13th-note 数学II

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 II で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π，ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ，ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω

Ver1.521(2012-7-27)

目次

第1章　恒等式と式の証明

この章では，式の割り算を学んだ後，「そもそも式が等しいとはどういうことか」について考える．
そのうえで，２つの式が相等，大小関係を証明する方法について学ぶ．

1.1　式の割り算

$31 \div 6$ という割り算には「5 余り 1」「$5.1\dot{6}(= 5.16666\cdots)$」「$\dfrac{31}{6}$」という 3 つの答え方がある．一方，式の割り算の場合は「余り」「分数式」の 2 通りの答え方がある．

1.　式の除法

A.　2 式の割り算 ～ 筆算の書き方・その 1

式の割り算は，筆算を用いて計算できる．たとえば，$(2x^3 + 5x^2 + 6x + 3) \div (x + 2)$ という割り算は，次のようになる．余りが負の数になっていることに注意しよう．

$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ x+2 \enclose{longdiv}{2x^3 +5x^2 +6x +3} \end{array}$$

２x³ ÷ x を商にたてる

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrr} & 2x^2 & & & \\ \hline x+2\,) & 2x^3 & +5x^2 & +6x & +3 \\ & 2x^3 & +4x^2 & & \\ \hline & & x^2 & +6x & \end{array}$$

←２x²（x＋２）
←上から下を引いて＋６xを下ろした

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrr} & 2x^2 & +x & & \\ \hline x+2\,) & 2x^3 & +5x^2 & +6x & +3 \\ & 2x^3 & +4x^2 & & \\ \hline & & x^2 & +6x & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrr} & 2x^2 & +x & & \\ \hline x+2\,) & 2x^3 & +5x^2 & +6x & +3 \\ & 2x^3 & +4x^2 & & \\ \hline & & x^2 & +6x & \\ & & x^2 & +2x & \\ \hline & & & 4x & +3 \end{array}$$

x（x＋２）→
引いて＋３を下ろす→

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrr} & 2x^2 & +x & +4 & \\ \hline x+2\,) & 2x^3 & +5x^2 & +6x & +3 \\ & 2x^3 & +4x^2 & & \\ \hline & & x^2 & +6x & \\ & & x^2 & +2x & \\ \hline & & & 4x & +3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrr} & 2x^2 & +x & +4 & \\ \hline x+2\,) & 2x^3 & +5x^2 & +6x & +3 \\ & 2x^3 & +4x^2 & & \\ \hline & & x^2 & +6x & \\ & & x^2 & +2x & \\ \hline & & & 4x & +3 \\ & & & 4x & +8 \\ \hline & & & & -5 \end{array}$$

商 $2x^2 + x + 4$，余り -5

$(2x^3+3x^2-3x+4)$
$\div(x^2+2x+4)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x & -1 & & \\ \hline
x^2+2x+4 & 2x^3 & +3x^2 & -3x & +4 \\
 & 2x^3 & +4x^2 & +8x & \\ \cline{2-5}
 & & -x^2 & -11x & +4 \\
 & & -x^2 & -2x & -4 \\ \cline{3-5}
 & & & -9x & +8
\end{array}
$$

商 $2x-1$，余り $-9x+8$

左のように，商に負の数が表われる場合もあるので，注意しよう．

また，ある次数の項がないとき，たとえば $(x^3+x+2)\div(x-1)$ の筆算は，x^2 の係数の列を空けて右のようにする．

右の場合，$(x^3\ \boldsymbol{+0x^2}+x+2)\div(x-1)$ を計算していると考えればよい．

$(x^3+x+2)\div(x-1)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +x & +2 & \\ \hline
x-1 & x^3 & & +x & +2 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & +x & \\
 & & x^2 & -x & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & +2 \\
 & & & 2x & -2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 4
\end{array}
$$

商 x^2+x+2，余り 4

【例題 1】 次の割り算を計算し，商と余りを答えなさい．

1. $(x^3+2x^2-2x-10)\div(x-2)$　　2. $(2x^3+x+5)\div(x+1)$　　3. $(x^3+x^2y+y^3)\div(x-y)$

B. $A=BQ+R$

たとえば，「$(2x^3+5x^2+6x+3)\div(x+2)=2x^2+x+4$ 余り -5」という結果は，次のように表せる．

$2x^3+5x^2+6x+3=(x+2)(2x^2+x+4)-5$

このように，「$A\div B=Q$ 余り R」の結果は「$A=BQ+R$」の形で表わすことができる．

【練習 2：多項式の割り算の筆算〜その１〜】

次の割り算を行い，$A=BQ+R$ の形で答えよ．

(1) $(4x^3+2x^2+3)\div(x+2)$　　(2) $(3x^3-2x^2+x+2)\div(x^2-x-2)$　　(3) $(x^3+3xy^2+2y^3)\div(x+2y)$

C.　割り算の結果が 1 つに定まるには？

「$13 \div 6 = 2 \cdots 1$」は正しいが，「$13 \div 6 = 1 \cdots 7$」は間違っている．このように，余りのある割り算は，余りが割る数より値が小さいために，商と余りは 1 つに定まる．

式の割り算の場合には，「式の次数」が小さくなるようにする．

割り算の一意性

余りの式の次数が割る式の次数より小さいとき，商と余りが 1 つに定まる．
つまり，割られる式 $A(x)$，割る式 $B(x)$ に対し，次を満たす商 $Q(x)$，余り $R(x)$ は 1 つに定まる．

$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$　　　（ただし，$R(x)$ の次数は $B(x)$ の次数より小さい）

（証明）は p.30 を参照のこと．

【暗記 3：余りの次数】
5 次式の $A(x)$ を，2 次式の $B(x)$ で割るとき，商 $Q(x)$ は何次式，余り $R(x)$ は何次式になるだろうか．

D.　$A = BQ + R$ の利用

もし，多項式 $F(x)$ を $(2x+1)$ で割った商が $x^2 - 2x + 2$，余りが -4 になったならば

$$F(x) = (2x+1)(x^2 - 2x + 2) - 4$$

と表せる．この右辺を計算して $F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ とわかる．

また，多項式 $x^3 - 4x^2 + 6x - 15$ を $B(x)$ で割って商が $x - 3$，余りが -6 になるならば，次のように書ける．

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 15 = B(x)(x-3) - 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x^2 + 6x - 9 = B(x)(x-3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -x & +3 & \\ \hline
x-3 & x^3 & -4x^2 & +6x & -9 \\
 & x^3 & -3x^2 & & \\ \hline
 & & -x^2 & +6x & \\
 & & -x^2 & +3x & \\ \hline
 & & & 3x & -9 \\
 & & & 3x & -9 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

