13th-note 数学II

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 II で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π , ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ , ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω

Ver1.521(2012-7-27)

目次

第 1 章　恒等式と式の証明

この章では，式の割り算を学んだ後，「そもそも式が等しいとはどういうことか」について考える．
そのうえで，２つの式が相等，大小関係を証明する方法について学ぶ．

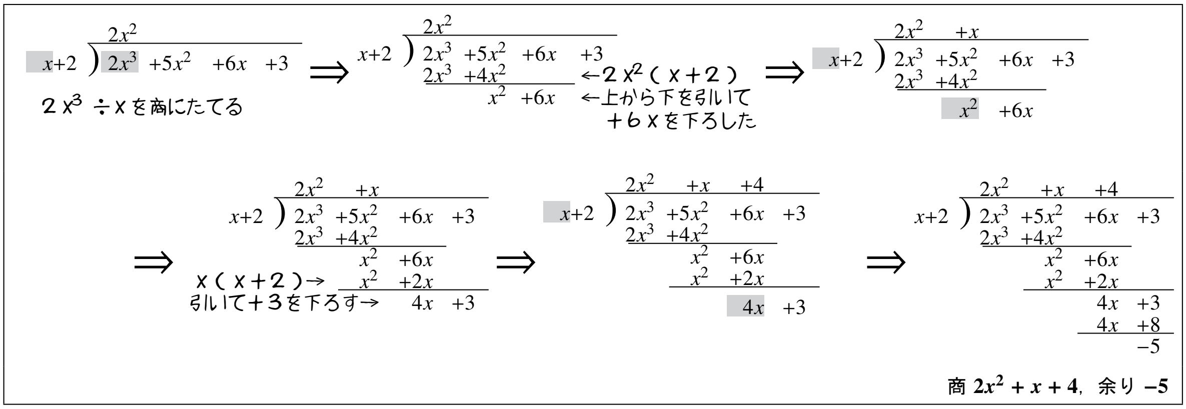
1.1　式の割り算

$31 \div 6$ という割り算には「5 余り 1」「$5.1\dot{6}(= 5.16666\cdots)$」「$\dfrac{31}{6}$」という 3 つの答え方がある．一方，式の割り算の場合は「余り」「分数式」の 2 通りの答え方がある．

1.　式の除法

A.　2 式の割り算 ～ 筆算の書き方・その１

式の割り算は，筆算を用いて計算できる．たとえば，$(2x^3 + 5x^2 + 6x + 3) \div (x + 2)$ という割り算は，次のようになる．余りが負の数になっていることに注意しよう．



$(2x^3+3x^2-3x+4)$
$\div(x^2+2x+4)$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 2x & -1 & & \\ \cline{2-5}
x^2+2x+4 \,\big) & 2x^3 & +3x^2 & -3x & +4 \\
 & 2x^3 & +4x^2 & +8x & \\ \cline{2-5}
 & & -x^2 & -11x & +4 \\
 & & -x^2 & -2x & -4 \\ \cline{3-5}
 & & & -9x & +8
\end{array}$$

商 $2x-1$，余り $-9x+8$

左のように，商に負の数が表われる場合もあるので，注意しよう．
また，ある次数の項がないとき，たとえば $(x^3+x+2)\div(x-1)$ の筆算は，x^2 の係数の列を空けて右のようにする．

右の場合，$(x^3 \boldsymbol{+0x^2} +x+2)\div(x-1)$ を計算していると考えればよい．

$(x^3+x+2)\div(x-1)$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +x & +2 & \\ \cline{2-5}
x-1 \,\big) & x^3 & & +x & +2 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & +x & \\
 & & x^2 & -x & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & +2 \\
 & & & 2x & -2 \\ \cline{3-5}
 & & & & 4
\end{array}$$

商 x^2+x+2，余り 4

【例題 1】 次の割り算を計算し，商と余りを答えなさい．

1. $(x^3+2x^2-2x-10)\div(x-2)$　　2. $(2x^3+x+5)\div(x+1)$　　3. $(x^3+x^2y+y^3)\div(x-y)$

【解答】 1.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +4x & +6 & \\ \cline{2-5}
x-2 \,\big) & x^3 & +2x^2 & -2x & -10 \\
 & x^3 & -2x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 4x^2 & -2x & \\
 & & 4x^2 & -8x & \\ \cline{3-5}
 & & & 6x & -10 \\
 & & & 6x & -12 \\ \cline{3-5}
 & & & & 2
\end{array}$$

商 x^2+4x+6，余り 2

2.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 2x^2 & -2x & +3 & \\ \cline{2-5}
x+1 \,\big) & 2x^3 & & +x & +5 \\
 & 2x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^2 & +x & \\
 & & -2x^2 & -2x & \\ \cline{3-5}
 & & & 3x & +5 \\
 & & & 3x & +3 \\ \cline{3-5}
 & & & & 2
\end{array}$$

商 $2x^2-2x+3$，余り 2

3.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +2xy & +2y^2 & \\ \cline{2-5}
x-y \,\big) & x^3 & +x^2y & & +y^3 \\
 & x^3 & -x^2y & & \\ \cline{2-4}
 & & 2x^2y & & \\
 & & 2x^2y & -2xy^2 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2xy^2 & +y^3 \\
 & & & 2xy^2 & -2y^3 \\ \cline{3-5}
 & & & & 3y^3
\end{array}$$

商 $x^2+2xy+2y^2$，余り $3y^3$

B. $A=BQ+R$

たとえば，「$(2x^3+5x^2+6x+3)\div(x+2)=2x^2+x+4$ 余り -5」という結果は，次のように表せる．

$2x^3+5x^2+6x+3=(x+2)(2x^2+x+4)-5$

このように，「$A\div B=Q$ 余り R」の結果は「$A=BQ+R$」の形で表わすことができる．

【練習 2：多項式の割り算の筆算〜その１〜】

次の割り算を行い，$A=BQ+R$ の形で答えよ．

(1) $(4x^3+2x^2+3)\div(x+2)$　　(2) $(3x^3-2x^2+x+2)\div(x^2-x-2)$　　(3) $(x^3+3xy^2+2y^3)\div(x+2y)$

【解答】 1.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 4x^2 & -6x & +12 & \\ \cline{2-5}
x+2 \,\big) & 4x^3 & +2x^2 & & +3 \\
 & 4x^3 & +8x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -6x^2 & & \\
 & & -6x^2 & -12x & \\ \cline{3-5}
 & & & 12x & +3 \\
 & & & 12x & +24 \\ \cline{4-5}
 & & & & -21
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 3x & +1 & & \\ \cline{2-5}
x^2-x-2 \,\big) & 3x^3 & -2x^2 & +x & +2 \\
 & 3x^3 & -3x^2 & -6x & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +7x & +2 \\
 & & x^2 & -x & -2 \\ \cline{3-5}
 & & & 8x & +4
\end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -2xy & +7y^2 & \\ \cline{2-5}
x+2y \,\big) & x^3 & & +3xy^2 & +2y^3 \\
 & x^3 & +2x^2y & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^2y & +3xy^2 & \\
 & & -2x^2y & -4xy^2 & \\ \cline{3-5}
 & & & 7xy^2 & +2y^3 \\
 & & & 7xy^2 & +14y^3 \\ \cline{4-5}
 & & & & -12y^3
\end{array}$$

1. $\boldsymbol{4x^3+2x^2+3=(x+2)(4x^2-6x+12)-21}$
2. $\boldsymbol{3x^3-2x^2+x+2=(x^2-x-2)(3x+1)+8x+4}$
3. $\boldsymbol{x^3+3xy^2+2y^3=(x+2y)(x^2-2xy+7y^2)-12y^3}$

C.　割り算の結果が 1 つに定まるには？

「$13 \div 6 = 2 \cdots 1$」は正しいが，「$13 \div 6 = 1 \cdots 7$」は間違っている．このように，余りのある割り算は，余りが割る数より値が小さいために，商と余りは 1 つに定まる．

式の割り算の場合には，「式の次数」が小さくなるようにする．

割り算の一意性

余りの式の次数が割る式の次数より小さいとき，商と余りが 1 つに定まる．

つまり，割られる式 $A(x)$，割る式 $B(x)$ に対し，次を満たす商 $Q(x)$，余り $R(x)$ は 1 つに定まる．

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \qquad \text{（ただし，}R(x)\text{ の次数は }B(x)\text{ の次数より小さい）}$$

（証明）は p.30 を参照のこと．

【暗記 3：余りの次数】

5 次式の $A(x)$ を，2 次式の $B(x)$ で割るとき，商 $Q(x)$ は何次式，余り $R(x)$ は何次式になるだろうか．

【解答】　$Q(x)$ は $5 - 2 = $ **3 次式**，余りは割る式 $B(x)$ より次数が低いので **1 次式または 0 次式**．

D.　$A = BQ + R$ の利用

もし，多項式 $F(x)$ を $(2x + 1)$ で割った商が $x^2 - 2x + 2$，余りが -4 になったならば

$$F(x) = (2x + 1)(x^2 - 2x + 2) - 4$$

と表せる．この右辺を計算して $F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ とわかる．

また，多項式 $x^3 - 4x^2 + 6x - 15$ を $B(x)$ で割って商が $x - 3$，余りが -6 になるならば，次のように書ける．

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 15 = B(x)(x - 3) - 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x^2 + 6x - 9 = B(x)(x - 3)$$

つまり，$B(x) = (x^3 - 4x^2 + 6x - 9) \div (x - 3) = x^2 - x + 3$ と分かる．

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -x & +3 & \\ \hline
x-3 & x^3 & -4x^2 & +6x & -9 \\
 & x^3 & -3x^2 & & \\ \hline
 & & -x^2 & +6x & \\
 & & -x^2 & +3x & \\ \hline
 & & & 3x & -9 \\
 & & & 3x & -9 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

【例題 4】　それぞれの場合について多項式を求めなさい．

1. 多項式 $A(x)$ を $2x + 3$ で割った商が $x^2 + x - 3$，余りが -5 になる場合の $A(x)$
2. $x^3 - x - 3$ を多項式 $B(x)$ で割って，商が $x + 1$，余りが $2x - 1$ になる場合の $B(x)$

【解答】

1. $A(x) = (2x + 3)(x^2 + x - 3) - 5$ と表せるから
   $A(x) = 2x^3 + 2x^2 - 6x + 3x^2 + 3x - 9 - 5 = \mathbf{2x^3 + 5x^2 - 3x - 14}$
2. $x^3 - x - 3 = B(x)(x + 1) + 2x - 1$　◀ $A = BQ + R$ の形で表わした
   $\Leftrightarrow B(x)(x + 1) = x^3 - 3x - 2$　◀ 左辺と右辺を入れ替え，移項した
   $\Leftrightarrow B(x) = (x^3 - 3x - 2) \div (x + 1) = \mathbf{x^2 - x - 2}$　◀

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -x & -2 & \\ \hline
x+1 & x^3 & & -3x & -2 \\
 & x^3 & +x^2 & & \\ \hline
 & & -x^2 & -3x & \\
 & & -x^2 & -x & \\ \hline
 & & & -2x & -2 \\
 & & & -2x & -2 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

E. 筆算の書き方・その２ 〜 係数だけを書く〜

右のように，式の割り算の筆算は，係数だけを記しても計算できる．

商の次数に気をつけて答えよう．

$(2x^3+3x^2-3x+4)\div(x^2+2x+4)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & & \\ \hline
1\ 2\ 4 & 2 & +3 & -3 & +4 \\
 & 2 & 4 & 8 & \\ \cline{2-4}
 & & -1 & -11 & 4 \\
 & & -1 & -2 & -4 \\ \cline{3-5}
 & & & -9 & 8
\end{array}
$$

