13th-note
2011年1月センター試験
数学ＩＡ・解説

Ver1.10（2011-1-18）

第 1 問 ［1］ $a = 3 + 2\sqrt{2}$ を代入すると

$$\frac{1}{a} = \frac{1\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)}{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}$$

◀ 13th-note 数学 I (p.19)『分母の有理化』

$$= \frac{3-2\sqrt{2}}{3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = {}_{ア}\underline{\mathbf{3}} - \underline{\mathbf{2\sqrt{2}}}_{イウ}$$

◀ 13th-note 数学 I (p.18)『和と差の積の公式』

$b = 2 + \sqrt{3}$ を代入すると

$$\frac{1}{b} = \frac{1\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = {}_{エ}\underline{\mathbf{2}} - \underline{\mathbf{\sqrt{3}}}_{オ}$$

さらに

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} - \frac{b}{a} &= a\cdot\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\cdot b\\ &= \left(3+2\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) - \left(3-2\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\\ &= \left(6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right) - \left(6+3\sqrt{3}-4\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)\\ &= -3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}\\ &= {}_{カキ}\underline{\mathbf{8\sqrt{2}}} - \underline{\mathbf{6\sqrt{3}}}_{クケ}\end{aligned}$$

◀ $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab}$ に代入すると，計算が大変．直前の $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ を使えないか，考えるとよい．

◀ 展開時に，− の符号に注意する

不等式 $|2abx - a^2| < b^2$ について，絶対値を外すと

$$-b^2 < 2abx - a^2 < b^2 \qquad \Leftrightarrow a^2 - b^2 < 2abx < a^2 + b^2$$

◀ 13th-note 数学 I (p.76)『絶対値と方程式・不等式の関係』

となるが，両辺を $2ab(>0)$ で割ると

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) < x < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

◀ 13th-note 数学 I (p.51)『不等式の性質』

$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$ であり

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{b}{a} &= \left(3+2\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) + \left(3-2\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\\ &= 6\cancel{-3\sqrt{3}}\cancel{+4\sqrt{2}}-2\sqrt{6}+6\cancel{+3\sqrt{3}}\cancel{-4\sqrt{2}}-2\sqrt{6}\\ &= 12-4\sqrt{6}\end{aligned}$$

◀ 上で計算した $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ のうち，後ろ半分の符号を変えるだけでよい．

であるから

$$① \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(8\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right) < x < \frac{1}{2}\left(12-4\sqrt{6}\right)$$

$${}_{コサ}\underline{\mathbf{4\sqrt{2}}} - \underline{\mathbf{3\sqrt{3}}}_{シス} < x < {}_{セ}\underline{\mathbf{6}} - \underline{\mathbf{2\sqrt{6}}}_{ソタ}$$

「一見簡単そうに見える．しかし，$a+b$ や ab が整数になるような，よくある問題ではないため，計算に戸惑ってしまう可能性が十分にある問題になっている．
前半はまだ，直接計算すればなんとかなるかもしれないが，後半の $|2abx - a^2| < b^2$ については，a, b に代入する前にある程度工夫しないと，計算に大変時間がかかる．
普段から，計算の工夫をしようとしているかが問われる，難しい問題になっている．」

$\boxed{\text{ア}}$: 3, $\boxed{\text{イ}}$: 2, $\boxed{\text{ウ}}$: 2（以上２点）, $\boxed{\text{エ}}$: 2, $\boxed{\text{オ}}$: 3（以上２点）

$\boxed{\text{カ}}$: 8, $\boxed{\text{キ}}$: 2, $\boxed{\text{ク}}$: 6, $\boxed{\text{ケ}}$: 3（以上２点）

$\boxed{\text{コ}}$: 4, $\boxed{\text{サ}}$: 2, $\boxed{\text{シ}}$: 3, $\boxed{\text{ス}}$: 3（以上２点）

