので **3** 次式
   ウ：項は $\boldsymbol{4x^3}$，$\boldsymbol{-3x^2}$，**1**，　**エ**：定数項は **1**　◀ 項 1 の代わりに +1 でもよい.
2. **オ**：$2x + 3x^2 - x^2 - 4x - 5 = -2x + 2x^2 - 5$　◀ 同類項をまとめた
   $= \boldsymbol{2x^2 - 2x - 5}$　◀ 項べきの順に整理した

[*18] 逆に，次数が高くなる順に整理することを「**昇べきの順** (ascending order of power) に整理する」という．たとえば，$-3x^2 - 7 + 4x^3 + x = -7 + x - 3x^2 + 4x^3$ のようになる．ただし，高校ではあまり用いられない.

[*19] ただし，対称性をもつ $ab + bc + ca$ のような式は，例外として，降べきの順にする必要がないこともある.

カ : **2** 次式，　キ : 項は $\mathbf{2x^2}$，$\mathbf{-2x}$，$\mathbf{-5}$，　ク : 定数項は $\mathbf{-5}$

E. 特定の文字でまとめる

多項式においても，特定の文字に着目し，他の文字を数とみなすことがある．

たとえば，多項式 $bx - ax^3y + y^2 + y$ について考えてみよう．

x について降べきの順に整頓したとき

$$\underset{1\text{次}}{bx} - \underset{3\text{次}}{ax^3y} + \underset{0\text{次}}{y^2 + y}$$

$$= \overbrace{\boldsymbol{-ay}}^{\text{係数}}\ \underset{3\text{次}}{\boldsymbol{x^3}} + \overset{\text{係数}}{\boldsymbol{b}}\ \underset{1\text{次}}{\boldsymbol{x}} + \underset{0\text{次}}{\overbrace{(\boldsymbol{y^2+y})}^{\text{定数項}}}$$

- 次数は 3（x について 3 次式）
- x^3 の係数は $-ay$，x の係数は b
- 定数項は $y^2 + y$

y について降べきの順に整頓したとき

$$\underset{1\text{次}}{-ax^3y} + \underset{0\text{次}}{bx} + \underset{2\text{次}}{y^2} + \underset{1\text{次}}{y}$$

$$= \underset{2\text{次}}{y^2} - \underset{1\text{次}}{ax^3y} + \underset{1\text{次}}{y} + \underset{0\text{次}}{bx}$$

$$= \underset{2\text{次}}{\boldsymbol{y^2}} + \overbrace{(\boldsymbol{-ax^3+1})}^{\text{係数}}\ \underset{1\text{次}}{\boldsymbol{y}} + \underset{0\text{次}}{\overset{\text{定数項}}{\boldsymbol{bx}}}$$

- 次数は 2（y について 2 次式）
- y^2 の係数は 1，y の係数は $-ax^3 + 1$
- 定数項は bx

$-ax^3 + 1$ のように，定数項や係数が 2 つ以上の項からなる場合は，上のように（　）でまとめる．

【例題 21】 次の多項式を x について降べきの順に整理し，x^2 の係数，x の係数，定数項を答えよ．

1. $x^2 + 2y^2 - 3xy + 4y^2 + 2xy$　　2. $-x^2 + xy^2 - 3xy^2 + 2x^2$　　3. $3x^2 - 12xy + 4 + 3x^2 - 2x + 5$

【解答】

1.
$$x^2 + 2y^2 - 3xy + 4y^2 + 2xy$$
$$= x^2 + (2xy - 3xy) + (2y^2 + 4y^2)$$
$$= \boldsymbol{x^2 - xy + 6y^2}$$

これより，x^2 の係数は **1**，x の係数は $\boldsymbol{-y}$，定数項は $\boldsymbol{6y^2}$ である．

◀ $x^2 + (-y)x + 6y^2$ とみなせるため

2.
$$-x^2 + xy^2 - 3xy^2 + 2x^2$$
$$= (-x^2 + 2x^2) + (xy^2 - 3xy^2)$$
$$= \boldsymbol{x^2 - 2y^2x}$$

これより，x^2 の係数は **1**，x の係数は $\boldsymbol{-2y^2}$，定数項は**なし**である．

3.
$$3x^2 - 12xy + 4 + 3x^2 - 2x + 5$$
$$= (3x^2 + 3x^2) + (-12xy - 2x) + (4 + 5)$$
$$= \boldsymbol{6x^2 + (-12y - 2)x + 9}$$

これより，x^2 の係数は **6**，x の係数は $\boldsymbol{-12y-2}$，定数項は **9** である．

◀ $6x^2 - (12y + 2)x + 9$ としてもよいが，$-($　$)$ でくくるときに計算ミスが生じやすいし，くくらなくても問題はない．

【練習 22：降べきの順】

(1) $4a^2 + a^3 - 3 + a^2 - 1$ を整理し，降べきの順に整理しなさい．また，この式は何次式か．

(2) 次の多項式について，[ ] 内の文字に着目して降べきの順に並べ，式の次数，定数項を答えよ．

1) $2cb - 3a - 2c^2a$ [c]　　2) $3k^2x + 2kx^2 + 4kx + 4k - 3$ [x]

【解答】

(1) $4a^2 + a^3 - 3 + a^2 - 1 = 5a^2 + a^3 - 4$　◀ 同類項をまとめた

$= \boldsymbol{a^3 + 5a^2 - 4}$　◀ 項べきの順に整理した

式の次数は **3 次式**である．

(2) 1) $2cb - 3a - 2c^2a = -2c^2a + 2cb - 3a = \boldsymbol{-2ac^2 + 2bc - 3a}$

定数項は $\boldsymbol{-3a}$，項 $-2ac^2$ の次数 2 が一番高いので，**2 次式**．

2) $3k^2x + 2kx^2 + 4kx + 4k - 3 = \boldsymbol{2kx^2 + (3k^2 + 4k)x + 4k - 3}$

定数項は $\boldsymbol{4k - 3}$，項 $2kx^2$ の次数 2 が一番高いので，**2 次式**．

F. 分配法則，交換法則，展開

分配法則 $A(B + C) = AB + AC$，$(A + B)C = AC + BC$，交換法則 $AB = BA$ は多項式においても成立する．たとえば，これを使って $(x^2 + 3)(x^2 - 4x + 5)$ は次のように計算する．

$$\begin{aligned}
(x^2 + 3)(x^2 - 4x + 5) &= (x^2 + 3)A && \leftarrow x^2 - 4x + 5 \text{ を } A \text{ とおいた}\\
&= x^2A + 3A && \leftarrow \text{分配法則 } (A + B)C = AC + BC \text{ を使った}\\
&= x^2(x^2 - 4x + 5) + 3(x^2 - 4x + 5) && \leftarrow A \text{ を } x^2 - 4x + 5 \text{ に戻した}\\
&= x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 12x + 15 && \leftarrow \text{分配法則 } A(B + C) = AC + BC \text{ を使った}\\
&= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 15 && \leftarrow \text{同類項でまとめ降べきの順に並べた}
\end{aligned}$$

ここでは，$x^2 - 4x + 5$ を A とおいて計算した．結果的に，1 つの多項式を 1 つの文字のようにして扱ったことになる．この見方は今後，極めて重要となる．

ただし上の計算については，慣れてくると，左下のように計算できるようになる．

$$\begin{aligned}
(x^2 + 3)\ (x^2 - 4x + 5) &= \overset{①}{x^4} - \overset{②}{4x^3} + \overset{③}{5x^2} + \overset{④}{3x^2} - \overset{⑤}{12x} + \overset{⑥}{15}\\
&= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 15
\end{aligned}$$

	x^2	$-4x$	5
x^2	x^4 ①	$-4x^3$②	$5x^2$③
3	$3x^2$④	$-12x$⑤	15 ⑥

表の①, ②, $\cdots$ は，左の式の①, ②, $\cdots$ に対応している．

このように，「多項式どうしの積[*20]を計算して，単項式だけの和にすること」を**展開** (expansion) **する**という．0 でない 2 つの多項式について，次数が m の式と次数が n の式の積を展開すると，次数 $m + n$ の多項式になる．

[*20] 多項式の除法は数学 II で学ぶ．

【練習 23：展開の基礎〜その１〜】

A が次の式のとき，$(3x+y)A$ を展開し，x についての降べきの順に整理しなさい.

(1) $A = x + y$　　(2) $A = 2x^2 - 3x + 5$　　(3) $A = 2x - 6y + 1$

【解答】

(1) $(3x+y)A$ に $A = x+y$ を代入して

$$(3x+y)(x+y) = 3x^2 + 3xy + xy + y^2$$
$$= \mathbf{3x^2 + 4xy + y^2}$$

	x	y
$3x$	$3x^2$	$3xy$
y	xy	y^2

◀ x の降べきの順に整理した

(2) $(3x+y)A = (3x+y)(2x^2-3x+5)$

$$= 6x^3 - 9x^2 + 15x + 2x^2y - 3xy + 5y$$
$$= \mathbf{6x^3 + (2y-9)x^2 + (-3y+15)x + 5y}$$

	$2x^2$	$-3x$	5
$3x$	$6x^3$	$-9x^2$	$15x$
y	$2x^2y$	$-3xy$	$5y$

◀ x の降べきの順に整理した

(3) $(3x+y)A = (3x+y)(2x-6y+1)$

$$= 6x^2 - 18xy + 3x + 2xy - 6y^2 + y$$
$$= \mathbf{6x^2 + (-16y+3)x - 6y^2 + y}$$

	$2x$	$-6y$	1
$3x$	$6x^2$	$-18xy$	$3x$
y	$2xy$	$-6y^2$	y

◀ 同類項をまとめ，x の降べきの順に整理した

【練習 24：展開の基礎〜その２〜】

$A = 2x + y,\ B = 3x - 2y - 1$ のとき，以下の問いに答えよ.

(1) 積 AB を展開し，x についての降べきの順に整理しなさい.

(2) 積 AB の x の係数が 3 に等しいとき，y の値を求めなさい.

【解答】

	$3x$	$-2y$	-1
$2x$	$6x^2$	$-4xy$	$-2x$
y	$3xy$	$-2y^2$	$-y$

(1) $AB = (2x+y)(3x-2y-1) = 6x^2 - 4xy - 2x + 3xy - 2y^2 - y$

$$= 6x^2 - xy - 2x - 2y^2 - y$$
$$= \mathbf{6x^2 + (-y-2)x - 2y^2 - y}$$

◀ x の降べきの順に整理した

(2) x の係数は $-y-2$ なので $-y-2 = 3$ であればよい.

これを解いて $\mathbf{y = -5}$.

3.　多項式の乗法の公式

今後出てくる公式については，掛け算の九九のようなものだと思って繰り返し練習しよう．慣れてくると多項式の展開が格段に早く正確になる．

A.　中学の復習

左の「i) うまい計算のやり方（○）」で，反射的にできるように復習しよう．

平方の公式

1°　$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,　　$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(3x+2)^2 = \underbrace{9x^2 + 2\cdot(3x)\cdot 2 + 4}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 9x^2 + 12x + 4$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(3x+2)^2 = (3x+2)(3x+2)$$
$$= 9x^2 + 6x + 6x + 4$$
$$= 9x^2 + 12x + 4$$

和と差の積の公式

2°　$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(5x+2y)(5x-2y)$$
$$= \underbrace{(5x)^2 - (2y)^2}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 25x^2 - 4y^2$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(5x+2y)(5x-2y)$$
$$= 25x^2 - 10xy + 10yx - 4y^2$$
$$= 25x^2 - 4y^2$$

1 次式の積の公式～特殊形

3°　$(x+b)(x+d) = x^2 + (b+d)x + bd$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(x+3y)(x-4y)$$
$$= \underbrace{x^2 + (3y-4y)x + (3y)\cdot(-4y)}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= x^2 - xy - 12y^2$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(x+3y)(x-4y)$$
$$= x^2 - 4xy + 3yx - 12y^2$$
$$= x^2 - xy - 12y^2$$

【例題 25】 以下の展開をしなさい．ただし，4. 以降は $A = x - 3$, $B = x + 3$, $C = x - 1$ とする．

1. $(a+4)^2$　2. $(x+2y)(x-2y)$　3. $(p+2)(p-4)$　4. A^2　5. AB　6. AC

【解答】

1. $(a+4)^2 = \boldsymbol{a^2 + 8a + 16}$　◀『平方の公式』(p.18)
2. $(x+2y)(x-2y) = \boldsymbol{x^2 - 4y^2}$　◀『和と差の積の公式』(p.18)
3. $(p+2)(p-4) = \boldsymbol{p^2 - 2p - 8}$　◀『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)
4. $A^2 = (x-3)^2 = \boldsymbol{x^2 - 6x + 9}$　◀『平方の公式』(p.18)
5. $AB = (x-3)(x+3) = \boldsymbol{x^2 - 9}$　◀『和と差の積の公式』(p.18)
6. $AC = (x-3)(x-1) = \boldsymbol{x^2 - 4x + 3}$　◀『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)

B. 分母の有理化

分母に根号（$\sqrt{\ \ }$）をもつ分数において，分母の根号を無くし，有理数に変えることを，分母の**有理化** (rationalization) という[*21]．

$$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3\left(\boldsymbol{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\boldsymbol{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)}$$

← 分母と分子に $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ を掛ける

$$= \frac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$$

← 『和と差の積の公式』(p.18)

【例題 26】 以下の分数の分母を有理化しなさい．

1. $\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　2. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$　3. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

【解答】

1. $$\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\cancel{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\cancel{4}} = \boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
◀『和と差の積の公式』(p.18)

2. $$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}+3-\sqrt{3}}{2}}$$
◀『和と差の積の公式』(p.18)

3. $$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2}{3}$$
◀『和と差の積の公式』(p.18)
$$= \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{10}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{3} = \boldsymbol{\frac{7+2\sqrt{10}}{3}}$$
◀『平方の公式』(p.18)

[*21] これによって，近似値を求めやすくなる．下の例でいえば（$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.414$，$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.732$ とする）

$$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \fallingdotseq 3 \div (1.732 - 1.414) = 3 \div 0.318, \qquad 3\sqrt{3}+3\sqrt{2} \fallingdotseq 3 \times (1.732 + 1.414) = 3 \times 3.146$$

【練習 27：分母の有理化】

分数 $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$，$\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}$ を有理化しなさい.