商 $2x-1$，余り $-9x+8$

$2x^3+3x^2-3x+4$
$=(x^2+2x+4)(2x-1)-9x+8$

$(x^3+x+2)\div(x-1)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & 2 & \\ \hline
1\ \ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 & 1 & -1 & & \\ \cline{2-4}
 & & 1 & 1 & \\
 & & 1 & -1 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & 2 \\
 & & & 2 & -2 \\ \cline{3-5}
 & & & & 4
\end{array}
$$

商 x^2+x+2，余り 4

$x^3+x+2=(x-1)(x^2+x+2)+4$

【例題 5】 次の割り算を，上の方法で計算し，結果を $A=BQ+R$ の形で答えなさい．

1. $(x^3+2x^2-2x-10)\div(x-2)$ 2. $(2x^3+x+5)\div(x+1)$ 3. $(x^3+x^2y+y^3)\div(x-y)$

【解答】 1.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 4 & 6 & \\ \hline
1\ \ -2 & 1 & 2 & -2 & -10 \\
 & 1 & -2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 4 & -2 & \\
 & & 4 & -8 & \\ \cline{3-5}
 & & & 6 & -10 \\
 & & & 6 & -12 \\ \cline{3-5}
 & & & & 2
\end{array}
$$

2.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -2 & 3 & \\ \hline
1\ \ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\
 & 2 & 2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -2 & 1 & \\
 & & -2 & -2 & \\ \cline{3-5}
 & & & 3 & 5 \\
 & & & 3 & 3 \\ \cline{3-5}
 & & & & 2
\end{array}
$$

3.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & +2y & +2y^2 & \\ \hline
1\ -y & 1 & +y & 0 & +y^3 \\
 & 1 & -y & & \\ \cline{2-4}
 & & 2y & 0 & \\
 & & 2y & -2y^2 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2y^2 & +y^3 \\
 & & & 2y^2 & -2y^3 \\ \cline{3-5}
 & & & & 3y^3
\end{array}
$$

1. **$x^3+2x^2-2x-10=(x-2)(x^2+4x+6)+2$** 2. **$2x^3+x+5=(x+1)(2x^2-2x+3)+2$**

3. **$x^3+x^2y+y^3=(x-y)(x^2+2xy+2y^2)+3y^3$**

【練習 6：$A=BQ+R$ の利用】

(1) $A(x)$ を x^2-6x-1 で割ると，商が $x+2$，余りが -4 である．$A(x)$ を求めなさい．

(2) $2x^3-4x^2+1$ を $B(x)$ で割ると，商が $x-1$，余りが $x-2$ になる．$B(x)$ を求めなさい．

(3) $6x^4+3x^3+x^2-1$ を $C(x)$ で割ると，商は $3x^2+2$，余りは $-2x+1$ になる．$C(x)$ を求めなさい．

【解答】

(1) $A(x)=(x^2-6x-1)(x+2)-4=\boldsymbol{x^3-4x^2-13x-6}$

(2) $2x^3-4x^2+1=B(x)(x-1)+x-2 \iff B(x)(x-1)=2x^3-4x^2-x+3$

であるから，$B(x)=(2x^3-4x^2-x+3)\div(x-1)=\boldsymbol{2x^2-2x-3}$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -2 & -3 & \\ \hline
1\ \ -1 & 2 & -4 & -1 & 3 \\
 & 2 & -2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -2 & -1 & \\
 & & -2 & 2 & \\ \cline{3-5}
 & & & -3 & 3 \\
 & & & -3 & 3 \\ \cline{3-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

(3) $6x^4+3x^3+x^2-1=C(x)(3x^2+2)-2x+1$

$\iff C(x)(3x^2+2)=6x^4+3x^3+x^2+2x-2$

であるから，$C(x)=(6x^4+3x^3+x^2+2x-2)\div(3x^2+2)=\boldsymbol{2x^2+x-1}$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 1 & -1 & & \\ \hline
3\ 0\ 2 & 6 & 3 & 1 & 2 & -2 \\
 & 6 & 0 & 4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 3 & -3 & 2 & \\
 & & 3 & 0 & 2 & \\ \cline{3-6}
 & & & -3 & 0 & -2 \\
 & & & -3 & 0 & -2 \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0
\end{array}
$$

1 次式で割る多項式の割り算の場合には，『組立除法 (p.53)』を用いると，計算がより簡単になる

において，

【練習 7：多項式の割り算の筆算〜その２〜】

$A = 2x^3 + 2x^2 + 1,\ B = 2x + 1$ のとき，$A \div B$ を計算し，結果を $A = BQ + R$ の形で表わせ．

【解答】 右の筆算から

$$\begin{aligned} &2x^3 + 2x^2 + 1 \\ =\ &(2x + 1)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr|rrrr}
 & & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \\ \hline
2 & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\
 & & 2 & 1 & & \\ \hline
 & & & 1 & 0 & \\
 & & & 1 & \frac{1}{2} & \\ \hline
 & & & & -\frac{1}{2} & 1 \\
 & & & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \hline
 & & & & & \frac{5}{4}
\end{array}$$

F. 式が「割り切れる」

多項式の割り算 $F(x) \div G(x)$ の余りが 0 になるとき，$F(x)$ は $G(x)$ で**割り切れる** (devisible) という．

【練習 8：割り切れる】

$A(x) = x^3 + 2ax^2 + b,\ B(x) = x^2 + x + 2$ のとき，$A(x) \div B(x)$ の商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とする．

(1) $Q(x),\ R(x)$ を $a,\ b$ を含む式で答えよ．　(2) $A(x) \div B(x)$ が割り切れるとき，$a,\ b$ を答えよ．

【解答】

(1) 右の筆算から

商について

$\boldsymbol{Q(x) = x + (2a - 1)}$

余りについて

$\boldsymbol{R(x) = (-2a - 1)x + (b - 4a + 2)}$

(2) $R(x)$ の x の係数について $-2a - 1 = 0$ より $a = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$,

$R(x)$ の定数項について $b - 4a + 2 = 0$ より $b = 4a - 2 = \boldsymbol{-4}$.

$$\begin{array}{rrr|rrrr}
 & & & 1 & 2a-1 & & \\ \hline
1 & 1 & 2 & 1 & 2a & \boxed{0} & b \\
 & & & 1 & 1 & 2 & \\ \hline
 & & & & 2a-1 & -2 & b \\
 & & & & 2a-1 & 2a-1 & 4a-2 \\ \hline
 & & & & & -2a-1 & b-4a+2
\end{array}$$

…… 係数だけ書く筆算のやり方は，係数に文字がある式の割り算がやりやすく，ミスもしにくくなる．

2. 分数式

A. 分数式とは

$(2x^3 + 5x^2 + 6x + 3) \div (x + 2)$ の結果は，$\dfrac{2x^3 + 5x^2 + 6x + 3}{x + 2}$ と表わしてもよい．また，$1 \div (x + 2) = \dfrac{1}{x + 2}$ と表すこともできる．

このように，分母に多項式を含むような式を，**分数式**という．たとえば，次のような式は分数式である．

$\dfrac{x - 2}{x + 3},\quad \dfrac{a + 3}{a^2 + a},\quad \dfrac{a}{bx}$

B. 分数式における約分・通分

また，分母と分子はできるだけ因数分解をする．約分できる場合も約分する．

$$(x^2-6x+5)\div(x^2+2x-3)=\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x-3}=\frac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{(x+3)\cancel{(x-1)}}=\frac{x-5}{x+3}$$

分数式がこれ以上できないとき，**既約**であるという．

【例題 9】 以下の割り算・分数式を約分して，既約な分数式か，多項式にしなさい．

1. $\dfrac{a^2b^3}{a^3b}$　　2. $6a^2b^2\div 3a^3b^3$　　3. $\dfrac{3x-6}{x^2-5x+6}$　　4. $(ka^2-kb^2)\div(ka-kb)$

【解答】

1.（与式）$=\dfrac{\cancel{a^2}\cancel{b^3}^{\,b^2}}{\cancel{a^3}^{\,a}\cancel{b}}=\boldsymbol{\dfrac{b^2}{a}}$　　2.（与式）$=\dfrac{\cancel{6}^{\,2}\cancel{a^2}\cancel{b^2}}{\cancel{3}\cancel{a^3}^{\,a}\cancel{b^3}^{\,b}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{ab}}$

3.（与式）$=\dfrac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\boldsymbol{\dfrac{3}{x-3}}$

4.（与式）$=\dfrac{k(a^2-b^2)}{k(a-b)}=\dfrac{\cancel{k(a-b)}(a+b)}{\cancel{k(a-b)}}=\boldsymbol{a+b}$

C. 分数式の掛け算・割り算

分数式の掛け算・割り算は，数と同じように出来る．分母と分子に公約数（共通因子）があれば約分する．

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}\times\frac{x^2+5x}{x^2+x-6}=\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+5)}}\times\frac{x\cancel{(x+5)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}$$

←分母も分子も因数分解した

$$=\frac{x}{x+3}$$

←約分した

$$\frac{x^2-x-2}{x^2+2x-3}\div\frac{x^2-1}{x^2+5x+6}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+3)}(x-1)}\times\frac{\cancel{(x+3)}(x+2)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}$$

←割り算を掛け算に直し，因数分解した

$$=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2}$$

←答えは展開しない

【例題 10】

1. $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-4x+3}\times\dfrac{x-1}{x+4}$　　2. $\dfrac{2x+1}{x^2-9x+20}\times\dfrac{x^2-3x-4}{2x^2-5x-3}$　　3. $\dfrac{x+2}{2x+2}\div\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-1}$

4. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}\div\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$　　5. $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+5x+6}\div\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-6}\times\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-8}$

【解答】

1.（与式）$=\dfrac{(x+2)\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x-1)}(x-3)}\times\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{x+4}}=\boldsymbol{\dfrac{x+2}{x-3}}$

2.（与式）$=\dfrac{\cancel{2x+1}}{\cancel{(x-4)}(x-5)}\times\dfrac{\cancel{(x-4)}(x+1)}{\cancel{(2x+1)}(x-3)}=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{(x-5)(x-3)}}$

3.（与式）$=\dfrac{\cancel{x+2}}{2\cancel{(x+1)}}\times\dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+2)}(x+5)}=\boldsymbol{\dfrac{x-1}{2(x+5)}}$

4.（与式）$=\dfrac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}\times\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x+2)}(x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{x+3}{(x-3)(x-1)}}$

5.（与式）$=\dfrac{(x+1)\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x+3)}}\times\dfrac{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-1)}(x-3)}\times\dfrac{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+4)}\cancel{(x-2)}}=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{x-3}}$

D.　分数式の足し算・引き算

通分を用いて，分数式どうしの足し算・引き算も計算する．

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2}-\frac{x-2}{x^2+4x+3}=\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}-\frac{x-2}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\frac{(x-1)\boldsymbol{(x+3)}}{(x+1)(x+2)\boldsymbol{(x+3)}}-\frac{(x-2)\boldsymbol{(x+2)}}{(x+1)(x+3)\boldsymbol{(x+2)}}$$
$$=\frac{(x^2+2x-3)-(x^2-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$ ←分子の－（　）に注意！