つまり，$B(x) = (x^3 - 4x^2 + 6x - 9) \div (x - 3) = x^2 - x + 3$ と分かる．

【例題 4】　それぞれの場合について多項式を求めなさい．

1. 多項式 $A(x)$ を $2x + 3$ で割った商が $x^2 + x - 3$，余りが -5 になる場合の $A(x)$
2. $x^3 - x - 3$ を多項式 $B(x)$ で割って，商が $x + 1$，余りが $2x - 1$ になる場合の $B(x)$

E. 筆算の書き方・その２ ～係数だけを書く～

右のように，式の割り算の筆算は，係数だけを記しても計算できる．

商の次数に気をつけて答えよう．

$(2x^3+3x^2-3x+4)\div(x^2+2x+4)$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2 & -1 & & \\ \cline{3-6}
1\ 2\ 4 & \big) & 2 & +3 & -3 & +4 \\
 & & 2 & 4 & 8 & \\ \cline{3-6}
 & & & -1 & -11 & 4 \\
 & & & -1 & -2 & -4 \\ \cline{4-6}
 & & & & -9 & 8
\end{array}
$$

商 $2x-1$，余り $-9x+8$

$2x^3+3x^2-3x+4$
$=(x^2+2x+4)(2x-1)-9x+8$

$(x^3+x+2)\div(x-1)$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 1 & 1 & 2 & \\ \cline{3-6}
1\ \ -1 & \big) & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 & & 1 & -1 & & \\ \cline{3-5}
 & & & 1 & 1 & \\
 & & & 1 & -1 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 2 & 2 \\
 & & & & 2 & -2 \\ \cline{4-6}
 & & & & & 4
\end{array}
$$

商 x^2+x+2，余り 4

$x^3+x+2=(x-1)(x^2+x+2)+4$

【例題 5】 次の割り算を，上の方法で計算し，結果を $A=BQ+R$ の形で答えなさい．

1. $(x^3+2x^2-2x-10)\div(x-2)$　　2. $(2x^3+x+5)\div(x+1)$　　3. $(x^3+x^2y+y^3)\div(x-y)$

【練習 6：$A=BQ+R$ の利用】

(1) $A(x)$ を x^2-6x-1 で割ると，商が $x+2$，余りが -4 である．$A(x)$ を求めなさい．

(2) $2x^3-4x^2+1$ を $B(x)$ で割ると，商が $x-1$，余りが $x-2$ になる．$B(x)$ を求めなさい．

(3) $6x^4+3x^3+x^2-1$ を $C(x)$ で割ると，商は $3x^2+2$，余りは $-2x+1$ になる．$C(x)$ を求めなさい．

1 次式で割る多項式の割り算の場合には，『組立除法 (p.53)』を用いると，計算がより簡単になる において，

【練習 7：多項式の割り算の筆算〜その２〜】

$A = 2x^3 + 2x^2 + 1$, $B = 2x + 1$ のとき，$A \div B$ を計算し，結果を $A = BQ + R$ の形で表わせ.

F. 式が「割り切れる」

多項式の割り算 $F(x) \div G(x)$ の余りが 0 になるとき，$F(x)$ は $G(x)$ で**割り切れる** (devisible) という.

【練習 8：割り切れる】

$A(x) = x^3 + 2ax^2 + b$, $B(x) = x^2 + x + 2$ のとき，$A(x) \div B(x)$ の商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とする.

(1) $Q(x)$, $R(x)$ を a, b を含む式で答えよ.　　(2) $A(x) \div B(x)$ が割り切れるとき，a, b を答えよ.

係数だけ書く筆算のやり方は，係数に文字がある式の割り算がやりやすく，ミスもしにくくなる.

2. 分数式

A. 分数式とは

$(2x^3 + 5x^2 + 6x + 3) \div (x + 2)$ の結果は，$\dfrac{2x^3 + 5x^2 + 6x + 3}{x + 2}$ と表わしてもよい．また，$1 \div (x + 2) = \dfrac{1}{x + 2}$ と表すこともできる.

このように，分母に多項式を含むような式を，**分数式**という．たとえば，次のような式は分数式である.

$\dfrac{x - 2}{x + 3}$, $\dfrac{a + 3}{a^2 + a}$, $\dfrac{a}{bx}$

B. 分数式における約分・通分

また，分母と分子はできるだけ因数分解をする．約分できる場合も約分する．

$$(x^2-6x+5)\div(x^2+2x-3)=\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x-3}=\frac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{(x+3)\cancel{(x-1)}}=\frac{x-5}{x+3}$$

分数式がこれ以上できないとき，**既約**であるという．

【例題 9】 以下の割り算・分数式を約分して，既約な分数式か，多項式にしなさい．

1. $\dfrac{a^2b^3}{a^3b}$　2. $6a^2b^2\div 3a^3b^3$　3. $\dfrac{3x-6}{x^2-5x+6}$　4. $(ka^2-kb^2)\div(ka-kb)$

C. 分数式の掛け算・割り算

分数式の掛け算・割り算は，数と同じように出来る．分母と分子に公約数（共通因子）があれば約分する．

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}\times\frac{x^2+5x}{x^2+x-6}=\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+5)}}\times\frac{x\cancel{(x+5)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}$$ ←分母も分子も因数分解した

$$=\frac{x}{x+3}$$ ←約分した

$$\frac{x^2-x-2}{x^2+2x-3}\div\frac{x^2-1}{x^2+5x+6}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+3)}(x-1)}\times\frac{\cancel{(x+3)}(x+2)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}$$ ←割り算を掛け算に直し，因数分解した

$$=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2}$$ ←答えは展開しない

【例題 10】

1. $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-4x+3}\times\dfrac{x-1}{x+4}$　2. $\dfrac{2x+1}{x^2-9x+20}\times\dfrac{x^2-3x-4}{2x^2-5x-3}$　3. $\dfrac{x+2}{2x+2}\div\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-1}$

4. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}\div\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$　5. $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+5x+6}\div\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-6}\times\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-8}$