【解答】 $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \dfrac{2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{\cancel{2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}{\cancel{4}\,2} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}}$

$\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} = \dfrac{\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)}{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{6}+2\right)^2}{2}$

$= \dfrac{10+4\sqrt{6}}{2} = \mathbf{5+2\sqrt{6}}$

◀『和と差の積の公式』(p.18)

◀『平方の公式』(p.18)

C. 1 次式の積の一般的な公式

$(ax+b)(cx+d)$ を展開すると

$(ax+b)\ (cx+d) = \overset{①}{acx^2} + \overset{②}{adx} + \overset{③}{bcx} + \overset{④}{bd} \qquad = acx^2 + \underbrace{(ad+bc)}_{\text{外どうしの積＋中どうしの積}}x + bd$

	cx	d
ax	acx^2	adx
b	bcx	bd

となる．これを使い，たとえば $(2x+3y)(5x-4y)$ は次のように計算する.

i) うまい計算のやり方（○）

$(2x+3y)(5x-4y)$

$= \underbrace{10x^2 + (-8y+15y)x + (3y)\cdot(-4y)}_{\text{慣れると省略できる}}$

$= 10x^2 + 7xy - 12y^2$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$(2x+3y)(5x-4y)$

$= 10x^2 - 8xy + 15yx - 12y^2$

$= 10x^2 + 7xy - 12y^2$

1 次式の積の公式～一般形

4° $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

この公式の $(ad+bc)$ の部分は「(外どうしの積（ad)）＋（中どうしの積（bc)）」と覚えるとよい.

【例題 28】 次の多項式を展開し整理せよ.

1. $(x+2)(2x+1)$ 2. $(2x+3)(3x-2)$ 3. $(5x-3y)(2x-y)$ 4. $(3x-y)(2x+3y)$

【解答】

1. x の係数は $1\cdot1+2\cdot2=5$，$(x+2)(2x+1) = \mathbf{2x^2+5x+2}$
2. x の係数は $2\cdot(-2)+3\cdot3=5$，$(2x+3)(3x-2) = \mathbf{6x^2+5x-6}$
3. x の係数は $5\cdot(-y)+(-3y)\cdot2=-11y$,
 $(5x-3y)(2x-y) = \mathbf{10x^2-11xy+3y^2}$
4. x の係数は $3\cdot(3y)+(-y)\cdot2=7y$,
 $(3x-y)(2x+3y) = \mathbf{6x^2+7xy-3y^2}$

◀ $(x+2)\ (2x+1)$

◀ $(2x+3)\ (3x-2)$

◀ $(5x-3y)\ (2x-y)$

D.　立方の公式 1

$(a+b)^3$ を展開すると

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)\ (a^2+2ab+b^2)$$

$$= \overset{①}{a^3} + \overset{②}{2a^2b} + \overset{③}{ab^2} + \overset{④}{ba^2} + \overset{⑤}{2ab^2} + \overset{⑥}{b^3}$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

	a^2	$2ab$	b^2
a	a^3	$2a^2b$	ab^2
b	ba^2	$2ab^2$	b^3

となる．これを使い，たとえば $(2x+y)^3$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（〇）

$$\begin{aligned}&(2x+y)^3\\ =\ &\underbrace{(2x)^3 + 3\cdot(2x)^2y + 3\cdot(2x)y^2 + y^3}_{\text{慣れると省略できる}}\\ =\ &8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3\end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$\begin{aligned}&(2x+y)^3\\ =\ &(2x+y)(2x+y)^2\\ =\ &(2x+y)(4x^2+4xy+y^2)\\ =\ &8x^3 + 8x^2y + 2xy^2 + 4x^2y + 4xy^2 + y^3\\ =\ &8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3\end{aligned}$$

次ページで見るように，$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ も成り立つ．

立方の公式 1

5°　$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$，　$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

【例題 29】

1. $a = 5x,\ b = 2$ のとき，$3a^2b,\ 3ab^2$ の値をそれぞれ求めよ．
2. 次の多項式を展開せよ．

(a) $(x+2)^3$　　(b) $(x+4)^3$　　(c) $(2x+1)^3$　　(d) $(3x+2)^3$

【解答】

1. $3a^2b = 3\cdot(5x)^2\cdot 2 = \mathbf{150x^2}$，　$3ab^2 = 3\cdot 5x\cdot 2^2 = \mathbf{60x}$
2. (a) $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 + 2^3$

$$= \mathbf{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$$

◀『立方の公式 1』(p.21)

(b) $(x+4)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 4 + 3\cdot x\cdot 4^2 + 4^3$

$$= \mathbf{x^3 + 12x^2 + 48x + 64}$$

(c) $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 1 + 3\cdot(2x)\cdot 1^2 + 1^3$

$$= \mathbf{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}$$

(d) $(3x+2)^3 = (3x)^3 + 3\cdot(3x)^2\cdot 2 + 3\cdot(3x)\cdot 2^2 + 2^3$

$$= \mathbf{27x^3 + 54x^2 + 36x + 8}$$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ については，公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ で処理するほうがよい．たとえば，$(a-2b)^3$ の計算は次のようになる．

$$\begin{aligned}(a-2b)^3 &= \left\{a+(-2b)\right\}^3 && \leftarrow 2b \text{ を引くことと } (-2b) \text{ を足すことは同じ}\\ &= a^3 + 3\cdot a^2(-2b) + 3\cdot a(-2b)^2 + (-2b)^3 && \leftarrow \text{慣れると省略できる}\\ &= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3\end{aligned}$$

一般の $(a+b)^n$ の展開については数学 A で学ぶ．

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

【練習 30：多項式の展開〜立方の公式 1】

次の多項式を展開せよ．

(1) $(a-4)^3$　　(2) $(3a-2)^3$　　(3) $(2a+5)^3 + (2a-5)^3$

【解答】

(1) $(a-4)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot(-4) + 3\cdot a\cdot(-4)^2 + (-4)^3$

$= \mathbf{a^3 - 12a^2 + 48a - 64}$

◀ $(a-4)^3 = \left\{a+(-4)\right\}^3$

(2) $(3a-2)^3 = (3a)^3 + 3\cdot(3a)^2\cdot(-2) + 3\cdot(3a)\cdot(-2)^2 + (-2)^3$

$= \mathbf{27a^3 - 54a^2 + 36a - 8}$

◀ $(3a-2)^3 = \left\{3a+(-2)\right\}^3$

(3) $(2a+5)^3 + (2a-5)^3$

$= (2a)^3 + \cancel{3\cdot(2a)^2\cdot 5} + 3\cdot(2a)\cdot 5^2 + \cancel{5^3}$
$\quad + (2a)^3 + \cancel{3\cdot(2a)^2\cdot(-5)} + 3\cdot(2a)\cdot(-5)^2 + \cancel{(-5)^3}$

$= 8a^3 + 150a + 8a^3 + 150a = \mathbf{16a^3 + 300a}$

【練習 31：1 次式の積の公式】

次の多項式を展開しなさい．

(1) $(x+1)(x+2)$　　(2) $(x+4)(2x-3)$　　(3) $(4x+3)(x-3)$　　(4) $(3x-1)(x-3)$

(5) $(x+2y)(x-3y)$　　(6) $(3x+y)(4x-y)$　　(7) $(2x+5y)(3x-y)$　　(8) $(2x-y)(5x+y)$

「外どうしの積＋中どうしの積」を暗算でできるようにしよう．

【解答】

(1) $\mathbf{x^2 + 3x + 2}$　　(2) $\mathbf{2x^2 + 5x - 12}$

(3) $\mathbf{4x^2 - 9x - 9}$　　(4) $\mathbf{3x^2 - 10x + 3}$

(5) $\mathbf{x^2 - xy - 6y^2}$　　(6) $\mathbf{12x^2 + xy - y^2}$

(7) $\mathbf{6x^2 + 13xy - 5y^2}$　　(8) $\mathbf{10x^2 - 3xy - y^2}$

E.　立方の公式 2

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開すると

$$
\begin{aligned}
(a+b)\ (a^2-ab+b^2) &= \overset{\textcircled{1}}{a^3} - \overset{\textcircled{2}}{a^2b} + \overset{\textcircled{3}}{ab^2} + \overset{\textcircled{4}}{ba^2} - \overset{\textcircled{5}}{ab^2} + \overset{\textcircled{6}}{b^3} \\
&= a^3 + b^3
\end{aligned}
$$

	a^2	$-ab$	b^2
a	a^3	$-a^2b$	ab^2
b	ba^2	$-ab^2$	b^3

となる．これを使い，たとえば $(3x+1)(9x^2-3x+1)$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（○）

$$
\begin{aligned}
&(3x+1)(9x^2-3x+1) \\
&= \underbrace{(3x+1)\left\{(3x)^2-(3x)\cdot 1+1^2\right\}}_{\text{慣れると省略できる}} \\
&= 27x^3+1
\end{aligned}
$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$
\begin{aligned}
&(3x+1)(9x^2-3x+1) \\
&= 27x^3-9x^2+3x+9x^2-3x+1 \\
&= 27x^3+1
\end{aligned}
$$

また，同様に $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ も成り立つ．

立方の公式 2

6° $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$,　　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

左辺の $a \pm b$ と右辺の $a^3 \pm b^3$ は符号が一致する，と覚えておこう．
ただし，この公式を展開のために使う機会は少なく，p.36 における「因数分解」で（逆方向に）よく利用される．

【例題 32】

1. $(x+2)(x^2-2x+4)$, $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)$ を展開せよ．
2. 次の中から，$8x^3+27$ になるもの，$8x^3-27$ になるものを 1 つずつ選べ．

a) $(2x+3)(4x^2+6x+9)$　b) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$　c) $(2x+3)(4x^2-6x-9)$
d) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$　e) $(2x-3)(4x^2-6x+9)$　f) $(2x-3)(4x^2-6x-9)$

【解答】

1. $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3=\boldsymbol{x^3+8}$
$(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)=(ab)^3-3^3=\boldsymbol{a^3b^3-27}$

2. 公式と見比べて
$(2x+3)(4x^2-6x+9)=(2x)^3+3^3$
$(2x-3)(4x^2+6x+9)=(2x)^3-3^3$
であるので，$8x^3+27$ は **b)**，$8x^3-27$ は **d)** である．

◀ 『立方の公式 2』(p.23)

◀ 符号に注意して選ぼう．どれが正しいか分からなくなったら，展開して確認すればよい．

F. 展開公式のまとめ

最も大事なことは，「いつ，どの展開公式を使うのか」見極めることである．

【練習 33：多項式の展開の練習〜その１〜】

次の多項式を展開せよ．

(1) $(2x-5y)(2x+5y)$　(2) $(x+5)(x-8)$　(3) $(2x-5)(4x^2+10x+25)$

(4) $(x-3)^3$　(5) $(2x+1)(x-3)$　(6) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)^2$

(7) $(3a-2)(4a+1)$　(8) $(a-4)(3a+12)$　(9) $(a^2-3)(a^2+7)$

(10) $\left(3a-\frac{1}{2}b\right)^2$　(11) $(-2ab+3c)(2ab+3c)$　(12) $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^3$

(13) $(p+q)(3p^2-3pq+3q^2)$　(14) $(2x+4y)^3$

【解答】

(1)（与式）$=(2x)^2-(5y)^2=\boldsymbol{4x^2-25y^2}$　◀『和と差の積の公式』(p.18)

(2)（与式）$=x^2+(5-8)x+5\cdot(-8)=\boldsymbol{x^2-3x-40}$　◀『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)