$\boxed{\text{セ}}$: 6, $\boxed{\text{ソ}}$: 2, $\boxed{\text{タ}}$: 6（以上２点）

［2］ (1) 0 $a=0,\ b=0$ のとき，q について「$0<1$ または $0<2$」となり成立し p も「$0+0<5$」となり成立するので，反例になってない．

1 $a=1,\ b=0$ のとき，q について「$1<1$ または $1<2$」となり成立し p も「$1+1<5$」となり成立するので，反例になってない．

2 $a=0,\ b=1$ のとき，q について「$1<1$ または $2<2$」となり成立せず，仮定を満たさないので反例になってない．

3 $a=1,\ b=1$ のとき，q について「$2<1$ または $1<2$」となり成立し，p は「$4+1<5$」となり成立しないので，反例になっている．

よって，$\underline{\mathbf{3}}_{\text{チ}}$ である．

◂ 13th-note 数学A (p.18)
『条件の「または」と「かつ」』

(2) 命題「$p \Rightarrow q$」の対偶は「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」である．

ここで，q の否定は

「$|a+b|<1$ でない，かつ，$|a-2b|<2$ でない」

$\Leftrightarrow$「$|a+b| \geqq 1$，かつ，$|a-2b| \geqq 2$」

p の否定は $(a+b)^2+(a-2b)^2 \geqq 5$ であるから，$\underline{\mathbf{4}}_{\text{ツ}}$，$\underline{\mathbf{7}}_{\text{テ}}$ である．

◂ 13th-note 数学A (p.25)
『対偶とは何か』

◂ 13th-note 数学A (p.19)
『ド・モルガンの法則』

◂ 13th-note 数学A (p.18)
『条件の否定』

(3) 命題「$p \Rightarrow q$」について，(2) より，その対偶は

「$|a+b| \geqq 1$ かつ $|a-2b| \geqq 2$ ならば，

$(a+b)^2+(a-2b)^2 \geqq 5$」

となる．$(a+b)^2+(a-2b)^2 \geqq 1^2+2^2=5$ より，これは真．つまり，p は q の十分条件である．

命題「$q \Rightarrow p$」は，(1) より反例が存在するので偽．

以上より，「十分条件であるが，必要条件ではない」の $\underline{\mathbf{2}}_{\text{ト}}$ である．

◂ 13th-note 数学A (p.22)
『十分条件と必要条件』

「条件 $p,\ q$ が複雑そうな形をしているが，命題について基本を中心に聞かれている問題．命題について基本が分かっており，見た目にさえ惑わされなければ，解ける問題である」

$\boxed{\text{チ}}$：3（３点），$\boxed{\text{ツ}}$：4（２点），$\boxed{\text{テ}}$：7（２点），$\boxed{\text{ト}}$：2（３点）

G の軸を求めるため①式を変形すると

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c$$

◀ 13th-note 数学Ⅰ (p.85)
『平方完成』

であるから，G の軸は $x = -\dfrac{b}{2a}$ である．また

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 12bx \\ &= -3\left(x^2 - 4bx\right) = -3\left\{(x - 2b)^2 - 4b^2\right\} \end{aligned}$$

となって，軸 $x = 2b$ が $x = -\dfrac{b}{2a}$ と一致することがわかる．よって

$$2\cancel{b} = -\frac{\cancel{b}}{2a} \iff 4a = -1 \qquad a = \underline{\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{4}}}_{\text{アイウ}}$$

◀ b を消去して，両辺を a 倍した．

G 式に，$(x,\ y) = (1,\ 2b - 1)$ と $a = -\dfrac{1}{4}$ を代入して

◀ 13th-note 数学Ⅰ (p.90)
『準備 1 〜方程式への代入』

$$2b - 1 = -\frac{1}{4} \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$\iff b - \underline{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}}_{\text{エオ}} = c$$

◀ このように，c が右辺にきても構わない

以上より，G の方程式は次のようになる．

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + b - \frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