D.　分数式の足し算・引き算

通分を用いて，分数式どうしの足し算・引き算も計算する．

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x^2+3x+2}-\frac{x-2}{x^2+4x+3} &= \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}-\frac{x-2}{(x+1)(x+3)}\\ &= \frac{(x-1)\boldsymbol{(x+3)}}{(x+1)(x+2)\boldsymbol{(x+3)}}-\frac{(x-2)\boldsymbol{(x+2)}}{(x+1)(x+3)\boldsymbol{(x+2)}}\\ &= \frac{(x^2+2x-3)-(x^2-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\end{aligned}$$

←分子の−(　)に注意！

数の場合と同じように，通分によって分母を揃えて計算すればよい．

【例題 11】

1. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}$
2. $\dfrac{x^2-3}{x-1}+\dfrac{2x}{x-1}$
3. $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}+\dfrac{x-2}{x^2+4x+3}$
4. $\dfrac{6x-9}{x^2-x-2}-\dfrac{5}{x+1}$
5. $\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x^2+3x+2}$
6. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^3}$

E. 発展 分数式における「帯分数」

たとえば，$29 \div 7 = 4$ 余り 1 であるから，$\dfrac{29}{7} = 4\dfrac{1}{7}$ と帯分数で表わすことができる．

同じように，次のように分数式を考えることもできる．

$$\frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{x(x+1)+x}{x+1} = \frac{x(x+1)+(x+1)-1}{x+1} = x+1-\frac{1}{x+1}$$

これは，$(x^2+2x) \div (x+1) = x+1$ 余り -1 と対応しており，$\dfrac{x^2+2x}{x+1}$ を帯分数に直したと考えられる．

【練習 12：分数式の帯分数】

以下の等式が成り立つように，（　）には式または数値を，$\boxed{}$ には数値を入れなさい．

(1) $\dfrac{x+3}{x+1} = (\ \text{ア}\ ) + \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{x+1}$　　(2) $\dfrac{2x+3}{x+1} = (\ \text{ウ}\ ) + \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{x+1}$

(3) $\dfrac{x^3+2x^2+x+3}{x+1} = (\ \text{オ}\ ) + \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{x+1}$

たとえば，$\dfrac{29}{7} - \dfrac{53}{13}$ は，帯分数に直すと計算がしやすい．

(I) 仮分数のまま計算する　←計算が多い

$$\frac{29}{7} - \frac{53}{13}$$ ←分母の最小公倍数は９１

$$= \frac{377}{91} - \frac{371}{91}$$ ←分子はとても大きな数

$$= \frac{6}{91}$$

(II) 帯分数を使う　←２９÷７＝４余り１ から $\dfrac{29}{7} = 4\dfrac{1}{7}$ など

$$\frac{29}{7} - \frac{53}{13}$$

$$= 4\frac{1}{7} - 4\frac{1}{13}$$

$$= \frac{13}{91} - \frac{7}{91} = \frac{6}{91}$$ ←通分も簡単

同じようにして，$\dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{x+3}{x+2}$ は次のように計算するとよい．

(I) そのまま計算する　←計算が多い

$$\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{(x+1)(x+2)} - \frac{(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+4x+4-(x^2+4x+3)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

(II) 帯分数を使う

$$\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2}$$

$$= \frac{(x+1)+1}{x+1} - \frac{(x+2)+1}{x+2}$$

$$= 1 + \frac{1}{x+1} - 1 - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

【発展 13：帯分数を利用した計算】

帯分数を利用して，次の計算をしなさい．

① $\dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{x+3}{x+2}$　　② $\dfrac{x^2+x+1}{x+1} - \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

1.2　恒等式

1.　恒等式 ～ 等しい 2 つの式

A.　式が「等しい」とは？

どんな x でも $F(x) = G(x)$ が成立するとき，$F(x)$ と $G(x)$ は等しいと定義する．詳しくは次のようになる．

恒等式～式が「等しい」

（多項式とは限らない）2 つの式 $F(x)$, $G(x)$ があったとする．$F(x)$, $G(x)$ の定義域が等しく

定義域内のすべての x に対して　　$F(x) = G(x)$　　……………………①

が成り立つとき，$F(x)$ と $G(x)$ は等しいと定義し，①を（x についての）**恒等式**（こうとうしき） (identity) という．

恒等式の例：$(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$,　　$\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

恒等式でない例：$x^2 - x + 2 = x + 5$　　←x＝0など，ほとんどのxで等しくない

【例題 14】　次の等式について，恒等式かどうか答えなさい．

1. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$　　2. $x^2 - 2x + 1 = 0$　　3. $x^2 + y^2 = x + y$

B.　「数値代入法」と「係数比較法」

2 つの多項式 $f(x) = x^2 + ax - 4$, $g(x) = x^2 + 2x + b$ が「等しい」ための a, b の条件を求めよう．

これには，2 つの方法がある．

i. 数値代入法

$f(0) = g(0)$ が等しいから $-4 = b$

$f(1) = g(1)$ が等しいから $a - 3 = -1$.

よって，$a = 2$, $b = -4$ が必要と分かる．

このとき[*1]，$f(x) = x^2 + 2x - 4$, $g(x) = x^2 + 2x - 4$

となるから $f(x) = g(x)$ は正しい．

ii. 係数比較法

$f(x) = x^2 + ax - 4 = x^2 + 2x + b = g(x)$ において

x の係数を見比べて $a = 2$.

定数項を見比べて $-4 = b$.

よって，$a = 2$, $b = -4$ と求められる．

後に見るように，上の 2 つのやり方は，どちらも身につけておくのがよい．

【例題 15】　$f(x) = x^2 + ax + 2$，$g(x) = (x-1)^2 + b(x-1)$ とする．$f(x) = g(x)$ が恒等式となる条件について，以下の $\boxed{\quad\quad}$ に適当な数値・式を答えなさい．

1. 数値代入法で求めよう．$f(0) = \boxed{\text{ア}}$, $g(0) = \boxed{\text{イ}}$ から $b = \boxed{\text{ウ}}$ であり，
   $f(1) = \boxed{\text{エ}}$, $g(1) = \boxed{\text{オ}}$ から $a = \boxed{\text{カ}}$ とわかる．
   $a = \boxed{\text{カ}}$, $b = \boxed{\text{ウ}}$ のとき，$f(x) = g(x) = \boxed{\text{キ}}$ となって，確かに等しい．
2. 係数比較法で求めよう．$g(x)$ を展開して降べきの順にすると $g(x) = \boxed{\text{ク}}$ になる．
   $f(x)$, $g(x)$ の x の係数を比べて式 $\boxed{\text{ケ}}$ を得て，定数項を比べて式 $\boxed{\text{コ}}$ を得る．
   この 2 式を連立して，$a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ を得る．