(3)（与式）$=(2x)^3-5^3=\boldsymbol{8x^3-125}$　◀『立方の公式 2』(p.23)

(4)（与式）$=x^3+3x^2\cdot(-3)+3x\cdot(-3)^2+(-3)^3=\boldsymbol{x^3-9x^2+27x-27}$　◀『立方の公式 1』(p.21)

(5)（与式）$=2x^2+\{2\cdot(-3)+1\cdot1\}x-3=\boldsymbol{2x^2-5x-3}$　◀『1 次式の積の公式〜一般形』(p.20)

(6)（与式）$=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{3}y+\left(\frac{1}{3}y\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2}$　◀『平方の公式』(p.18)

(7)（与式）$=12a^2+\{3\cdot1+(-2)\cdot4\}x-2=\boldsymbol{12a^2-5a-2}$　◀『1 次式の積の公式〜一般形』(p.20)

(8)（与式）$=3(a-4)(a+4)$　◀『1 次式の積の公式〜一般形』(p.20) でも計算できる

$=3(a^2-16)=\boldsymbol{3a^2-48}$　◀『和と差の積の公式』(p.18)

(9)（与式）$=(a^2)^2+(-3+7)a^2+(-3)\cdot7=\boldsymbol{a^4+4a^2-21}$　◀『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)

(10)（与式）$=(3a)^2-2\cdot3a\cdot\frac{1}{2}b+\left(\frac{1}{2}b\right)^2=\boldsymbol{9a^2-3ab+\frac{1}{4}b^2}$　◀『平方の公式』(p.18)

(11)（与式）$=(3c-2ab)(3c+2ab)$　◀公式を使えるよう足す順番を変更

$=\boldsymbol{9c^2-4a^2b^2}$　◀『和と差の積の公式』(p.18)

(12)（与式）$=a^3+3a^2\cdot\frac{1}{2}b+3a\cdot\left(\frac{1}{2}b\right)^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^3$

$=\boldsymbol{a^3+\frac{3}{2}a^2b+\frac{3}{4}ab^2+\frac{1}{8}b^3}$　◀『立方の公式 1』(p.21)

(13)（与式）$=3(p+q)(p^2-pq+q^2)$　◀公式を使えるようにした

$=3(p^3+q^3)=\boldsymbol{3p^3+3q^3}$　◀『立方の公式 2』(p.23)

(14)（与式）$=\{2(x+2y)\}^3=2^3\cdot(x+2y)^3$　◀指数法則 iii) (p.12)

$=8(x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)$

$=\boldsymbol{8x^3+48x^2y+96xy^2+64y^3}$　◀『立方の公式 1』(p.21)

4.　展開の工夫

3.『多項式の乗法の公式』で学んだ公式を工夫して用いると，複雑な式の計算がかなり容易にできるようになる．ここでは，代表的な 2 つの工夫の方法を取り上げる．

A.　式の一部をまとめる

多項式の一部を 1 つの文字とおくと，今までの公式がより広く使える．たとえば

$$\begin{aligned}(x+y+3)(x+y-2) &= (M+3)(M-2) && \leftarrow M = x+y \text{ とおき，式の一部を一つの文字とみなす}\\ &= M^2+M-6 && \leftarrow \text{『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)}\\ &= (x+y)^2+(x+y)-6 && \leftarrow M \text{ を } x+y \text{ に戻す}\\ &= x^2+2xy+y^2+x+y-6 && \leftarrow \text{『平方の公式』(p.18)}\end{aligned}$$

のように展開できる．

次に，$(x+y-z)(x-y+z)$ の展開を考える．$-y+z=-(y-z)$ に注意して，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}(x+y-z)(x-y+z) &= \{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\} && \leftarrow -y+z=-(y-z)\\ &= (x+A)(x-A) && \leftarrow A = y-z \text{ とおき，式の一部を 1 つの文字とみなす}\\ &= x^2-A^2 && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』(p.18)}\\ &= x^2-(y-z)^2 && \leftarrow A \text{ を } y-z \text{ に戻す}\\ &= x^2-(y^2-2yz+z^2) && \leftarrow \text{『平方の公式』(p.18)}\\ &= x^2-y^2+2yz-z^2 && \leftarrow \text{符号に注意して（　）を外す}\end{aligned}$$

【例題 34】　次の多項式を展開せよ．

1. $(x+y-5)(x+y+3)$　　2. $(x+y+z)(x+y-z)$　　3. $(a^2+a-1)(a^2-a-1)$

【解答】

1. $(x+y)$ が共通していることに着目しよう．

$$\begin{aligned}(x+y-5)(x+y+3) &= (x+y)^2-2(x+y)-15 && ◀\text{『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)}\\ &= \boldsymbol{x^2+2xy+y^2-2x-2y-15} && ◀\text{『平方の公式』(p.18)}\end{aligned}$$

2. $(x+y)$ が共通していることに着目しよう．

$$\begin{aligned}(x+y+z)(x+y-z) &= (x+y)^2-z^2 && ◀\text{『和と差の積の公式』(p.18)}\\ &= \boldsymbol{x^2+2xy+y^2-z^2} && ◀\text{『平方の公式』(p.18)}\end{aligned}$$

3. (a^2-1) が共通していることに着目しよう．

$$\begin{aligned}(a^2+a-1)(a^2-a-1) &= (a^2-1)^2-a^2 && ◀\text{『和と差の積の公式』(p.18)}\\ &= a^4-2a^2+1-a^2 && ◀\text{『平方の公式』(p.18)}\\ &= \boldsymbol{a^4-3a^2+1}\end{aligned}$$

慣れるまでは，式の一部や共通部分を A や X などでおきかえよう．そして最終的には，前の例題のようにおきかえずにできるようになろう．

B. 3 項の平方の公式

式の一部をまとめることによって，$(a+b+c)^2$ の展開は次のようにできる．

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \{(a+b)+c\}^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 && \leftarrow a+b \text{ をまとめて考えて『平方の公式』(p.18)}\\ &= a^2+2ab+b^2+2ca+2bc+c^2 && \leftarrow \text{『平方の公式』(p.18)}\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca && \leftarrow \text{この順番にすると式が見やすい}\end{aligned}$$

であるから，$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ が成り立つ．

この展開の結果は，3 項の平方の公式とよばれ，たとえば $(2x+y-3)^2$ は次のように計算できる．

i) うまい計算のやり方（○）

$$\begin{aligned}&(2x+y-3)^2\\ &= \underbrace{(2x)^2+y^2+3^2+2\cdot 2xy+2\cdot y(-3)+2\cdot(-3)2x}_{\text{慣れると省略できる}}\\ &= 4x^2+y^2+9+4xy-6y-12x\end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$\begin{aligned}&(2x+y-3)^2\\ &= (2x+y-3)(2x+y-3)\\ &= 4x^2+2xy-6x+2yx+y^2-3y-6x-3y+9\\ &= 4x^2+y^2+9+4xy-6y-12x\end{aligned}$$

3 項の平方の公式

7° $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

【例題 35】 次の多項式を展開せよ．

1. $(3a-b+3c)^2$
2. $(a^2+a-1)^2$

【解答】

1. $(3a-b+3c)^2 = \mathbf{9a^2+b^2+9c^2-6ab-6bc+18ca}$
2. $(a^2+a-1)^2 = (a^2)^2+a^2+1+2a^2\cdot a+2a\cdot(-1)+2\cdot(-1)\cdot a^2$
$\qquad = \mathbf{a^4+2a^3-a^2-2a+1}$

◀『3 項の平方の公式』(p.26)

C. 掛け算の順序の工夫

$14\times16\times5$ の計算は，$14\times(16\times5) = 14\times80$ とすると楽にできる．

多項式の展開においても，掛け算の順序を考えると計算が楽にできることがある．

$$\begin{aligned}&(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2) && \leftarrow \text{前から順に計算するととても大変}\\ &= (a-b)(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2) && \leftarrow (a-b) \text{ は } (a+b) \text{ と相性がいいし}\\ &= \{(a-b)(a+b)\}\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\} && \leftarrow (a-b) \text{ は } (a^2+ab+b^2) \text{ とも相性がいい}\\ &= (a^2-b^2)(a^3-b^3) && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』(p.18) と『立方の公式 1』(p.21)}\\ &= a^5-a^3b^2-a^2b^3+b^5\end{aligned}$$

p.12 で学んだ $A^3B^3 = (AAA)\cdot(BBB) = (AB)\cdot(AB)\cdot(AB) = (AB)^3$ も重要な働きをする．

$$
\begin{aligned}
&(x+1)^3(x-1)^3 && \leftarrow (x+1)(x-1) \text{ を 3 回掛けることと同じ}\\
=\ &\{(x+1)(x-1)\}^3 &&\\
=\ &(x^2-1)^3 && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』(p.18)}\\
=\ &x^6-3x^4+3x^2-1 && \leftarrow \text{『立方の公式 1』(p.21)，} (x^2)^3 = x^2\cdot x^2\cdot x^2 = x^6 \text{ に注意}
\end{aligned}
$$

掛け算の順序を工夫して，共通する式を作ることができる場合もある．

$$
\begin{aligned}
&(x+1)(x+3)(x-2)(x-4) && \leftarrow +1-2 \text{ も } +3-4 \text{ も同じ結果になることに注目}\\
=\ &\{(x+1)(x-2)\}\{(x+3)(x-4)\} && \leftarrow \text{掛け算の順番を入れ替えた}\\
=\ &(x^2-x-2)(x^2-x-12) && \leftarrow x^2-x \text{ が共通している}\\
=\ &\left\{(x^2-x)-2\right\}\left\{(x^2-x)-12\right\} &&\\
=\ &(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24 && \leftarrow x^2-x \text{ について展開した}\\
=\ &(x^4-2x^3+x^2)-14x^2+14x+24 && \leftarrow (x^2-x)^2 \text{ の展開でミスをしないように}\\
=\ &x^4-2x^3-13x^2+14x+24 && \leftarrow \text{同類項をまとめた}
\end{aligned}
$$

【例題 36】 次の多項式を展開せよ．

1. $(x-1)(x-3)(x+3)(x+1)$　　2. $(a+b)^3(a-b)^3$　　3. $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)$

【解答】

1. $(x-1)$ と $(x+1)$ の積と，$(x-3)$ と $(x+3)$ の積は計算しやすい．

$$
\begin{aligned}
(x-1)(x-3)(x+3)(x+1) &= (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)\\
&= (x^2-1)(x^2-9)\\
&= \boldsymbol{x^4-10x^2+9}
\end{aligned}
$$

◀『和と差の積の公式』(p.18)

◀『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)

2. 与えられた式は，$(a+b)(a-b)$ 全体の 3 乗である．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \{(a+b)(a-b)\}^3\\
&= \left\{(a^2-b^2)\right\}^3\\
&= (a^2)^3+3\cdot(a^2)^2\cdot(-b^2)+3\cdot(a^2)\cdot(-b^2)^2+(-b^2)^3\\
&= \boldsymbol{a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6}
\end{aligned}
$$

◀ 指数法則 (p.12)

◀『和と差の積の公式』(p.18)

◀『立方の公式 1』(p.21)

◀『平方の公式』(p.18)，指数法則 (p.12)
$(a^4)^2 = a^8$ に注意

3. $(a-1)(a-4)$ と $(a-2)(a-3)$ には，どちらも a^2-5a が表れる．

$$
\begin{aligned}
(a-1)(a-2)(a-3)(a-4) &= \{(a-1)(a-4)\}\{(a-2)(a-3)\}\\
&= (a^2-5a+4)(a^2-5a+6)\\
&= (a^2-5a)^2+10(a^2-5a)+24\\
&= (a^4-10a^3+25a^2)+10a^2-50a+24\\
&= \boldsymbol{a^4-10a^3+35a^2-50a+24}
\end{aligned}
$$

◀ a^2-5a を A とおくと，$(A+4)(A+6) = A^2+10A+24$ となるため

【発展 37：多項式の展開の練習〜その２〜】

次の多項式を展開せよ．

① $(2a-b+c)(2a+b+c)$　② $(x+y+z+w)(x+y-z-w)$

③ $(x-4)^2(x+5)^2$　④ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

⑤ $(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2$　⑥ $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

【解答】

① （与式）$=\{(2a+c)-b\}\{(2a+c)+b\}$

$=(2a+c)^2-b^2$

$=\boldsymbol{4a^2+4ac+c^2-b^2}$

② （与式）$=\{(x+y)+(z+w)\}\{(x+y)-(z+w)\}$

$=(x+y)^2-(z+w)^2$

$=\boldsymbol{x^2+2xy+y^2-z^2-2zw-w^2}$

③ 与えられた式は，$(x-4)(x+5)$ 全体の 2 乗である．

（与式）$=\{(x-4)(x+5)\}^2$

$=(x^2+x-20)^2$

$=(x^2)^2+x^2+(-20)^2+2x^2\cdot x+2x\cdot(-20)+2(-20)x^2$

$=\boldsymbol{x^4+2x^3-39x^2-40x+400}$

④ $(x+y)$ と (x^2-xy+y^2) の積は計算しやすく，
$(x-y)$ と (x^2+xy+y^2) の積も計算しやすい．

（与式）$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$

$=\boldsymbol{x^6-y^6}$

⑤ 与えられた式は，$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$ 全体の 2 乗である．

（与式）$=\left\{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)\right\}^2$

$=\left\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\right\}^2$

$=(a^4-b^4)^2$

$=\boldsymbol{a^8-2a^4b^4+b^8}$

⑥ （与式）$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$

$=(x^4+2x^3+x^2)-14x^2-14x+24$

$=\boldsymbol{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}$

◀ $(2a+c)$ が共通している

◀『和と差の積の公式』(p.18)

◀『平方の公式』(p.18)

◀ $-z-w=-(z+w)$ に注意する

◀『和と差の積の公式』(p.18)

◀『平方の公式』(p.18)

◀『3 項の平方の公式』(p.26)

◀ $(x+y)(x-y)$ を先に計算すると，$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ が余ってしまう．

◀『立方の公式 2』(p.23)

◀『和と差の積の公式』(p.18)

◀ 指数法則 (p.12)

◀『和と差の積の公式』(p.18)

◀『平方の公式』(p.18)，指数法則 (p.12) より $(a^4)^2=a^8$ にも注意

◀ $(x-1)(x+2)$ と $(x-3)(x+4)$ に分けて，x^2+x が共通してできる

◀ x^2+x を A とおくと，$(A-2)(A-12)=A^2-14A+24$ となるため

5. 多項式の因数 — 因数分解の基礎

A. 因数と因数分解

1 つの多項式 A が，多項式 B，C，$\cdots$ の積で書けるとき，B や C を，A の**因数** (factor) という[*22].

