

# 13th-note 数学 I

(2013 年度卒業生まで)

---

## 目次

第 1 章	数と式	1
§1.1	いろいろな数	1
§1.	自然数・整数	1
§2.	有理数	3
§3.	実数	5
§4.	絶対値	7
§1.2	式の計算	11
§1.	単項式	11
§2.	多項式	13
§3.	多項式の乗法の公式	18
§4.	展開の工夫	25
§5.	多項式の因数 — 因数分解の基礎	29
§6.	多項式の因数分解の公式	31
§7.	難度の高い因数分解	38
§8.	式の値の計算	44
§1.3	第 1 章の補足	47
§1.	開平法について	47
§2.	複 2 次式の因数分解について	50

索引

この教材を使う際は

- 表示：原作者のクレジット（「13th-note」または「13th-note & www.ftext.org」）を表示してください。
- 非営利：この教材を営利目的で利用してはいけません。ただし、学校・塾・家庭教師の授業で利用するための無償配布は可能です。
- 継承：この教材を改変した結果生じた教材には、必ず、原作者のクレジット（「13th-note」または「13th-note & www.ftext.org」）を表示してください。



Ver2.74(2012-9-20)

# 第1章 数と式



## 1.1 いろいろな数



「数とは何か？」

高校数学の学習を始めるにあたって、この問題について考えてみよう。

### 1. 自然数・整数

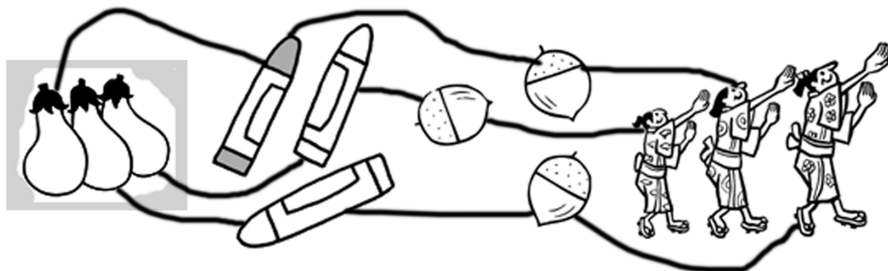
#### A. 「同じ数」とは～自然数の成り立ち

次の絵は左から「3本」「3本」「3個」「3人」であり、「数えた結果は3になる」という共通点がある。



そして、上のどの場合も、同じ数だけある。

もし、3という数字がなかったら、「同じ数だけある」事実はどう表現すればよいだろうか。それには、次のように線を引いて考えればよい。



そして、この線の本数が数を表していると考えられる。このように、(線を引くなどして)何かと何かを対応させるやり方を一対一対応という\*1。

ものを数えるときに使う数字「1, 2, 3, 4, 5, …」をまとめて自然数 (natural number) という。

\*1 このときの線の様子は、数字を表す文字の成り立ちに深く影響している。数字の3を、漢字では「三」と表すのはその一例である。複数の古代文明でも同じ現象が見られ、古代エジプトであれば、「|||」で数字3を表したことが分かっている。

## B. 負の数～何かと比べる

たとえば、あるお店に来たお客さんの数が右の表のようになったとしよう。

火曜は月曜より4人多い。

一方、水曜は月曜より4人少ない。

曜日	月	火	水	木	金	土
人数	60	64	56	54	60	63

どちらも「4人」だが、火曜と水曜では意味が

正反対である。そこで、火曜を「+4人」、水曜を「-4人」のように表現する。

このように、何かと値を比べる

とき、自然数にマイナス(-)をつ

けた負の数は重要な意味を持つ。

曜日	月	火	水	木	金	土
月曜と比べた増加(人)	-	+4	-4	-6	0	+3

## C. 0

0の誕生は、負の数より遅い。今では子供でも0を使いこなすが、人類は長い間、0を用いなかった。

たとえば、古代ローマでは、I (1), V (5), X (10), L (50), C (100), D (500), M (1000), … などを用い、古代の中国では、一, 二, 三, …, 十, 百, 千, 万, 億, … などを用いた\*2。

0という「数」を発明したのはインド人である。7世紀には発明されていた。0のおかげで現在のように「筆算」や「小数」を本格的に使う事が可能になり、人類の計算技術も、数を表わす能力も、飛躍的に向上した\*3。

【例題1】 次の計算をしなさい。ただし、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 を用いずに計算すること。

1. VIII + XIII    2. XXII + XXVIII    3. 五百四 + 二千十八    4. 三万五千十六 + 二万四百九

## D. 整数とは

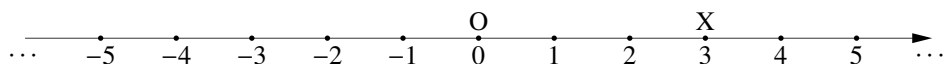
負の数と、0、自然数をまとめて**整数** (integral number) という。たとえば、次の数は全て整数である。

-2568, -23, -3, 0, 4, 57

## E. 自然数・整数の図示

自然数や整数を図示するには**数直線** (number line) を用いる。

数直線上のある点 X について「点 X に対応する数が a であること」を、X(a) と書く。たとえば、下図では点 X に対応する数が3であるので、X(3) である。



\*2 しかし、これらのやり方では、数が大きくなるたびに新しい記号を作らなければならない。

\*3 とはいえ、筆算や小数が考え出されて一般的に使用されるまでに何百年という時間がかかっている。筆算が考え出されるまで、計算には大変な時間がかかった。また、小数が存在しないだけでなく、分数の表し方は今と異なり、計算はとても複雑だった。

## 2. 有理数

### A. 分数～2つの数の比

6は3の何倍か？これは、 $6 \div 3 = 2$ によって2倍と求められ、6の3に対する比 (ratio) の値を表している。

一方、12は5の何倍になるだろうか。 $10 < 12 < 15$ なので、2倍よりは大きく、3倍よりは小さいが、整数では表せない。そこで新しい数、分数  $\frac{12}{5}$  をつくる。

一般に、「 $a$ の $b$ に対する比」を分数を  $\frac{a}{b}$  で表わす。



「に対する」の付けられた値・言葉が、その文脈中では基準となる。

### B. 有理数とは何か

分数で表現できる数を**有理数** (rational number) \*4という。整数は  $\frac{\text{整数}}{1}$  と表すことができるので有理数である。たとえば、次の数は全て有理数である。

$$-\frac{8}{3}, -2, 0, \frac{11}{19}, \frac{18}{9}, 26$$

特に、約分 (reduction) できない分数を**既約分数** (irreducible fraction) という。



有理数どうしの比も有理数になる。詳しくは、『複分数 (p.149)』で学ぶ。

**【例題2】** 次の分数を、既約分数で答えなさい。

1. 5の9に対する比の値

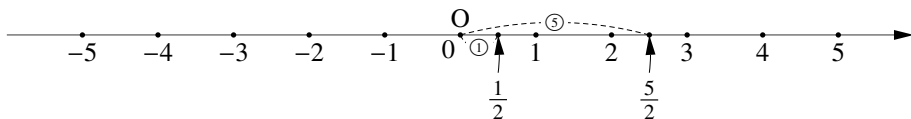
2. 7の35に対する比の値

3. 12に対する、9の比の値

4. -10に対する、15の比の値

### C. 有理数の図示

たとえば、 $\frac{1}{2}$  を数直線上で表すには、下図のように0と1をつなぐ線分の2等分点を取り、その点に  $\frac{1}{2}$  を対応させればよい。また、 $\frac{5}{2}$  ならば  $\frac{1}{2} \times 5$  と考えて、0と  $\frac{1}{2}$  をつなぐ線分を5つつないで得られる線分の右端の点を対応させればよい。



\*4 ratio が「比」を意味するのだから、rational number は“有比数”とでも訳されるべきだったのかもしれない。

## D. 有理数の間には必ず有理数がある

たとえば、 $\frac{1}{3}$  と  $\frac{2}{7}$  の間の有理数は、次のようにして得られる。

12 と 14 の平均値

$$\frac{2}{7} = \frac{12}{42} < \frac{13}{42} < \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$$

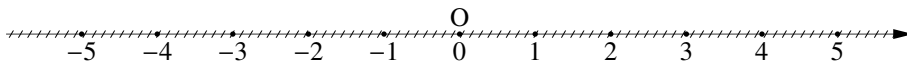
一般に、2つの有理数  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$  ( $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ) において

ad と bc の平均値

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} < \frac{\frac{ad+bc}{2}}{bd} < \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$$

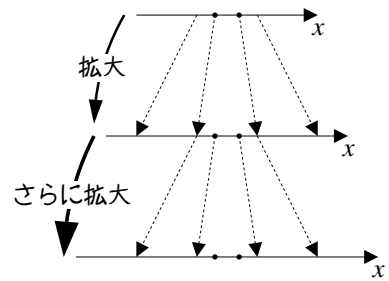
とすれば、2つの有理数の間に新しい有理数を考えることができる。

こうして、2つの異なる有理数の間には、必ず有理数が存在する\*5ことがわかる。



有理数はびっしり詰まっているイメージ

有理数の間には必ず有理数がある



### 【練習3：有理数の稠密性】

2つの有理数  $\frac{6}{25}$ ,  $\frac{1}{4}$  の間にある分数のうち、分母が200であるものを求めよ。

## E. 有理数と小数

有理数は筆算により小数 (decimal number) になおすことができるが、次の2種類が存在する。

- $\frac{5}{4} = 1.25$  のような、有限小数 (finite decimal)
  - $\frac{25}{54} = 0.4629629\dots$  のような、無限小数 (infinite decimal)
- ただし、同じ数の並びが繰り返し現れるので、  
 $\frac{25}{54} = 0.4629629629\dots = 0.4\dot{6}2\dot{9}$  のように、循環の始まりと終わりに「 $\dot{\phantom{0}}$ 」を付ける。このような小数は循環小数 (circulating decimal) とよぶ。

有限小数	無限小数
$1.25$	$0.46296$
$4 \overline{) 5}$	$54 \overline{) 25}$
$\begin{array}{r} 1\ 2\ 5 \\ 4 \\ \hline 1\ 0 \\ 8 \\ \hline 2\ 0 \\ 2\ 0 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0\ 4\ 6\ 2\ 9\ 6 \\ 2\ 1\ 6 \\ \hline 3\ 4\ 0 \\ 3\ 2\ 4 \\ \hline 1\ 6\ 0 \\ 1\ 0\ 8 \\ \hline 5\ 2\ 0 \\ 4\ 8\ 6 \\ \hline 3\ 4\ 0 \\ 3\ 2\ 4 \\ \hline 1\ 6 \end{array}$

ここでおしまい ずっと続いていく...

逆に、どんな小数も分数に直すことができる。

有限小数は、 $0.234 = \frac{234}{1000} = \frac{117}{500}$  のようにすればよい。

循環小数の場合、たとえば  $0.4\dot{6}2\dot{9}$  を小数に直すには、

$x = 0.4\dot{6}2\dot{9} = 0.4629629629\dots$  とおき、次のようにすればよい\*6。

$$1000x = 462.9629629\dots \leftarrow \text{循環の周期に合わせて、1000倍した}$$

$$-) \quad x = 0.4629629\dots$$

$$999x = 462.5$$

$$\therefore x = \frac{462.5}{999} = \frac{4625}{9990} = \frac{25}{54} \leftarrow \text{記号“.”は「だから」「つまり」を意味する。たいいていは「だから」と読む。}$$

\*5 このことを、有理数の稠密性 (density) という。

\*6 小数点以降、無限に数が続く数を普通の数のように足したり引いたりできることについての、厳密な根拠は数学 III で学ぶ。

【練習 4 : 有理数と循環小数】

分数は小数で、小数は分数で表せ.