*1　「このとき」以下の一文は，次ページで見るように，「数値代入法」を用いた場合は必ず書かなければならない．

C.　「数値代入法」の十分性

「数値代入法」を用いて，前ページのように $f(0) = g(0)$，$f(1) = g(1)$ から a, b の値を求めるだけでは，0, 1 以外の値で $f(x) = g(x)$ を満たすかどうかわからない．

そのため，十分性を確かめるため実際に $f(x) = g(x)$ を満たしているかどうか確認しなければならない[*2]．

【例題 16】　次の等式が恒等式となるように，数値代入法を用いて a, b, c, d の値を定めなさい．

1. $x^2 + x + 1 = (x - 1)^2 + a(x - 1) + b$
2. $x^3 + ax^2 + x + 1 = (x + 1)^3 + b(x + 1)^2 + c(x + 1)$
3. $(x + 1)^3 + ax^2 + b(x - 1) = x^3 + 4x^2 - cx - 5$

[*2] 多項式の場合は「このとき $f(x) = g(x)$ を確かに満たしている」の一言があればよい．

D. 「係数比較法」の必要性

「係数比較法」から得られる条件は，恒等式であるための十分条件である．

そして，多項式の場合は，これが恒等式であるための必要条件でもある．

「係数比較法」の必要性

2 つの多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,　$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$
があったとき，$f(x) = g(x)$ が恒等式となる必要十分条件は
「すべての係数が等しくなること」（$a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, $\cdots$, $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$）である．

この命題の証明は難しい．詳しくは p.31 を参照のこと．

「多項式」以外では，同様の命題が成り立たないことがある．

【例題 17】 次の等式が恒等式となるように，係数比較法を用いて a, b, c, d の値を定めなさい．

1. $x^3 - x^2 + ax + b = (x^2 - 2x - 5)(x + c)$
2. $5x^3 + ax^2 + bx + c = (x + 3)(dx^2 - 3x - 3)$

【練習 18：恒等式〜その３〜】

$\dfrac{p}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{q}{x^2-1}$ が恒等式となるように p, q の値を定めなさい．

「数値代入法」と「係数比較法」は問題に応じて使い分けられるとよい.

【練習 19：恒等式～その３～】

次の等式が恒等式となるように，a, b, c, d の値を定めなさい.

(1) $a(x+1)^3 + 2(x+1)^2 = b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x-1)$

(2) $(x+1)(x^2+ax+2) = (x+b)(x^2+cx+1)$

(3) $a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-4) = 1$

(4) $\dfrac{1}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x-1}$

【暗記 20：k の値に関わらず直線が通る点】

直線 $kx-2x+y-2k=0$ が，k の値に関わらず通る点 (x, y) を求めよ．

上の例題について，『一定の条件を満たす直線の集まり（第 3 章 p.89）』において，より詳しく学ぶ．

2.　多項式の割り算と恒等式

A.　剰余の定理

多項式を 1 次式で割った場合を考えて，次の**剰余の定理**（polynomial remainder theorem）を得る．

剰余の定理

$F(x)$ を $x-a$ で割った余りは $F(a)$ になる．また，$F(x)$ を $ax-b$ で割った余りは $F\left(\dfrac{b}{a}\right)$ になる．

（証明）$F(x)$ を $ax-b$ で割って，商が $Q(x)$，余りは r になったとする．このとき，$F(x)=(ax-b)Q(x)+r$ という恒等式が成り立ち，$x=\dfrac{b}{a}$ のとき

$$（左辺）=F\left(\frac{b}{a}\right),\qquad （右辺）=\left(a\cdot\frac{b}{a}-b\right)Q(a)+r=0+r=r$$

となるので，$F\left(\dfrac{b}{a}\right)=r$ が分かり後半部分が示された．$a=1$ とすれば，前半部分も示された．■

【例題 21】　$F(x)=4x^4-2x^3+1$，$G(x)=x^4+ax^2+1$ とする．

1. $F(x)$ を $x-1$ で割った余りを求めよ．
2. $F(x)$ を $2x+3$ で割った余りを求めよ．
3. $G(x)$ を $x-2$ で割った余りが 5 になるとき，a の値を求めよ．

B. 数値代入法の応用 〜 割り算の余りを求める

$(x^{13}+1)\div(x^2-1)$ は筆算でも計算できるが，次のように考えることもできる．

$(x^{13}+1)\div(x^2-1)$ で割った商を $Q(x)$ とする．2 次式 x^2-1 で割った余りは 1 次式になるので

$x^{13}+1=(x^2-1)Q(x)+(ax+b)$ ……………………… ①

と表すことができる．①は x についての恒等式であるから，$x=1$ を代入して

① $\Rightarrow 1^{13}+1=\underbrace{(1^2-1)\cdot Q(1)}_{\text{0になって消える}}+(a\cdot 1+b)$ ←余りだけ残る

$\Leftrightarrow 2=a+b$ ……………………… ②

が成り立つ．また，①に $x=-1$ を代入して

① $\Rightarrow (-1)^{13}+1=\underbrace{0\cdot Q(-1)}_{\text{0になって消える}}+\{a\cdot(-1)+b\}$ ←余りだけ残る

$\Leftrightarrow 0=-a+b$ ……………………… ③

が成り立つ．②，③ を連立して $a=b=1$ を得るので，$(x^{13}+1)\div(x^2-1)$ の余りは $ax+b=x+1$ と分かる．

【例題 22】 $(x^{10}-2x^9+x-1)\div(x^2-3x+2)$ の余りを上の方法で求めよ．

【練習 23：多項式の割り算〜その１〜】

$F(x)$ を $x-2$ で割った余りが 1，$x+1$ で割った余りが -2 のとき，$F(x)$ を $(x-2)(x+1)$ で割った余りを求めなさい．

【練習 24：多項式の割り算〜その２〜】

(1) $x^9 + x^7 + x^5 + 1$ を $x^2 - 1$ で割った余りを求めよ．

(2) $F(x)$ を $x - 3$ で割った余りが 4，$x + 2$ で割った余りが -6 のとき，$F(x)$ を $(x - 3)(x + 2)$ で割った余りを求めよ．

C. 発展 式の除法と式の値

$x = 2 + \sqrt{3}$ のときの $F(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ の値 $F\left(2 + \sqrt{3}\right)$ は，次のように計算することが出来る．