1 つの多項式 A を複数の因数に分解することを A の**因数分解** (factorization) という．特に断りがなければ，係数が整数の範囲でそれ以上分解できない形まで因数分解する[*23].

$$\begin{aligned} 2a^2 - 4ab &= 1 \cdot \underline{(2a^2 - 4ab)} \\ &= \underline{2} \cdot \underline{(a^2 - 2ab)} \\ &= \underline{2a} \cdot \underline{(a - 2b)} \\ &= \underline{2} \cdot \underline{a} \cdot \underline{(a - 2b)} \end{aligned}$$

〰 のあるものは，
全て $2a^2 - 4ab$ の因数

因数は，整数における「約数」にほぼ対応する．

B. 共通因数

多項式において，各項に共通する因数を**共通因数** (common factor) という．

多項式の各項に共通因数があれば，まず，それをかっこの外にくくり出す[*24]．共通因数をくくり出すことは，因数分解において最も基本的，同時に最も重要な手段である．

$$\begin{aligned} 2x^2y + 3xy^2 + xy &= 2x\underbrace{(xy)}_{\text{共通}} + 3y\underbrace{(xy)}_{\text{の}} + 1\underbrace{(xy)}_{\text{因数}} \\ &= xy(2z + 3y + 1) \end{aligned}$$

$$3a\underbrace{(x + y)}_{\text{共通の}} + 2b\underbrace{(x + y)}_{\text{因数}} = (3a + 2b)(x + y)$$

【例題 38】 次の式を因数分解せよ．

1. $2p^2q + pq^3 - 2pq$　　2. $a(x + y) - b(x + y)$　　3. $p(2x - y) + q(y - 2x)$

【解答】

1. $2p^2q$ と pq^3 と $-2pq$ の共通因数は $2pq$.

$$2p^2q + pq^3 - 2pq = \boldsymbol{pq(2p + q^2 - 2)}$$

◀ 共通因数 pq をくくり出す

	$2p$	q^2	-2
$2pq$	$2p^2q$	pq^3	$-2pq$

2. $a(x + y)$ と $-b(x + y)$ の共通因数は $x + y$ である．$x + y = X$ とおくと

$$\begin{aligned} a(x + y) - b(x + y) &= aX - bX \\ &= (a - b)X \\ &= \boldsymbol{(a - b)(x + y)} \end{aligned}$$

◀ 慣れれば，X を使わず $x + y$ のままでよい
◀ $x + y = X$ とおく
◀ 共通因数 X をくくり出す
◀ X を $x + y$ に戻す

3. $2x - y = X$ とおけば，$y - 2x = -(2x - y) = -X$ であるから

$$\begin{aligned} p(2x - y) + q(y - 2x) &= pX - qX \\ &= (p - q)X \\ &= \boldsymbol{(p - q)(2x - y)} \end{aligned}$$

◀ 慣れれば，X を使わず $2x - y$ のままでよい
◀ 共通因数 X をくくり出す
◀ X を $2x - y$ に戻す

[*22] ただし，多項式 1 は因数に含めない．
[*23] 「素数」の役割をする多項式は高校数学では扱われないためではあるが，本来は「素因数分解」と言うべきである．
[*24] 共通しない部分を括弧でくくり，共通する因数をその外に出すため，この動詞が頻繁に使われる．この操作は，分配法則の逆の操作であり，左にくくり出しても，右にくくり出してもよい．

【練習 39：共通因数による因数分解】

次の式を因数分解せよ．

(1) $6a^2b+4ab^2-2ab$ (2) $x(s+2t)-y(s+2t)$ (3) $3a(x-y)+6b(x-y)+9c(y-x)$

【解答】

(1) $6a^2b+4ab^2-2ab=\mathbf{2ab(3a+2b-1)}$

◀ 共通因数 $2ab$ をくくり出す

(2) $s+2t=A$ とおくと

◀ 慣れれば A を使わずにでき，途中式なく答えを得られる．

$$\begin{aligned} x(s+2t)-y(s+2t)&=xA-yA\\ &=(x-y)A\\ &=\mathbf{(x-y)(s+2t)} \end{aligned}$$

◀ $s+2t=A$ とおく

◀ 共通因数 A をくくり出す

◀ A を $s+2t$ に戻す

(3) $x-y=X$ とおけば $y-x=-X$ なので

◀ 慣れれば，X を使わず $x-y$ のままでよい．

$$\begin{aligned} &3a(x-y)+6b(x-y)+9c(y-x)\\ &=3aX+6bX-9cX\\ &=3X(a+2b-3c)\\ &=\mathbf{3(x-y)(a+2b-3c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3a(x-y)+6b(x-y)+9c(y-x)\\ &=3a(x-y)+6b(x-y)-9c(x-y)\\ &=\mathbf{3(x-y)(a+2b-3c)} \end{aligned}$$

	a	$2b$	$-3c$
$3(x-y)$	$3a(x-y)$	$6b(x-y)$	$-9c(x-y)$

C. 因数分解の目的

たとえば，2002 と $2\times7\times11\times13$ は同じ数を表わすが，この 2 つの表し方にはそれぞれ長所がある．

まず，2002 という表現は，個数や大きさを表すのに適している．だから，私たちは「$(2\times7\times11\times13)$ 個のりんご」とは言わず「2002 個のりんご」と言う．一方，$2\times7\times11\times13$ という表現は 2002 という数のもつ約数についての性質（たとえば，「13 で割り切れる」など）をよく表しており，時に有用である．

式においても同様に，等しい 2 つの式 $3x^2-5x+2=(3x-2)(x-1)$ のそれぞれに長所がある．

$3x^2-5x+2$ は

- 何次式かがわかりやすい
- 平方完成[*25]や，微分・積分がしやすい[*25]

$(3x-2)(x-1)$ は

- 方程式・不等式が解きやすい[*26]
- 因数が見やすい

つまり，どちらの形にも長所があり，場合に応じて使い分けられないといけない．そのために，展開・因数分解どちらの操作も，手早く正確にできなければならない．

$(3x-2)(x-1)\to3x^2-5x+2$ の操作（展開）

$3x^2-5x+2\to(3x-2)(x-1)$ の操作（因数分解）

[*25] 平方完成は数学 I で，微分・積分は数学 II で学ぶ．

[*26] 2 次方程式・不等式は数学 I で学ぶ．数学 II 以降でも，様々な方程式・不等式を学ぶ．

6. 多項式の因数分解の公式

共通因数が無くても，展開の公式を逆に使えば因数分解をできるときがある．

A. 中学の復習

$9x^2+6xy+y^2$ には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

$$\begin{aligned}9x^2+6xy+y^2 &= (3x)^2+2\cdot(3x)\cdot y+y^2\\ &= (3x+y)^2\end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned}(3x+y)^2 &= (3x)^2+2\cdot(3x)\cdot y+y^2\\ &= 9x^2+6xy+y^2\end{aligned}$$

平方の公式 (p.18) の逆利用

1° $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $\quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$16a^2-b^2$ には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

$$\begin{aligned}16a^2-b^2 &= (4a)^2-b^2\\ &= (4a+b)(4a-b)\end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned}(4a+b)(4a-b) &= (4a)^2-b^2\\ &= 16a^2-b^2\end{aligned}$$

$\bigcirc^2-\triangle^2$ の形を見たら因数分解，とすぐに気付けるようになろう．

和と差の積の公式 (p.18) の逆利用

2° $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

x^2+5x+6 には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

x^2+5x+6 ← 足して 5，掛けて 6 になる数は？

$=x^2+(2+3)x+2\cdot 3$

$6=1\times 6 \to$ 和は $7(\times)$

$6=2\times 3 \to$ 和は $5(\bigcirc)$

$=(x+2)(x+3)$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned}&(x+2)(x+3)\\ &= x^2+(2+3)x+2\cdot 3\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

1 次式の積の公式 (p.20) の逆利用

3° $x^2+(b+d)x+bd=(x+b)(x+d)$

【練習 40：因数分解の練習】

次の式を因数分解せよ．

(1) x^2+6x+9　(2) $4x^2-12xy+9y^2$　(3) a^2-9　(4) $4x^2-25y^2$

(5) x^2-6x+8　(6) $a^2+3ab-18b^2$　(7) a^4+4a^2+4　(8) a^4-1

(9) $x^2-(a-b)^2$　(10) $4x^2-9(a-b)^2$　(11) $(a-b)^2+10(a-b)+21$

自分の実行した因数分解が正しいかどうかは，展開によって確認できる．

【解答】

(1)（与式）$=x^2+2\cdot 3x+3^2=\boldsymbol{(x+3)^2}$

◀

	x	3
x	x^2	$3x$
3	$3x$	9

(2)（与式）$=(2x)^2-2\cdot(2x)(3y)+(3y)^2=\boldsymbol{(2x-3y)^2}$

◀

	a	-3
a	a^2	$-3a$
3	$3a$	-9

(3)（与式）$=a^2-3^2=\boldsymbol{(a+3)(a-3)}$

(4)（与式）$=(2x)^2-(5y)^2=\boldsymbol{(2x+5y)(2x-5y)}$

(5)（与式）$=\boldsymbol{(x-2)(x-4)}$

(6)（与式）$=\boldsymbol{(a-3b)(a+6b)}$

(7) $a^2=A$ とおくと，$a^4=A^2$ であるので，

◀慣れればおきかえずにできる

$$\begin{aligned}（与式）&=A^2+4A+4\\&=(A+2)^2=\boldsymbol{(a^2+2)^2}\end{aligned}$$

◀

	a^2	2
a^2	a^4	$2a^2$
2	$2a^2$	4

(8) $a^2=A$ とおくと，$a^4=A^2$ であるので，

◀慣れれば A を使わずにできる

$$\begin{aligned}（与式）&=A^2-1^2\\&=(A+1)(A-1)\\&=(a^2+1)(a^2-1)=\boldsymbol{(a^2+1)(a+1)(a-1)}\end{aligned}$$

◀a^2-1 はまだ分解できる

(9) $a-b=A$ とおけば，

◀慣れれば X を使わずにできる

$$\begin{aligned}（与式）&=\{x+(a-b)\}\{x-(a-b)\}\\&=\boldsymbol{(x+a-b)(x-a+b)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}（与式）&=x^2-A^2\\&=(x+A)(x-A)\\&=\{x+(a-b)\}\{(x-(a-b)\}\\&=\boldsymbol{(x+a-b)(x-a+b)}\end{aligned}$$

◀$A=a-b$ を戻すとき，符号（+, −）に注意

(10) $a-b=A$ とおけば，

◀慣れれば A を使わずにできる．

$$\begin{aligned}&4x^2-9(a-b)^2\\&=(2x)^2-\{3(a-b)\}^2\\&=\{2x+3(a-b)\}\{2x-3(a-b)\}\\&=\boldsymbol{(2x+3a-3b)(2x-3a+3b)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}（与式）&=4x^2-9A^2\\&=(2x)^2-(3A)^2\\&=(2x+3A)(2x-3A)\\&=\{2x+3(a-b)\}\{2x-3(a-b)\}\\&=\boldsymbol{(2x+3a-3b)(2x-3a+3b)}\end{aligned}$$

(11) $a-b=A$ とおくと

◀慣れれば A を使わずにできる．

$$\begin{aligned}&(a-b)^2+10(a-b)+21\\&=\{(a-b)+3\}\{(a-b)+7\}\\&=\boldsymbol{(a-b+3)(a-b+7)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}（与式）&=A^2+10A+21\\&=(A+3)(A+7)\\&=\boldsymbol{(a-b+3)(a-b+7)}\end{aligned}$$

B. 発展 2 重根号

$\sqrt{5}$ は「2 乗して 5 になる正の数」を表す．同じように，$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ は「2 乗して $8+2\sqrt{15}$ になる正の数」を表す．このように，根号の中に根号がある状態を **2 重根号** (double radical sign) という．

一部の 2 重根号は外すことができる．たとえば，$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$ である．実際

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2 = 5+2\sqrt{15}+3 = 8+2\sqrt{15}$$

なので，「2 乗して $8+2\sqrt{15}$ になる正の数」は $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ であると分かる．

【例題 41】 次の中から，$\sqrt{6+2\sqrt{5}}$, $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ に一致するものをそれぞれ選べ．

a. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$　　b. $2+\sqrt{3}$　　c. $\sqrt{5}+1$　　d. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

【解答】 $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 = 7+2\sqrt{10}$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7+4\sqrt{3}$, $\left(\sqrt{5}+1\right)^2 = 6+2\sqrt{5}$, $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2 = 8+2\sqrt{15}$ であるので，$\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ は **c.**，$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ は **b.**.