(1)  $\frac{9}{16}$

(2)  $\frac{5}{37}$

(3) 0.625

(4) 0.429

### 3. 実数

#### A. 無理数

有理数でない数のことを**無理数** (irrational number) と言う\*7. 言い換えると、分数で表せない数が無理数である\*8. p.6 に見るように、無理数の例として  $\sqrt{2}$  が挙げられる.



根号  $\sqrt{\quad}$  の近似値は、「開平法について (p.47)」のようにして、筆算で求められる.

#### B. 実数

数直線上に表すことのできる数すべてを、**実数** (real number) という.

すべての小数は数直線上に表すことができる\*9ので、無理数はすべて実数である.

無理数は有理数どうしの間をみっちり埋めている\*10.



みっちり詰まった実数のイメージ

無理数には次のような数が知られている.

-  $\sqrt{2}$ ,  $5\sqrt{2}$ , 3 乗して 2 になる数  $\sqrt[3]{2}$ , 円周率  $\pi = 3.1415926\dots$ , ネイピア数\*11  $e = 2.7182818\dots$

今後、 $a$ ,  $b$ ,  $x$  などで数を表すとき、特に断りが無ければ、その数は実数であるとする.

\*7 ir-rational の ir は否定を表す接頭語であり、irrational とは rational でない、つまり、比で表せないという意味である.

\*8 有理数はすべて循環小数になり、循環小数はすべて有理数になった (p.5).

ここから、循環しない小数が有理数ではないことが分かる.

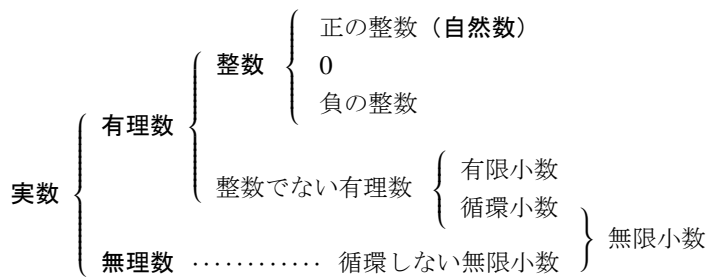
\*9 この事実を厳密に示すことは、より厳密な実数の定義と、デデキントの切断という考え方を必要とし、高校の学習範囲を超えてしまう. ただし、たとえば  $\sqrt{2}$  のような数は右のようにすれば数直線上に表すことができる.

\*10 実数の連続性 (continuity) といい、有理数の稠密性と区別される. 詳しくは数学 III で学ぶ.

\*11 ネイピア数  $e$  について、詳しくは数学 III で学ぶ.

以上見てきたいろいろな数について、まとめると次のようになる.

数の分類



【例題 5】 次の実数について、以下の問に答えよ.

$3, -2, 0, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \sqrt{3}, 1.5\dot{2}, \frac{36}{6}, -\sqrt{16}, (\sqrt{5})^2, 2\pi$

- (1) 自然数を選べ. (2) 整数を選べ. (3) 有理数を選べ. (4) 無理数を選べ.

【発展 6:  $\sqrt{2}$  は有理数ではないことの証明】

数学 A で詳しく学ぶ背理法<sup>\*12</sup> (reduction to absurdity) を用いて  $\sqrt{2}$  が有理数でないことを証明せよ.

<sup>\*12</sup> これは、示すべき内容が間違っているものと仮定して矛盾を導き、示すべき内容が正しいと結論する論法である.



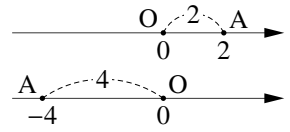
## 4. 絶対値

### A. 絶対値とは

数直線上で、原点  $O$  と点  $A(a)$  の距離のことを  $a$  の絶対値 (absolute value) といい、 $|a|$  と書く\*13. たとえば

$$|2| = 2, \quad |-4| = 4$$

である. 正の数に絶対値記号を付けても値は変わらない.  
また, 負の数に絶対値記号を付けると, 値は  $-1$  倍になる.



【例題 7】 1. から 3. の値を計算し, 4. の問いに答えなさい.

1.  $|-3| + |2|$
2.  $|-3 - 5|$
3.  $x = -2$  のときの,  $|x + 4|$  の値
4.  $|\sqrt{2} - 2|$  の値は  $\sqrt{2} - 2$  に等しいか,  $-(\sqrt{2} - 2)$  に等しいか.

絶対値

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \leftarrow a \text{ が負の値なので } -a \text{ は正の値}$$

と表すことができる. 絶対値については次式が成り立つ.

$$|a| \geq 0, \quad |a| = |-a|$$

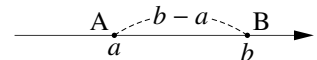
### B. 絶対値と 2 点間の距離

絶対値記号を用いると, 数直線上の 2 点  $A(a)$  と  $B(b)$  の距離  $AB$  は

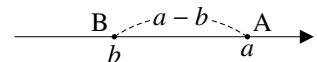
$$AB = |b - a|$$

で表すことができる. この  $|b - a|$  は, 2 つの数  $a$  と  $b$  の差も表している.

$b - a \geq 0$  のとき



$b - a < 0$  のとき



【例題 8】 数直線上に  $A(-4)$ ,  $B(-1)$ ,  $C(2)$ ,  $D(5)$  をとる.  $CD$ ,  $BC$ ,  $AD$ ,  $CA$  をそれぞれ求めよ.

\*13  $|a|$  は「 $a$  (の) 絶対値」と読まれることが多い. たとえば,  $|2|$  ならば「2 (の) 絶対値」と読む.

【例題 9】  $|5|^2$ ,  $|3||-4|$ ,  $\frac{|5|}{|-10|}$  を計算しなさい.

【練習 10 : 絶対値の値】

次の値を計算しなさい.

1.  $x = 2$  のときの,  $|x - 3|$  の値

2.  $|-\sqrt{3}| + |\sqrt{3}|$

3.  $|-3 + \sqrt{5}|$

C. 絶対値の値と場合分け

【例題 11】 次の  $x$  の条件において,  $|x - 2|$  と  $x - 2$  が等しい値になるものをすべて選べ.

1.  $x = 3$     2.  $x = -1$     3.  $x = 1$     4.  $x = 4$     5.  $x < 2$  のとき    6.  $2 \leq x$  のとき

【練習 12 : 絶対値の場合分け】

以下のそれぞれの場合について、式  $|x-4|+|2x+2|$  の値を計算せよ。

- (1)  $x=5$       (2)  $x=1$       (3)  $x=a$ , ただし  $4 \leq a$       (4)  $x=a$ , ただし  $-1 < a < 4$



この問題のように場合に分けて問題を解くことは、高校の数学において極めて重要である。絶対値を含む問題の他にも、数学 A で学ぶ場合の数・確率などにおいて頻繁に必要とされる。

余談になるが、日常でも場合に分けて考えることは大切である。たとえば、晴れと雨で場合に分けて遠足の予定を立てないと、大変なことになってしまう。

【発展 13 : 絶対値の性質】

$a, b$  に関して次の等式が成り立つことを証明せよ。ただし、(3) では  $b \neq 0$  とする。

- (1)  $|a|^2 = a^2$       (2)  $|ab| = |a||b|$       (3)  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

これらの性質についてイメージがしやすいよう、具体例を挙げておく。

- (1)  $a = -3$  のとき      (2)  $a = -3, b = 4$  のとき      (3)  $a = -\sqrt{5}, b = 2$  のとき  
 $| -3 |^2 = 9, (-3)^2 = 9$        $| (-3) \times 4 | = 12, | -3 | | 4 | = 12$        $\left| \frac{-\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{| -\sqrt{5} |}{| 2 |} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

絶対値の中が「0 以上か」「負か」で、絶対値の外し方が違うので、場合に分けて示す。



上の等式は、以下のように記憶するとよい。

- (1) 2 乗すると絶対値は外れる(付く)
- (2) 掛け算のところで絶対値は切れる(つながる)
- (3) 割り算のところで絶対値は切れる(つながる)



## 1.2 式の計算

この章では、まず、高校で学ぶような複雑な式を、見通しよく扱うための方法を学ぶ。  
そして、展開(3.~4.)と因数分解(5.~7.)を学ぶ。

### 1. 単項式

#### A. 単項式と次数

$3abx^2$  のように、いくつかの文字や数を掛け合わせた式を**単項式** (monomial) といい、掛け合わせる文字の個数を**次数** (degree) という。1 や  $-3$  などの数は、文字を含まない単項式とみなし、次数は 0 とする\*14。また、数の部分を**係数** (coefficient) という。

次数の大小は、「高い」「低い」で表されることが多い。たとえば、式  $ab$  は、式  $4x$  よりも次数が「高い」。

文字  $a, b, x$  について考える

係数

$$3abx^2$$

文字が 4 個掛けているので次数は 4

【例題 14】 式  $3b^2$ ,  $-5x^2y$ ,  $-6$ ,  $\frac{1}{3}xz$  について

1. それぞれ係数と次数を答えよ。
2. 一番次数の高い式、低い式をそれぞれ選べ。

#### B. 特定の文字に着目する

単項式において、特定の文字に着目することがある。このとき、その他の文字を数と同様に扱う。たとえば、単項式  $3abx^2$  では以下ようになる。

文字  $x$  の単項式と考えた場合  $3abx^2 = (3ab)x^2$ , 次数は 2, 係数は  $3ab$

文字  $a$  の単項式と考えた場合  $3abx^2 = (3bx^2)a$ , 次数は 1, 係数は  $3bx^2$

文字  $x$  に着目する

係数

$$\overbrace{3ab}^{\text{係数}} x^2$$

$\times 2$  個なので次数は 2

【例題 15】 以下のそれぞれについて、式  $3ka^4b^5$  の次数と係数を答えよ。

1. 文字  $a$  の式と考えたとき
2. 文字  $b$  の式と考えたとき
3. 文字  $a, b$  の式と考えたとき

\*14 ただし、単項式 0 については次数を考えない。

通常、次数が  $m$  の式と次数が  $n$  の式の積は次数  $m+n$  の式になるが、単項式 0 の次数を考えると、この規則が成り立たなくなってしまう。

$$\underbrace{3ab}_{\text{次数は 2}} \times \underbrace{2xyz}_{\text{次数は 3}} = \underbrace{6abxyz}_{\text{次数は 5 (} = 2 + 3 \text{)}}$$

【練習 16 : 単項式の次数】

次の多項式について、[ ]内の文字に着目したときの次数と係数を答えよ。

(1)  $3x^4y^5$  [x], [y], [x と y]

(2)  $2abxy^2$  [x], [y], [x と y]

C. 累乗と指数法則

実数  $a$  を  $n$  個 ( $n \geq 2$ ) 掛け合わせた式  $\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個}}$  は  $a^n$  で表され「 $a$  の  $n$  乗」と読む。このとき、 $a$  の右上に書かれた数  $n$  のことを指数 (exponent) という。

$$\underbrace{6 \times 6 \times 6 \times 6}_{4 \text{ 個}} = 6^4 \quad \leftarrow \text{指数は } 4$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{3 \text{ 個}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \leftarrow \text{指数は } 3$$