まず，$x = 2 + \sqrt{3}$ を解にもつ 2 次方程式を求める．これは

$$x - 2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

と変形して，式 $x^2 - 4x + 1$ は，$x = 2 + \sqrt{3}$ のときに 0 になると分かる．

次に，$(x^3 + 2x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - 4x + 1)$ を計算する．右のような筆算によって，次の等式を得る．

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & & & 1 & 6 \\ \hline
1 \ -4 \ 1 & 1 & 2 & -4 & 1 \\
 & 1 & -4 & 1 & \\ \hline
 & & 6 & -5 & 1 \\
 & & 6 & -24 & 6 \\ \hline
 & & & 19 & -5
\end{array}$$

$$F(x) = (x^3 + 2x^2 - 4x + 1) = (x^2 - 4x + 1)(x + 6) + 19x - 5$$

この両辺に $x = 2 + \sqrt{3}$ を代入すると $x^2 - 4x + 1 = 0$ であるから

$$F\left(2 + \sqrt{3}\right) = 0 + 19\left(2 + \sqrt{3}\right) - 5 = 33 + 19\sqrt{3}$$

となって簡単に計算できる．

この計算は，「微分」で 3 次関数を学んだときなどに重宝される．

【練習 25：式の除法と式の値】

(1) $x = 3 - \sqrt{2}$ を解に持つような 2 次方程式を 1 つ求めよ．

(2) $F(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 5$ のとき，$F\left(3 - \sqrt{2}\right)$ を求めよ．

D. 発展 係数比較法の応用

【発展 26：多項式の割り算〜その３〜】

$F(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ で割った余りを $ax^2 + bx + c$ とする．

① $F(x) = (x - 1)^2(x + 2)Q(x) + ax^2 + bx + c$ を変形し，$F(x) = (x - 1)^2\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}$ の形にしなさい．ただし，$\boxed{\text{イ}}$ は a, b, c を用いた 1 次式とする．

② $F(x)$ を $(x - 1)^2$ で割った余りが $-3x + 2$，$x + 2$ で割った余りが -1 であるとき，a, b, c を求めよ．

上の問題は，数学 III で「関数の積の微分」を用いた別解がある．

3. 連比・比例式と比例定数

A. 連比とは何か

3 つ以上の数の比を，**連比**（れんぴ）という．また，$x : y = 2 : 3$ や $x : y : z = 4 : 5 : 6$ など，比・連比が等しいことを表わす等式を，**比例式**という．

たとえば，$x = 2,\ y = 4,\ z = 8$ のとき，連比 $x : y : z$ は連比 $2 : 4 : 8 = 1 : 2 : 4$ と等しく，比例式 $x : y : z = 1 : 2 : 4$ が成り立つ．

B. 比例定数

比例式 $x : y = 2 : 3$ は，「$2 : 3$ を何倍かすれば $x : y$ になる」も意味する．この「何倍か」を k 倍とおき

「ある実数 $k(\neq 0)$ が存在して，$x = 2k,\ y = 3k$」と表すことができる．

同じようにして，$x : y : z = 4 : 5 : 6$ であることは，次のように言い換えられる．

「ある実数 $k(\neq 0)$ が存在して，$x = 4k,\ y = 5k,\ z = 6k$」

このときの，0 でない実数 k を**比例定数**という．

【例題 27】

1. $a : b : c = 1 : 2 : 3$ のとき
   1) $a,\ b,\ c$ を比例定数 k を用いて表せ．
   2) 連比 $(a + b) : (b + c) : (c + a)$ を求めよ．
2. $(x + y) : (y + z) : (z + x) = 3 : 6 : 7$ であるとき
   1) $x + y,\ y + z,\ z + x$ を比例定数 k を用いて表せ．また，$x + y + z$ を k を用いて表わせ．
   2) 連比 $x : y : z$ を求めよ．
   3) $\dfrac{x + 2y + 3z}{3x + 2y + z}$ の値を求めよ．

C. もう 1 つの比例式の形

2 つ以上の分数が等しいような式 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3}$，$\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{6}$ は次のように変形できるので，比例式と言うことがある．

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = k$ とおくと，$\dfrac{x}{2} = k$ から $x = 2k$，，$\dfrac{y}{3} = k$ から $y = 3k$ となり，$x : y = 2 : 3$ を満たす．
$\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{6} = k$ とおくと，$x = 4k,\ y = 5k,\ z = 6k$ となり，$x : y : z = 4 : 5 : 6$ を満たす．

つまり，等しい分数の値を k とおくと，結果的に，k が比例定数として働く．

【例題 28】

1. $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{c}{7}$ のとき
   1) $a,\ b,\ c$ を比例定数 k を用いて表わせ．
   2) $\dfrac{a+b}{b+c}$ の値を求めよ．
2. $\dfrac{x+y}{3} = \dfrac{y+z}{5} = \dfrac{z+x}{6}$ であるとき
   1) $x+y,\ y+z,\ z+x$ を比例定数 k を用いて表せ．また，$x+y+z$ を k を用いて表わせ．
   2) 連比 $x : y : z$ を求めよ．
   3) $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ の値を求めよ．

4. 等式の証明

A. 左辺，右辺をそれぞれ計算する

等式を証明するには，左辺と右辺をそれぞれ計算し，一致することを確認すればよい．

【練習 29：等式の証明】

(1) 等式 $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ を証明せよ．

(2) 等式 $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(ay+bx)^2$ を証明せよ．

B. ある条件式の元での等式の証明

条件式があるときは，文字を消去すれば良い．

【例題 30】 $x+y+z=0$ のとき，$x^2+y^2+z^2=2(z^2-xy)$ を示そう．

$z=$ $\boxed{\text{ア}}$ であるから，これを代入すると（左辺）$=$ $\boxed{\text{イ}}$，（右辺）$=$ $\boxed{\text{ウ}}$ となり，（左辺）$=$（右辺）が示された． ■

【練習 31：等式の証明〜その１〜】

$x+y+z=0$ のとき，$x^3+y^3+z^3=3xyz$ を示しなさい．

C.　比例式を含む等式の証明

条件式に比例式や比が含まれている場合は，比例定数 (p.17) をもちいるとよい．

たとえば，$a:b=c:d$ であるとき $\dfrac{a+2b}{c+2d}=\dfrac{3a-b}{3c-d}$ を示してみよう．

$a:b=c:d$ から，比例定数 k を用いて $a=ck,\ b=dk$ とおける．すると

$$\frac{a+2b}{c+2d}=\frac{ck+2dk}{c+2d}=\frac{k(c+2d)}{c+2d}=k,\qquad \frac{3a-b}{3c-d}=\frac{3ck-dk}{3c-d}=\frac{k(3c-d)}{3c-d}=k$$