数の場合と同じように，通分によって分母を揃えて計算すればよい．

【例題 11】

1. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}$　　2. $\dfrac{x^2-3}{x-1}+\dfrac{2x}{x-1}$　　3. $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}+\dfrac{x-2}{x^2+4x+3}$
4. $\dfrac{6x-9}{x^2-x-2}-\dfrac{5}{x+1}$　　5. $\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x^2+3x+2}$　　6. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^3}$

【解答】

1.（与式）$=\dfrac{(x+2)+2(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\boldsymbol{\dfrac{3x}{(x-1)(x+2)}}$

2.（与式）$=\dfrac{(x^2-3)+2x}{x-1}=\dfrac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\boldsymbol{x+3}$

3.（与式）$=\dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{x-2}{(x+1)(x+3)}$
$=\dfrac{(x-1)(x+3)+(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+3)(x+2)}$
$=\dfrac{(x^2+2x-3)+(x^2-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\boldsymbol{\dfrac{2x^2-2x-7}{(x+1)(x+2)(x+3)}}$

4.（与式）$=\dfrac{6x-9}{(x-2)(x+1)}-\dfrac{5}{x+1}$
$=\dfrac{6x-9-5(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{\cancel{x+1}}{(x-2)\cancel{(x+1)}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{x-2}}$

5.（与式）$=\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$
$=\dfrac{3(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x+2)(x-1)}$
$=\dfrac{2x+4}{(x+1)(x+2)(x-1)}=\dfrac{2\cancel{(x+2)}}{(x+1)\cancel{(x+2)}(x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}}$

6.（与式）$=\dfrac{(x+1)^2+(x+1)-1}{(x+1)^3}$
$=\dfrac{x^2+2x+1+x+1-1}{(x+1)^3}=\boldsymbol{\dfrac{x^2+3x+1}{(x+1)^3}}$

E. 発展 分数式における「帯分数」

たとえば，$29 \div 7 = 4$ 余り 1 であるから，$\dfrac{29}{7} = 4\dfrac{1}{7}$ と帯分数で表わすことができる．

同じように，次のように分数式を考えることもできる．

$$\frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{x(x+1)+x}{x+1} = \frac{x(x+1)+(x+1)-1}{x+1} = x+1-\frac{1}{x+1}$$

これは，$(x^2+2x) \div (x+1) = x+1$ 余り -1 と対応しており，$\dfrac{x^2+2x}{x+1}$ を帯分数に直したと考えられる．

【練習 12：分数式の帯分数】

以下の等式が成り立つように，（　）には式または数値を，$\boxed{}$ には数値を入れなさい．

(1) $\dfrac{x+3}{x+1} = (\text{ ア }) + \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{x+1}$　　(2) $\dfrac{2x+3}{x+1} = (\text{ ウ }) + \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{x+1}$

(3) $\dfrac{x^3+2x^2+x+3}{x+1} = (\text{ オ }) + \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{x+1}$

【解答】

(1) $\dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{(x+1)+2}{x+1} = {}_{(\text{ア})}\underline{\mathbf{1}} + \dfrac{\mathbf{2}_{(\text{イ})}}{x+1}$

◀ $(x+3) \div (x+1) = 1$ 余り 2 に対応している．

(2) $\dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+1}{x+1} = {}_{(\text{ウ})}\underline{\mathbf{2}} + \dfrac{\mathbf{1}_{(\text{エ})}}{x+1}$

◀ $(2x+3) \div (x+1) = 2$ 余り 1 に対応している．

(3) (与式) $= \dfrac{x^2(x+1)+x^2+x+3}{x+1}$

$= \dfrac{x^2(x+1)+x(x+1)+3}{x+1} = {}_{(\text{オ})}\underline{\boldsymbol{x^2+x}} + \dfrac{\mathbf{3}_{(\text{カ})}}{x+1}$

◀ $(x^3+2x^2+x+3) \div (x+1) = x^2+x$ 余り 3 に対応している．

たとえば，$\dfrac{29}{7} - \dfrac{53}{13}$ は，帯分数に直すと計算がしやすい．

(I) 仮分数のまま計算する ←計算が多い

$\dfrac{29}{7} - \dfrac{53}{13}$ ←分母の最小公倍数は 91

$= \dfrac{377}{91} - \dfrac{371}{91}$ ←分子はとても大きな数

$= \dfrac{6}{91}$

(II) 帯分数を使う ←29÷7=4余り1 から $\dfrac{29}{7} = 4\dfrac{1}{7}$ など

$\dfrac{29}{7} - \dfrac{53}{13}$

$= 4\dfrac{1}{7} - 4\dfrac{1}{13}$

$= \dfrac{13}{91} - \dfrac{7}{91} = \dfrac{6}{91}$ ←通分も簡単

同じようにして，$\dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{x+3}{x+2}$ は次のように計算するとよい．

(I) そのまま計算する ←計算が多い

$\dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{x+3}{x+2}$

$= \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(x+2)} - \dfrac{(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

$= \dfrac{x^2+4x+4-(x^2+4x+3)}{(x+1)(x+2)}$

$= \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

(II) 帯分数を使う

$\dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{x+3}{x+2}$

$= \dfrac{(x+1)+1}{x+1} - \dfrac{(x+2)+1}{x+2}$

$= 1 + \dfrac{1}{x+1} - 1 - \dfrac{1}{x+2}$

$= \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

【発展 13：帯分数を利用した計算】

帯分数を利用して，次の計算をしなさい．

① $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}$　　② $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

【解答】

① $(与式) = \dfrac{(x+1)+1}{x+1}-\dfrac{(x+2)+1}{x+2}$

$= 1+\dfrac{1}{x+1}-\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)$

$= \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \boldsymbol{\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}}$

② $(与式) = \dfrac{x(x+1)+1}{x+1}-\dfrac{x(x-1)+1}{x-1}$

$= x+\dfrac{1}{x+1}-\left(x+\dfrac{1}{x-1}\right)$

$= \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \boldsymbol{-\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}}$

◂ 1 同士で消し合う

◂ x 同士で消し合う

1.2　恒等式

1.　恒等式 ～ 等しい 2 つの式

A.　式が「等しい」とは？

どんな x でも $F(x)=G(x)$ が成立するとき，$F(x)$ と $G(x)$ は等しいと定義する．詳しくは次のようになる．

恒等式～式が「等しい」

（多項式とは限らない）2 つの式 $F(x)$, $G(x)$ があったとする．$F(x)$, $G(x)$ の定義域が等しく

定義域内のすべての x に対して　$F(x)=G(x)$　…………………… ①

が成り立つとき，$F(x)$ と $G(x)$ は等しいと定義し，①を（x についての）**恒等式**（こうとうしき）(identity) という．

恒等式の例：$(x+2)(x-1)=x^2+x-2$,　$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

恒等式でない例：$x^2-x+2=x+5$　←x＝0など，ほとんどのxで等しくない

【例題 14】　次の等式について，恒等式かどうか答えなさい．

1. $x^2-1=(x-1)(x+1)$　2. $x^2-2x+1=0$　3. $x^2+y^2=x+y$

【解答】

1. （右辺）$=x^2-1$ となり，左辺と式が一致し，**恒等式である**．
2. $x=0$ のとき（左辺）$=1\neq$（右辺）となるので**恒等式でない**．
3. $x=1$, $y=-1$ のとき，（左辺）$=2$,（右辺）$=0$ となるので**恒等式でない**．

◂ $x\neq1$ のとき（左辺）$\neq$（右辺）になる．

◂（左辺）$\neq$（右辺）になる x, y は他にも多数ある．

B.　「数値代入法」と「係数比較法」

2 つの多項式 $f(x) = x^2 + ax - 4$, $g(x) = x^2 + 2x + b$ が「等しい」ための a, b の条件を求めよう．

これには，2 つの方法がある．

i. 数値代入法

$f(0) = g(0)$ が等しいから $-4 = b$

$f(1) = g(1)$ が等しいから $a - 3 = -1$.

よって，$a = 2$, $b = -4$ が必要と分かる．

このとき[*1]，$f(x) = x^2+2x-4$, $g(x) = x^2+2x-4$

となるから $f(x) = g(x)$ は正しい．

ii. 係数比較法

$f(x) = x^2 + ax - 4 = x^2 + 2x + b = g(x)$ において

x の係数を見比べて $a = 2$.

定数項を見比べて $-4 = b$.

よって，$a = 2$, $b = -4$ と求められる．

後に見るように，上の 2 つのやり方は，どちらも身につけておくのがよい．

【例題 15】　$f(x) = x^2 + ax + 2$, $g(x) = (x-1)^2 + b(x-1)$ とする．$f(x) = g(x)$ が恒等式となる条件について，以下の $\boxed{}$ に適当な数値・式を答えなさい．

1. 数値代入法で求めよう．$f(0) = \boxed{ア}$, $g(0) = \boxed{イ}$ から $b = \boxed{ウ}$ であり，
   $f(1) = \boxed{エ}$, $g(1) = \boxed{オ}$ から $a = \boxed{カ}$ とわかる．
   $a = \boxed{カ}$, $b = \boxed{ウ}$ のとき，$f(x) = g(x) = \boxed{キ}$ となって，確かに等しい．
2. 係数比較法で求めよう．$g(x)$ を展開して降べきの順にすると $g(x) = \boxed{ク}$ になる．
   $f(x)$, $g(x)$ の x の係数を比べて式 $\boxed{ケ}$ を得て，定数項を比べて式 $\boxed{コ}$ を得る．
   この 2 式を連立して，$a = \boxed{サ}$, $b = \boxed{シ}$ を得る．

【解答】

1. $f(0) = \underline{\mathbf{2}}_{(ア)}$, $g(0) = (-1)^2 + b\cdot(-1) = \underline{\mathbf{1-b}}_{(イ)}$ から，$2 = 1 - b$ を解いて $b = \underline{\mathbf{-1}}_{(ウ)}$ を得る．$f(1) = 1^2 + a + 2 = \underline{\mathbf{a+3}}_{(エ)}$, $g(1) = \underline{\mathbf{0}}_{(オ)}$ から，$a + 3 = 0$ を解いて $a = \underline{\mathbf{-3}}_{(カ)}$ とわかる．
   $a = -3$, $b = -1$ のとき，$f(x) = \underline{\mathbf{x^2-3x+2}}_{(キ)}$, $g(x) = (x-1)^2-(x-1) = x^2 - 3x + 2$ となるから，確かに等しい．
2. $g(x) = (x^2 - 2x + 1) + bx - b = \underline{\mathbf{x^2+(b-2)x+1-b}}_{(ク)}$ になる．
   $f(x)$, $g(x)$ の x の係数を比べて式 $\underline{\mathbf{a=b-2}}_{(ケ)}$ を得て，定数項を比べて式 $\underline{\mathbf{2=1-b}}_{(コ)}$ を得る．
   この 2 式を連立して，$a = \underline{\mathbf{-3}}_{(サ)}$, $b = \underline{\mathbf{-1}}_{(シ)}$ を得る．

◀ $g(x)$ を展開して降べきの順にした．

[*1] 「このとき」以下の一文は，次ページで見るように，「数値代入法」を用いた場合は必ず書かなければならない．

C.　「数値代入法」の十分性

「数値代入法」を用いて，前ページのように $f(0) = g(0)$，$f(1) = g(1)$ から a，b の値を求めるだけでは，0，1 以外の値で $f(x) = g(x)$ を満たすかどうかわからない．

そのため，十分性を確かめるため実際に $f(x) = g(x)$ を満たしているかどうか確認しなければならない*2．

【例題 16】　次の等式が恒等式となるように，数値代入法を用いて a，b，c，d の値を定めなさい．

1. $x^2 + x + 1 = (x-1)^2 + a(x-1) + b$
2. $x^3 + ax^2 + x + 1 = (x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$
3. $(x+1)^3 + ax^2 + b(x-1) = x^3 + 4x^2 - cx - 5$