$a^2$  のことを  $a$  の平方 (square),  $a^3$  のことを  $a$  の立方 (cube) といい、 $a, a^2, a^3, \dots$  を総称して  $a$  の累乗 (power) という。

累乗に関して、一般に次のような指数法則 (exponential law) が成り立つ\*15。

指数法則

$m, n$  が自然数のとき一般に次のような性質が成り立つ。

i)  $a^m a^n = a^{m+n}$

ii)  $(a^m)^n = a^{mn}$

iii)  $(ab)^n = a^n b^n$

この指数法則は、暗記するようなものではない。仕組みを理解して慣れよう。なお、「 $\cdot$ 」は掛け算を表す。たとえば、 $4 \cdot 2x = 8x$  となる。今後、頻繁に用いられる記号なので覚えておこう。

i)  $a^2 \times a^4 = \underbrace{(a \times a)}_{2 \text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a \times a \times a)}_{4 \text{ 個}} = a^6 (= a^{2+4})$

ii)  $(a^2)^4 = \underbrace{(a \times a)}_{2 \text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a)}_{2 \text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a)}_{2 \text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a)}_{2 \text{ 個}} = a^8 (= a^{2 \times 4})$

iii)  $(a \times b)^4 = \underbrace{(a \times b) \cdot (a \times b) \cdot (a \times b) \cdot (a \times b)}_{a \text{ も } b \text{ も } 4 \text{ 個ずつ}} = a^4 \times b^4$

【例題 17】 次の式を計算して簡単にせよ。

1.  $x^2 \times x^3$

2.  $(x^2)^3$

3.  $(x^3)^5$

4.  $(xy^2)^3$

5.  $(2a^3)^2$

6.  $(-a)^3$

\*15 今のところ、指数は自然数だが、数学 II においては整数や有理数などへと拡張させていく。

## 2. 多項式

### A. 多項式 — 複数の「項」の式

$2a - 3b^2 + ab$  のように、いくつかの単項式の和や差として表される式を**多項式** (polynomial) という (整式 (integral expression) ともいう\*16).

多項式を構成する単項式を、**項** (term) という. 特に, 0 次の項のことを**定数項** (constant term) という. たとえば, 多項式  $2a - 3b^2 - 4 + ab$  の項は,  $2a, -3b^2, -4, ab$  (または  $+ab$ ) であり, 定数項は  $-4$  である. 負の符号も含めて項ということに注意しよう\*17.

### B. 同類項をまとめる

多項式の項のうち, 文字の部分が同じである項どうしを**同類項** (similar term) という. 多項式の加法と減法は, 同類項をまとめることによって行われる.

$$\begin{aligned}
 5a^2b + 3ab + 3 - a^2b + 2ab &= (5a^2b - a^2b) + (3ab + 2ab) + 3 \\
 &= 4a^2b + 5ab + 3
 \end{aligned}$$

(同類項) (同類項) (定数項)

たとえば,  $A = 3x^2 - 2x + 1$ ,  $B = 2x^2 + 7x - 3$  のとき

#### 多項式の加法

$$\begin{aligned}
 A + B &= (3x^2 - 2x + 1) + (2x^2 + 7x - 3) \\
 &= 3x^2 - 2x + 1 + 2x^2 + 7x - 3 && \leftarrow \text{かっこをはずした} \rightarrow \\
 &= (3x^2 + 2x^2) + (-2x + 7x) + (1 - 3) && \leftarrow \text{同類項をまとめた} \rightarrow \\
 &= 5x^2 + 5x - 2
 \end{aligned}$$

#### 多項式の減法

$$\begin{aligned}
 A - B &= (3x^2 - 2x + 1) - (2x^2 + 7x - 3) \\
 &= 3x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - 7x + 3 \\
 &= (3x^2 - 2x^2) + (-2x - 7x) + (1 + 3) \\
 &= x^2 - 9x + 4
 \end{aligned}$$

同類項を縦に並べると, 計算がしやすくなる.

$$\begin{array}{r}
 A + B = 3x^2 - 2x + 1 \\
 \quad + 2x^2 + 7x - 3 \\
 \hline
 = 5x^2 + 5x - 2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 A - B = 3x^2 - 2x + 1 \\
 \quad - 2x^2 - 7x + 3 \\
 \hline
 = x^2 - 9x + 4
 \end{array}
 \quad \leftarrow \text{かっこをはずし, 同類項を縦に並べた}$$

### 【例題 18】

- $2ab + a^2c - 3c - 2a^2c$  の同類項をまとめ, 項をすべて答え, 定数項があれば答えよ.
- $X = a^2 + 3a - 5$ ,  $Y = 2a^2 + 3a + 5$  のとき,  $X + Y$ ,  $X - Y$  を求めよ.

\*16 「多項式」と「単項式」をまとめて「整式」と定める言い方もある.

\*17 単項式は多項式の特別なものであり, 「項が 1 つの多項式」が単項式であると言える.

【練習 19：指数法則】

次の計算を下さい。

(1)  $2a^3b \times (a^2)^2$

(2)  $(4x^2y)^2 \times 2xy$

(3)  $(3xy^3)^2 \times \frac{1}{3}xy^2$

(4)  $a$  の平方の立方は、 $a$  の何乗か。

C. 多項式の次数

多項式の次数は、各項の次数のうち最大のもので定義される。次数が  $n$  の多項式を、単に  $n$  次式 (expression of degree  $n$ ) という。たとえば、 $4a^2b + 5ab$  は ( $a$  と  $b$  について) 3 次式である (右図参照)。

$$4a^2b + 5ab$$

次数は 3
次数は 2

多項式の次数は(大きい方の)3  
つまり 3 次式

D. 降べきの順 — 式が見やすいように

多項式の項を、次数が低くなる順に並べ替えることを、「降べきの順 (descending order of power) に整理する」という<sup>\*18</sup>。たとえば、多項式  $-3x^2 - 7 + 4x^3 + x$  を ( $x$  について) 降べきの順に整理してみよう。

$$-3x^2 - 7 + 4x^3 + x = 4x^3 - 3x^2 + x - 7$$

2 次    0 次    3 次    1 次
3 次    2 次    1 次    0 次

次数の大きさがばらばら
次数が順に低くなる

これによって式が見やすくなり、展開・因数分解・値の代入などがやりやすくなる。

… 今後は、降べきの順に整理する習慣をつけよう<sup>\*19</sup>。

【例題 20】

1. 多項式  $3x^3 - 3x^2 + 1 + x^3$  の同類項をまとめ、降べきの順に整理すると **ア** となる。  
この式の次数は **イ** であり、項をすべて挙げると **ウ**、定数項は **エ** である。
2. 多項式  $2x + 3x^2 - x^2 - 4x - 5$  の同類項をまとめ、降べきの順に整理すると **オ** となる。  
この式の次数は **カ** であり、項をすべて挙げると **キ**、定数項は **ク** である。

<sup>\*18</sup> 逆に、次数が高くなる順に整理することを「昇べきの順 (ascending order of power) に整理する」という。たとえば、 $-3x^2 - 7 + 4x^3 + x = -7 + x - 3x^2 + 4x^3$  のようになる。ただし、高校ではあまり用いられない。

<sup>\*19</sup> ただし、対称性をもつ  $ab + bc + ca$  のような式は、例外として、降べきの順にする必要がないこともある。



## E. 特定の文字でまとめる

多項式においても，特定の文字に着目し，他の文字を数とみなすことがある。

たとえば，多項式  $bx - ax^3y + y^2 + y$  について考えてみよう。

$x$  について降べきの順に整頓したとき

$$\begin{array}{cccc}
 bx & - & ax^3y & + y^2 + y \\
 1次 & & 3次 & 0次
 \end{array}$$

$$= \overbrace{-ay}^{\text{係数}} x^3 + \overbrace{b}^{\text{係数}} x + \overbrace{(y^2 + y)}^{\text{定数項}}$$

- 次数は 3 ( $x$  について 3 次式)
- $x^3$  の係数は  $-ay$ ， $x$  の係数は  $b$
- 定数項は  $y^2 + y$

$y$  について降べきの順に整頓したとき

$$\begin{array}{cccc}
 -ax^3y & + & bx & + y^2 + y \\
 1次 & & 0次 & 2次 1次
 \end{array}$$

$$= y^2 - ax^3y + y + bx$$

$$= y^2 + \overbrace{(-ax^3 + 1)}^{\text{係数}} y + \overbrace{bx}^{\text{定数項}}$$

- 次数は 2 ( $y$  について 2 次式)
- $y^2$  の係数は 1， $y$  の係数は  $-ax^3 + 1$
- 定数項は  $bx$

$-ax^3 + 1$  のように，定数項や係数が 2 つ以上の項からなる場合は，上のように ( ) でまとめる。

**【例題 21】** 次の多項式を  $x$  について降べきの順に整理し， $x^2$  の係数， $x$  の係数，定数項を答えよ。

1.  $x^2 + 2y^2 - 3xy + 4y^2 + 2xy$       2.  $-x^2 + xy^2 - 3xy^2 + 2x^2$       3.  $3x^2 - 12xy + 4 + 3x^2 - 2x + 5$

【練習 22 : 降べきの順】

(1)  $4a^2 + a^3 - 3 + a^2 - 1$  を整理し、降べきの順に整理しなさい。また、この式は何次式か。

(2) 次の多項式について、[ ] 内の文字に着目して降べきの順に並べ、式の次数、定数項を答えよ。

1)  $2cb - 3a - 2c^2a$  [c]

2)  $3k^2x + 2kx^2 + 4kx + 4k - 3$  [x]

F. 分配法則, 交換法則, 展開

分配法則  $A(B + C) = AB + AC$ ,  $(A + B)C = AC + BC$ , 交換法則  $AB = BA$  は多項式においても成立する。たとえば、これを使って  $(x^2 + 3)(x^2 - 4x + 5)$  は次のように計算する。

$\begin{aligned} (x^2 + 3)(x^2 - 4x + 5) &= (x^2 + 3)A \\ &= x^2A + 3A \\ &= x^2(x^2 - 4x + 5) + 3(x^2 - 4x + 5) \\ &= x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 12x + 15 \\ &= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 15 \end{aligned}$	<p>← <math>x^2 - 4x + 5</math> を A とおいた</p> <p>← 分配法則 <math>(A + B)C = AC + BC</math> を使った</p> <p>← A を <math>x^2 - 4x + 5</math> に戻した</p> <p>← 分配法則 <math>A(B + C) = AC + BC</math> を使った</p> <p>← 同類項でまとめ降べきの順に並べた</p>
--	---

ここでは、 $x^2 - 4x + 5$  を A とおいて計算した。結果的に、1つの多項式を1つの文字のようにして扱ったことになる。この見方は今後、極めて重要となる。

ただし上の計算については、慣れてくると、左下のように計算できるようになる。

$$\begin{aligned} (x^2 + 3)(x^2 - 4x + 5) &= x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 12x + 15 \\ &= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 15 \end{aligned}$$