となるから，$\dfrac{a+2b}{c+2d}=\dfrac{3a-b}{3c-d}$ が示された．

【練習 32：比例式を含む等式の証明】

$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$ のとき，等式 $\dfrac{x+y}{a+b}=\dfrac{x-y}{a-b}$ を示せ．

1.3　不等式の証明

1.　不等式の性質

A.　a, b の正負と $a+b,\ a-b,\ ab,\ \dfrac{a}{b}$ の正負

$a>0,\ b>0$ ならば，$a+b>0,\ ab>0,\ \dfrac{a}{b}>0$ であるが，$a-b$ は正にも負にも 0 にもなりうる．

一方，$a>0,\ b<0$ のときは，$a-b>0$ である．

【暗記 33：四則演算と正負】

以下の空欄に，「正」「負」「(正負が) 定まらない」のいずれかを入れ，表を完成させなさい．

	$a+b$	$a-b$	ab	$\dfrac{a}{b}$
$a>0,\ b>0$ のとき	正	定まらない	正	正
$a>0,\ b<0$ のとき		正		
$a<0,\ b<0$ のとき				

B.　$a<c,\ b<d$ のときの，$a+b,\ c+d$ の大小，$ab,\ cd$ の大小

$1<a,\ 2<b$ であるとき，$1+2<a+b$ が成り立つから $3<a+b$ である．また，$1\times 2<ab$ が成り立つから $2<ab$ である．これらを一般化して，以下の事実が成り立つ．

不等式の性質

i)　$a<c,\ b<d \Rightarrow a+b<c+d$　←どんな場合も，小＋小＜大＋大

ii)　$\mathbf{0<}\,a<c,\ \mathbf{0<}\,b<d \Rightarrow ab<cd$　←正の値ならば，小×小＜大×大

i) の証明は p.22 を，ii) の証明は p.32 を参照のこと．

【例題 34】　$a>1,\ b>2$ とする．次の不等式の真偽を述べ，偽ならば反例を挙げよ．

1. $2a+b>4$　　2. $a^2+a+b>4$　　3. $2<4a-b$

【㊜㊝ 35：２数の大小関係】

次の命題の真偽を述べ，偽ならば反例を挙げよ．

① $a < 0 < c,\ 0 < b < d \Rightarrow ab < cd$

② $a < 0 < c,\ b < 0 < d \Rightarrow ab < cd$

③ $0 < a < b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

④ $0 < a < c,\ 0 < b < d \Rightarrow \dfrac{b}{c} < \dfrac{d}{a}$

2.　不等式の証明の基礎

A.　（左辺）－（右辺），または，（右辺）－（左辺）

不等式を証明するときは，（左辺）－（右辺）や（右辺）－（左辺）の正負を考えるとよい．

（例）$a > 0,\ b > 0$ のとき，$3a + 4b > 2a + 3b$ が成り立つことを示せ．

（左辺）－（右辺）$= (3a + 4b) - (2a + 3b) = a + b > 0$　←仮定から，$a > 0$，$b > 0$

よって，（左辺）－（右辺）> 0 であるから，$3a + 4b > 2a + 3b$ は示された．

上の不等式が正しいことは，直感的に分かるかもしれない．しかし，「証明」が必要ならば上のように書こう．

【練習 36：不等式の証明～その１～】

(1) $0 < a,\ 0 < b$ のとき，$2a - 3b < 4a - 2b$ を示しなさい．

(2) $a < b$ であるとき，$\dfrac{3a + 2b}{5} < \dfrac{2a + 3b}{5}$ を示しなさい．

(3) $a < b,\ c < d$ のとき，$a + c < b + d$ を示しなさい（p.21『不等式の性質 i)』）．

B.　等号条件

≦，≧ を含む不等式においては，等号 = が成り立つ必要十分条件[*3]をできるだけ記すとよい．

【例題 37】　$(a+1)^2 \geqq 4a$ であることを示せ．また，等号はいつ成立するか．

C.　(左辺)^2 − (右辺)^2，または，(右辺)^2 − (左辺)^2

2 つの正の値は，2 乗しても大小関係が変わらないので，次のような証明ができる (p.??).

（例）$x>0,\ y>0$ のとき，$\sqrt{3x+2y} < \sqrt{3x} + \sqrt{2y}$ が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned}(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 &= \left(\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\right)^2 - \left(\sqrt{3x+2y}\right)^2 \\ &= (3x+2\sqrt{6xy}+2y)-(3x+2y) = 2\sqrt{6xy} > 0\end{aligned}$$

よって (左辺)^2 < (右辺)^2 である．今，左辺も右辺も正であるから (左辺) < (右辺) が示された．

上の証明において，左辺も右辺も正であるからという一言は，必ず書かなければならない[*4].

【練習 38：不等式の証明〜その２〜】

(1) $0 \leqq a$ のとき，$\sqrt{a^2+a+1} \leqq a+1$ を示し，等号条件も示しなさい．

(2) $0<a,\ 0<b$ のとき，$\sqrt{a^2+b^2} < a+b$ を示しなさい

等号条件は，上のように明記していなくても，できるだけ書いた方がよい．

[*3] しばしば，**等号条件**と言われる．

[*4] (左辺)^2 < (右辺)^2 のとき，実際には 0 < (右辺) でさえあれば，(左辺) < (右辺) が成り立つ．

3. いろいろな不等式の証明

A. 因数分解の利用

（左辺）－（右辺）や（左辺）^{2} －（右辺）^{2} が，正または負であると示すに，因数分解が有用になることがある．

（例）$1 < a,\ 1 < b$ のとき，$ab + 1 > a + b$ を示せ．

（左辺）－（右辺）$= ab + 1 - (a + b) = ab - a - b + 1$

$= a(b - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1)$

$a - 1 > 0,\ b - 1 > 0$ であるから $(a - 1)(b - 1) > 0$ になる．よって，（左辺）$>$（右辺）が示された．

以下の性質によって，因数分解が有効になっている．

因数分解の利用と等号条件

$A \geqq 0,\ B \geqq 0$ ならば，$AB \geqq 0$ であり，等号条件は $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ または $B = 0$ である．

【練習 39：不等式の証明～その３～】

(1) $0 < A < B$ のとき，$A^2 < B^2$ であることを示せ．

(2) $a < b,\ c < d$ のとき，$ac + bd > ad + bc$ であることを示せ．

$\cdots$ 上の (1) から「2 つの正の値は，2 乗しても大小関係が変わらない」ことが分かる (p.23).