$a>0,\ b>0$ のとき，$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab}$ であり，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ であるから

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

である．よって，$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ を外すには，足して 8，掛けて 15 になる 2 数 a, b を探せばよい．

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot 3}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$$

また，$\boldsymbol{a>b}>0$ のとき，$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab}$ であり，$\boldsymbol{\sqrt{a}-\sqrt{b}>0}$ であるから

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

つまり，2 重根号 $\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}$ を外すには，「足して x，掛けて y となる 2 つの数」を探せばよい．

【練習 42：2 重根号を外す〜その１〜】

2 重根号 $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$, $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$, $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$, $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ を外せ．

【解答】 足して 7，掛けて 10 になる 2 数は 5 と 2 なので

$$\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2} = \boldsymbol{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

足して 10，掛けて 21 になる 2 数は 7 と 3 なので

$$\sqrt{10+2\sqrt{21}} = \sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2} = \boldsymbol{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

足して 9，掛けて 14 になる 2 数は 7 と 2 なので

$$\sqrt{9-2\sqrt{14}} = \sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2} = \boldsymbol{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$$

足して 8，掛けて 15 になる 2 数は 5 と 3 なので

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2} = \boldsymbol{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

◀ 足して 7 になる 2 数のうち，掛けて 14 になるものを探す．

◀ 足して 9 になる 2 数のうち，掛けて 14 になるものを探す．$(\bigcirc-\triangle)^2$ を作るときは，$\bigcirc>\triangle$ となるよう作るとよい．

【発展 43：2 重根号を外す〜その２〜】

次の 2 重根号を外せ.

① $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$　　　② $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

【解答】

①
$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$$
◀ まず $\sqrt{\bigcirc \pm 2\sqrt{\triangle}}$ の形になおし，変形ができるようにする.
$$=\sqrt{\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)^2}$$
◀ 平方の形にした（足して 7，掛けて 12 になる数を探す）
$$=\sqrt{4}+\sqrt{3}=\mathbf{2+\sqrt{3}}$$
◀ 2 重根号をはずした

②
$$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$
◀ 内側の $\sqrt{\ }$ の前に 2 が無くても，分母・分子に $\sqrt{2}$ を掛けて $2\sqrt{\ }$ の形を作る
$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{1}\right)^2}}{\sqrt{2}}$$
◀ 足して 6，掛けて 5 になる 2 数を探す.
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}}$$
◀ 最後は分母を有理化しておく

・・・ 2 重根号を外すには，まず $\sqrt{\qquad}$ の中に $2\sqrt{\ }$ を作るように考える.

C.　『1 次式の積の公式〜一般形』(p.20) を逆に利用した因数分解

$3x^2+14x+8$ の因数分解を考えてみよう.

i) 因数分解

$$\begin{aligned}&3x^2+14x+8\\&=(1\cdot3)x^2+(1\cdot2+4\cdot3)x+2\cdot4\\&=(x+4)(3x+2)\end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned}&(x+4)(3x+2)\\&=(1\cdot3)x^2+(1\cdot2+4\cdot3)x+2\cdot4\\&=3x^2+14x+8\end{aligned}$$

この $(x+4)$ と $(3x+2)$ を見つけるには，次のような**たすきがけ**と呼ばれる方法を用いる.
たすきがけは，下のように行われる.

$$\begin{array}{llcll}\text{上の段→} & 1 & \times & 4 & \to 12\\ \text{下の段→} & 3 & & 2 & \to 2\\ \hline & & & & 14\ \bigcirc\end{array}$$

$$3x^2+\mathbf{14}x+8=\underbrace{(x+4)}_{\text{上の段の }1,4}\underbrace{(3x+2)}_{\text{下の段の }3,2}$$

x^2 の係数３は１×３しかない

$$\begin{array}{lcll}\mathbf{1} & \times & ? & \to ?\\ \mathbf{3} & & ? & \to ?\\ \hline & & & 14\ \text{にしたい}\end{array}$$

定数項の８は，１×８，２×４，４×２，８×１のどれか（$(-1)\times(-8)$ などは考えなくて良い）

$$\begin{array}{lcll}1 & \times & 1 & \to 3\\ 3 & & 8 & \to 8\\ \hline & & & 11\ \times\end{array}\quad\begin{array}{lcll}1 & \times & 2 & \to 6\\ 3 & & 4 & \to 4\\ \hline & & & 10\ \times\end{array}\quad\begin{array}{lcll}1 & \times & \mathbf{4} & \to 12\\ 3 & & \mathbf{2} & \to 2\\ \hline & & & \mathbf{14}\ \bigcirc\end{array}\quad\begin{array}{lcll}1 & \times & 8 & \to 24\\ 3 & & 1 & \to 1\\ \hline & & & 25\ \times\end{array}$$

・・・ 初めのうちは試行錯誤が必要だが，慣れてくると 2 つ目くらいの表でできるようになる．コツをつかむには，係数を「１×　」にするかどうか，奇数・偶数を考える，の２点に注意すると良い.

【例題 44】 次の式を因数分解せよ．

1. $2x^2+3x+1$　　2. $4x^2+5x+1$　　3. $5a^2+7ab+2b^2$

【解答】

1. $\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \to & 2 \\ 2 & & 1 & \to & 1 \\ \hline & & & & 3 \end{array}$ ○　から，$\boldsymbol{(x+1)(2x+1)}$

2. $\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \to & 4 \\ 4 & & 1 & \to & 1 \\ \hline & & & & 5 \end{array}$ ○　から，$\boldsymbol{(x+1)(4x+1)}$

3. $\begin{array}{ccccc} 1 & & b & \to & 5b \\ 5 & & 2b & \to & 2b \\ \hline & & & & 7b \end{array}$ ○　から，$\boldsymbol{(a+b)(5a+2b)}$

◀ $\begin{array}{ccccc} 1 & & 2b & \to & 10b \\ 5 & & b & \to & b \\ \hline & & & & 11b \end{array}$ ×

次に，$6x^2+x-12$ の因数分解を考えてみよう．

x^2 の係数6は1×6か？

$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & & ? & \to & ? \\ \mathbf{6} & & ? & \to & ? \\ \hline & & & & 1 \end{array}$ にしたい

x^2 の係数6は2×3か？

$\begin{array}{ccccc} \mathbf{2} & & ? & \to & ? \\ \mathbf{3} & & ? & \to & ? \\ \hline & & & & 1 \end{array}$ にしたい

定数項の－12は，1×12，2×6，3×4のどちらかにマイナス(－)を付けたもの

1 という小さな値にするには，1×12 では適さないと予想できる[*27]．

$\begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & \to & 18 \\ 6 & & -4 & \to & -4 \\ \hline & & & & 14 \end{array}$ ×

$\begin{array}{ccccc} 2 & & 4 & \to & 12 \\ 3 & & -3 & \to & -6 \\ \hline & & & & 6 \end{array}$ ×

$\begin{array}{ccccc} 2 & & -3 & \to & -9 \\ 3 & & 4 & \to & 8 \\ \hline & & & & -1 \end{array}$ ×

$\begin{array}{ccccc} 2 & & \mathbf{3} & \to & 9 \\ 3 & & \mathbf{-4} & \to & -8 \\ \hline & & & & \mathbf{1} \end{array}$ ○

*27 全然ダメ↑↑　　符号だけ違う↑↑　　一つ左を符号だけ変えた

よって，$6x^2+x-12=(2x+3)(3x-4)$ になる．

【例題 45】 次の式を因数分解せよ．

1. $12a^2+7a-12$　　2. $4x^2+23x-6$　　3. $8x^2-10xy+3y^2$

【解答】

1. $\begin{array}{ccccc} 3 & & 4 & \to & 16 \\ 4 & & -3 & \to & -9 \\ \hline & & & & 7 \end{array}$ ○　から，$\boldsymbol{(3a+4)(4a-3)}$

2. $\begin{array}{ccccc} 4 & & -1 & \to & -1 \\ 1 & & 6 & \to & 24 \\ \hline & & & & 23 \end{array}$ ○　から，$\boldsymbol{(4x-1)(x+6)}$

3. $\begin{array}{ccccc} 4 & & -3y & \to & -6y \\ 2 & & -y & \to & -4y \\ \hline & & & & -10y \end{array}$ ○　から，$\boldsymbol{(4x-3y)(2x-y)}$

◀ $\begin{array}{ccccc} 3 & & -4 & \to & -16 \\ 4 & & 3 & \to & 9 \\ \hline & & & & -7 \end{array}$ ×　$12=2\times 6$ を使うと a の係数が奇数にならず不適

◀ $\begin{array}{ccccc} 2 & & 6 & \to & 12 \\ 2 & & -1 & \to & -2 \\ \hline & & & & 10 \end{array}$ ×　$\begin{array}{ccccc} 4 & & 6 & \to & 6 \\ 1 & & -1 & \to & -4 \\ \hline & & & & 2 \end{array}$ ×

◀ $\begin{array}{ccccc} 8 & & -3y & \to & -3y \\ 1 & & -y & \to & -8y \\ \hline & & & & -11y \end{array}$ ×　$\begin{array}{ccccc} 4 & & 3y & \to & 6y \\ 2 & & y & \to & 4y \\ \hline & & & & 10y \end{array}$ ×

1 次式の積の公式 (p.20) の逆利用

4° $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

*27 「1×○」を含むたすきがけをした結果は，値が極端に大きく（正の数）なったり小さく（負の数）なったりすることが多い．そのため，$6x^2+x-12$ のように x の係数が 0 に近い場合は「1×6」「1×12」を考える優先順位は低い．

【練習 46：1 次式の積の公式】

次の式を因数分解しなさい．

(1) $5x^2+11x+6$　(2) $6x^2-x-15$　(3) $7x^2-16x+4$　(4) $9a^2b-12ab-12b$

【解答】

(1) $\boldsymbol{(5x+6)(x+1)}$　(2) $\boldsymbol{(3x-5)(2x+3)}$

(3) $\boldsymbol{(7x-2)(x-2)}$　(4) (与式) $=3b(3a^2-4a-4)$

$= \boldsymbol{3b(3a+2)(a-2)}$

◀ (1)
$$\begin{array}{ccccc} 5 & & 6 & \to & 6 \\ 1 & \times & 1 & \to & 5 \\ \hline & & & & 11 \bigcirc \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ccccc} 3 & & -5 & \to & -10 \\ 2 & \times & 3 & \to & 9 \\ \hline & & & & -1 \bigcirc \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{ccccc} 7 & & -2 & \to & -2 \\ 1 & \times & -2 & \to & -14 \\ \hline & & & & -16 \bigcirc \end{array}$$

D.　『立方の公式 2』(p.23) を逆に利用した因数分解

$8x^3+y^3$ には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

$$\begin{aligned} &8x^3+y^3 \\ =&(2x)^3+y^3 \\ =&(2x+y)\left\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\right\} \\ =&(2x+y)(4x^2-2xy+y^2) \end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned} &(2x+y)(4x^2-2xy+y^2) \\ =&(2x+y)\left\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\right\} \\ =&(2x)^3+y^3 \\ =&8x^3+y^3 \end{aligned}$$

立方の公式 2 (p.23) の逆利用

5° $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\bigcirc^3\pm\triangle^3$ の形の因数分解は重要度が高いが，忘れやすいので気をつけよう．展開のときと同じように，$a\pm b$ と $a^3\pm b^3$ は符号が一致する，と覚えておくとよい．また，1，8，27，64，125，216，343，512，729 を見たら「整数の 3 乗だ」と気づけるようになるとよい．