	$x^2$	$-4x$	$5$
$x^2$	$x^4$ ①	$-4x^3$ ②	$5x^2$ ③
$3$	$3x^2$ ④	$-12x$ ⑤	$15$ ⑥

表の①, ②, ... は、左の式の①, ②, ... に対応している。

このように、「多項式どうしの積<sup>\*20</sup>を計算して、単項式だけの和にすること」を展開 (expansion) するという。0 でない 2 つの多項式について、次数が  $m$  の式と次数が  $n$  の式の積を展開すると、次数  $m + n$  の多項式になる。

<sup>\*20</sup> 多項式の除法は数学 II で学ぶ。

【練習 23：展開の基礎～その 1～】

$A$  が次の式のと看、 $(3x+y)A$  を展開し、 $x$  についての降べきの順に整理しなさい。

(1)  $A = x + y$

(2)  $A = 2x^2 - 3x + 5$

(3)  $A = 2x - 6y + 1$

【練習 24：展開の基礎～その 2～】

$A = 2x + y$ ,  $B = 3x - 2y - 1$  のとき、以下の問いに答えよ。

(1) 積  $AB$  を展開し、 $x$  についての降べきの順に整理しなさい。

(2) 積  $AB$  の  $x$  の係数が 3 に等しいとき、 $y$  の値を求めなさい。

### 3. 多項式の乗法の公式



今後出てくる公式については、掛け算の九九のようなものだと思って繰り返し練習しよう。慣れてくると多項式の展開が格段に早く正確になる。

#### A. 中学の復習

左の「i) うまい計算のやり方 (○)」で、反射的にできるように復習しよう。

平方の公式

$$1^\circ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

i) うまい計算のやり方 (○)

$$\begin{aligned} (3x+2)^2 &= \underbrace{9x^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 4}_{\text{慣れると省略できる}} \\ &= 9x^2 + 12x + 4 \end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方 (×)

$$\begin{aligned} (3x+2)^2 &= (3x+2)(3x+2) \\ &= 9x^2 + 6x + 6x + 4 \\ &= 9x^2 + 12x + 4 \end{aligned}$$

和と差の積の公式

$$2^\circ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

i) うまい計算のやり方 (○)

$$\begin{aligned} (5x+2y)(5x-2y) \\ &= \underbrace{(5x)^2 - (2y)^2}_{\text{慣れると省略できる}} \\ &= 25x^2 - 4y^2 \end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方 (×)

$$\begin{aligned} (5x+2y)(5x-2y) \\ &= 25x^2 - 10xy + 10yx - 4y^2 \\ &= 25x^2 - 4y^2 \end{aligned}$$

1次式の積の公式～特殊形

$$3^\circ (x+b)(x+d) = x^2 + (b+d)x + bd$$

i) うまい計算のやり方 (○)

$$\begin{aligned} (x+3y)(x-4y) \\ &= \underbrace{x^2 + (3y-4y)x + (3y) \cdot (-4y)}_{\text{慣れると省略できる}} \\ &= x^2 - xy - 12y^2 \end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方 (×)

$$\begin{aligned} (x+3y)(x-4y) \\ &= x^2 - 4xy + 3yx - 12y^2 \\ &= x^2 - xy - 12y^2 \end{aligned}$$

【例題 25】 以下の展開をしなさい。ただし，4. 以降は  $A = x - 3$ ,  $B = x + 3$ ,  $C = x - 1$  とする。

1.  $(a + 4)^2$     2.  $(x + 2y)(x - 2y)$     3.  $(p + 2)(p - 4)$     4.  $A^2$     5.  $AB$     6.  $AC$

## B. 分母の有理化

分母に根号 ( $\sqrt{\quad}$ ) をもつ分数において，分母の根号を無くし，有理数に変えることを，分母の有理化 (rationalization) という\*21。

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} &= \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} && \leftarrow \text{分母と分子に } (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \text{ を掛ける} \\ &= \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』(p.18)} \end{aligned}$$

【例題 26】 以下の分数の分母を有理化しなさい。

1.  $\frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$                       2.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$                       3.  $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

\*21 これによって，近似値を求めやすくなる。下の例でいえば ( $\sqrt{2} \cong 1.414$ ,  $\sqrt{3} \cong 1.732$  とする)

$$\frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cong 3 \div (1.732 - 1.414) = 3 \div 0.318, \quad 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \cong 3 \times (1.732 + 1.414) = 3 \times 3.146$$

【練習 27 : 分母の有理化】

分数  $\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ ,  $\frac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{6} - 2}$  を有理化しなさい.

C. 1 次式の積の一般的な公式

$(ax + b)(cx + d)$  を展開すると

$$(ax + b)(cx + d) = \overset{\textcircled{1}}{ac}x^2 + \overset{\textcircled{2}}{ad}x + \overset{\textcircled{3}}{bc}x + \overset{\textcircled{4}}{bd} = acx^2 + \underbrace{(ad + bc)}_{\text{外どうしの積} + \text{中どうしの積}}x + bd$$

	$cx$	$d$
$ax$	$acx^2$	$adx$
$b$	$bcx$	$bd$

となる. これを使い, たとえば  $(2x + 3y)(5x - 4y)$  は次のように計算する.

i) うまい計算のやり方 (○)

$$\begin{aligned} & (2x + 3y)(5x - 4y) \\ &= \underbrace{10x^2 + (-8y + 15y)x + (3y) \cdot (-4y)}_{\text{慣れると省略できる}} \\ &= 10x^2 + 7xy - 12y^2 \end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方 (×)

$$\begin{aligned} & (2x + 3y)(5x - 4y) \\ &= 10x^2 - 8xy + 15yx - 12y^2 \\ &= 10x^2 + 7xy - 12y^2 \end{aligned}$$

1 次式の積の公式～一般形

$$4^\circ (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$



この公式の  $(ad + bc)$  の部分は「(外どうしの積  $(ad)$ ) + (中どうしの積  $(bc)$ )」と覚えるとよい.

【例題 28】 次の多項式を展開し整理せよ.

1.  $(x + 2)(2x + 1)$     2.  $(2x + 3)(3x - 2)$     3.  $(5x - 3y)(2x - y)$     4.  $(3x - y)(2x + 3y)$

### D. 立方の公式 1

$(a+b)^3$  を展開すると

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

	$a^2$	$2ab$	$b^2$
$a$	$a^3$	$2a^2b$	$ab^2$
$b$	$ba^2$	$2ab^2$	$b^3$

となる。これを使い、たとえば  $(2x+y)^3$  は次のように計算する。

i) うまい計算のやり方 (○)

$$\begin{aligned}
 &(2x+y)^3 \\
 &= \underbrace{(2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2y + 3 \cdot (2x)y^2 + y^3}_{\text{慣れると省略できる}} \\
 &= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3
 \end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方 (×)

$$\begin{aligned}
 &(2x+y)^3 \\
 &= (2x+y)(2x+y)^2 \\
 &= (2x+y)(4x^2 + 4xy + y^2) \\
 &= 8x^3 + 8x^2y + 2xy^2 + 4x^2y + 4xy^2 + y^3 \\
 &= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3
 \end{aligned}$$

次ページで見るように、 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  も成り立つ。

立方の公式 1

$$5^\circ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

#### 【例題 29】

- $a = 5x, b = 2$  のとき、 $3a^2b, 3ab^2$  の値をそれぞれ求めよ。
- 次の多項式を展開せよ。

(a)  $(x+2)^3$

(b)  $(x+4)^3$

(c)  $(2x+1)^3$

(d)  $(3x+2)^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  については、公式  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  で処理するほうがよい。たとえば、 $(a-2b)^3$  の計算は次のようになる。

$$\begin{aligned}(a-2b)^3 &= \{a + (-2b)\}^3 && \leftarrow 2b \text{ を引くことと } (-2b) \text{ を足すことは同じ} \\ &= a^3 + 3 \cdot a^2(-2b) + 3 \cdot a(-2b)^2 + (-2b)^3 && \leftarrow \text{慣れると省略できる} \\ &= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3\end{aligned}$$

… 一般の  $(a+b)^n$  の展開については数学 A で学ぶ。

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

**【練習 30：多項式の展開～立方の公式 1】**

次の多項式を展開せよ。

(1)  $(a-4)^3$                       (2)  $(3a-2)^3$                       (3)  $(2a+5)^3 + (2a-5)^3$

**【練習 31：1 次式の積の公式】**

次の多項式を展開しなさい。

(1)  $(x+1)(x+2)$                       (2)  $(x+4)(2x-3)$                       (3)  $(4x+3)(x-3)$                       (4)  $(3x-1)(x-3)$   
(5)  $(x+2y)(x-3y)$                       (6)  $(3x+y)(4x-y)$                       (7)  $(2x+5y)(3x-y)$                       (8)  $(2x-y)(5x+y)$

… 「外どうしの積+中どうしの積」を暗算でできるようにしよう。



## E. 立方の公式 2

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$  を展開すると

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = \overset{\textcircled{1}}{a^3} - \overset{\textcircled{2}}{a^2b} + \overset{\textcircled{3}}{ab^2} + \overset{\textcircled{4}}{ba^2} - \overset{\textcircled{5}}{ab^2} + \overset{\textcircled{6}}{b^3} = a^3 + b^3$$

	$a^2$	$-ab$	$b^2$
$a$	$a^3$	$-a^2b$	$ab^2$
$b$	$ba^2$	$-ab^2$	$b^3$

となる. これを使い, たとえば  $(3x+1)(9x^2-3x+1)$  は次のように計算する.

i) うまい計算のやり方 (○)

$$\begin{aligned} & (3x+1)(9x^2-3x+1) \\ &= \underbrace{(3x+1)\{(3x)^2 - (3x) \cdot 1 + 1^2\}}_{\text{慣れると省略できる}} \\ &= 27x^3 + 1 \end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方 (×)

$$\begin{aligned} & (3x+1)(9x^2-3x+1) \\ &= 27x^3 - 9x^2 + 3x + 9x^2 - 3x + 1 \\ &= 27x^3 + 1 \end{aligned}$$

また, 同様に  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$  も成り立つ.

立方の公式 2

$$6^\circ (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3, \quad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$



左辺の  $a \pm b$  と右辺の  $a^3 \pm b^3$  は符号が一致する, と覚えておこう.

ただし, この公式を展開のために使う機会は少なく, p.36 における「因数分解」で(逆方向に)よく利用される.