【解答】

1. 与式に $x = 1$ を代入して $3 = b$，
与式に $x = 0$ を代入して $1 = 1 - a + b \iff a = 3$．
$a = 3$，$b = 3$ のとき（右辺）$= x^2 + x + 1$ となるので，$\boldsymbol{a = b = 3}$ は条件を満たす．
2. 与式に $x = -1$ に代入して $-1 + a - 1 + 1 = 0$ より $a = 1$，
与式に $x = 0$ に代入して $1 = 1 + b + c \iff c = -b$，
与式に $x = -2$ に代入して
$$(-2)^3 + a\cdot(-2)^2 + (-2) + 1 = (-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1)$$
$$\iff -8 + 4a - 1 = -1 + b - c$$
$$\iff -8 + 4 - 1 = -1 + b + b \qquad \therefore\ b = -2,\ c = 2$$
◀ $a = 1$，$c = -b$ を代入した
$(a,\ b,\ c) = (1, -2,\ 2)$ のとき，（右辺）$= x^3 + x^2 + x + 1 =$（左辺）になるので，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (1, -2,\ 2)}$ は条件を満たす．
3. 与式に $x = -1$ を代入して
$a - 2b = -1 + 4 + c - 5 \iff a - 2b - c = -2 \cdots\cdots$ ①
与式に $x = 0$ を代入して，$1 - b = -5 \iff b = 6 \cdots\cdots$ ②
与式に $x = 1$ を代入して，$8 + a = 1 + 4 - c - 5 \iff a + c = -8 \cdots\cdots$ ③
②を①に代入して $a - c = 10$，これと③を連立して，$a = 1$，$c = -9$．
$(a,\ b,\ c) = (1,\ 6, -9)$ のとき（左辺）$= x^3 + 4x^2 + 9x - 5 =$（右辺）になるので，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (1,\ 6, -9)}$ は条件を満たす．

*2　多項式の場合は「このとき $f(x) = g(x)$ を確かに満たしている」の一言があればよい．

D.　「係数比較法」の必要性

「係数比較法」から得られる条件は，恒等式であるための十分条件である．

そして，多項式の場合は，これが恒等式であるための必要条件でもある．

「係数比較法」の必要性

2 つの多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,　$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ があったとき，$f(x) = g(x)$ が恒等式となる必要十分条件は

「すべての係数が等しくなること」（$a_n = b_n$，$a_{n-1} = b_{n-1}$，$\cdots$，$a_1 = b_1$，$a_0 = b_0$）である．

この命題の証明は難しい．詳しくは p.31 を参照のこと．

「多項式」以外では，同様の命題が成り立たないことがある．

【例題 17】　次の等式が恒等式となるように，係数比較法を用いて a, b, c, d の値を定めなさい．

1. $x^3 - x^2 + ax + b = (x^2 - 2x - 5)(x + c)$
2. $5x^3 + ax^2 + bx + c = (x + 3)(dx^2 - 3x - 3)$

【解答】

1. （右辺）$= x^3 + cx^2 - 2x^2 - 2cx - 5x - 5c$

　　$= x^3 + (c - 2)x^2 + (-2c - 5)x - 5c$ であるので

◀ 展開した

◀ 降べきの順に揃えた，これで係数が比較できる

x^2 の係数を比べて $-1 = c - 2$，よって $c = 1$

x の係数を比べて $a = -2c - 5 = -7$

定数項を比べて $b = -5c = -5$ より，$\boldsymbol{(a, b, c) = (-7, -5, 1)}$

2. （右辺）$= dx^3 - 3x^2 + 3dx^2 - 9x - 3x - 9$

　　$= dx^3 + (-3 + 3d)x^2 - 12x - 9$ であるので

x^3 の係数を比べて $5 = d$

x^2 の係数を比べて $a = -3 + 3d = -3 + 3 \cdot 5 = 12$

x の係数を比べて $b = -12$

定数項を比べて $c = -9$ より，$\boldsymbol{(a, b, c, d) = (12, -12, -9, 5)}$

【練習 18：恒等式～その３～】

$\dfrac{p}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{q}{x^2-1}$ が恒等式となるように p, q の値を定めなさい．

【解答】　左辺を通分すると $\dfrac{p(x+1) + (x-1)}{x^2-1} = \dfrac{(p+1)x + (p-1)}{x^2-1}$ となるので，両辺の分子を比べて $(p+1)x + (p-1) = q$ が恒等式になればよいと分かる．

x の係数から $p + 1 = 0 \Leftrightarrow p = -1$，定数項から $p - 1 = q \Leftrightarrow q = -2$ となる．つまり，$\boldsymbol{p = -1,\ q = -2}$.

◀ これを数値代入法で解いてもよいが，$x = 1, -1$ を代入するときには，分子どうしが恒等式になるための計算でないといけない．なぜなら，もとの分数式には $x = 1, -1$ を代入できない．

「数値代入法」と「係数比較法」は問題に応じて使い分けられるとよい．

【練習 19：恒等式〜その３〜】

次の等式が恒等式となるように，a, b, c, d の値を定めなさい．

(1) $a(x+1)^3+2(x+1)^2=b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)$

(2) $(x+1)(x^2+ax+2)=(x+b)(x^2+cx+1)$

(3) $a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-4)=1$

(4) $\dfrac{1}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-1}$

【解答】

(1) $x=-1$ を両辺に代入して，$0=-8b+4c-2d$ ········ ①

$x=1$ を両辺に代入して，$8a+8=0\Leftrightarrow a=-1$ ········ ②

$x=0$ を両辺に代入して，$a+2=-b+c-d$ ········ ③

$x=2$ を両辺に代入して，$27a+18=b+c+d$ ········ ④

②を①，③，④ に代入して整理すると

$$\begin{cases} 4b-2c+d=0 & \cdots\cdots\cdots ⑤ \\ b-c+d=-1 & \cdots\cdots\cdots ⑥ \\ b+c+d=-9 & \cdots\cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

⑦ − ⑥ から $2c=-8$ なので $c=-4$

⑤ − ⑥ から $3b-c=1$ なので $3b-(-4)=1\Leftrightarrow b=-1$,

⑦から $(-1)+(-4)+d=-9\Leftrightarrow d=-4$，これらを左辺，右辺に代入して展開すると一致するので，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d)=(-1,-1,-4,-4)}$.

(2) （左辺）$=x^3+ax^2+2x+x^2+ax+2=x^3+(a+1)x^2+(2+a)x+2$

（右辺）$=x^3+cx^2+x+bx^2+bcx+b=x^3+(b+c)x^2+(bc+1)x+b$

の両辺を見比べて，定数項から $b=2$

x の係数から $2+a=2c+1$，x^2 の係数から $a+1=2+c$

この 2 式を連立して解いて，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 2)}$

(3) $x=2$ を両辺に代入して $c\cdot(-1)\cdot(-2)=1\Leftrightarrow c=\dfrac{1}{2}$,

$x=3$ を両辺に代入して $a\cdot 2\cdot 1=1\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$,

$x=1$ を両辺に代入して $b\cdot 2+\dfrac{1}{2}\cdot 6=1\Leftrightarrow 2b=-2$ から $b=-1$，これらを代入すると（左辺）$=1$ となり，両辺が一致するので，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=\left(\frac{1}{2},-1,\ \frac{1}{2}\right)}$

(4) 右辺を通分すると

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-1} &= \frac{a(x-1)+b(x+2)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{(a+b)x+(-a+2b)}{(x+2)(x-1)}\end{aligned}$$

◀分子を x について降べきの順に並べた

これと左辺の分子どうしを見比べて x の係数から $a+b=0$ なので $b=-a$，定数項から $-a+2b=1\Leftrightarrow -a-2a=1$，よって，$\boldsymbol{a=-\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{3}}$.

【暗記 20：k の値に関わらず直線が通る点】
直線 $kx-2x+y-2k=0$ が，k の値に関わらず通る点 $(x,\ y)$ を求めよ．

【解答】 等式 $kx-2x+y-2k=0$ が k についての恒等式となればよいので

$$kx-2x+y-2k=0 \Leftrightarrow (x-2)k-2x+y=0$$

◀係数比較をするため k について降べきの順にした．

k の係数から $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$，定数項から $-2x+y=0 \Leftrightarrow y=2x=4$．以上から，等式 $kx-2x+y-2k=0$ は k の値に関わらず $\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 4)}$ を満たすので，これが求める点になる．

上の例題について，『一定の条件を満たす直線の集まり（第 3 章 p.89）』において，より詳しく学ぶ．

2. 多項式の割り算と恒等式

A. 剰余の定理

多項式を 1 次式で割った場合を考えて，次の**剰余の定理** (polynomial remainder theorem) を得る．

剰余の定理

$F(x)$ を $x-a$ で割った余りは $F(a)$ になる．また，$F(x)$ を $ax-b$ で割った余りは $F\left(\dfrac{b}{a}\right)$ になる．

（証明）$F(x)$ を $ax-b$ で割って，商が $Q(x)$，余りは r になったとする．このとき，$F(x)=(ax-b)Q(x)+r$ という恒等式が成り立ち，$x=\dfrac{b}{a}$ のとき

$$（左辺）=F\left(\frac{b}{a}\right),\qquad （右辺）=\left(a\cdot\frac{b}{a}-b\right)Q(a)+r=0+r=r$$

となるので，$F\left(\dfrac{b}{a}\right)=r$ が分かり後半部分が示された．$a=1$ とすれば，前半部分も示された． ■

【例題 21】 $F(x)=4x^4-2x^3+1,\ G(x)=x^4+ax^2+1$ とする．
1. $F(x)$ を $x-1$ で割った余りを求めよ．
2. $F(x)$ を $2x+3$ で割った余りを求めよ．
3. $G(x)$ を $x-2$ で割った余りが 5 になるとき，a の値を求めよ．

【解答】 剰余の定理より
1. $F(1)=4-2+1=\boldsymbol{3}$
2. $F\left(-\dfrac{3}{2}\right)=4\cdot\dfrac{81}{16}-2\cdot\left(-\dfrac{27}{8}\right)+1=\dfrac{81}{4}+\dfrac{27}{4}+1=\boldsymbol{28}$
3. $G(x)$ を $x-2$ で割った余りは $G(2)=16+4a+1=4a+17$ になる．これが 5 に等しいので，$4a+17=5 \Leftrightarrow \boldsymbol{a=-3}$．

B. 数値代入法の応用 〜 割り算の余りを求める

$(x^{13}+1)\div(x^2-1)$ は筆算でも計算できるが，次のように考えることもできる．

$(x^{13}+1)\div(x^2-1)$ で割った商を $Q(x)$ とする．2 次式 x^2-1 で割った余りは 1 次式になるので

$$x^{13}+1=(x^2-1)Q(x)+(ax+b) \qquad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる．①は x についての恒等式であるから，$x=1$ を代入して

① $\Rightarrow 1^{13}+1=\underbrace{(1^2-1)\cdot Q(1)}_{\text{0になって消える}}+(a\cdot 1+b)$ ←余りだけ残る

$\Leftrightarrow 2=a+b \qquad \cdots\cdots ②$

が成り立つ．また，①に $x=-1$ を代入して

① $\Rightarrow (-1)^{13}+1=\underbrace{0\cdot Q(-1)}_{\text{0になって消える}}+\{a\cdot(-1)+b\}$ ←余りだけ残る