【例題 47】 次の式を因数分解せよ．

1. x^3+27　2. $8a^3+1$　3. $8x^3-27y^3$　4. $64a^3-125b^3$

【解答】

1. $x^3+27=x^3+3^3$

$=\boldsymbol{(x+3)(x^2-3x+9)}$

2. $8a^3+1=(2a)^3+1^3$

$=\boldsymbol{(2a+1)(4a^2-2a+1)}$

3. $8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3$

$=\boldsymbol{(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)}$

4. $64a^3-125b^3=(4a)^3-(5b)^3$

$=\boldsymbol{(4a-5b)(16a^2+20ab+25b^2)}$

◀

	x^2	$-3x$	9
x	x^3	$-3x^2$	$9x$
3	$3x^2$	$-9x$	27

◀

	$4a^2$	$-2a$	1
$2a$	$8a^3$	$-4a^2$	$2a$
1	$4a^2$	$-2a$	1

◀

	$4x^2$	$6xy$	$9y^2$
$2x$	$8x^3$	$12x^2y$	$18xy^2$
$-3y$	$-12x^2y$	$-18xy^2$	$-27y^3$

◀

	$16a^2$	$20ab$	$25b^2$
$4a$	$64a^3$	$80a^2b$	$100ab^2$
$-5b$	$-80a^2b$	$-100ab^2$	$-125b^3$

以下については，非常に特殊なケースなので，式だけを挙げておく．

立方の公式 1 (p.21) の逆利用

6° $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$,　　$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

E.　因数分解の公式のまとめ

最も大事なことは，「いつ，どの因数分解を使うのか」見極めることである．

【練習 48：因数分解の練習〜その１〜】

次の式を因数分解せよ．

(1) $a^2-14ab+49b^2$　(2) $2x^2-x-3$　(3) $343a^3-8b^3$　(4) $2ax^2-5ax+3a$

(5) $3b^2-27c^2$　(6) $3x^3-8x^2-3x$　(7) $3x^3+81y^3$　(8) $2a^4-32$　(9) x^8-1

(10) a^6-b^6　(11) $5(x+y)^2-8(x+y)-4$　(12) $(a+b)^2+10c(a+b)+25c^2$

【解答】

(1) （与式）$=\boldsymbol{(a-7b)^2}$　◀『平方の公式の逆利用』(p.31)

(2) （与式）$=\boldsymbol{(2x-3)(x+1)}$　◀『1 次式の積の公式の逆利用』(p.34)

(3) （与式）$=(7a)^3-(2b)^3=\boldsymbol{(7a-2b)(49a^2+14ab+4b^2)}$　◀『立方の公式 2 の逆利用』(p.36)

(4) （与式）$=a(2x^2-5x+3)$　◀共通因数でくくった

$=\boldsymbol{a(2x-3)(x-1)}$

(5) （与式）$=3(b^2-9c^2)=\boldsymbol{3(b+3c)(b-3c)}$　◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

(6) （与式）$=x(3x^2-8x-3)=\boldsymbol{x(3x+1)(x-3)}$

(7) （与式）$=3(x^3+27y^3)$

$=\boldsymbol{3(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)}$　◀『立方の公式 2 の逆利用』(p.36)

(8) （与式）$=2(a^4-16)$

$=2(a^2+4)(a^2-4)$　◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

$=\boldsymbol{2(a^2+4)(a+2)(a-2)}$　◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

(9) （与式）$=(x^4+1)(x^4-1)$　◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

$=(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$　◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

$=\boldsymbol{(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)}$　◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

(10) （与式）$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$　◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

$=\left\{(a+b)(a^2-ab+b^2)\right\}\left\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\right\}$　◀『立方の公式 2 の逆利用』(p.36)

$=\boldsymbol{(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)}$

(11) $x+y=X$ とおくと

（与式）$=5X^2-8X-4=(5X+2)(X-2)$　◀『1 次式の積の公式の逆利用』(p.34)

$=\boldsymbol{(5x+5y+2)(x+y-2)}$

(12) $a+b=X$ とおくと

（与式）$=X^2+10cX+25c^2=(X+5c)^2$　◀『平方の公式の逆利用』(p.31)

$=\boldsymbol{(a+b+5c)^2}$

7. 難度の高い因数分解

共通因数も無く，どの公式にも当てはまらない場合も，工夫次第で因数分解ができることがある．

A. 共通因数が見つけにくい多項式の因数分解

$ax + ay - x - y$ という式には，共通因数も無く，どの公式にも当てはまらないが，

$ax + ay - x - y$
$= a(x + y) - x - y$　　← 前2つで a が共通するのでまとめてみる
$= a(x + y) - (x + y)$　　← 残りもまとめてみたら，$x + y$ が共通因数になった
$= (a - 1)(x + y)$　　← $-(x + y) = (-1) \times (x + y)$ であることに注意！

のようにして，「共通因数を見つけて」因数分解ができる．もう 1 つ例を挙げよう．

$m^2 + 2m - n^2 - 2n$　　← 前2つでまとめるとうまくいかないので
$= (m^2 - n^2) + 2m - 2n$　　← この2つでまとめてみる
$= (m + n)(m - n) + 2(m - n)$　　← $m - n$ が共通因数になった
$= (m + n + 2)(m - n)$　　← $m - n = X$ とおくと $\{(m + n) + 2\}\ X$ になる

数をこなしていくと，共通因数を見つけるのがうまくなる．というのも「どの因数でまとめられるか」少しずつ予想ができるようになるからである．

【練習 49：4 項の因数分解】

次の式を因数分解せよ．

(1) $ab + ac + b + c$　　(2) $mn + 2m - n - 2$　　(3) $a^2 - 5a + 5b - b^2$

【解答】

(1) $ab + ac + b + c = (b + c)a + (b + c)$
$= \boldsymbol{(a + 1)(b + c)}$

◀ 前の項から順に見て，b と c が交互に出てくることに注目

(2) $mn + 2m - n - 2 = (n + 2)m - (n + 2)$
$= \boldsymbol{(m - 1)(n + 2)}$

◀ 前の項から順に見て，2 が交互に出てくることに注目．また $(m - 1)n + 2(m - 1)$ とまとめてもよい．

(3) $a^2 - 5a + 5b - b^2 = (a^2 - b^2) - 5(a - b)$
$= (a - b)(a + b) - 5(a - b)$
$= \boldsymbol{(a - b)(a + b - 5)}$

◀ $a^2 - b^2$ からは $a - b$ が作れる

◀ $a - b = X$ とおけば，$X(a + b) - 5X = \{(a + b) - 5\}\ X$ となる

因数分解した後，(　) 内を何かの文字について降べきの順にしておくとよい．しなくても間違いではないが，応用問題を解くときに役立つことがある．

B.　次数の小さい文字に着目する

共通因数が見つからないときは，最も次数の低い文字に着目し，降べきの順に整理しよう．それによって，共通因数が見えてくることが多い[*28]．たとえば，次のようになる．

$$\begin{aligned}
&a^2+ab-3a+b-4 && \leftarrow a\text{ については2次式，}b\text{ については1次式}\\
=&(a+1)b+a^2-3a-4 && \leftarrow \text{次数の低い }b\text{ について，降べきの順に整頓}\\
=&(a+1)b+(a-4)(a+1) && \leftarrow \text{定数項を因数分解したら，}a+1\text{ が共通因数になった}\\
=&(a+1)(a+b-4) && \leftarrow b+a-4\text{ は順番を入れ替えておこう}
\end{aligned}$$

【練習 50：次数の低い文字に着目する】

次の式を因数分解せよ．

(1) $a^2+ab+bc+ca$　　(2) $x^2-2xy+2y-1$

(3) $x^2+2xy+3x+4y+2$　　(4) $a^3+ab^2+b^2+1$

【解答】

(1) b について降べきの順に整理すると

$$\begin{aligned}
a^2+ab+bc+ca &= (a+c)b+(a^2+ca)\\
&=(a+c)b+(a+c)a\\
&=\boldsymbol{(a+b)(a+c)}
\end{aligned}$$

◀ c で整理してもよい

(2) y について降べきの順に整理すると

$$\begin{aligned}
x^2-2xy+2y-1 &= (-2x+2)y+(x^2-1)\\
&=(x-1)\cdot(-2y)+(x-1)(x+1)\\
&=\boldsymbol{(x-1)(x-2y+1)}
\end{aligned}$$

◀ x の次数は 2，y の次数は 1

◀ $x-1=A$ とおくと
$-2yA+(x-1)A$
$=\{-2y+(x-1)\}A$

(3) y についての降べきの順に整理すると

$$\begin{aligned}
x^2+2xy+3x+4y+2 &= (2x+4)y+(x^2+3x+2)\\
&=(x+2)2y+(x+1)(x+2)\\
&=\boldsymbol{(x+2)(x+2y+1)}
\end{aligned}$$

◀ x の次数は 2，y の次数は 1

◀ $x+2=A$ とおくと
$2yA+(x+1)A$
$=\{2y+(x+1)\}A$

(4) b についての降べきの順に整理すると

$$\begin{aligned}
a^3+ab^2+b^2+1 &= (a+1)b^2+(a^3+1)\\
&=(a+1)b^2+(a+1)(a^2-a+1)\\
&=\boldsymbol{(a+1)(a^2-a+b^2+1)}
\end{aligned}$$

◀ a の次数は 3，b の次数は 2

*28　もっとも次数の低い文字でまとめると，最高次の係数に共通因数が出てくることが多いからである．

C. 複 2 次式の因数分解

ax^4+bx^2+c という形の多項式を**複 2 次式** (biquadratic expression) という．ただし，$a \neq 0$ とする．
例として，次の 2 つの複 2 次式の因数分解についてみてみよう．

i) x^4-13x^2+36 の因数分解

この複 2 次式は，$x^2=X$ とおくと，$X^2-13X+36=(X-4)(X-9)$ であるから

$$\begin{aligned} x^4-13x^2+36 &= (x^2-4)(x^2-9) \\ &= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

ii) x^4+2x^2+9 の因数分解

この複 2 次式は，$x^2=X$ とおいても，X^2+2X+9 となるだけで因数分解が進まない．
そこで，x^4 と 9 に着目すると，うまく因数分解できる．

$$\begin{aligned} &x^4+2x^2+9 \\ &= x^4+6x^2+9-4x^2 && \leftarrow 2x^2=6x^2-4x^2 \text{ と変形し，平方の形が作れるよううする} \\ &= \underbrace{(x^2+3)^2}_{\text{平方の形にする}} -(2x)^2 && \leftarrow \bigcirc^2-\triangle^2 \text{ の形} \\ &= \left\{(x^2+3)+2x\right\}\left\{(x^2+3)-2x\right\} = (x^2+2x+3)(x^2-2x+3) \end{aligned}$$

複 2 次式の因数分解

複 2 次式 ax^4+bx^2+c の因数分解には，次の 2 つの場合がある．
i) $x^2=X$ とおくことにより因数分解できる場合
ii) ax^4 と c に着目し，bx^2 の項を変形して因数分解できる場合

i) の方法でうまくいかない場合に，ii) の方法を試すと覚えておくとよい．詳しくは「複 2 次式の因数分解について (p.50)」を参照のこと．

【例題 51】 次の式を因数分解せよ．
1. x^4+7x^2-8
2. x^4+x^2+1

【解答】

1. $$\begin{aligned} x^4+7x^2-8 &= (x^2+8)(x^2-1) \\ &= \boldsymbol{(x^2+8)(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

◀ $x^2=X$ とおけば

$$\begin{aligned} &x^4+7x^2-8 \\ &= X^2+7X-8 \\ &= (X+8)(X-1) \\ &= (x^2+8)(x^2-1) \\ &= \boldsymbol{(x^2+8)(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

2. x^4 と 1 に着目して

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1 &= x^4+2x^2+1-x^2 \\ &= (x^2+1)^2-x^2 \\ &= (x^2+1+x)(x^2+1-x) \\ &= \boldsymbol{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

D. 2 文字 2 次式の因数分解

降べきにしても共通因数が見つけられない場合でも，2 次式の場合は『1 次式の積の公式の逆利用』(p.34) を使って因数分解できることがある．

たとえば，$2x^2+5xy+3y^2+2x+4y-4$ という式の因数分解について考えてみよう．

まず，これを x について降べきの順に整理する．

$$2x^2+(5y+2)x+3y^2+4y-4$$

今までのように共通因数を作ることはできない．そこで，x を含まない項について因数分解する．

$$2x^2+(5y+2)x+(3y-2)(y+2)$$

『1 次式の積の公式の逆利用』(p.34) のときと同じように，たすき掛けをする．

x^2 の係数２は
１×２しかない

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \times & ? & \to ? \\ \mathbf{2} & & ? & \to ? \\ \hline & & & 5y+2 \end{array}$$