### 【例題 32】

- $(x+2)(x^2-2x+4)$ ,  $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)$  を展開せよ.
- 次の中から,  $8x^3+27$  になるもの,  $8x^3-27$  になるものを 1 つずつ選べ.
  - $(2x+3)(4x^2+6x+9)$
  - $(2x+3)(4x^2-6x+9)$
  - $(2x+3)(4x^2-6x-9)$
  - $(2x-3)(4x^2+6x+9)$
  - $(2x-3)(4x^2-6x+9)$
  - $(2x-3)(4x^2-6x-9)$

## F. 展開公式のまとめ

最も大事なことは、「いつ、どの展開公式を使うのか」見極めることである。

### 【練習 33：多項式の展開の練習～その 1～】

次の多項式を展開せよ。

- |   |                              |  |
|---|------------------------------|--|
| (1) $(2x - 5y)(2x + 5y)$                | (2) $(x + 5)(x - 8)$         | (3) $(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$                  |
| (4) $(x - 3)^3$                         | (5) $(2x + 1)(x - 3)$        | (6) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)^2$ |
| (7) $(3a - 2)(4a + 1)$                  | (8) $(a - 4)(3a + 12)$       | (9) $(a^2 - 3)(a^2 + 7)$                         |
| (10) $\left(3a - \frac{1}{2}b\right)^2$ | (11) $(-2ab + 3c)(2ab + 3c)$ | (12) $\left(a + \frac{1}{2}b\right)^3$           |
| (13) $(p + q)(3p^2 - 3pq + 3q^2)$       | (14) $(2x + 4y)^3$           |  |

## 4. 展開の工夫

3. 『多項式の乗法の公式』で学んだ公式を工夫して用いると、複雑な式の計算がかなり容易にできるようになる。ここでは、代表的な2つの工夫の方法を取り上げる。

### A. 式の一部をまとめる

多項式の一部を1つの文字とおくと、今までの公式がより広く使える。たとえば

$$\begin{aligned}(x+y+3)(x+y-2) &= (M+3)(M-2) && \leftarrow M=x+y \text{とおき, 式の一部を一つの文字とみなす} \\ &= M^2 + M - 6 && \leftarrow \text{『1次式の積の公式～特殊形』(p.18)} \\ &= (x+y)^2 + (x+y) - 6 && \leftarrow M \text{を } x+y \text{に戻す} \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 6 && \leftarrow \text{『平方の公式』(p.18)}\end{aligned}$$

のように展開できる。

次に、 $(x+y-z)(x-y+z)$ の展開を考える。 $-y+z=-(y-z)$ に注意して、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}(x+y-z)(x-y+z) &= \{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\} && \leftarrow -y+z=-(y-z) \\ &= (x+A)(x-A) && \leftarrow A=y-z \text{とおき, 式の一部を一つの文字とみなす} \\ &= x^2 - A^2 && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』(p.18)} \\ &= x^2 - (y-z)^2 && \leftarrow A \text{を } y-z \text{に戻す} \\ &= x^2 - (y^2 - 2yz + z^2) && \leftarrow \text{『平方の公式』(p.18)} \\ &= x^2 - y^2 + 2yz - z^2 && \leftarrow \text{符号に注意して( )を外す}\end{aligned}$$

【例題 34】 次の多項式を展開せよ。

1.  $(x+y-5)(x+y+3)$

2.  $(x+y+z)(x+y-z)$

3.  $(a^2+a-1)(a^2-a-1)$



慣れるまでは、式の一部や共通部分を  $A$  や  $X$  などでおきかえよう。そして最終的には、前の例題のようにおきかえずにできるようになろう。

### B. 3項の平方の公式

式の一部をまとめることによって、 $(a + b + c)^2$  の展開は次のようにできる。

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= \{(a + b) + c\}^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 && \leftarrow a + b \text{ をまとめて考えて『平方の公式』(p.18)} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ca + 2bc + c^2 && \leftarrow \text{『平方の公式』(p.18)} \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca && \leftarrow \text{この順番にすると式が見やすい} \end{aligned}$$

であるから、 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$  が成り立つ。

この展開の結果は、3項の平方の公式とよばれ、たとえば  $(2x + y - 3)^2$  は次のように計算できる。

i) うまい計算のやり方 (○)

$$\begin{aligned} &(2x + y - 3)^2 \\ &= \underbrace{(2x)^2 + y^2 + 3^2 + 2 \cdot 2xy + 2 \cdot y(-3) + 2 \cdot (-3)2x}_{\text{慣れると省略できる}} \\ &= 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy - 6y - 12x \end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方 (×)

$$\begin{aligned} &(2x + y - 3)^2 \\ &= (2x + y - 3)(2x + y - 3) \\ &= 4x^2 + 2xy - 6x + 2yx + y^2 - 3y - 6x - 3y + 9 \\ &= 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy - 6y - 12x \end{aligned}$$

3項の平方の公式

$$7^\circ (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

【例題 35】 次の多項式を展開せよ。

1.  $(3a - b + 3c)^2$

2.  $(a^2 + a - 1)^2$

### C. 掛け算の順序の工夫

$14 \times 16 \times 5$  の計算は、 $14 \times (16 \times 5) = 14 \times 80$  とすると楽にできる。

多項式の展開においても、掛け算の順序を考えると計算が楽にできることがある。

$$\begin{aligned} &(a - b)^2(a + b)(a^2 + ab + b^2) && \leftarrow \text{前から順に計算するととても大変} \\ &= (a - b)(a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2) && \leftarrow (a - b) \text{ は } (a + b) \text{ と相性がいい} \\ &= \{(a - b)(a + b)\} \{(a - b)(a^2 + ab + b^2)\} && \leftarrow (a - b) \text{ は } (a^2 + ab + b^2) \text{ と相性がいい} \\ &= (a^2 - b^2)(a^3 - b^3) && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』(p.18) と『立方の公式1』(p.21)} \\ &= a^5 - a^3b^2 - a^2b^3 + b^5 \end{aligned}$$

p.12 で学んだ  $A^3B^3 = (AAA) \cdot (BBB) = (AB) \cdot (AB) \cdot (AB) = (AB)^3$  も重要な働きをする.

$$\begin{aligned} & (x+1)^3(x-1)^3 && \leftarrow (x+1)(x-1) \text{ を } 3 \text{ 回掛けることと同じ} \\ = & \{(x+1)(x-1)\}^3 \\ = & (x^2-1)^3 && \leftarrow \text{〚和と差の積の公式〚 (p.18)} \\ = & x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 && \leftarrow \text{〚立方の公式1〚 (p.21), } (x^2)^3 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x^6 \text{ に注意} \end{aligned}$$

掛け算の順序を工夫して、共通する式を作ることができる場合もある.

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+3)(x-2)(x-4) && \leftarrow +1-2 \text{ も } +3-4 \text{ も同じ結果になることに注目} \\ = & \{(x+1)(x-2)\} \{(x+3)(x-4)\} && \leftarrow \text{掛け算の順序を入れ替えた} \\ = & (x^2-x-2)(x^2-x-12) && \leftarrow x^2-x \text{ が共通している} \\ = & \{(x^2-x)-2\} \{(x^2-x)-12\} \\ = & (x^2-x)^2 - 14(x^2-x) + 24 && \leftarrow x^2-x \text{ について展開した} \\ = & (x^4 - 2x^3 + x^2) - 14x^2 + 14x + 24 && \leftarrow (x^2-x)^2 \text{ の展開でミスをしないように} \\ = & x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 && \leftarrow \text{同類項をまとめた} \end{aligned}$$

**【例題 36】** 次の多項式を展開せよ.

1.  $(x-1)(x-3)(x+3)(x+1)$

2.  $(a+b)^3(a-b)^3$

3.  $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)$

【発展 37：多項式の展開の練習～その2～】

次の多項式を展開せよ.

①  $(2a - b + c)(2a + b + c)$

②  $(x + y + z + w)(x + y - z - w)$

③  $(x - 4)^2(x + 5)^2$

④  $(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

⑤  $(a + b)^2(a - b)^2(a^2 + b^2)^2$

⑥  $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4)$

## 5. 多項式の因数 — 因数分解の基礎

### A. 因数と因数分解

1つの多項式  $A$  が、多項式  $B, C, \dots$  の積で書けるとき、 $B$  や  $C$  を、 $A$  の**因数** (factor) という\*22.

1つの多項式  $A$  を複数の因数に分解することを  $A$  の**因数分解** (factorization) という. 特に断りがなければ、係数が整数の範囲でそれ以上分解できない形まで因数分解する\*23.

☞ 因数は、整数における「約数」にほぼ対応する.

$$\begin{aligned}2a^2 - 4ab &= 1 \cdot \underline{(2a^2 - 4ab)} \\ &= \underline{2} \cdot \underline{(a^2 - 2ab)} \\ &= \underline{2a} \cdot \underline{(a - 2b)} \\ &= \underline{2} \cdot \underline{a} \cdot \underline{(a - 2b)}\end{aligned}$$

— のあるものは、  
全て  $2a^2 - 4ab$  の因数

### B. 共通因数

多項式において、各項に共通する因数を**共通因数** (common factor) という.

多項式の各項に共通因数があれば、まず、それをかっこの外にくくり出す\*24. 共通因数をくくり出すことは、因数分解において最も基本的、同時に最も重要な手段である.

$$\begin{aligned}2x^2y + 3xy^2 + xy &= 2x(\underline{xy}) + 3y(\underline{xy}) + 1(\underline{xy}) \\ &\quad \text{共通の因数} \\ &= xy(2x + 3y + 1)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}3a(x + y) + 2b(x + y) &= (3a + 2b)(x + y) \\ &\quad \text{共通の因数}\end{aligned}$$

【例題 38】 次の式を因数分解せよ.

1.  $2p^2q + pq^3 - 2pq$

2.  $a(x + y) - b(x + y)$

3.  $p(2x - y) + q(y - 2x)$

\*22 ただし、多項式 1 は因数に含めない.

\*23 「素数」の役割をする多項式は高校数学では扱われないためではあるが、本来は「素因数分解」と言うべきである.

\*24 共通しない部分を括弧でくくり、共通する因数をその外に出すため、この動詞が頻繁に使われる. この操作は、分配法則の逆の操作であり、左にくくり出しても、右にくくり出してもよい.

### 【練習 39：共通因数による因数分解】

次の式を因数分解せよ.

(1)  $6a^2b + 4ab^2 - 2ab$       (2)  $x(s + 2t) - y(s + 2t)$       (3)  $3a(x - y) + 6b(x - y) + 9c(y - x)$

### C. 因数分解の目的

たとえば、2002 と  $2 \times 7 \times 11 \times 13$  は同じ数を表わすが、この 2 つの表し方にはそれぞれ長所がある.

まず、2002 という表現は、個数や大きさを表すのに適している. だから、私たちは「 $(2 \times 7 \times 11 \times 13)$  個のりんご」とは言わず「2002 個のりんご」と言う. 一方、 $2 \times 7 \times 11 \times 13$  という表現は 2002 という数のものつ約数についての性質（たとえば、「13 で割り切れる」など）をよく表しており、時に有用である.

式においても同様に、等しい 2 つの式  $3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)(x - 1)$  のそれぞれに長所がある.

$3x^2 - 5x + 2$  は

- 何次式かがわかりやすい
- 平方完成<sup>\*25</sup>や、微分・積分がしやすい<sup>\*25</sup>

$(3x - 2)(x - 1)$  は

- 方程式・不等式が解きやすい<sup>\*26</sup>
- 因数が見やすい

つまり、どちらの形にも長所があり、場合に応じて使い分けられないといけない. そのために、展開・因数分解どちらの操作も、手早く正確にできなければならない.

$(3x - 2)(x - 1) \rightarrow 3x^2 - 5x + 2$  の操作（展開）

$3x^2 - 5x + 2 \rightarrow (3x - 2)(x - 1)$  の操作（因数分解）

<sup>\*25</sup> 平方完成は数学 I で、微分・積分は数学 II で学ぶ.

<sup>\*26</sup> 2 次方程式・不等式は数学 I で学ぶ. 数学 II 以降でも、様々な方程式・不等式を学ぶ.