(1) G と x 軸が異なる 2 点で交わるので，②の判別式が正となればよいから

◀ 13th-note 数学Ⅰ (p.110,111)
『放物線の判別式 D』
【別解】$y = -\dfrac{1}{4}(x - 2b)^2 + b^2 + b - \dfrac{3}{4}$ から
頂点の y 座標 $b^2 + b - \dfrac{3}{4} > 0$ でも良い．

$$D = b^2 - \cancel{4} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{4}}\right)\left(b - \frac{3}{4}\right) > 0$$

$$\iff b^2 + b - \frac{3}{4} > 0$$

$$\iff 4b^2 + 4b - 3 > 0$$

$$\iff (2b - 1)(2b + 3) > 0$$

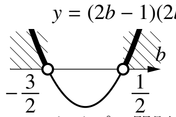
$$\iff b < \underline{\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}}_{\text{カキク}}, \quad \underline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}_{\text{ケコ}} < b$$

◀ 両辺を 4 倍した後に，
13th-note 数学Ⅰ (p.34,35)
『たすきがけ』

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & -1 & \to & -2 \\ 2 & & 3 & \to & 6 \\ \hline & & & & 4 \end{array}$$

◀ 13th-note 数学Ⅰ (p.120,121)
『2 次不等式の解法の基本』

$y = (2b - 1)(2b + 3)$



G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるためには，G が上に凸であるから

$D > 0$，軸が正，$x = 0$ のとき $y < 0$

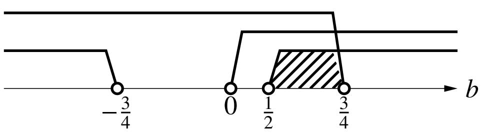
が成り立たないといけない．

軸について，$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{b}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = 2b$ であるから $b > 0$

◀ このタイプの問題は，13th-note 数学Ⅰで近く取り上げます．
◀ 13th-note 数学Ⅰ (p.145)
『分数と分数の比 — 複分数』

$x = 0$ のとき，$y = b - \dfrac{3}{4} < 0$ であるから $b < \dfrac{3}{4}$.

以上を連立すると，次のようになる．



よって，$\underline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}_{\text{サシ}} < b < \underline{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}}_{\text{スセ}}$ である．

(2) G の軸は $2b$ であったから，$0 \leqq x \leqq b$ における G のグラフは右欄外の図のようになり，最小値は $x = 0$ でとると分かる．
$x = 0$ のとき，$y = 0 + 0 + b - \dfrac{3}{4}$ であるので，

$$-\frac{1}{4} = b - \frac{3}{4} \qquad \therefore b = \underbrace{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}_{\text{ソタ}}$$

また，$x \geqq b$ における G のグラフは右欄外の図のようになり，$x = 2b$ のときに最大値をとる．
$x = 2b$ のとき，$y = -\dfrac{1}{4} \cdot (2b)^2 + 2b^2 + b - \dfrac{3}{4}$ であるので

$$\begin{aligned} 3 &= -b^2 + 2b^2 + b - \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow 0 &= b^2 + b - \frac{15}{4} \\ \Leftrightarrow &\quad 4b^2 + 4b - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow &\quad (2b + 5)(2b - 3) = 0 \end{aligned}$$

となって，$0 < b$ より $b = \underbrace{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}_{\text{チツ}}$ となる．

G_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \\ &= -\frac{1}{4}(x^2 - 2x) - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{4}\left\{(x-1)^2 - 1\right\} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(x-1)^2 \end{aligned}$$

であるから，G_1 の頂点は $(1, 0)$ になる．また，G_2 の方程式は

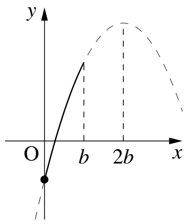
$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \\ &= -\frac{1}{4}(x^2 - 6x) + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{1}{4}\left\{(x-3)^2 - 9\right\} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 3 \end{aligned}$$