$5y+2$ にしたい

$\Longrightarrow$

定数項は（３y－２）×（y＋２）か（y＋２）×（３y－２）のどちらか

$\{-(3y-2)\}\times\{-(y+2)\}$ などは，y の係数が合わず不適

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & 3y-2 & \to 6y-4 \\ 2 & & y+2 & \to 2y+4 \\ \hline & & & 8y \quad \times \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & \times & \mathbf{y+2} & \to 2y+4 \\ 2 & & \mathbf{3y-2} & \to 3y-2 \\ \hline & & & \mathbf{5y+2} \quad ○ \end{array}$$

こうして，$(2x+3y-2)(x+y+2)$ と因数分解できることが分かる．

上のたすきがけの表を作るコツは，「ひとまず y の係数だけ考えること」にある．

【例題 52】 次の式を因数分解せよ．

1. $x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$
2. $2x^2-y^2-xy+3x+3y-2$

【解答】

1. 与えられた式を x について降べきの順に整理すると

$$\begin{aligned} x^2+4xy+3y^2+x+5y-2 &= x^2+(4y+1)x+3y^2+5y-2 \\ &= x^2+(4y+1)x+(3y-1)(y+2) \\ &= \mathbf{(x+y+2)(x+3y-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & \mathbf{y+2} & \to y+2 \\ ◀ 1 & & \mathbf{3y-1} & \to 3y-1 \\ \hline & & & \mathbf{4y+1} \quad ○ \end{array}$$

2. x について降べきの順にし，定数項を因数分解すると

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= 2x^2+(-y+3)x-(y^2-3y+2) \\ &= 2x^2+(-y+3)x-(y-1)(y-2) \\ &= \{x-(y-2)\}\{2x+(y-1)\} \\ &= \mathbf{(x-y+2)(2x+y-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & \mathbf{-(y-2)} & \to -2y+4 \\ ◀ 2 & & \mathbf{y-1} & \to y-1 \\ \hline & & & \mathbf{-y+3} \quad ○ \end{array}$$

E. いろいろな因数分解

どの因数分解の手段を用いるかどうかは，だいたい次の優先順位で考えるとよい．方針がわからないときは，ひとまずこの順序で考えてみよう．

(1) 共通因数を見つける

(2) 次数の小さい文字に注目し，降べきの順に並べる．

(3) 公式を使えないか考える

【練習 53：因数分解の練習〜その２〜】

次の式を因数分解せよ．

(1) $xy - x - y + 1$

(2) $a^2 + b^2 + ac - bc - 2ab$

(3) $a^4 + a^2b^2 + b^4$

(4) $x^2 - xy - 12y^2 + 5x + y + 6$

【解答】

(1) （与式）$= (y-1)x - (y-1)$

$= \boldsymbol{(x-1)(y-1)}$

(2) c について降べきの順に整理すると

◂ c の次数だけ 1 次式

（与式）$= (a-b)c + a^2 + b^2 - 2ab$

$= (a-b)c + (a-b)^2$

$= (a-b)c + (a-b)(a-b)$

$= \boldsymbol{(a-b)(a-b+c)}$

(3) a^4 と b^4 に着目して

◂『複 2 次式の因数分解』(p.40)

（与式）$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$

$= (a^2+b^2)^2 - (ab)^2$

$= (a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

$= \boldsymbol{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}$

(4) x について降べきの順にし，定数項を因数分解すると

◂『2 文字 2 次式の因数分解』(p.41)

（与式）$= x^2 + (-y+5)x - (12y^2 - y - 6)$

$= x^2 + (-y+5)x - (3y+2)(4y-3)$

$= \{x - (4y-3)\}\{(x + (3y+2)\}$

$= \boldsymbol{(x-4y+3)(x+3y+2)}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & \boldsymbol{-(4y-3)} & \to & -4y+3 \\ 1 & & \boldsymbol{3y+2} & \to & 3y+2 \\ \hline & & & & \boldsymbol{-y+5} \ ○ \end{array}$$

【㊊㊐ 54：因数分解の練習～その３～】

次の式を因数分解せよ．

① $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$　　② $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

③ a^4+64　　④ $6x^2-5xy-6y^2+4x+7y-2$　　⑤ $(x^2-2x-2)(x^2-2x-6)-12$

【解答】

① x について降べきの順に整理すると

◀ そのままでは手の出しようがないので，x について整理

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2 \\
&= (y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z) \\
&= (y-z)\left\{x^2-(y+z)x+yz\right\} \\
&= \boldsymbol{(y-z)(x-y)(x-z)}
\end{aligned}
$$

② a について降べきの順に整理すると

◀ そのままでは手の出しようがないので，a について整理

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2 \\
&= (b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c) \\
&= (b-c)\left\{a^2-(b+c)a+bc\right\} \\
&= \boldsymbol{(b-c)(a-b)(a-c)}
\end{aligned}
$$

③ a^4 と 64 に着目して

◀ 『複 2 次式の因数分解』(p.40)

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (a^2+8)^2-16a^2 \\
&= (a^2+8+4a)(a^2+8-4a) \\
&= \boldsymbol{(a^2+4a+8)(a^2-4a+8)}
\end{aligned}
$$

④ 与えられた式を x について降べきの順に整理すると

◀ 『2 文字 2 次式の因数分解』(p.41)

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 6x^2+(-5y+4)x-(6y^2-7y+2) \\
&= 6x^2+(-5y+4)x-(3y-2)(2y-1) \\
&= \{2x-(3y-2)\}\{3x+(2y-1)\} \\
&= \boldsymbol{(2x-3y+2)(3x+2y-1)}
\end{aligned}
$$

◀ y の係数を合わせようとすると見つかりやすい．

$$
\begin{array}{cccl}
2 & \diagup\!\!\!\!\diagdown & \boldsymbol{-(3y-2)} & \to\ -9y+6 \\
3 & & \boldsymbol{2y-1} & \to\ \underline{4y-2} \\
 & & & \quad \boldsymbol{-5y+4}\ \bigcirc
\end{array}
$$

⑤ x^2-2x を 1 つの式と考えて

◀ 慣れるまでは $x^2-2x=A$ のようにおくとよい

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (x^2-2x)^2-8(x^2-2x)+\cancel{12}-\cancel{12} \\
&= (x^2-2x)(x^2-2x-8) \\
&= \boldsymbol{x(x-2)(x+2)(x-4)}
\end{aligned}
$$

8.　式の値の計算

A.　$x+y$, xy, $x-y$ の値を利用する

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ を変形して，等式 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ を得る．

この等式を用いると，x, y が一部の符号しか異ならないときの計算を，簡単にできることがある．

たとえば，$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$ のとき，$x+y=4$, $x-y=2\sqrt{3}$, $xy=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=1$ である．これを用いて，x^2+y^2, x^2y-xy^2 の値は次のように計算できる．

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ &= 4^2-2\cdot 1 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3y-xy^3 &= xy(x^2-y^2) \\ &= xy(x+y)(x-y) = 1\cdot 4\cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

【例題 55】

1. $x=\sqrt{6}+\sqrt{3}$，$y=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ のとき，以下の値を計算しなさい．
   1) $x+y$　　2) xy　　3) $x-y$　　4) x^2+y^2　　5) $x^4y^2-x^2y^4$
2. $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ のとき，以下の値を計算しなさい．
   1) $x+y$　　2) xy　　3) $x-y$　　4) x^2-y^2　　5) x^4+y^4

【解答】

1.
1) $x+y=\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)=\mathbf{2\sqrt{6}}$

2) $xy=\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\mathbf{3}$

3) $x-y=\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)=\mathbf{2\sqrt{3}}$

4) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\left(2\sqrt{6}\right)^2-2\cdot 3=\mathbf{18}$

◀ $x+y=2\sqrt{6}$,　$xy=3$ を代入

5) $x^4y^2-x^2y^4=x^2y^2(x^2-y^2)=(xy)^2(x+y)(x-y)$

◀ 因数分解した

$$=3^2\cdot\left(2\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{3}\right)=\mathbf{108\sqrt{2}}$$

◀ xy, $x+y$, $x-y$ に値を代入

2. 分母を有理化すると，次のようになる．

◀ まず，有理化する．

$$x=\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}=\frac{7+2\sqrt{21}+3}{7-3}=\frac{10+2\sqrt{21}}{4}=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$y=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}=\frac{7-2\sqrt{21}-3}{7+3}=\frac{10-2\sqrt{21}}{4}=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

1) $x+y=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}+\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}=\mathbf{5}$

2) $xy=\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)=\dfrac{5^2-(\sqrt{21})^2}{4}=\mathbf{1}$

3) $x-y=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}-\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}=\mathbf{\sqrt{21}}$

4) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=\mathbf{5\sqrt{21}}$

◀ $x+y=5$, $x-y=\sqrt{21}$ を代入

5) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

◀ $(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2$ を利用

$$\begin{aligned} &=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2(xy)^2 \\ &=(5^2-2\cdot 1)^2-2\cdot 1^2=23^2-2=\mathbf{527} \end{aligned}$$

◀ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ を利用，また，$x^2y^2=(xy)^2$ を利用（指数法則 iii) p.12）

x^3+y^3 の計算も，『立方の公式 1(p.21)』『立方の公式 2(p.23)』を使って，計算を簡単にできる．

たとえば，$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$ のとき，$x+y=4$，$x-y=2\sqrt{3}$，$xy=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=1$ である．

（解法１）立方の公式 1 を使う

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=14$ であるから

$$\begin{aligned}x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2)\\ &= 4\cdot(14-1)=52\end{aligned}$$

（解法２）立方の公式 2 を使う

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ を変形して

$$\begin{aligned}x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2 &= (x+y)^3-3xy(x+y)\\ &= 4^3-3\cdot1\cdot4=52\end{aligned}$$

これを応用して，x^5+y^5 の計算も，次のようにできる．

$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5$ を変形して

$$\begin{aligned}x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2\\ &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)\\ &= 14\cdot52-1^2\cdot4=734\end{aligned}$$

【練習 56：3 次式の公式と式の値】

$x=\sqrt{7}+\sqrt{2}$，$y=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ のとき，以下の値を計算しなさい．

(1) x^2+y^2　(2) x^3-y^3　(3) x^4+y^4　(4) x^5-y^5

【解答】　まず，$x+y=2\sqrt{7}$，$x-y=2\sqrt{2}$，$xy=7-2=5$ である．

(1)（与式）$=(x+y)^2-2xy=28-10=\mathbf{18}$

(2)（解法１）（与式）$=(x-y)(x^2+xy+y^2)=2\sqrt{2}\cdot(18+5)=\mathbf{46\sqrt{2}}$

（解法２）$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ を変形して

$$\begin{aligned}x^3-y^3=(x-y)^3+3x^2y-3xy^2 &= (x-y)^3+3xy(x-y)\\ &= \left(2\sqrt{2}\right)^3+3\cdot5\cdot2\sqrt{2}=\mathbf{46\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(3) $(x^2+y^2)^2=x^4+2x^2y^2+y^4$ を変形して

$$\begin{aligned}x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2-2x^2y^2\\ &= 18^2-2\cdot5^2=324-50=\mathbf{274}\end{aligned}$$

(4) $(x^2+y^2)(x^3-y^3)=x^5-x^2y^3+x^3y^2-y^5$ を変形して

$$\begin{aligned}x^5-y^5 &= (x^2+y^2)(x^3-y^3)+x^2y^3-x^3y^2\\ &= (x^2+y^2)(x^3-y^3)+x^2y^2(x-y)\\ &= 18\cdot46\sqrt{2}-5^2\cdot2\sqrt{2}=828\sqrt{2}-50\sqrt{2}=\mathbf{778\sqrt{2}}\end{aligned}$$

B. 発展 因数分解と式の値

因数分解には，式の因数を見えるようにする長所があった．この長所を生かせば，文字の値を整数や自然数に限った次のような問題を解くことができる．

【発展 57：因数分解と式の値】

① 多項式 $F = ab - 3a + 2b - 6$ について，次の問いに答えなさい．

i. F を因数分解しなさい．

ii. $F = 6$ を満たす自然数 $(a,\ b)$ の組をすべて求めなさい．

② $mn + 2m - n = 3$ を満たす整数 $(m,\ n)$ の組をすべて求めなさい．

【解答】

① i. $F = a(b-3) + 2(b-3)$
$= \boldsymbol{(a+2)(b-3)}$

ii. i. の結果から

$$(a+2)(b-3) = 6$$

となる自然数 a，b を求めればよい．

6 を自然数の範囲で積に分解すると，$6 = 6\times1,\ 3\times2,\ 2\times3,\ 1\times6$ である．$a+2$ は 3 以上でないといけないことに注意すれば

◀ 自然数は，1 以上の値である．

$$\begin{cases} a+2=6 \\ b-3=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+2=3 \\ b-3=2 \end{cases}$$

のいずれかでないといけない．

それぞれの式から $\boldsymbol{(a,\ b) = (4,\ 4),\ (1,\ 5)}$ と求められる．

② 左辺を因数分解することを考える．

$$\begin{aligned} & mn + 2m - n = 3 \\ \Leftrightarrow\ & m(n+2) - n = 3 \\ \Leftrightarrow\ & m(n+2) - (n+2) = 3 - 2 \\ \Leftrightarrow\ & (m-1)(n+2) = 1 \end{aligned}$$