$\Leftrightarrow 0=-a+b \qquad \cdots\cdots ③$

が成り立つ．②，③ を連立して $a=b=1$ を得るので，$(x^{13}+1)\div(x^2-1)$ の余りは $ax+b=x+1$ と分かる．

【例題 22】 $(x^{10}-2x^9+x-1)\div(x^2-3x+2)$ の余りを上の方法で求めよ．

【解答】 商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおく．$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ から，次の等式が成り立つ．

$$x^{10}-2x^9+x-1=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots ①$$

①の両辺に $x=1$ を代入して $1-2+1-1=0\cdot Q(1)+a+b$

①の両辺に $x=2$ を代入して $2^{10}-2^{10}+2-1=0\cdot Q(2)+2a+b$

それぞれ整頓して連立して解けば $\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$

よって，求める余りは $ax+b=\mathbf{2x-3}$ と分かる．

◀割る式 x^2-3x+2 は 2 次式なので，余りは 1 次式になる．

【練習 23：多項式の割り算〜その 1 〜】

$F(x)$ を $x-2$ で割った余りが 1，$x+1$ で割った余りが -2 のとき，$F(x)$ を $(x-2)(x+1)$ で割った余りを求めなさい．

【解答】 $F(x)$ を $(x-2)(x+1)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$F(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots ①$$

と表せる．①に $x=2$ を代入して

$$F(2)=0\cdot Q(2)+(a\cdot 2+b)\Leftrightarrow F(2)=2a+b$$

一方，$x-2$ で割った余りが 1 であるから，剰余の定理によって $F(2)=1$ とも分かり，$2a+b=1$．また

$$F(-1)=0\cdot Q(-1)+a\cdot(-1)+b\Leftrightarrow F(-1)=-a+b$$

であるが，$x+1$ で割った余りが -2 であるから $F(-1)=-2$ と分かり，$-a+b=-2$．2 式を連立して $a=1$，$b=-1$ とわかる．

つまり，$F(x)$ を $(x-2)(x+1)$ で割った余りは $\mathbf{x-1}$ になる．

【練習 24：多項式の割り算〜その２〜】

(1) $x^9 + x^7 + x^5 + 1$ を $x^2 - 1$ で割った余りを求めよ．

(2) $F(x)$ を $x - 3$ で割った余りが 4，$x + 2$ で割った余りが -6 のとき，$F(x)$ を $(x - 3)(x + 2)$ で割った余りを求めよ．

C. 発展 式の除法と式の値

$x = 2 + \sqrt{3}$ のときの $F(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ の値 $F\left(2 + \sqrt{3}\right)$ は，次のように計算することが出来る．

まず，$x = 2 + \sqrt{3}$ を解にもつ 2 次方程式を求める．これは

$$x - 2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

と変形して，式 $x^2 - 4x + 1$ は，$x = 2 + \sqrt{3}$ のときに 0 になると分かる．

次に，$(x^3 + 2x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - 4x + 1)$ を計算する．右のような筆算によって，次の等式を得る．

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & & & 1 & 6 \\ \hline
1\ -4\ 1 & 1 & 2 & -4 & 1 \\
 & 1 & -4 & 1 & \\ \hline
 & & 6 & -5 & 1 \\
 & & 6 & -24 & 6 \\ \hline
 & & & 19 & -5
\end{array}$$

$$F(x) = (x^3 + 2x^2 - 4x + 1) = (x^2 - 4x + 1)(x + 6) + 19x - 5$$

この両辺に $x = 2 + \sqrt{3}$ を代入すると $x^2 - 4x + 1 = 0$ であるから

$$F\left(2 + \sqrt{3}\right) = 0 + 19\left(2 + \sqrt{3}\right) - 5 = 33 + 19\sqrt{3}$$

となって簡単に計算できる．

この計算は，「微分」で 3 次関数を学んだときなどに重宝される．

【練習 25：式の除法と式の値】

(1) $x = 3 - \sqrt{2}$ を解に持つような 2 次方程式を 1 つ求めよ．

(2) $F(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 5$ のとき，$F\left(3 - \sqrt{2}\right)$ を求めよ．

D. 発展 係数比較法の応用

【発展 26：多項式の割り算〜その３〜】

$F(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ で割った余りを $ax^2 + bx + c$ とする．

① $F(x) = (x - 1)^2(x + 2)Q(x) + ax^2 + bx + c$ を変形し，$F(x) = (x - 1)^2\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}$ の形にしなさい．ただし，$\boxed{\text{イ}}$ は a, b, c を用いた 1 次式とする．

② $F(x)$ を $(x - 1)^2$ で割った余りが $-3x + 2$，$x + 2$ で割った余りが -1 であるとき，a, b, c を求めよ．

上の問題は，数学 III で「関数の積の微分」を用いた別解がある．

3.　連比・比例式と比例定数

A.　連比とは何か

3 つ以上の数の比を，**連比**(れんぴ)という．また，$x:y=2:3$ や $x:y:z=4:5:6$ など，比・連比が等しいことを表わす等式を，**比例式**という．

たとえば，$x=2,\ y=4,\ z=8$ のとき，連比 $x:y:z$ は連比 $2:4:8=1:2:4$ と等しく，比例式 $x:y:z=1:2:4$ が成り立つ．

B.　比例定数

比例式 $x:y=2:3$ は，「$2:3$ を何倍かすれば $x:y$ になる」も意味する．この「何倍か」を k 倍とおき

「ある実数 $k(\neq 0)$ が存在して，$x=2k,\ y=3k$」と表すことができる．

同じようにして，$x:y:z=4:5:6$ であることは，次のように言い換えられる．

「ある実数 $k(\neq 0)$ が存在して，$x=4k,\ y=5k,\ z=6k$」

このときの，0 でない実数 k を**比例定数**という．

【例題 27】

1. $a:b:c=1:2:3$ のとき
   1) $a,\ b,\ c$ を比例定数 k を用いて表せ．　2) 連比 $(a+b):(b+c):(c+a)$ を求めよ．
2. $(x+y):(y+z):(z+x)=3:6:7$ であるとき
   1) $x+y,\ y+z,\ z+x$ を比例定数 k を用いて表せ．また，$x+y+z$ を k を用いて表わせ．
   2) 連比 $x:y:z$ を求めよ．　3) $\dfrac{x+2y+3z}{3x+2y+z}$ の値を求めよ．

【解答】

1. 1) $\boldsymbol{a=k,\ b=2k,\ c=3k}$

   2) $(a+b):(b+c):(c+a)=3k:5k:4k=\boldsymbol{3:5:4}$

   ◀たとえば，$a+b=k+2k=3k$

2. 1) $\boldsymbol{x+y=3k,\ y+z=6k,\ z+x=7k}$ である．この 3 式を左辺同士，右辺同士それぞれ足して

$$\begin{aligned}(x+y)+(y+z)+(z+x) &= 3k+6k+7k\\ \Leftrightarrow\ 2(x+y+z) &= 16k\\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x+y+z} &= \boldsymbol{8k} \quad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

   2) ①と $x+y=3k$ から，$3k+z=8k$ となるので $z=5k$．
   ①と $y+z=6k$ から，$x+6k=8k$ となるので $x=2k$．
   ①と $z+x=7k$ から，$7k+y=8k$ となるので $y=k$．
   以上より，$x:y:z=2k:k:5k=\boldsymbol{2:1:5}$

   3) $x=2k,\ y=k,\ z=5k$ を代入して

$$(\text{与式})=\frac{2k+2k+15k}{6k+2k+5k}=\frac{19k}{13k}=\boldsymbol{\frac{19}{13}}$$

C. もう 1 つの比例式の形

2 つ以上の分数が等しいような式 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3}$，$\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{6}$ は次のように変形できるので，比例式と言うことがある．

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = k$ とおくと，$\dfrac{x}{2} = k$ から $x = 2k$，$\dfrac{y}{3} = k$ から $y = 3k$ となり，$x : y = 2 : 3$ を満たす．
$\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{6} = k$ とおくと，$x = 4k,\ y = 5k,\ z = 6k$ となり，$x : y : z = 4 : 5 : 6$ を満たす．

つまり，等しい分数の値を k とおくと，結果的に，k が比例定数として働く．

【例題 28】

1. $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{c}{7}$ のとき
   1) $a,\ b,\ c$ を比例定数 k を用いて表わせ．　　2) $\dfrac{a+b}{b+c}$ の値を求めよ．
2. $\dfrac{x+y}{3} = \dfrac{y+z}{5} = \dfrac{z+x}{6}$ であるとき
   1) $x+y,\ y+z,\ z+x$ を比例定数 k を用いて表せ．また，$x+y+z$ を k を用いて表わせ．
   2) 連比 $x : y : z$ を求めよ．　　3) $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ の値を求めよ．

【解答】

1. 1) $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{c}{7} = k$ とおいて，$\boldsymbol{a = 3k,\ b = 5k,\ c = 7k}$.
   2) (与式) $= \dfrac{3k+5k}{5k+7k} = \dfrac{8k}{12k} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$
2. 1) $\dfrac{x+y}{3} = \dfrac{y+z}{5} = \dfrac{z+x}{6} = k$ とおいて，
   $\boldsymbol{x+y = 3k,\ y+z = 5k,\ z+x = 6k}$．この 3 式を左辺同士，右辺同士それぞれ足して

$$\begin{aligned} & (x+y)+(y+z)+(z+x) = 3k+5k+6k \\ \Leftrightarrow\ & 2(x+y+z) = 14k \\ \Leftrightarrow\ & x+y+z = 7k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

   2) ①と $x+y = 3k$ から，$3k+z = 7k$ となるので $z = 4k$.
   ①と $y+z = 5k$ から，$x+5k = 7k$ となるので $x = 2k$.
   ①と $z+x = 6k$ から，$6k+y = 7k$ となるので $y = k$.
   以上より，$x : y : z = 2k : k : 4k = \mathbf{2 : 1 : 4}$
   3) $x = 2k,\ y = k,\ z = 4k$ を代入して

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{(2k)^2+k^2+(4k)^2}{2k\cdot k + k\cdot 4k + 4k\cdot 2k} \\ &= \frac{21k^2}{14k^2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

4.　等式の証明

A.　左辺，右辺をそれぞれ計算する

等式を証明するには，左辺と右辺をそれぞれ計算し，一致することを確認すればよい．

【練習 29：等式の証明】

(1) 等式 $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ を証明せよ．

(2) 等式 $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(ay+bx)^2$ を証明せよ．

【解答】

(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= a^2x^2+\cancel{2axby}+b^2y^2+a^2y^2\cancel{-2aybx}+b^2x^2\\
&= a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2\\
(\text{右辺}) &= a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2
\end{aligned}
$$

よって（左辺）＝（右辺）が示された．■

(2)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2\\
(\text{右辺}) &= a^2x^2+\cancel{2axby}+b^2y^2-(a^2y^2\cancel{+2aybx}+b^2x^2)\\
&= a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2
\end{aligned}
$$

よって（左辺）＝（右辺）が示された．■

B.　ある条件式の元での等式の証明

条件式があるときは，文字を消去すれば良い．

【例題 30】　$x+y+z=0$ のとき，$x^2+y^2+z^2=2(z^2-xy)$ を示そう．

$z=\boxed{\text{ア}}$ であるから，これを代入すると（左辺）＝$\boxed{\text{イ}}$，（右辺）＝$\boxed{\text{ウ}}$ となり，（左辺）＝（右辺）が示された．■