であるから，G_2 の頂点は $(3, 3)$ になる．つまり

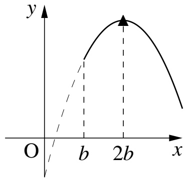
$$\begin{array}{ccc} G_1 \text{ の頂点} & \xrightarrow[y\text{ 軸方向に}\mathbf{3}_{\text{ト}}]{x\text{ 軸方向に}\mathbf{2}_{\text{テ}}} & G_2 \text{ の頂点} \\ (1,\ 0) & & (3,\ 3) \end{array}$$

のように移動すると分かる．

◀ 13th-note 数学Ⅰ (p.102-105)
◀『文字定数を含む 2 次関数の最大・最小』



◀



◀ 13th-note 数学Ⅰ (p.89,98)
『2 次関数の平行移動』
【別解】G_1 を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動して G_2 になったとおくと

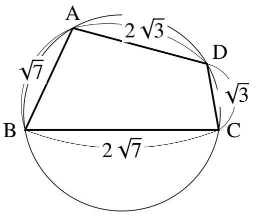
$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4}(x-p)^2 + \frac{1}{2}(x-p) - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{4}(x^2 - 2px + p^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}p - \frac{1}{4} + q \\ &= -\frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\right)x \\ &\quad - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{4} + q \end{aligned}$$

が G_2 に一致する．x の係数を比較し $\dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ から $p = 2$，
定数項を比較して $-\dfrac{1}{4}p^2 - \dfrac{1}{2}p - \dfrac{1}{4} + q = \dfrac{3}{4}$
から $q = 3$
詳しくは 13th-note 数学Ⅰ (p.97)
『文字の置き換えで平行移動を考える』

「2 次関数の理解力も，計算力も問われる問題．分母に文字がある分数式も見られ，複分数などの計算でミスをすると，先へ進みづらくなる．
(1) では x 軸との共有点について聞かれたと思うと，(2) では，文字定数を含む最大・最小を聞かれ，軸と定義域の関係をよく見極めてグラフを書く必要がある．最後の平行移動も，聞かれていることはたいしたことがないが，計算に時間がかかる．」

$\boxed{\text{ア}}$: −，$\boxed{\text{イ}}$: 1，$\boxed{\text{ウ}}$: 4（以上３点），$\boxed{\text{エ}}$: 3，$\boxed{\text{オ}}$: 4（以上２点）
$\boxed{\text{カ}}$: −，$\boxed{\text{キ}}$: 3，$\boxed{\text{ク}}$: 2（以上２点），$\boxed{\text{ケ}}$: 1，$\boxed{\text{コ}}$: 2（以上２点）
$\boxed{\text{サ}}$: 1，$\boxed{\text{シ}}$: 2（以上３点），$\boxed{\text{ス}}$: 3，$\boxed{\text{セ}}$: 4（以上３点）
$\boxed{\text{ソ}}$: 1，$\boxed{\text{タ}}$: 2（以上４点），$\boxed{\text{チ}}$: 3，$\boxed{\text{ツ}}$: 2（以上４点）
$\boxed{\text{テ}}$: 2，$\boxed{\text{ト}}$: 3（以上２点）

第 3 問　図を描くと，右欄外のようになる．



(1) △ABC について，余弦定理より

$$x^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cos\theta$$
$$= 7 + 28 - 28\cos\theta = \underline{\mathbf{35}}_{\text{アイ}} - 28\cos\theta$$

◀ 13th-note 数学Ⅰ (p.170,171)『余弦定理』

また，△ABC について，余弦定理より

$$x^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cos(180^\circ - \theta)$$
$$= 15 + \underline{\mathbf{12}}_{\text{ウエ}}\cos\theta$$

◀ 13th-note 数学Ⅰ (p.184,185)『円に内接する四角形』

よって，これら 2 式を合わせて

$$x^2 = 35 - 28\cos\theta = 15 + 12\cos\theta$$
$$\Leftrightarrow 20 = 40\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta = \underline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}_{\text{オカ}}$$