## 6. 多項式の因数分解の公式

共通因数が無くても、展開の公式を逆に使えば因数分解をできることがある。

### A. 中学の復習

$9x^2 + 6xy + y^2$  には共通因数が無いが、以下のように因数分解できる。

i) 因数分解

$$\begin{aligned} 9x^2 + 6xy + y^2 &= (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot y + y^2 \\ &= (3x + y)^2 \end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned} (3x + y)^2 &= (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot y + y^2 \\ &= 9x^2 + 6xy + y^2 \end{aligned}$$

—— 平方の公式 (p.18) の逆利用 ——

$$1^\circ a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$


$16a^2 - b^2$  には共通因数が無いが、以下のように因数分解できる。

i) 因数分解

$$\begin{aligned} 16a^2 - b^2 &= (4a)^2 - b^2 \\ &= (4a + b)(4a - b) \end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned} (4a + b)(4a - b) &= (4a)^2 - b^2 \\ &= 16a^2 - b^2 \end{aligned}$$

  $\square^2 - \triangle^2$  の形を見たら因数分解、とすぐに気付けるようになる。

—— 和と差の積の公式 (p.18) の逆利用 ——

$$2^\circ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$x^2 + 5x + 6$  には共通因数が無いが、以下のように因数分解できる。

i) 因数分解

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &\quad \leftarrow \text{足して5, 掛けて6になる数は?} \\ = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 &\quad \begin{array}{l} 6 = 1 \times 6 \rightarrow \text{和は } 7(\times) \\ 6 = 2 \times 3 \rightarrow \text{和は } 5(\text{O}) \end{array} \\ = (x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned} (x + 2)(x + 3) \\ = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 \\ = x^2 + 5x + 6 \end{aligned}$$

—— 1次式の積の公式 (p.20) の逆利用 ——

$$3^\circ x^2 + (b + d)x + bd = (x + b)(x + d)$$

【練習 40 : 因数分解の練習】

次の式を因数分解せよ.

(1)  $x^2 + 6x + 9$

(2)  $4x^2 - 12xy + 9y^2$

(3)  $a^2 - 9$

(4)  $4x^2 - 25y^2$

(5)  $x^2 - 6x + 8$

(6)  $a^2 + 3ab - 18b^2$

(7)  $a^4 + 4a^2 + 4$

(8)  $a^4 - 1$

(9)  $x^2 - (a - b)^2$

(10)  $4x^2 - 9(a - b)^2$

(11)  $(a - b)^2 + 10(a - b) + 21$



自分の実行した因数分解が正しいかどうかは, 展開によって確認できる.

## B. 発展 2重根号

$\sqrt{5}$ は「2乗して5になる正の数」を表す。同じように、 $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ は「2乗して $8+2\sqrt{15}$ になる正の数」を表す。このように、根号の中に根号がある状態を**2重根号** (double radical sign) という。

一部の2重根号は外すことができる。たとえば、 $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ である。実際

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{15} + 3 = 8 + 2\sqrt{15}$$

なので、「2乗して $8+2\sqrt{15}$ になる正の数」は $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ であると分かる。

**【例題 41】** 次の中から、 $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ 、 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$  に一致するものをそれぞれ選べ。

a.  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

b.  $2 + \sqrt{3}$

c.  $\sqrt{5} + 1$

d.  $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

$a > 0, b > 0$  のとき、 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$  であり、 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$  であるから

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

である。よって、 $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$  を外すには、足して8、掛けて15になる2数  $a, b$  を探せばよい。

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5 \cdot 3}} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

また、 $a > b > 0$  のとき、 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$  であり、 $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$  であるから

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

つまり、2重根号  $\sqrt{x \pm 2\sqrt{y}}$  を外すには、「足して  $x$ 、掛けて  $y$  となる2つの数」を探せばよい。

**【練習 42 : 2重根号を外す～その1～】**

2重根号  $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ 、 $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$ 、 $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$ 、 $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$  を外せ。

【発展 43 : 2重根号を外す～その2～】

次の2重根号を外せ.

①  $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

②  $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

2重根号を外すには、まず  $\sqrt{\quad}$  の中に  $2\sqrt{\quad}$  を作るように考える.

C. 『1次式の積の公式～一般形』(p.20)を逆に利用した因数分解

$3x^2 + 14x + 8$  の因数分解を考えてみよう.

i) 因数分解

$$\begin{aligned} &3x^2 + 14x + 8 \\ &= (1 \cdot 3)x^2 + (1 \cdot 2 + 4 \cdot 3)x + 2 \cdot 4 \\ &= (x + 4)(3x + 2) \end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned} &(x + 4)(3x + 2) \\ &= (1 \cdot 3)x^2 + (1 \cdot 2 + 4 \cdot 3)x + 2 \cdot 4 \\ &= 3x^2 + 14x + 8 \end{aligned}$$

この  $(x+4)$  と  $(3x+2)$  を見つけるには、次のようなたすきがけと呼ばれる方法を用いる.

たすきがけは、下のように行われる.

上の段 → 1 × 4 → 12 下の段 → 3 × 2 → 2 $\frac{\quad}{14 \circ}$	$3x^2 + 14x + 8$ $= \underbrace{(x+4)}_{\substack{\text{上の段の} \\ 1, 4}} \underbrace{(3x+2)}_{\substack{\text{下の段の} \\ 3, 2}}$
---	--

$x^2$  の係数3は  $1 \times 3$  しかない

1	×	?	→ ?
3	×	?	→ ?

14 にしたい

定数項の8は、 $1 \times 8$ 、 $2 \times 4$ 、 $4 \times 2$ 、 $8 \times 1$ のどれか ((-1) × (-8)などは考えなくて良い)

$1 \times 1 \rightarrow 3$ $3 \times 8 \rightarrow 8$ $\frac{\quad}{11 \times}$	$1 \times 2 \rightarrow 6$ $3 \times 4 \rightarrow 4$ $\frac{\quad}{10 \times}$	$1 \times 4 \rightarrow 12$ $3 \times 2 \rightarrow 2$ $\frac{\quad}{14 \circ}$	$1 \times 8 \rightarrow 24$ $3 \times 1 \rightarrow 1$ $\frac{\quad}{25 \times}$
---	---	---	--

初めのうちは試行錯誤が必要だが、慣れてくると2つ目くらいの表でできるようになる. コツをつかむには、係数を「 $1 \times$ 」にするかどうか、奇数・偶数を考える、の2点に注意すると良い.

【例題 44】 次の式を因数分解せよ.

1.  $2x^2 + 3x + 1$

2.  $4x^2 + 5x + 1$

3.  $5a^2 + 7ab + 2b^2$

次に、 $6x^2 + x - 12$  の因数分解を考えてみよう.

$x^2$  の係数は  
 $1 \times 6$  か?

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times \\ 6 \end{array} \begin{array}{l} ? \rightarrow ? \\ ? \rightarrow ? \\ \hline 1 \text{ にしたい} \end{array}$$

$x^2$  の係数は  
 $2 \times 3$  か?

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} ? \rightarrow ? \\ ? \rightarrow ? \\ \hline 1 \text{ にしたい} \end{array}$$

定数項の  $-12$  は、 $1 \times 12$ 、 $2 \times 6$ 、 $3 \times 4$  のどちらかにマイナス(−)を付けたもの

1 という小さな値にするには、 $1 \times 12$  では適さないと予想できる<sup>\*27</sup>.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times \\ 6 \end{array} \begin{array}{l} 3 \rightarrow 18 \\ -4 \rightarrow -4 \\ \hline 14 \times \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} 4 \rightarrow 12 \\ -3 \rightarrow -6 \\ \hline 6 \times \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} -3 \rightarrow -9 \\ 4 \rightarrow 8 \\ \hline -1 \times \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} 3 \rightarrow 9 \\ -4 \rightarrow -8 \\ \hline 1 \text{ } \circ \end{array}$$

<sup>\*27</sup> 全然ダメ ↑ ↑

符号だけ違う ↑ ↑

一つ左を符号だけ変えた

よって、 $6x^2 + x - 12 = (2x + 3)(3x - 4)$  になる.

【例題 45】 次の式を因数分解せよ.

1.  $12a^2 + 7a - 12$

2.  $4x^2 + 23x - 6$

3.  $8x^2 - 10xy + 3y^2$

1 次式の積の公式 (p.20) の逆利用

$$4^\circ \quad acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

<sup>\*27</sup> 「1 × ○」を含むたすきがけをした結果は、値が極端に大きく (正の数) なったり小さく (負の数) なったりすることが多い。そのため、 $6x^2 + x - 12$  のように  $x$  の係数が 0 に近い場合は「1 × 6」「1 × 12」を考える優先順位は低い。

【練習 46 : 1 次式の積の公式】

次の式を因数分解しなさい.

(1)  $5x^2 + 11x + 6$

(2)  $6x^2 - x - 15$

(3)  $7x^2 - 16x + 4$

(4)  $9a^2b - 12ab - 12b$

D. 『立方の公式 2』(p.23) を逆に利用した因数分解

$8x^3 + y^3$  には共通因数が無いが、以下のように因数分解できる.

i) 因数分解

$$\begin{aligned} & 8x^3 + y^3 \\ &= (2x)^3 + y^3 \\ &= (2x + y) \{ (2x)^2 - 2x \cdot y + y^2 \} \\ &= (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) \end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned} & (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) \\ &= (2x + y) \{ (2x)^2 - 2x \cdot y + y^2 \} \\ &= (2x)^3 + y^3 \\ &= 8x^3 + y^3 \end{aligned}$$

立方の公式 2 (p.23) の逆利用

$$5^\circ \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

……  $\bigcirc^3 \pm \triangle^3$  の形の因数分解は重要度が高いが、忘れやすいので気をつけよう. 展開のときと同じように、 $a \pm b$  と  $a^3 \pm b^3$  は符号が一致する、と覚えておくとよい. また、1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 を見たら「整数の 3 乗だ」と気づけるようになるとうい.

【例題 47】 次の式を因数分解せよ.

1.  $x^3 + 27$

2.  $8a^3 + 1$

3.  $8x^3 - 27y^3$

4.  $64a^3 - 125b^3$

以下については、非常に特殊なケースなので、式だけを挙げておく。

立方の公式 1 (p.21) の逆利用

$$6^\circ \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3, \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

### E. 因数分解の公式のまとめ

最も大事なことは、「いつ、どの因数分解を使うのか」見極めることである。

#### 【練習 48：因数分解の練習～その 1～】

次の式を因数分解せよ。

(1)  $a^2 - 14ab + 49b^2$       (2)  $2x^2 - x - 3$       (3)  $343a^3 - 8b^3$       (4)  $2ax^2 - 5ax + 3a$

(5)  $3b^2 - 27c^2$       (6)  $3x^3 - 8x^2 - 3x$       (7)  $3x^3 + 81y^3$       (8)  $2a^4 - 32$       (9)  $x^8 - 1$

(10)  $a^6 - b^6$       (11)  $5(x + y)^2 - 8(x + y) - 4$       (12)  $(a + b)^2 + 10c(a + b) + 25c^2$

## 7. 難度高い因数分解

共通因数も無く、どの公式にも当てはまらない場合も、工夫次第で因数分解ができることがある。

### A. 共通因数が見つけない多項式の因数分解

$ax + ay - x - y$  という式には、共通因数も無く、どの公式にも当てはまらないが、

$$\begin{aligned} & ax + ay - x - y \\ &= a(x + y) - x - y && \leftarrow \text{前2つで } a \text{ が共通するのでまとめてみる} \\ &= a(x + y) - (x + y) && \leftarrow \text{残りもまとめてみたら、} x + y \text{ が共通因数になった} \\ &= (a - 1)(x + y) && \leftarrow -(x + y) = (-1) \times (x + y) \text{ であることに注意!} \end{aligned}$$