【解答】　$z=\underline{\boldsymbol{-x-y}}_{(\text{ア})}$ であるから

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= x^2+y^2+(-x-y)^2\\
&= x^2+y^2+(x^2+2xy+y^2)=\underline{\boldsymbol{2x^2+2xy+2y^2}}_{(\text{イ})}\\
(\text{右辺}) &= 2\{(-x-y)^2-xy\}\\
&= 2(x^2+2xy+y^2-xy)=\underline{\boldsymbol{2x^2+2xy+2y^2}}_{(\text{ウ})}
\end{aligned}
$$

となり，（左辺）＝（右辺）が示された．■

◀ 次のような別解もある．

$$
\begin{aligned}
&(\text{左辺})-(\text{右辺})\\
&= x^2+y^2+z^2-2(z^2-xy)\\
&= x^2+y^2+2xy-z^2\\
&= (x+y)^2-z^2=(-z)^2-z^2=0
\end{aligned}
$$

なので，（左辺）＝（右辺）．■

【練習 31：等式の証明〜その１〜】

$x+y+z=0$ のとき，$x^3+y^3+z^3=3xyz$ を示しなさい．

【解答】 $z=-(x+y)$ であるから

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= x^3+y^3+\{-(x+y)\}^3 \\
&= x^3+y^3+(-1)^3(x+y)^3 \\
&= x^3+y^3-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \\
&= -3x^2y-3xy^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= 3xy(-x-y) \\
&= -3x^2y-3xy^2
\end{aligned}
$$

よって（左辺）=（右辺）が示された．■

C. 比例式を含む等式の証明

条件式に比例式や比が含まれている場合は，比例定数 (p.17) をもちいるとよい．

たとえば，$a:b=c:d$ であるとき $\dfrac{a+2b}{c+2d}=\dfrac{3a-b}{3c-d}$ を示してみよう．

> $a:b=c:d$ から，比例定数 k を用いて $a=ck$，$b=dk$ とおける．すると
>
> $$\frac{a+2b}{c+2d}=\frac{ck+2dk}{c+2d}=\frac{k(c+2d)}{c+2d}=k,\qquad \frac{3a-b}{3c-d}=\frac{3ck-dk}{3c-d}=\frac{k(3c-d)}{3c-d}=k$$
>
> となるから，$\dfrac{a+2b}{c+2d}=\dfrac{3a-b}{3c-d}$ が示された．

【練習 32：比例式を含む等式の証明】

$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$ のとき，等式 $\dfrac{x+y}{a+b}=\dfrac{x-y}{a-b}$ を示せ．

【解答】 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=k$ とおくと，$a=kx$，$b=ky$ である．よって

$$\frac{x+y}{a+b}=\frac{x+y}{kx+ky}=\frac{x+y}{k(x+y)}=\frac{1}{k}$$

$$\frac{x-y}{a-b}=\frac{x-y}{kx-ky}=\frac{x-y}{k(x-y)}=\frac{1}{k}$$

となるから，$\dfrac{x+y}{a+b}=\dfrac{x-y}{a-b}$ が示された．■

1.3　不等式の証明

1.　不等式の性質

A.　$a,\ b$ の正負と $a+b,\ a-b,\ ab,\ \dfrac{a}{b}$ の正負

$a>0,\ b>0$ ならば，$a+b>0,\ ab>0,\ \dfrac{a}{b}>0$ であるが，$a-b$ は正にも負にも 0 にもなりうる．

一方，$a>0,\ b<0$ のときは，$a-b>0$ である．

【暗記 33：四則演算と正負】

以下の空欄に，「正」「負」「(正負が) 定まらない」のいずれかを入れ，表を完成させなさい．

	$a+b$	$a-b$	ab	$\dfrac{a}{b}$
$a>0,\ b>0$ のとき	正	定まらない	正	正
$a>0,\ b<0$ のとき		正		
$a<0,\ b<0$ のとき				

【解答】

	$a+b$	$a-b$	ab	$\dfrac{a}{b}$
$a>0,\ b>0$ のとき	正	定まらない	正	正
$a>0,\ b<0$ のとき	**定まらない**	正	**負**	**負**
$a<0,\ b<0$ のとき	**負**	**定まらない**	**正**	**正**

B.　$a<c,\ b<d$ のときの，$a+b,\ c+d$ の大小，$ab,\ cd$ の大小

$1<a,\ 2<b$ であるとき，$1+2<a+b$ が成り立つから $3<a+b$ である．また，$1\times 2<ab$ が成り立つから $2<ab$ である．これらを一般化して，以下の事実が成り立つ．

不等式の性質

i)　$a<c,\ b<d \Rightarrow a+b<c+d$　←どんな場合も，小＋小＜大＋大

ii)　$\mathbf{0<}a<c,\ \mathbf{0<}b<d \Rightarrow ab<cd$　←正の値ならば，小×小＜大×大

i) の証明は p.22 を，ii) の証明は p.32 を参照のこと．

【例題 34】　$a>1,\ b>2$ とする．次の不等式の真偽を述べ，偽ならば反例を挙げよ．

1. $2a+b>4$　　2. $a^2+a+b>4$　　3. $2<4a-b$

【解答】

1. $2a>2,\ b>2$ から，$2a+b>2+2=4$ なので**真**.
2. $a^2>1,\ a>1,\ b>2$ から，$a^2+a+b>1+1+2=4$ なので**真**.
3. **偽である．反例は $\boldsymbol{a=2,\ b=7}$ など**.

◀他にも多数の反例がある．

【発展 35：２数の大小関係】

次の命題の真偽を述べ，偽ならば反例を挙げよ．

① $a < 0 < c,\ 0 < b < d \Rightarrow ab < cd$　　② $a < 0 < c,\ b < 0 < d \Rightarrow ab < cd$

③ $0 < a < b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$　　④ $0 < a < c,\ 0 < b < d \Rightarrow \dfrac{b}{c} < \dfrac{d}{a}$

2.　不等式の証明の基礎

A.　（左辺）－（右辺），または，（右辺）－（左辺）

不等式を証明するときは，（左辺）－（右辺）や（右辺）－（左辺）の正負を考えるとよい．

（例）$a > 0,\ b > 0$ のとき，$3a + 4b > 2a + 3b$ が成り立つことを示せ．

（左辺）－（右辺）$= (3a + 4b) - (2a + 3b) = a + b > 0$　←仮定から，$a>0$，$b>0$

よって，（左辺）－（右辺）> 0 であるから，$3a + 4b > 2a + 3b$ は示された．

上の不等式が正しいことは，直感的に分かるかもしれない．しかし，「証明」が必要ならば上のように書こう．

【練習 36：不等式の証明～その１～】

(1) $0 < a,\ 0 < b$ のとき，$2a - 3b < 4a - 2b$ を示しなさい．

(2) $a < b$ であるとき，$\dfrac{3a + 2b}{5} < \dfrac{2a + 3b}{5}$ を示しなさい．

(3) $a < b,\ c < d$ のとき，$a + c < b + d$ を示しなさい（p.21『不等式の性質 i)』）．

【解答】

(1)（右辺）－（左辺）$= (4a - 2b) - (2a - 3b) = 2a + b > 0$ である（仮定から，$0 < a,\ 0 < b$）．よって，与式は示された．

(2)（右辺）－（左辺）$= \dfrac{(2a + 3b) - (3a + 2b)}{5} = \dfrac{b - a}{5} > 0$（仮定から，$b - a > 0$）．よって，与式は示された．

(3)（左辺）－（右辺）$= a + c - b - d = (a - b) + (c - d) < 0$（仮定から，$a - b < 0,\ c - d < 0$）．よって，与式は示された．

B.　等号条件

$\leqq$, $\geqq$ を含む不等式においては，等号 = が成り立つ必要十分条件[*3]をできるだけ記すとよい．

【例題 37】 $(a+1)^2 \geqq 4a$ であることを示せ．また，等号はいつ成立するか．

【解答】 (左辺) − (右辺) $= (a^2+2a+1) - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geqq 0$ であるから，不等式 $(a+1)^2 \geqq 4a$ が示された．
$(a-1)^2 = 0$ を解いて，$\boldsymbol{a = 1}$ **が等号条件になる**．■

◀ (左辺) = (右辺) になるのは，(左辺) − (右辺) $= (a-1)^2 = 0$ のとき．

C.　(左辺)^2 − (右辺)^2，または，(右辺)^2 − (左辺)^2

2 つの正の値は，2 乗しても大小関係が変わらないので，次のような証明ができる (p.??)．

（例）$x > 0$, $y > 0$ のとき，$\sqrt{3x+2y} < \sqrt{3x} + \sqrt{2y}$ が成り立つことを示せ．

$$\text{(右辺)}^2 - \text{(左辺)}^2 = \left(\sqrt{3x} + \sqrt{2y}\right)^2 - \left(\sqrt{3x+2y}\right)^2$$
$$= (3x + 2\sqrt{6xy} + 2y) - (3x+2y) = 2\sqrt{6xy} > 0$$

よって (左辺)^2 < (右辺)^2 である．今，左辺も右辺も正であるから(左辺) < (右辺) が示された．

上の証明において，左辺も右辺も正であるからという一言は，必ず書かなければならない[*4]．

【練習 38：不等式の証明〜その２〜】
(1) $0 \leqq a$ のとき，$\sqrt{a^2+a+1} \leqq a+1$ を示し，等号条件も示しなさい．
(2) $0 < a$, $0 < b$ のとき，$\sqrt{a^2+b^2} < a+b$ を示しなさい

【解答】
(1) (右辺)^2 − (左辺)^2 $= (a+1)^2 - (a^2+a+1) = a^2+2a+1-a^2-a-1 = a \geqq 0$
よって，(左辺)^2 $\leqq$ (右辺)^2 である．$0 \leqq a$ から左辺，右辺とも正であるから，(左辺) $\leqq$ (右辺) が示された．また，等号条件は $a = 0$．
(2) (右辺)^2 − (左辺)^2 $= (a+b)^2 - (a^2+b^2) = a^2+2ab+b^2-a^2-b^2 = 2ab > 0$
よって，(左辺)^2 < (右辺)^2 である．$0 < a$, $0 < b$ より左辺，右辺とも正であるから，(左辺) < (右辺) が示された．

等号条件は，上のように明記していなくても，できるだけ書いた方がよい．

[*3] しばしば，**等号条件**と言われる．
[*4] (左辺)^2 < (右辺)^2 のとき，実際には 0 < (右辺) でさえあれば，(左辺) < (右辺) が成り立つ．

3. いろいろな不等式の証明

A. 因数分解の利用

（左辺）−（右辺）や（左辺）^{2} −（右辺）^{2} が，正または負であると示すに，因数分解が有用になることがある．

（例）$1 < a$, $1 < b$ のとき，$ab + 1 > a + b$ を示せ．

$$\text{（左辺）}-\text{（右辺）} = ab + 1 - (a + b) = ab - a - b + 1$$
$$= a(b - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1)$$

$a - 1 > 0$, $b - 1 > 0$ であるから $(a - 1)(b - 1) > 0$ になる．よって，（左辺）>（右辺）が示された．

以下の性質によって，因数分解が有効になっている．

因数分解の利用と等号条件

$A \geqq 0$, $B \geqq 0$ ならば，$AB \geqq 0$ であり，等号条件は $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ または $B = 0$ である．

【練習 39：不等式の証明〜その３〜】

(1) $0 < A < B$ のとき，$A^2 < B^2$ であることを示せ．

(2) $a < b$, $c < d$ のとき，$ac + bd > ad + bc$ であることを示せ．

【解答】

(1)（右辺）−（左辺）$= (B + A)(B - A)$ である．
$0 < A$, $0 < B$ から $0 < B + A$, $A < B$ から $0 < B - A$ であるから，
$(B + A)(B - A) > 0$ である．

(2)
$$\text{（左辺）}-\text{（右辺）} = ac + bd - (ad + bc)$$
$$= ac + bd - ad - bc$$
$$= a(c - d) + b(d - c) = (a - b)(c - d)$$

$a - b < 0$, $c - d < 0$ であるから $(a - b)(c - d) > 0$ になる．よって，（左辺）>（右辺）が示された．

上の (1) から「2 つの正の値は，2 乗しても大小関係が変わらない」ことが分かる (p.23).