であり，$x^2 = 15 + \cancel{12}^{6}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 21$ であるから，$x = \underline{\mathbf{\sqrt{21}}}_{\text{キク}}$ になる．

また，△ABC について，正弦定理を用いると，$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，円 O の半径 R について

$$2R = \frac{AC}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{7}$$

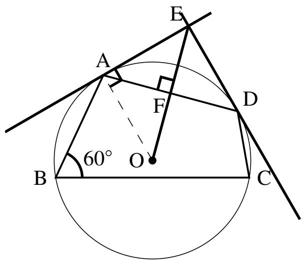
となるから，$R = \underline{\mathbf{\sqrt{7}}}_{\text{ケ}}$ である．

◀ BC = $2\sqrt{7}$, $R = \sqrt{7}$ から，円の中心 O が辺 BC の中点であると気づくと，これ以降の図は描きやすい．
そもそも，AC = $\sqrt{21}$ から，△ABC の 3 辺の比が $\sqrt{7} : 2\sqrt{7} : \sqrt{21} = 1 : 2 : \sqrt{3}$ であると気づくと，$R = \sqrt{7}$ すらも計算せずすぐに求められる．

四角形 ABCD の面積は

$$(\text{四角形 ABCD}) = \triangle ABC + \triangle ACD$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{7}\cdot\cancel{2}\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{3}\cdot\cancel{2}\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{7}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3} = \underline{\mathbf{5\sqrt{3}}}_{\text{コサ}}$$

となる．



(2) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ より ∠ABC = 60° となって，図は右欄外のようになる．

◀

直線 AE は円 O の接線なので，∠OAE = $\underline{\mathbf{90^\circ}}_{\text{シス}}$

◀ 13th-note 数学A (p.111)『円の接線』

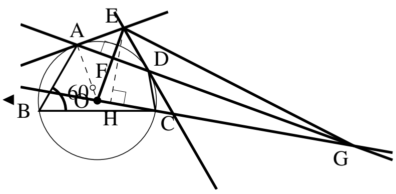
また，辺 AD は円 O の弦なので，線分 OE は AD の垂直二等分線になるから ∠AFE = $\underline{\mathbf{90^\circ}}_{\text{セソ}}$

◀ 13th-note 数学A (p.110)『弦の垂直二等分線』

ここで，△OAF と △OEA は ∠O を共有する直角三角形なので，2 角が等しいから △OAF ∽ △OEA となる．よって，

◀【別解あり＞※１】

$$OA : OF = OE : OA$$
$$\Leftrightarrow \ OF\cdot OE = OA^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 = \underline{\mathbf{7}}_{\text{タ}}$$



◀

さらに G，H を書けば右欄外の図のようになる．∠EFG = ∠EHG = 90° に着目して，円周角の定理の逆より，E，G，F，H が同一円周上にあると分かるので，$\underline{\mathbf{2}}_{\text{チ}}$．

よって，△OFH と △OGE は，∠O を共有する直角三角形となり，△OFH ∽ △OGE とわかるから

◀【別解あり＞※２】

$$OF : OH = OG : OE$$
$$\Leftrightarrow \ OG\cdot OH = OE\cdot OF = \underline{\mathbf{7}}_{\text{ツ}}$$

「(1) は標準的な三角比の問題，(2) は平面図形の問題，最後の G，H あたりは図が描きづらいが，$\triangle OAF \backsim \triangle OEA$ が見抜けていれば，同じような相似があるのではないかと推測もできる.」

$\boxed{\text{ア}}$: 3，$\boxed{\text{イ}}$: 5（以上２点），$\boxed{\text{ウ}}$: 1，$\boxed{\text{エ}}$: 2（以上３点）

$\boxed{\text{オ}}$: 1，$\boxed{\text{カ}}$: 2（以上３点），$\boxed{\text{キ}}$: 2，$\boxed{\text{ク}}$: 1（以上３点）