のようにして、「共通因数を見つけて」因数分解ができる。もう1つ例を挙げよう。

$$\begin{aligned} & m^2 + 2m - n^2 - 2n && \leftarrow \text{前2つでまとめるとうまくいかない} \\ &= (m^2 - n^2) + 2m - 2n && \leftarrow \text{この2つでまとめてみる} \\ &= (m + n)(m - n) + 2(m - n) && \leftarrow m - n \text{ が共通因数になった} \\ &= (m + n + 2)(m - n) && \leftarrow m - n = X \text{ とおくと } (m + n + 2) X \text{ になる} \end{aligned}$$



数をこなしていくと、共通因数を見つけるのがうまくなる。というのも「どの因数でまとめられるか」少しずつ予想ができるようになるからである。

### 【練習 49 : 4 項の因数分解】

次の式を因数分解せよ。

(1)  $ab + ac + b + c$

(2)  $mn + 2m - n - 2$

(3)  $a^2 - 5a + 5b - b^2$



因数分解した後、( ) 内を何かの文字について降べきの順にしておくといよい。しなくても間違いではないが、応用問題を解くときに役立つことがある。



## B. 次数の小さい文字に着目する

共通因数が見つからないときは、最も次数の低い文字に着目し、降べきの順に整理しよう。それによって、共通因数が見えてくることが多い\*28。たとえば、次のようになる。

$$\begin{aligned} & a^2 + ab - 3a + b - 4 && \leftarrow a \text{ については2次式, } b \text{ については1次式} \\ = & (a+1)b + a^2 - 3a - 4 && \leftarrow \text{次数の低い } b \text{ について, 降べきの順に整頓} \\ = & (a+1)b + (a-4)(a+1) && \leftarrow \text{定数項を因数分解したら, } a+1 \text{ が共通因数になった} \\ = & (a+1)(a+b-4) && \leftarrow b+a-4 \text{ は順番を入れ替えておこう} \end{aligned}$$

### 【練習 50 : 次数の低い文字に着目する】

次の式を因数分解せよ。

(1)  $a^2 + ab + bc + ca$

(2)  $x^2 - 2xy + 2y - 1$

(3)  $x^2 + 2xy + 3x + 4y + 2$

(4)  $a^3 + ab^2 + b^2 + 1$

\*28 もっとも次数の低い文字でまとめると、最高次の係数に共通因数が出てくることが多いからである。

### C. 複 2 次式の因数分解

$ax^4 + bx^2 + c$  という形の多項式を**複 2 次式** (biquadratic expression) という。ただし、 $a \neq 0$  とする。  
例として、次の 2 つの複 2 次式の因数分解についてみてみよう。

i)  $x^4 - 13x^2 + 36$  の因数分解

この複 2 次式は、 $x^2 = X$  とおくと、 $X^2 - 13X + 36 = (X - 4)(X - 9)$  であるから

$$\begin{aligned}x^4 - 13x^2 + 36 &= (x^2 - 4)(x^2 - 9) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x + 3)(x - 3)\end{aligned}$$

ii)  $x^4 + 2x^2 + 9$  の因数分解

この複 2 次式は、 $x^2 = X$  とおいても、 $X^2 + 2X + 9$  となるだけで因数分解が進まない。

そこで、 $x^4$  と 9 に着目すると、うまく因数分解できる。

$$\begin{aligned}x^4 + 2x^2 + 9 &= x^4 + 6x^2 + 9 - 4x^2 && \leftarrow 2x^2 = 6x^2 - 4x^2 \text{ と変形し、平方の形が作れるようする} \\ &= \underbrace{(x^2 + 3)^2}_{\text{平方の形にする}} - (2x)^2 && \leftarrow \bigcirc^2 - \Delta^2 \text{ の形} \\ &= \{(x^2 + 3) + 2x\} \{(x^2 + 3) - 2x\} = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)\end{aligned}$$

#### 複 2 次式の因数分解

複 2 次式  $ax^4 + bx^2 + c$  の因数分解には、次の 2 つの場合がある。

- i)  $x^2 = X$  とおくことにより因数分解できる場合
- ii)  $ax^4$  と  $c$  に着目し、 $bx^2$  の項を変形して因数分解できる場合



i) の方法でうまくいかない場合に、ii) の方法を試すと覚えておくとよい。詳しくは「複 2 次式の因数分解について (p.50)」を参照のこと。

【例題 51】 次の式を因数分解せよ。

1.  $x^4 + 7x^2 - 8$

2.  $x^4 + x^2 + 1$

## D. 2文字2次式の因数分解

降べきにしても共通因数が見つけれない場合でも、2次式の場合は『1次式の積の公式の逆利用』(p.34)を使って因数分解できることがある。

たとえば、 $2x^2 + 5xy + 3y^2 + 2x + 4y - 4$  という式の因数分解について考えてみよう。

まず、これを  $x$  について降べきの順に整理する。

$$2x^2 + (5y + 2)x + 3y^2 + 4y - 4$$

今までのように共通因数を作ることはできない。そこで、 $x$  を含まない項について因数分解する。

$$2x^2 + (5y + 2)x + (3y - 2)(y + 2)$$

『1次式の積の公式の逆利用』(p.34) のときと同じように、たすき掛けをする。

$x^2$  の係数2は  
1×2しかない

$$\begin{array}{r} 1 \times ? \rightarrow ? \\ 2 \times ? \rightarrow ? \end{array}$$

$5y + 2$  にしたい



定数項は  $(3y - 2) \times (y + 2)$  が  $(y + 2) \times (3y - 2)$  のどちらか  
 $\{- (3y - 2)\} \times \{- (y + 2)\}$  などは、 $y$  の係数が合わず不適

$1 \times 3y-2 \rightarrow 6y-4$	$1 \times y+2 \rightarrow 2y+4$
$2 \times y+2 \rightarrow 2y+4$	$2 \times 3y-2 \rightarrow 3y-2$
$8y \quad \times$	$5y+2 \quad \circ$

こうして、 $(2x + 3y - 2)(x + y + 2)$  と因数分解できることが分かる。



上のたすきがけの表を作るコツは、「ひとまず  $y$  の係数だけ考えること」にある。

【例題 52】 次の式を因数分解せよ。

1.  $x^2 + 4xy + 3y^2 + x + 5y - 2$

2.  $2x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y - 2$

## E. いろいろな因数分解

どの因数分解の手段を用いるかどうかは、だいたい次の優先順位で考えるとよい。方針がわからないときは、ひとまずこの順序で考えてみよう。

- (1) 共通因数を見つける
- (2) 次数の小さい文字に注目し、降べきの順に並べる。
- (3) 公式を使えないか考える

### 【練習 53：因数分解の練習～その 2～】

次の式を因数分解せよ。

(1)  $xy - x - y + 1$

(2)  $a^2 + b^2 + ac - bc - 2ab$

(3)  $a^4 + a^2b^2 + b^4$

(4)  $x^2 - xy - 12y^2 + 5x + y + 6$

【発展 54 : 因数分解の練習～その3～】

次の式を因数分解せよ.

①  $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

②  $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$

③  $a^4 + 64$

④  $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 4x + 7y - 2$

⑤  $(x^2 - 2x - 2)(x^2 - 2x - 6) - 12$

## 8. 式の値の計算

### A. $x + y$ , $xy$ , $x - y$ の値を利用する

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  を変形して, 等式  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$  を得る.

この等式を用いると,  $x$ ,  $y$  が一部の符号しか異ならないときの計算を, 簡単にできることがある.

たとえば,  $x = 2 + \sqrt{3}$ ,  $y = 2 - \sqrt{3}$  のとき,  $x + y = 4$ ,  $x - y = 2\sqrt{3}$ ,  $xy = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$  である. これを用いて,  $x^2 + y^2$ ,  $x^2y - xy^2$  の値は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy & x^3y - xy^3 &= xy(x^2 - y^2) \\ &= 4^2 - 2 \cdot 1 = 14 & &= xy(x + y)(x - y) = 1 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\end{aligned}$$

#### 【例題 55】

1.  $x = \sqrt{6} + \sqrt{3}$ ,  $y = \sqrt{6} - \sqrt{3}$  のとき, 以下の値を計算しなさい.

1)  $x + y$    2)  $xy$    3)  $x - y$    4)  $x^2 + y^2$    5)  $x^4y^2 - x^2y^4$

2.  $x = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ ,  $y = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$  のとき, 以下の値を計算しなさい.

1)  $x + y$    2)  $xy$    3)  $x - y$    4)  $x^2 - y^2$    5)  $x^4 + y^4$

$x^3 + y^3$  の計算も、『立方の公式 1(p.21)』『立方の公式 2(p.23)』を使って、計算を簡単にできる。  
 たとえば、 $x = 2 + \sqrt{3}$ ,  $y = 2 - \sqrt{3}$  のとき、 $x + y = 4$ ,  $x - y = 2\sqrt{3}$ ,  $xy = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$  である。

(解法 1) 立方の公式 1 を使う

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 14$  であるから

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= 4 \cdot (14 - 1) = 52 \end{aligned}$$

(解法 2) 立方の公式 2 を使う

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$  を変形して

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= 4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 52 \end{aligned}$$

これを応用して、 $x^5 + y^5$  の計算も、次のようにできる。

$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = x^5 + x^2y^3 + x^3y^2 + y^5$  を変形して

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^3 - x^3y^2 \\ &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 14 \cdot 52 - 1^2 \cdot 4 = 734 \end{aligned}$$

**【練習 56 : 3 次式の公式と式の値】**

$x = \sqrt{7} + \sqrt{2}$ ,  $y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$  のとき、以下の値を計算しなさい。

(1)  $x^2 + y^2$

(2)  $x^3 - y^3$

(3)  $x^4 + y^4$

(4)  $x^5 - y^5$

## B. ⑨⑩ 因数分解と式の値

因数分解には、式の因数を見えるようにする長所があった。この長所を生かせば、文字の値を整数や自然数に限った次のような問題を解くことができる。

### 【⑨⑩ 57 : 因数分解と式の値】

- ① 多項式  $F = ab - 3a + 2b - 6$  について、次の問いに答えなさい。
  - i.  $F$  を因数分解しなさい。
  - ii.  $F = 6$  を満たす自然数  $(a, b)$  の組をすべて求めなさい。
- ②  $mn + 2m - n = 3$  を満たす整数  $(m, n)$  の組をすべて求めなさい。