B. 平方完成の利用

式の正負を示すために，平方完成も有効である．

（例１） $a^2 > a-1$ が成り立つことを示せ．

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = a^2 - (a-1) &= a^2 - a + 1 \\
&= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\
&= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0
\end{aligned}
$$

←２乗した値に $\frac{3}{4}$ を足せばやはり正

よって，（左辺）>（右辺）であり，命題は示された．

（例２） $a^2 + b^2 \geqq 2a + 2b - 2$ が成り立つことを示せ．

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 \\
&= (a^2 - 2a) + (b^2 - 2b) + 2 \\
&= (a-1)^2 + (b-1)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

←aだけでまとめ，bだけでもまとめた

←aだけで平方完成し，bだけでも平方完成した

よって，（左辺）≧（右辺）である．等号は，$(a-1)^2 = (b-1)^2 = 0$ のとき，つまり $a = b = 1$ のときに成立する．

以下の性質によって，平方完成が有効になっている．

平方完成の利用と等号条件

$c > 0$ のとき，$A^2 + c > 0$ である．

$A^2 + B^2 \geqq 0$ であり，等号条件は $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$ かつ $B = 0$ である．

【練習 40：不等式の証明～その４～】

次の不等式を示せ．また，(2) は等号条件も答えなさい．

(1) $a^2 > -a - 1$　　(2) $a^2 + ab + b^2 \geqq 0$　　(3) $a^2 + b^2 > a + b - 1$

【解答】

(1) （左辺）－（右辺）$= a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

よって，（左辺）>（右辺）となり，示された．

(2) （左辺）$= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geqq 0$

$a + \frac{b}{2} = 0$ かつ $b = 0$ のとき等号を満たし，等号条件は，$a = b = 0$．

(3)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= a^2 - a + b^2 - b + 1 \\
&= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\
&= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0
\end{aligned}
$$

よって，（左辺）>（右辺）となり，示された．

【練習 41：不等式の証明～その５～】

$a > b$ ならば $a^3 > b^3$ であることを示せ.

【解答】 (左辺) − (右辺) = $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ について，$a > b$ より $a - b > 0$ である.

また, $a^2+ab+b^2 = \left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}b^2 \geqq 0$ である．等号条件は, $a = b = 0$ のときであるが, $a > b$ から等号条件を満たすことはない．よって $a^2+ab+b^2 > 0$ である.

以上より $(a-b)(a^2+ab+b^2) > 0$ となり，(左辺) > (右辺) は示された.

◂ $a + \dfrac{b}{2} = 0$, ∼$b = 0$ を連立すると，$a = b = 0$ になる.

【発展 42：不等式の証明～その６～】

$x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + yz + zx$ を示せ.

【解答】

$$
\begin{aligned}
&(\text{左辺}) - (\text{右辺})\\
=\ & x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\\
=\ & \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^2 - yz + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^2 - zx + \frac{1}{2}x^2\\
=\ & \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) + \frac{1}{2}(y^2 - 2yz + z^2) + \frac{1}{2}(z^2 - 2zx + x^2)\\
=\ & \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

等号成立は $x-y = y-z = z-x = 0$ のとき，つまり，$x = y = z$ のとき. ■

C. 発展 三角不等式

どんな実数 a, b に対しても，$|a+b| \leqq |a| + |b|$ が成り立つ．これを三角不等式と言う.

【発展 43：三角不等式】

$|a+b| \leqq |a| + |b|$ を示せ.

【解答】 両辺が正であるから，$(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 \geqq 0$ を示せばよい.

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - |a+b|^2\\
&= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a+b)^2\\
&= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = 2(|ab| - ab)
\end{aligned}
$$

ab はどんな値でも $ab \leqq |ab|$ になるから，$|ab| - ab \geqq 0$ が示された．等号は，$|ab| = ab$ のとき，つまり $ab \geqq 0$ のときに成り立つ.

4.　相加・相乗平均の定理

A.　相加平均とは，相乗平均とは

$a.\ b$ の相加平均は $\dfrac{a+b}{2}$ で計算できる．つまり，これまで「平均」と呼んできた値に等しい．

$a.\ b$ の相乗平均は $\sqrt{ab}$ で定義される．$\sqrt{ab}$ を 2 回掛ければ，a, b の掛け算に一致する．

【例題 44】　次の 2 数の相加平均，相乗平均をそれぞれ求めなさい．ただし，$a \neq 0$ とする．

1. 8, 18　　2. 3, 5　　3. a, $\dfrac{1}{a}$

【解答】

1. 相加平均は $\dfrac{8+18}{2} = \mathbf{13}$，相乗平均は $\sqrt{8 \cdot 18} = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = \mathbf{12}$
2. 相加平均は $\dfrac{3+5}{2} = \mathbf{4}$，相乗平均は $\sqrt{3 \cdot 5} = \boldsymbol{\sqrt{15}}$
3. 相加平均は $\dfrac{a+\frac{1}{a}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{2a}}$，相乗平均は $\sqrt{a \cdot \dfrac{1}{a}} = \mathbf{1}$

◀ 相加平均は $\dfrac{a^2+1}{2a}$ でもよい．

B.　相加平均と相乗平均の大小

負でないどんな 2 数も，相加平均は相乗平均より小さくない．詳しくは，以下が成り立つ．

相加・相乗平均の定理

$0 \leqq a$, $0 \leqq b$ のとき，2 数の相加平均 $\dfrac{a+b}{2}$ は相乗平均 $\sqrt{ab}$ 以上であり

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

が必ず成り立つ．また，等号が成り立つ必要十分条件は $a = b$ である．

（証明）$0 \leqq a$, $0 \leqq b$ であるから

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2}{2} - \sqrt{a}\sqrt{b} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geqq 0$$

等号は $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$ のときのみ成り立つ．

【例題 45】　a, b が以下の値のとき，相加・相乗平均の定理 $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ からどのような不等式の成立が示されるか．

1. $a = 5$, $b = 3$　　2. $a = x^2$, $b = 9$　　3. $a = 2x$, $b = \dfrac{2}{x}$

【解答】

1. $\dfrac{5+3}{2} \geqq \sqrt{5 \cdot 3} \Leftrightarrow \mathbf{4 \geqq \sqrt{15}}$
2. $\dfrac{x^2+9}{2} \geqq \sqrt{x^2 \cdot 9} \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 + 9 \geqq 6x}$
3. $\dfrac{2x+\frac{2}{x}}{2} \geqq \sqrt{2x \cdot \dfrac{2}{x}} \Leftrightarrow \boldsymbol{x + \dfrac{1}{x} \geqq 2}$

C. 相加・相乗平均の定理を用いた最小値の計算

相加・相乗平均の定理の両辺を 2 倍して，以下の不等式が成り立つ.

相加・相乗平均の定理～変形版

$0 \leqq a,\ 0 \leqq b$ のとき，次の不等式が成り立つ.

$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$　（等号条件は $a = b$）

分数式を含む関数の最小値を求める方法として，この相加・相乗平均の定理は重宝される.

（例）$a > 0$ のとき，$4a + \dfrac{1}{a}$ の最小値を求めてみよう.

$4a > 0$ と $\dfrac{1}{a} > 0$ であるから，相加・相乗平均の定理によって

$$4a + \frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{4\cancel{a} \cdot \frac{1}{\cancel{a}}} = 4$$

である．等号は $4a = \dfrac{1}{a}$ のとき成り立つ．これを解くと $4a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{4}$ になる.

$a > 0$ なので，$a = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 4 をとると分かる.

【練習 46：相加・相乗平均の定理の利用～その１～】

$x > 0$ とする．以下の式の最小値と，そのときの x の値を求めよ.

(1) $x + \dfrac{1}{x}$　(2) $2x + \dfrac{3}{2x}$　(3) $\dfrac{x^2 + 2}{x}$　(4) $(2 + x)\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$

【解答】

(1) $x > 0,\ \dfrac{1}{x} > 0$ より，相加・相乗平均の定理から

$$x + \frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

等号条件は $x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1$ であり，$x > 0$ から $x = 1$，つまり，$\boldsymbol{x = 1}$ **のとき**，**最小値 2** をとる.

(2) $2x > 0,\ \dfrac{3}{2x} > 0$ より，相加・相乗平均の定理から

$$2x + \frac{3}{2x} \geqq 2\sqrt{2x \cdot \frac{3}{2x}} = 2\sqrt{3}$$

等号条件は $2x = \dfrac{3}{2x} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{3}{4}$ であり，$x > 0$ から $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，つまり，$\boldsymbol{x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ **のとき**，**最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$** をとる.

(3) （与式）$= \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{2}{x} = x + \dfrac{2}{x}$ であり，$x > 0,\ \dfrac{2}{x} > 0$ より，相加・相乗平均の定理から

$$（与式）= x + \frac{2}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$$

等号条件は $x = \dfrac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2$ であり，$x > 0$ から $x = \sqrt{2}$，つまり，**$x = \sqrt{2}$ のとき，最小値 $2\sqrt{2}$** をとる．

(4) 与式を展開すると

$$（与式）= 2 + \frac{4}{x} + x + 2 = x + \frac{4}{x} + 4$$

となる．$x > 0$, $\dfrac{4}{x} > 0$ より，相加・相乗平均の定理から

$$（与式）= x + \frac{4}{x} + 4 \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} + 4 = 4 + 4 = 8$$

等号条件は $x = \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4$ であり，$x > 0$ から $x = 2$，つまり，**$x = 2$ のとき，最小値 8** をとる．

◀ $x + \dfrac{4}{x}$ の最小値に 4 を足せば，与式の最小値が求められることが分かる．

◀ $x + \dfrac{4}{x} \geqq 4$ の両辺に +4 を付け加えた形になっている．

【発展 47：相加・相乗平均の定理の利用～その２～】

$x > -1$ のとき，$x + \dfrac{1}{x+1}$ の最小値を求めよ．

【解答】 $x + 1 > 0$, $\dfrac{1}{x+1} > 0$ であるから，相加・相乗平均の定理より

$$（与式）= x + 1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geqq 2\sqrt{\cancel{(x+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{x+1}}} - 1 = 1$$

等号条件は $x + 1 = \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1$ であり，$0 < x + 1$ から $x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$，つまり，**$x = 0$ のとき最小値 1** をとる．

◀ この一文で解答を始めるには，直後の式変形に気づく必要がある．

1. 発展 「割り算の一意性」の証明

多項式 $A(x)$ の次数を，$\deg A$ で表わす．たとえば，$f(x) = x^3 + 2x^2$ ならば $\deg f = 3$ となる．
この記号を用いて，以下の事実を証明する．ただし，数学 B で学ぶ『数学的帰納法』を必要とする[*5]．