$\boxed{\text{ケ}}$: 7（３点），$\boxed{\text{コ}}$: 5，$\boxed{\text{サ}}$: 3（以上３点）

$\boxed{\text{シ}}$: 9，$\boxed{\text{ス}}$: 0（以上２点），$\boxed{\text{セ}}$: 9，$\boxed{\text{ソ}}$: 0（以上２点）

$\boxed{\text{タ}}$: 7（３点），$\boxed{\text{チ}}$: 2（３点），$\boxed{\text{ツ}}$: 7（３点）

【別解】

（※１）

$\triangle EAF$ は直角三角形なので，$\triangle EAF$ の外接円 C_1 の中心は，線分 EA の中点 M にある．ここで，$\angle MAO = 90°$ なので，直線 OA は円 C_1 の接線である．よって，方べきの定理より

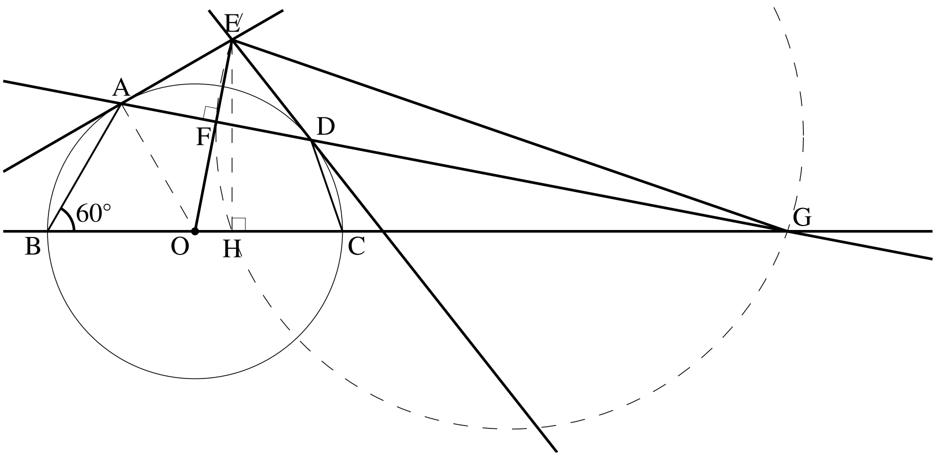
$$OF \cdot OE = OA^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 = \underline{7}_{\text{タ}}$$

（※２）

4 点 E，F，H，G を通る円を C_2 とすると，直線 OEF は円 C_2 と E，F で交わり，直線 OHG は円 C_2 と G，H で交わるので，方べきの定理より

$$OG \cdot OH = OE \cdot OF = \underline{7}_{\text{ツ}}$$

【参考】厳密な図は，次のようになる．



第 4 問

さいころは 6 までしかないので

$p = \dfrac{4}{6} = \underline{\mathbf{\dfrac{2}{3}}}_{\text{アイ}}$，$q = \dfrac{2}{6} = \underline{\mathbf{\dfrac{1}{3}}}_{\text{ウエ}}$

(1) p が 3 回起き，q が 5 回起きる重複試行になるので

$${}_8\mathrm{C}_3 p^3 q^5 = {}_{\text{オカ}}\underline{\mathbf{56}}p^3q^5$$

◀ 13th-note 数学A (p.96,97)『重複試行』

1 回目に 4 以下が出る確率は p，2 回目以降は p が 2 回起き，q が 5 回起きればよいので

$$p \cdot {}_7\mathrm{C}_2 p^2 q^5 = {}_{\text{キク}}\underline{\mathbf{21}}p^3q^5$$

1 回目に 5 以上が出る確率は q，2 回目以降は p が 3 回起き，q が 4 回起きればよいので

$$q \cdot {}_7\mathrm{C}_3 p^3 q^4 = {}_{\text{ケコ}}\underline{\mathbf{35}}p^3q^5$$

(2) (1) について，$56p^3q^5 = 21p^3q^5 + 35p^3q^5$ であるから，${}_8\mathrm{C}_3 = {}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_3$ となるので，$\underline{\mathbf{2}}_{\text{サ}}$ である．