B.　平方完成の利用

式の正負を示すために，平方完成も有効である．

（例１） $a^2 > a - 1$ が成り立つことを示せ．

（左辺）−（右辺）$= a^2 - (a-1) = a^2 - a + 1$

$$= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$$

$$= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \leftarrow$$ 2乗した値に $\frac{3}{4}$ を足せばやはり正

よって，（左辺）>（右辺）であり，命題は示された．

（例２） $a^2 + b^2 \geqq 2a + 2b - 2$ が成り立つことを示せ．

（左辺）−（右辺）$= a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2$

$= (a^2 - 2a) + (b^2 - 2b) + 2 \leftarrow$ aだけでまとめ，bだけでもまとめた

$= (a-1)^2 + (b-1)^2 \geqq 0 \leftarrow$ aだけで平方完成し，bだけでも平方完成した

よって，（左辺）≧（右辺）である．等号は，$(a-1)^2 = (b-1)^2 = 0$ のとき，つまり $a = b = 1$ のときに成立する．

以下の性質によって，平方完成が有効になっている．

平方完成の利用と等号条件

$c > 0$ のとき，$A^2 + c > 0$ である．
$A^2 + B^2 \geqq 0$ であり，等号条件は $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$ かつ $B = 0$ である．

【練習 40：不等式の証明〜その４〜】

次の不等式を示せ．また，(2) は等号条件も答えなさい．

(1) $a^2 > -a - 1$　　(2) $a^2 + ab + b^2 \geqq 0$　　(3) $a^2 + b^2 > a + b - 1$

【練習 41：不等式の証明～その５～】

$a > b$ ならば $a^3 > b^3$ であることを示せ.

【発展 42：不等式の証明～その６～】

$x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + yz + zx$ を示せ.

C. 発展　三角不等式

どんな実数 a, b に対しても，$|a+b| \leqq |a| + |b|$ が成り立つ．これを三角不等式と言う.

【発展 43：三角不等式】

$|a+b| \leqq |a| + |b|$ を示せ.

4.　相加・相乗平均の定理

A.　相加平均とは，相乗平均とは

a, b の相加平均は $\dfrac{a+b}{2}$ で計算できる．つまり，これまで「平均」と呼んできた値に等しい．

a, b の相乗平均は $\sqrt{ab}$ で定義される．$\sqrt{ab}$ を 2 回掛ければ，a, b の掛け算に一致する．

【例題 44】　次の 2 数の相加平均，相乗平均をそれぞれ求めなさい．ただし，$a \neq 0$ とする．

1. $8,\ 18$　　2. $3,\ 5$　　3. $a,\ \dfrac{1}{a}$

B.　相加平均と相乗平均の大小

負でないどんな 2 数も，相加平均は相乗平均より小さくない．詳しくは，以下が成り立つ．

相加・相乗平均の定理

$0 \leqq a,\ 0 \leqq b$ のとき，2 数の相加平均 $\dfrac{a+b}{2}$ は相乗平均 $\sqrt{ab}$ 以上であり

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

が必ず成り立つ．また，等号が成り立つ必要十分条件は $a = b$ である．

（証明）$0 \leqq a,\ 0 \leqq b$ であるから

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2}{2} - \sqrt{a}\sqrt{b} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geqq 0$$

等号は $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$ のときのみ成り立つ．

【例題 45】　a, b が以下の値のとき，相加・相乗平均の定理 $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ からどのような不等式の成立が示されるか．

1. $a = 5,\ b = 3$　　2. $a = x^2,\ b = 9$　　3. $a = 2x,\ b = \dfrac{2}{x}$

C. 相加・相乗平均の定理を用いた最小値の計算

相加・相乗平均の定理の両辺を 2 倍して，以下の不等式が成り立つ．

相加・相乗平均の定理〜変形版

$0 \leqq a,\ 0 \leqq b$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$　　（等号条件は $a = b$）

分数式を含む関数の最小値を求める方法として，この相加・相乗平均の定理は重宝される．

（例）$a > 0$ のとき，$4a + \dfrac{1}{a}$ の最小値を求めてみよう．

$4a > 0$ と $\dfrac{1}{a} > 0$ であるから，相加・相乗平均の定理によって

$$4a + \frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{4\cancel{a} \cdot \frac{1}{\cancel{a}}} = 4$$

である．等号は $4a = \dfrac{1}{a}$ のとき成り立つ．これを解くと $4a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{4}$ になる．

$a > 0$ なので，$a = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 4 をとると分かる．

【練習 46：相加・相乗平均の定理の利用〜その１〜】

$x > 0$ とする．以下の式の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(1) $x + \dfrac{1}{x}$　　(2) $2x + \dfrac{3}{2x}$　　(3) $\dfrac{x^2 + 2}{x}$　　(4) $(2 + x)\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$

【発展 47：相加・相乗平均の定理の利用〜その２〜】

$x > -1$ のとき，$x + \dfrac{1}{x+1}$ の最小値を求めよ．

1.4　第 1 章の補足

1.　発展「割り算の一意性」の証明

多項式 $A(x)$ の次数を，$\deg A$ で表わす．たとえば，$f(x) = x^3 + 2x^2$ ならば $\deg f = 3$ となる．
この記号を用いて，以下の事実を証明する．ただし，数学 B で学ぶ『数学的帰納法』を必要とする[*5]．

割り算の一意性

余りの式の次数が割る式の次数より小さいとき，商と余りが 1 つに定まる．
つまり，割られる式 $A(x)$，割る式 $B(x)$ に対し，次を満たす商 $Q(x)$，余り $R(x)$ は 1 つに定まる．

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \qquad (\text{ただし，}\deg R < \deg B)$$