割り算の一意性

余りの式の次数が割る式の次数より小さいとき，商と余りが 1 つに定まる．
つまり，割られる式 $A(x)$，割る式 $B(x)$ に対し，次を満たす商 $Q(x)$，余り $R(x)$ は 1 つに定まる．

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \qquad \text{（ただし，} \deg R < \deg B\text{）}$$

（余りの存在証明）次の事実を数学的帰納法で示せばよい．

「どんな多項式 $A(x)$ に対しても，$A(x) - R(x)$ が $B(x)$ で割り切れ，
$\deg R < \deg B$ であるような $R(x)$ が存在する」 ……………………… ①

i) $\deg A < \deg B$ のとき，$R(x) = A(x)$ とおけば，$A(x) - R(x) = 0 = B(x) \cdot 0$ から条件①を満たす．

ii) n を $\deg B - 1$ 以上の整数とする．$\deg A = n$ のときに条件①を満たすと仮定すれば，$\deg A = n + 1$ のときに条件①を満たすことを示す．

つまり，「$\deg A = n$ であるどんな $A(x)$ に対しても $\deg R < \deg B$ である $R(x)$ が存在し，$A(x) - R(x)$ は $B(x)$ で割り切れる」と仮定する．

$\deg A = n + 1$ のとき，$A(x) = ax^{n+1} +$（n 次以下の多項式），$B(x) = bx^m +$（$m - 1$ 次以下の多項式）とおく．ここで $F(x) = A(x) - \dfrac{a}{b}x^{n+1-m}B(x)$ ……… ② とおくと

$$\begin{aligned} F(x) &= ax^{n+1} + (n\text{ 次以下の多項式}) - \frac{a}{b}x^{n+1-m}\left(bx^m + (m-1\text{ 次以下の多項式})\right) \\ &= ax^{n+1} + (n\text{ 次以下の多項式}) - ax^{n+1} - (n\text{ 次以下の多項式}) \\ &= (n\text{ 次以下の多項式}) \end{aligned}$$

仮定より，$F(x)$ に対して $\deg r < \deg Q$ となる $r(x)$ が存在し，$F(x) - r(x) = B(x)q(x)$ と書ける．これに②を代入して

$$A(x) - \frac{a}{b}x^{n+1-m}B(x) - r(x) = B(x)q(x)$$

$$\Leftrightarrow\ A(x) - r(x) = B(x)\left\{q(x) + \frac{a}{b}x^{n+1-m}\right\}$$

となり，$A(x)$ に対しては $r(x)$ が，条件を満たすと分かる．$\deg A = n + 1$ を満たすどんな $A(x)$ でも正しいから，$\deg A = n + 1$ のときも条件を満たす．

以上，i)，ii) より，数学的帰納法によって，すべての $A(x)$ について余り $R(x)$ が存在すると分かる．

余りが存在することは，実際の割り算の手順を見れば明らかではある．しかし，ありとあらゆる多項式の割り算で，余りが存在することを「証明」するには，上のような証明を必要とする．

[*5] 実際のところ，高校数学の道具だけを使って証明しているが，証明の考え方そのものは，高校数学の範囲を超えている．

（余りの一意性の証明）$A(x) \div B(x)$ の割り算の結果が

$$A(x) = B(x)Q_1(x) + R_1(x), \qquad A(x) = B(x)Q_2(x) + R_2(x)$$

の 2 通りあったとする．このとき，この 2 式の左辺同士，右辺どうしを引いて

$$0 = B(x)\{Q_1(x) - Q_2(x)\} + R_1(x) - R_2(x) \iff B(x)\{Q_1(x) - Q_2(x)\} = R_2(x) - R_1(x)$$

すると，$\deg R_1 < \deg B$，$\deg R_2 < \deg B$ より，右辺の次数は $\deg B$ より小さい．一方，$Q_1(x) - Q_2(x) \neq 0$ ならば，左辺の次数は $\deg B$ 以上になってしまうので，$Q_1(x) - Q_2(x) = 0$ でないといけない．
つまり，$0 = R_2(x) - R_1(x)$ となって $R_1(x) = R_2(x)$ となる．よって，2 通りの答えは一致する． ■

2. 発展 「係数比較法」の必要性について

数学 B で学ぶ『数学的帰納法』，数学 III で学ぶ『関数の連続性』を用い，以下の事実を示す[*6]．

「係数比較法」の必要性

2 つの多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，　$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$
があったとき，$f(x) = g(x)$ が恒等式となる必要十分条件は
「すべての係数が等しくなること」（$a_n = b_n$，$a_{n-1} = b_{n-1}$，$\cdots$，$a_1 = b_1$，$a_0 = b_0$）である．

（証明）「すべての係数が等しい」ならば「$f(x) = g(x)$ が恒等式」は明らか．この命題の逆を示すには，$f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$ が恒等式になるとき，「$a_n - b_n = 0$，$a_{n-1} - b_{n-1} = 0$，$\cdots$，$a_1 - b_1 = 0$，$a_0 - b_0 = 0$」を示せばよいから，次の命題

「$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ が恒等式ならば，$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ である」 ……………………③

を示せばよいと分かる．これを数学的帰納法で示す．

i) $\deg f = 1$ のとき，$a_1 x + a_0 = 0$ が恒等式なので
$x = 0$ を代入して $a_0 = 0$，$x = 1$ を代入して $a_1 + a_0 = 0$ から $a_1 = 0$ となり，示された．

ii) $\deg f = k$ のとき，どんな多項式も正しいとする．$\deg f = k + 1$ である多項式について

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \cdots\cdots④$$

が恒等式であるとする．④は $x = 0$ で成り立つので，$f(0) = a_0 = 0$ である．ここで，$c \neq 0$ のとき

$$f(c) = 0 \iff a_{k+1}c^{k+1} + a_k c^k + \cdots + a_1 c = 0 \iff a_{k+1}c^k + a_k c^{k-1} + \cdots + a_1 = 0$$

であるから，$g(x) = a_{k+1}x^k + a_k x^{k-1} + \cdots + a_1 = 0$ は 0 でないすべての c について $g(c) = 0$ になる．
ここで，関数 $g(x)$ は多項式であるから連続関数であり，$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$ を満たす．$c \neq 0$ ならば $g(c) = 0$ であるから，$g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ となる．つまり，$g(x) = 0$ はすべての x で成り立つので恒等式になる．よって，仮定より，$g(x)$ の係数 a_{k+1}，a_k，$\cdots$，a_1 はすべて 0 である．
以上より，$a_{k+1} = a_k = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ であるから，$\deg f = k + 1$ のときも③は示された．

i)，ii) によって，示すべき命題③は示された． ■

[*6] 『割り算の一意性』と同じく，高校数学の道具だけを用いた証明だが，証明の考え方そのものは，高校数学の範囲を超えている．

3. 不等式の性質

数学 I で学んだように (p.53)，不等号は以下の性質をもっていた.

不等式の性質（数学 I）

i) すべての実数 c で $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$, $a - c < b - c$

ii) $0 < c$ のとき $a < b \Leftrightarrow ac < bc$, $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

iii) $c < 0$ のとき $a < b \Leftrightarrow ac > bc$, $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$ ←逆符号！

このうち，ii) の性質を用いると，以下の事実を示すことができる.

【発展 48：不等式の性質 ii) の証明】

$0 < a < c$, $0 < b < d$ のとき，$ab < cd$ を示そう.

【解答】 $a < c$ において，$0 < b$ より $ab < bc$ である.
また，$b < d$ において，$0 < c$ より $bc < cd$ である.
この 2 式を合わせて，$ab < bc < cd$ であるから，$ab < cd$ が示された. ■

【練習：多項式の割り算～その２～】(p.16)

(1) $x^9+x^7+x^5+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$ とおく．
この両辺に $x=1$ を代入して，$4=a+b$
この両辺に $x=-1$ を代入して，$-2=-a+b$ となる．
2 式を連立して $b=1,\ a=3$ とわかるので，求める**余りは $\boldsymbol{3x+1}$**．

(2) 剰余の定理より $F(3)=4,\ F(-2)=-6$ である．$F(x)=(x-3)(x+2)Q(x)+ax+b$ とおく．
この両辺に $x=3$ を代入して $4=3a+b$
この両辺に $x=-2$ を代入して $-6=-2a+b$
2 式を連立して $a=2,\ b=-2$ となるので，求める**余りは $\boldsymbol{2x-2}$**．

◀剰余の定理を用いずに

$$F(x)=(x-3)Q_1(x)+4$$
$$F(x)=(x+2)Q_2(x)-6$$
$$F(x)=(x-3)(x+2)Q(x)+ax+b$$

の 3 式から，$a,\ b$ を求めると考えてもよい．

【練習：式の除法と式の値】(p.16)

(1) $x=3-\sqrt{2}$ を変形すると

$$x-3=-\sqrt{2}\iff(x-3)^2=2$$
$$\iff \boldsymbol{x^2-6x+7=0}$$

(2) $F(x)\div(x^2-6x+7)$ の割り算をすると，右欄外のようになるので

$$F(x)=(x^2-6x+7)(x+1)-3x-2$$

となる．この両辺に $x=3-\sqrt{2}$ を代入して，

$$F\left(3-\sqrt{2}\right)=0-3\left(3-\sqrt{2}\right)-2=\boldsymbol{-11+3\sqrt{2}}$$

◀
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & & & 1 & 1 \\
1\ -6\ 7 & 1 & -5 & -2 & 5 \\
 & 1 & -6 & 7 & \\ \hline
 & & 1 & -9 & 5 \\
 & & 1 & -6 & 7 \\ \hline
 & & & -3 & -2
\end{array}$$

【発展：多項式の割り算～その３～】(p.16)

① $F(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ を $(x-1)^2$ で割った商が $\boxed{\text{ア}}$，余りが $\boxed{\text{イ}}$ になる．$(x-1)^2(x+2)Q(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるので，ax^2+bx+c を $(x-1)^2$ で割ればよい．すると右欄外のようになるので $ax^2+bx+c=a(x-1)^2+(b+2a)x+(c-a)$ になる．よって

$$\begin{aligned}F(x)&=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2+(b+2a)x+(c-a)\\&=(x-1)^2\left\{\underline{\boldsymbol{(x+2)Q(x)+a}}_{(\text{ア})}\right\}+\underline{\boldsymbol{(b+2a)x+(c-a)}}_{(\text{イ})}\end{aligned}$$

◀
$$\begin{array}{r|rrr}
 & & & a \\
1\ -2\ 1 & a & b & c \\
 & a & -2a & a \\ \hline
 & & b+2a & c-a
\end{array}$$

② $F(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $-3x+2$ であるから，恒等式 $(b+2a)x+(c-a)=-3x+2$ が成り立つ．x の係数より $b+2a=-3$ ……… ①，定数項より $c-a=2$ ……… ②．また，$x+2$ で割った余りが -1 であるから，$F(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ の両辺に -2 を代入して

$$-1=4a-2b+c \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つ．①から $b=-3-2a$，②から $c=2+a$ であり，これらを③に代入すると

$$4a-2(-3-2a)+(2+a)=-1\iff 9a=-9$$

よって $a=-1,\ b=-1,\ c=1$ と分かるから，求める**余りは $\boldsymbol{-x^2-x+1}$** である．

【発展：２数の大小関係】(p.22)

①　**真**

実際，$ab < 0$, $0 < cd$ である.

②　**偽，反例は $(a, b, c, d) = (-4, -4, 3, 3)$**

③　**真**

④　**真**

$0 < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$, $0 < b < d$ から，『不等式の性質 ii)』を用いた.

◀ 2 つの正の数は，逆数を取ると大小関係が逆になる