1. 開平法について

A. 開平法の手順

例として、 $\sqrt{823.69}$  の値を開平法で計算する。

- (1) 823.69 を根号の中に書き、「小数点を基準」にして「2桁ずつ」区切っていく。また、横にスペースをとっておく。
- (2) 一番左の数は8。2乗して8を超えない最大の数2を、右図のように3ヶ所に書く。
- (3)  $(2 \times 2 =) 2^2 = 4$  を8の下に書き、8から4を引く。そして、23を下に下ろす。  
また、その横で  $2 + 2 = 4$  を計算する。
- (4) 「4□」に「□」を掛けて「423」を超えない、最大の1桁の整数□を求める。  
 $48 \times 8 = 384 \leq 423 < 49 \times 9 = 441$   
であるので、□は8。これを3ヶ所に書き込む。
- (5)  $48 \times 8$ の結果384を423の下に書き、423から引く。そして、69を下に下ろす。さらに、小数点を打つ。  
また、 $48 + 8$ を横で計算しておく。
- (6) 「56□」に「□」を掛けて「3969」を超えない、最大の1桁の整数□を求める。  
 $567 \times 7 = 3969 \leq 3969 < 568 \times 8$   
より□は7であり、 $3969 - 567 \times 7 = 0$ なので計算は完了。  
 $\sqrt{823.69} = 28.7$ とわかる。  
(いつまでも0が現れないときは、計算を繰り返すことでより精密な近似値を求めることができる。)

$$(1) \sqrt{8 \mid 23 \mid 69}$$

$$(2) \begin{array}{r} 2 \\ \sqrt{8 \mid 23 \mid 69} \\ 4 \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{r} 2 \\ \sqrt{8 \mid 23 \mid 69} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 4 \leftarrow 2+2 \end{array}$$

$$(4) \begin{array}{r} 2 \ 8 \\ \sqrt{8 \mid 23 \mid 69} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 48 \\ 8 \end{array}$$

$$(5) \begin{array}{r} 2 \ 8 \cdot \\ \sqrt{8 \mid 23 \mid 69} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 48 \\ 8 \\ \hline 56 \leftarrow 48+8 \end{array}$$

$$(6) \begin{array}{r} 2 \ 8 \ 7 \\ \sqrt{8 \mid 23 \mid 69} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 48 \\ 8 \\ \hline 567 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}$$

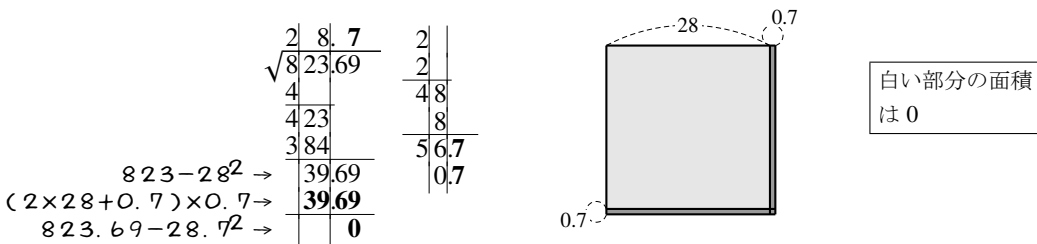
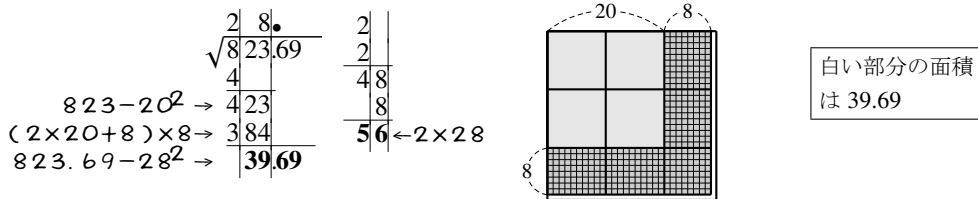
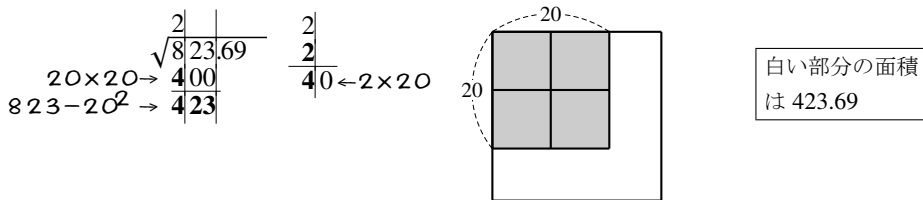
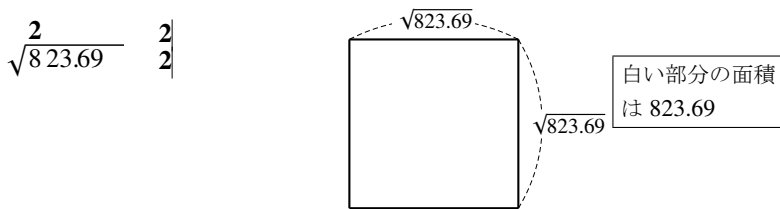
## B. 開平法とは

「開平」とは「ある数の平方根を求めること」であり、「開平法 (extraction of square root)」とは、その「開平」を筆算のような計算で求める方法である。いずれも和算<sup>\*29</sup>の時代から使われた用語であり、開平法は古くからそろばんによって用いられていた。

開平法の計算は、化学や物理において必要とされることがある。

## C. 開平法の仕組み

なぜ、前ページの開平法によって平方根が求められるのか、その仕組みを下に図で示しておく(途中の計算式の中に、実際の計算のときには必要のない数字があるので注意すること)。余裕のある人は、各自で考えてみよう。



<sup>\*29</sup> 吉田光由著「塵劫記(1627)」などが大きなきっかけとなって発達した、江戸時代の開国以前における日本の数学の総称。関孝和(1640?~1708)、建部賢弘(1664~1739)などの傑出した人物が現れた。和算においては、微分積分学を初めとする関数の概念こそ大きな流れを作らなかったものの、方程式論、数値計算などの分野においては同時代のヨーロッパの数学を先んじることもあった。

また、和算が庶民にも広く流行していた点は、数学の歴史において特筆すべき事柄である。開国以後の日本が、ヨーロッパの数学を吸収して初等教育に導入するまであまり時間がかからなかった要因には、和算の影響がたいへん大きかったと考えられている。

【練習 58：開平法】

$\sqrt{153664}$ ,  $\sqrt{1.1236}$ ,  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{9.8}$  の値を開平法によって計算せよ(無限に続く場合は, 四捨五入によって上から 3 桁まで計算せよ).



電卓で値を確かめながら, いろいろな値で練習しよう.

## 2. 複2次式の因数分解について

簡単のため、複2次式  $ax^4 + bx^2 + c$  を  $a\left(x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}\right)$  と変形し、 $\frac{b}{a} = A$ ,  $\frac{c}{a} = B$  とおいた

$$x^4 + Ax^2 + B \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

という複2次式の因数分解について考える<sup>\*30</sup>。

i)  $x^2 = X$  とおく方法で因数分解できる条件

$$x^4 + Ax^2 + B = X^2 + AX + B \qquad \leftarrow x^2 = X \text{ とおいた}$$

$$= \left(X + \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} + B = \left(X + \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2 - 4B}{4}$$

より、 $A^2 - 4B \geq 0$  ならば  $\bigcirc^2 - \Delta^2$  タイプの因数分解が可能となる。

ii)  $x^4$  と  $B$  に着目する方法で因数分解できる条件

$$x^4 + Ax^2 + B = x^4 + B + Ax^2$$

ここで、 $B > 0$  ならば

$$\begin{aligned} &= (x^2 + \sqrt{B})^2 - 2\sqrt{B}x^2 + Ax^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{B})^2 - (2\sqrt{B} - A)x^2 \end{aligned}$$

また、 $2\sqrt{B} - A > 0$  となるのは

$$2\sqrt{B} > A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A < 0) \\ \text{または} \\ (A \geq 0 \text{ かつ } 4B > A^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A < 0 \text{ かつ } (A^2 - 4B \geq 0 \text{ または } A^2 - 4B < 0)) \\ \text{または} \\ (A \geq 0 \text{ かつ } A^2 - 4B < 0) \end{cases}$$

のときであるから、条件を整理すると

$$\begin{cases} (B > 0 \text{ かつ } A < 0 \text{ かつ } (A^2 - 4B \geq 0 \text{ または } A^2 - 4B < 0)) \\ \text{または} \\ (B > 0 \text{ かつ } A \geq 0 \text{ かつ } A^2 - 4B < 0) \end{cases}$$

のときである。

以上 i), ii) を因数分解の手法として覚えやすくまとめると次のようになる。

$A^2 - 4B \geq 0$  のときは、 $x^2 = X$  とおくことにより因数分解でき、 $A^2 - 4B < 0$  のときは  $x^4$  と  $B$  に着目して変形することにより因数分解できる。特に、 $A^2 - 4B \geq 0$  かつ  $A < 0$  かつ  $B \geq 0$  のときには、どちらの方法でも因数分解できる。

<sup>\*30</sup> この複2次式 $\textcircled{1}$ が因数分解できれば、その式全体に  $a$  を掛けて、もとの複2次式  $ax^4 + bx^2 + c$  の因数分解が得られる。

# 索引

- の値
  - 関数, 69
- 1 次不等式, 54
- 因数, 29
- 因数分解, 29
- $n$  次式, 14
- 解
  - 1 次不等式の——, 54
  - 2 次不等式の——, 122
  - 2 次方程式の——, 61
- 外心, 178
- 外接円, 178
- 解の公式, 63
- 開平法, 48
- 角点, 161
- 関数, 69
- 既約分数, 3
- 共通因数, 29
- グラフ, 72
- 係数, 11
- 項, 13
- 降べきの順, 14
- コサイン, 147
- 最小値
  - 関数の, 70
- 最大値
  - 関数の, 70
- サイン, 147
- 座標軸, 71
- 座標平面, 71
- 三角比, 148
- 軸, 82
- 指数, 12
- 次数
  - 多項式の——, 14
  - 単項式の——, 11
- 指数法則, 12
- 始線, 161
- 自然数, 1
- 実数, 5
- 斜辺, 145
- 重解, 65
- 重根, 65
- 循環小数, 4
- 象限, 71
- 小数, 4
- 昇べきの順, 14
- 数直線, 2
- 正角錐, 200
- 正弦定理, 178
- 整式, 13
- 整数, 2
- 正多角錐, 200
- 正多面体, 198
- 接する, 113, 120
- 接点, 113, 120
- 相似, 192
- 相似比, 192
- 対辺, 145
- 多項式, 13
- たすきがけ, 34
- 単位円, 161
- 単項式, 11
- タンジェント, 146
- 値域, 70
- 稠密性, 4
- 頂点, 82
- 直角三角錐, 196
- 定義域, 70
- 定数, 71
- 定数項, 13
- 底辺, 145
- 展開, 16
- 動径, 161
- 同類項, 13
- 解く
  - 1 次不等式を——, 55
  - 2 次不等式を——, 122
  - 2 次方程式を——, 61
  - 連立 3 元 1 次方程式を——, 92
  - 連立不等式を——, 56
- 凸, 82
- 内接円, 187
- 2 次関数, 82
- 2 次不等式, 122
- 2 次方程式, 61
- 2 重根号, 33
- 背理法, 6
- 繁分数, 149
- 判別式
  - 2 次式の——, 118
  - 2 次方程式の——, 65
- 比, 3
- 複 2 次式, 40
- 複分数, 149
- 不等号, 52
- 不等式, 52
  - の移項, 55
  - の右辺, 52
  - の左辺, 52
  - の両辺, 52
- 平方, 12
- 平方完成, 87
- 変数, 69
- 方程式
  - 放物線の——, 83
- 放物線, 82
- 無限小数, 4
- 無理数, 5
- 約分, 3
- 有限小数, 4
- 有理化, 19
- 有理数, 3
- 余弦定理, 173
  - 第 1——, 205
  - 第 2——, 173
- 立方, 12
- 累乗, 12
- 連続性, 5
- 連立 3 元 1 次方程式, 92, 94
- 連立不等式, 56