（余りの存在証明）次の事実を数学的帰納法で示せばよい．

「どんな多項式 $A(x)$ に対しても，$A(x) - R(x)$ が $B(x)$ で割り切れ，
$\deg R < \deg B$ であるような $R(x)$ が存在する」 ……………………①

i) $\deg A < \deg B$ のとき，$R(x) = A(x)$ とおけば，$A(x) - R(x) = 0 = B(x) \cdot 0$ から条件①を満たす．

ii) n を $\deg B - 1$ 以上の整数とする．$\deg A = n$ のときに条件①を満たすと仮定すれば，$\deg A = n + 1$ のときに条件①を満たすことを示す．
つまり，「$\deg A = n$ であるどんな $A(x)$ に対しても $\deg R < \deg B$ である $R(x)$ が存在し，$A(x) - R(x)$ は $B(x)$ で割り切れる」と仮定する．
$\deg A = n + 1$ のとき，$A(x) = ax^{n+1} +$（n 次以下の多項式），$B(x) = bx^m +$（$m - 1$ 次以下の多項式）とおく．ここで $F(x) = A(x) - \dfrac{a}{b}x^{n+1-m}B(x)$ ……… ② とおくと

$$\begin{aligned}F(x) &= ax^{n+1} + (n\text{ 次以下の多項式}) - \frac{a}{b}x^{n+1-m}\left(bx^m + (m-1\text{ 次以下の多項式})\right)\\ &= ax^{n+1} + (n\text{ 次以下の多項式}) - ax^{n+1} - (n\text{ 次以下の多項式})\\ &= (n\text{ 次以下の多項式})\end{aligned}$$

仮定より，$F(x)$ に対して $\deg r < \deg Q$ となる $r(x)$ が存在し，$F(x) - r(x) = B(x)q(x)$ と書ける．これに②を代入して

$$A(x) - \frac{a}{b}x^{n+1-m}B(x) - r(x) = B(x)q(x)$$

$$\Leftrightarrow\ A(x) - r(x) = B(x)\left\{q(x) + \frac{a}{b}x^{n+1-m}\right\}$$

となり，$A(x)$ に対しては $r(x)$ が，条件を満たすと分かる．$\deg A = n + 1$ を満たすどんな $A(x)$ でも正しいから，$\deg A = n + 1$ のときも条件を満たす．

以上，i)，ii) より，数学的帰納法によって，すべての $A(x)$ について余り $R(x)$ が存在すると分かる．

余りが存在することは，実際の割り算の手順を見れば明らかではある．しかし，ありとあらゆる多項式の割り算で，余りが存在することを「証明」するには，上のような証明を必要とする．

*5　実際のところ，高校数学の道具だけを使って証明しているが，証明の考え方そのものは，高校数学の範囲を超えている．

（余りの一意性の証明）$A(x) \div B(x)$ の割り算の結果が

$$A(x) = B(x)Q_1(x) + R_1(x), \qquad A(x) = B(x)Q_2(x) + R_2(x)$$

の 2 通りあったとする．このとき，この 2 式の左辺同士，右辺どうしを引いて

$$0 = B(x)\{Q_1(x) - Q_2(x)\} + R_1(x) - R_2(x) \iff B(x)\{Q_1(x) - Q_2(x)\} = R_2(x) - R_1(x)$$

すると，$\deg R_1 < \deg B$，$\deg R_2 < \deg B$ より，右辺の次数は $\deg B$ より小さい．一方，$Q_1(x) - Q_2(x) \neq 0$ ならば，左辺の次数は $\deg B$ 以上になってしまうので，$Q_1(x) - Q_2(x) = 0$ でないといけない．
つまり，$0 = R_2(x) - R_1(x)$ となって $R_1(x) = R_2(x)$ となる．よって，2 通りの答えは一致する． ■

2. 発展 「係数比較法」の必要性について

数学 B で学ぶ『数学的帰納法』，数学 III で学ぶ『関数の連続性』を用い，以下の事実を示す[*6]．

「係数比較法」の必要性

2 つの多項式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$，　$g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$
があったとき，$f(x) = g(x)$ が恒等式となる必要十分条件は
「すべての係数が等しくなること」（$a_n = b_n$，$a_{n-1} = b_{n-1}$，$\cdots$，$a_1 = b_1$，$a_0 = b_0$）である．

（証明）「すべての係数が等しい」ならば「$f(x) = g(x)$ が恒等式」は明らか．この命題の逆を示すには，$f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$ が恒等式になるとき，「$a_n - b_n = 0$，$a_{n-1} - b_{n-1} = 0$，$\cdots$，$a_1 - b_1 = 0$，$a_0 - b_0 = 0$」を示せばよいから，次の命題

「$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ が恒等式ならば，$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ である」 …………………… ③

を示せばよいと分かる．これを数学的帰納法で示す．

i) $\deg f = 1$ のとき，$a_1x + a_0 = 0$ が恒等式なので
$x = 0$ を代入して $a_0 = 0$，$x = 1$ を代入して $a_1 + a_0 = 0$ から $a_1 = 0$ となり，示された．

ii) $\deg f = k$ のとき，どんな多項式も正しいとする．$\deg f = k + 1$ である多項式について

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

が恒等式であるとする．④は $x = 0$ で成り立つので，$f(0) = a_0 = 0$ である．ここで，$c \neq 0$ のとき

$$f(c) = 0 \iff a_{k+1}c^{k+1} + a_kc^k + \cdots + a_1c = 0 \iff a_{k+1}c^k + a_kc^{k-1} + \cdots + a_1 = 0$$

であるから，$g(x) = a_{k+1}x^k + a_kx^{k-1} + \cdots + a_1 = 0$ は 0 でないすべての c について $g(c) = 0$ になる．
ここで，関数 $g(x)$ は多項式であるから連続関数であり，$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$ を満たす．$c \neq 0$ ならば $g(c) = 0$ であるから，$g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ となる．つまり，$g(x) = 0$ はすべての x で成り立つので恒等式になる．よって，仮定より，$g(x)$ の係数 a_{k+1}, a_k, $\cdots$, a_1 はすべて 0 である．
以上より，$a_{k+1} = a_k = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ であるから，$\deg f = k + 1$ のときも③は示された．

i)，ii) によって，示すべき命題③は示された． ■

[*6] 『割り算の一意性』と同じく，高校数学の道具だけを用いた証明だが，証明の考え方そのものは，高校数学の範囲を超えている．

3. 不等式の性質

数学 I で学んだように (p.53)，不等号は以下の性質をもっていた．

不等式の性質（数学 I）

i)　すべての実数 c で　$a < b \iff a + c < b + c$　,　$a - c < b - c$

ii)　$0 < c$ のとき　$a < b \iff ac < bc$　,　$\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

iii)　$c < 0$ のとき　$a < b \iff ac > bc$　,　$\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$　←逆符号！

このうち，ii) の性質を用いると，以下の事実を示すことができる．

【㊎㊮ 48：不等式の性質 ii) の証明】

$0 < a < c$, $0 < b < d$ のとき，$ab < cd$ を示そう．