◀ 両辺から 2 を引いた

$1 = 1\times1,\ (-1)\times(-1)$ であるので

$$\begin{cases} m-1=1 \\ n+2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} m-1=-1 \\ n+2=-1 \end{cases}$$

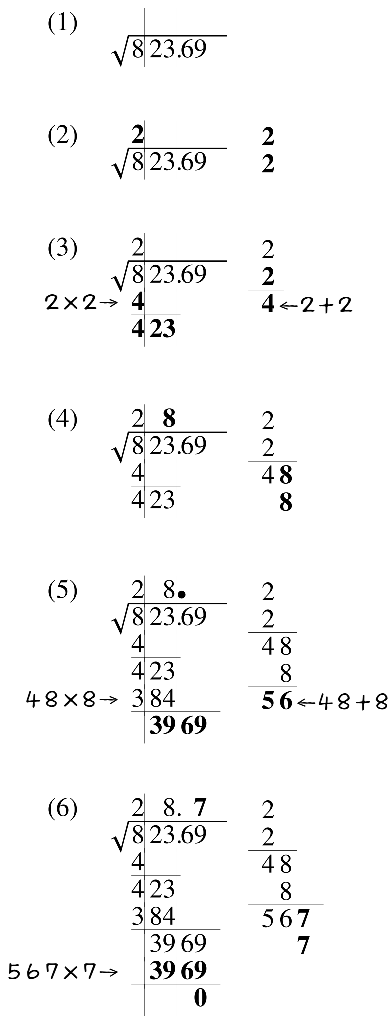
のいずれかでないといけない．

それぞれの式から $\boldsymbol{(m,\ n) = (2,-1),\ (0,-3)}$ と求められる．

1. 開平法について

A. 開平法の手順

例として，$\sqrt{823.69}$ の値を開平法で計算する．



(1) 823.69 を根号の中に書き，「小数点を基準」にして「2 桁ずつ」区切っていく．また，横にスペースをとっておく．

(2) 一番左の数は 8．2 乗して 8 を超えない最大の数 2 を，右図のように 3 ヶ所に書く．

(3) $(2\times 2 =)\ 2^2 = 4$ を 8 の下に書き，8 から 4 を引く．そして，23 を下に下ろす．
　また，その横で $2+2=4$ を計算する．

(4) 「4$\boxed{?}$」に「$\boxed{?}$」を掛けて「423」を超えない，最大の 1 桁の整数 $\boxed{?}$ を求める．

$$48\times 8 = 384 \leqq 423 < 49\times 9 = 441$$

であるので，$\boxed{?}$ は 8．これを 3 ヶ所に書き込む．

(5) 48×8 の結果 384 を 423 の下に書き，423 から引く．そして，69 を下に下ろす．さらに，小数点を打つ．
また，$48+8$ を横で計算しておく．

(6) 「56$\boxed{?}$」に「$\boxed{?}$」を掛けて「3969」を超えない，最大の 1 桁の整数 $\boxed{?}$ を求める．

$$567\times 7 = 3969 \leqq 3969 < 568\times 8$$

より $\boxed{?}$ は 7 であり，$3969-567\times 7=0$ なので計算は完了．
$\sqrt{823.69}=28.7$ とわかる．
（いつまでも 0 が現れないときは，計算を繰り返すことでより精密な近似値を求めることができる．）

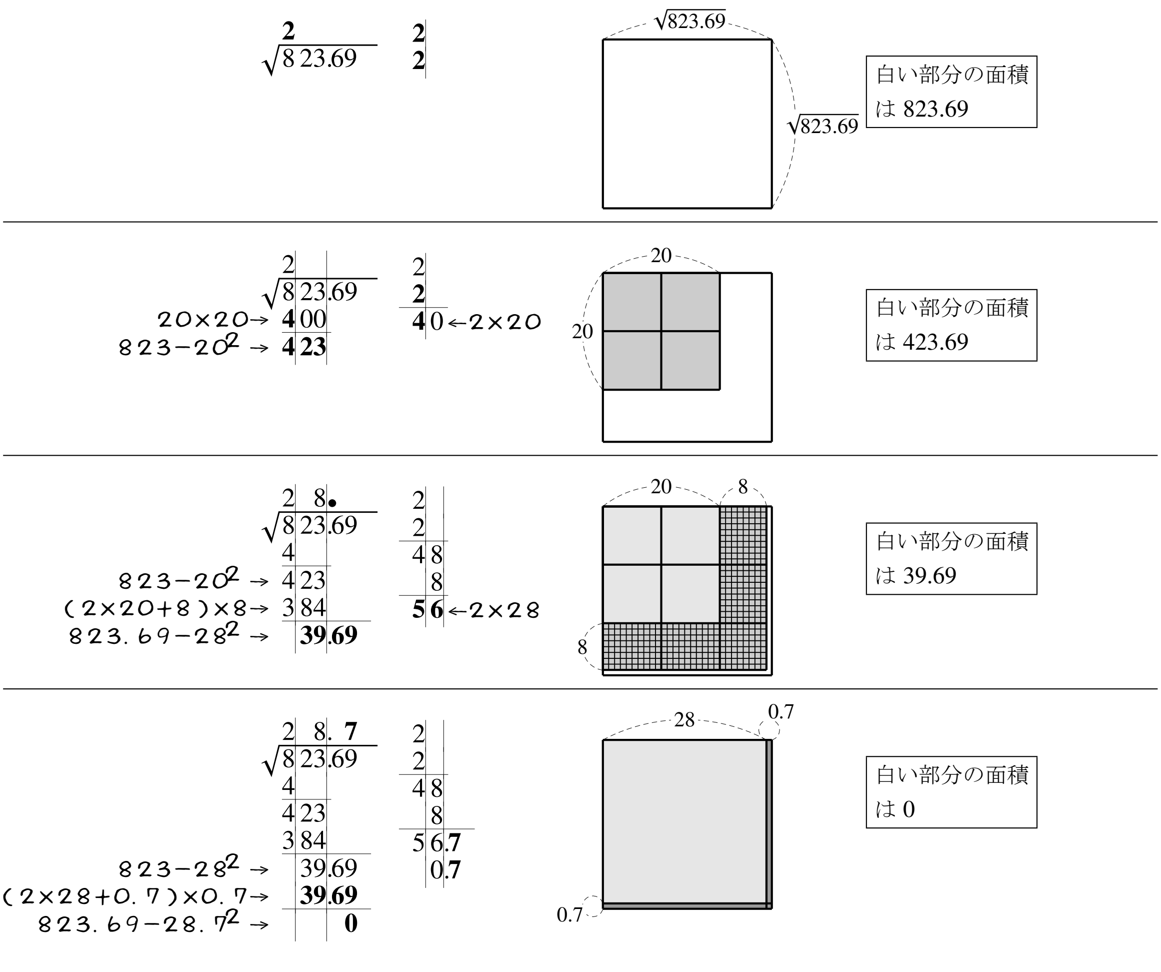
B. 開平法とは

「開平」とは「ある数の平方根を求めること」であり，「**開平法** (extraction of square root)」とは，その「開平」を筆算のような計算で求める方法である．いずれも和算[29] の時代から使われた用語であり，開平法は古くからそろばんによって用いられていた．

開平法の計算は，化学や物理において必要とされることがある．

C. 開平法の仕組み

なぜ，前ページの開平法によって平方根が求められるのか，その仕組みを下に図で示しておく（途中の計算式の中に，実際の計算のときには必要のない数字があるので注意すること）．余裕のある人は，各自で考えてみよう．



[29] 吉田光由著「塵劫記(1627)」などが大きなきっかけとなって発達した，江戸時代の開国以前における日本の数学の総称．関孝和(1640?42?〜1708)，建部賢弘(1664〜1739)などの傑出した人物が現れた．和算においては，微分積分学を初めとする関数の概念こそ大きな流れを作らなかったものの，方程式論，数値計算などの分野においては同時代のヨーロッパの数学を先んじることもあった．
また，和算が庶民にも広く流行していた点は，数学の歴史において特筆すべき事柄である．開国以後の日本が，ヨーロッパの数学を吸収して初等教育に導入するまであまり時間がかからなかった要因には，和算の影響がたいへん大きかったと考えられている．

【練習 58：開平法】

$\sqrt{153664}$，$\sqrt{1.1236}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{9.8}$ の値を開平法によって計算せよ(無限に続く場合は，四捨五入によって上から 3 桁まで計算せよ).

【解答】 開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{153664} = \mathbf{392}$$

```
      3  9  2           3
   √15 36 64            3
    9                  69
    6 36                9
    6 21              782
      15 64             2
      15 64
          0
```

開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{1.1236} = \mathbf{1.06}$$

```
    1. 0  6         1
   √1.12 36         1
    1              20
      12            0
       0          206
      12 36         6
      12 36
          0
```

開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{13} = 3.6\overset{1}{\cancel{0}}\cancel{5}\cdots$$
$$= \mathbf{3.61}$$

```
      3. 6  0  5        3
   √13.                 3
     9                 66
     4 00               6
     3 96             720
        4 00            0
           0         7205
        4 00 00         5
        3 60 25
          39 75
```

開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{9.8} = 3.13\cancel{0}\cdots$$
$$= \mathbf{3.13}$$

```
     3. 1  3  0         3
   √9.80                3
    9                  61
       80               1
       61             623
       19 00            3
       18 69         6260
          31 00         0
```

◀ 下のように，0 を引く部分を省略しても構わない．ただし，補助の計算から 0 を省略してはいけない．

```
    1. 0  6         1
   √1.12 36         1
    1              20
      12 36         0
      12 36       206
          0         6
```

◀ 下のように，0 を引く部分を省略しても構わない．ただし，補助の計算から 0 を省略してはいけない．

```
      3. 6  0  5        3
   √13.                 3
     9                 66
     4 00               6
     3 96             720
        4 00 00         0
        3 60 25      7205
          39 75         5
```

◀ 9.8 とは，物理で重要となる「重力加速度 (m/s^2)」の近似値である．余談になるが，この答えは π に近い値である．

電卓で値を確かめながら，いろいろな値で練習しよう．

2. 複 2 次式の因数分解について

簡単のため，複 2 次式 ax^4+bx^2+c を $a\left(x^4+\dfrac{b}{a}x^2+\dfrac{c}{a}\right)$ と変形し，$\dfrac{b}{a}=A$，$\dfrac{c}{a}=B$ とおいた

$$x^4+Ax^2+B \qquad \cdots\cdots ①$$

という複 2 次式の因数分解について考える[*30].

i) $x^2=X$ とおく方法で因数分解できる条件

$$\begin{aligned} x^4+Ax^2+B &= X^2+AX+B \qquad \leftarrow x^2=X \text{ とおいた} \\ &= \left(X+\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}+B=\left(X+\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2-4B}{4} \end{aligned}$$

より，$A^2-4B \geqq 0$ ならば $\bigcirc^2-\triangle^2$ タイプの因数分解が可能となる.

ii) x^4 と B に着目する方法で因数分解できる条件

$$x^4+Ax^2+B=x^4+B+Ax^2$$

ここで，$B>0$ ならば

$$\begin{aligned} &= \left(x^2+\sqrt{B}\right)^2-2\sqrt{B}x^2+Ax^2 \\ &= \left(x^2+\sqrt{B}\right)^2-\left(2\sqrt{B}-A\right)x^2 \end{aligned}$$

また，$2\sqrt{B}-A>0$ となるのは

$$2\sqrt{B}>A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A<0) \\ \text{または} \\ \left(A \geqq 0 \text{ かつ } 4B>A^2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A<0 \text{ かつ } (A^2-4B \geqq 0 \text{ または } A^2-4B<0)) \\ \text{または} \\ \left(A \geqq 0 \text{ かつ } A^2-4B<0\right) \end{cases}$$

のときであるから，条件を整理すると

$$\begin{cases} (B>0 \text{ かつ } A<0 \text{ かつ } (A^2-4B \geqq 0 \text{ または } A^2-4B<0)) \\ \text{または} \\ \left(B>0 \text{ かつ } A \geqq 0 \text{ かつ } A^2-4B<0\right) \end{cases}$$

のときである.

以上 i), ii) を因数分解の手法として覚えやすくまとめると次のようになる.

$A^2-4B \geqq 0$ のときは，$x^2=X$ とおくことにより因数分解でき，$A^2-4B<0$ のときは x^4 と B に着目して変形することにより因数分解できる．特に，$A^2-4B \geqq 0$ かつ $A<0$ かつ $B \geqq 0$ のときには，どちらの方法でも因数分解できる.

[*30] この複 2 次式①が因数分解できれば，その式全体に a を掛けて，もとの複 2 次式 ax^4+bx^2+c の因数分解が得られる.

索引