さらに，${}_8\mathrm{C}_3 = {}_8\mathrm{C}_5$，${}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_3 = {}_7\mathrm{C}_5 + {}_7\mathrm{C}_4$ が成り立つので，$\underline{\mathbf{6}}_{\text{シ}}$ である．

◀ もちろん，0から7まですべて値を計算して比べても良い．
p が 3 回起こるのは，初めに p が起き，残りの 7 回で p が 2 回起こる場合か，初めに q が起き，残りの 7 回で p が 3 回起こる場合しかありえず，互いに排反である．
または，${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ であることからも分かる．詳しくは 13th-note 数学A (p.78)『パスカルの三角形』

(3) 得点が 6 点となるのは，初めの 5 回 q が起き，残りの 3 回全てで p が出た場合なので，確率は $p^{3}{}_{\text{ス}}\, q^{5}{}_{\text{セ}}$ である．

得点が 3 点となるのは，初めの 2 回 q が起き，次に p が起き，残りの 5 回で p がちょうど 2 回出た場合なので，確率は

$$q^2 \cdot p \cdot {}_5\mathrm{C}_2 p^2 q^3 = \underline{\mathbf{10}}_{\text{ソタ}} p^3q^5$$

である．

同様にして，

得点が 1 点となるのは $p \cdot {}_7\mathrm{C}_2 p^2 q^5 = 21p^3q^5$

得点が 2 点となるのは $q \cdot p \cdot {}_6\mathrm{C}_2 p^2 q^4 = 15p^3q^5$

得点が 4 点となるのは $q^3 \cdot p \cdot {}_4\mathrm{C}_2 p^2 q^2 = 6p^3q^5$

得点が 5 点となるのは $q^4 \cdot p \cdot {}_3\mathrm{C}_2 p^2 q = 3p^3q^5$

であるから，次のような確率分布の表が書ける．

◀ 13th-note 数学A (p.100-102)『期待値』

得点	0	1	2	3
確率	他	$21p^3q^5$	$15p^3q^5$	$10p^3q^5$

4	5	6	計
$6p^3q^5$	$3p^3q^5$	p^3q^5	1

よって，求める期待値は

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 21p^3q^5 + 2 \cdot 15p^3q^5 + 3 \cdot 10p^3q^5 \\
&\quad + 4 \cdot 6p^3q^5 + 5 \cdot 3p^3q^5 + 6 \cdot p^3q^5 \\
=\ & (21 + 30 + 30 + 24 + 15 + 6)p^3q^5 \\
=\ & 126 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \\
=\ & \cancel{126}^{14} \cdot \frac{2^3}{\cancel{3^8}\,3^6} = \frac{14 \cdot 8}{729} = \underline{\mathbf{\frac{112}{729}}}_{\text{チツテトナニ}}
\end{aligned}$$

◀ $p = \dfrac{2}{3}$，$q = \dfrac{1}{3}$ はまだ代入しない方が良い．

である．

「(1) は，基本的な重複試行の問題，(2) は，${}_n\mathrm{C}_r$ の性質を聞いた問題．(3) も素直に考えればさほど難しくないが，p, q へ代入するタイミングを間違えると大変なことになる.」

$\boxed{\text{ア}}$: 2, $\boxed{\text{イ}}$: 3（以上２点）, $\boxed{\text{ウ}}$: 1, $\boxed{\text{エ}}$: 3（以上２点）

$\boxed{\text{オ}}$: 5, $\boxed{\text{カ}}$: 6（以上２点）, $\boxed{\text{キ}}$: 2, $\boxed{\text{ク}}$: 1（以上３点）

$\boxed{\text{ケ}}$: 3, $\boxed{\text{コ}}$: 5（以上３点）, $\boxed{\text{サ}}$: 2, $\boxed{\text{シ}}$: 6（２点×２，順不同）

$\boxed{\text{ス}}$: 3, $\boxed{\text{セ}}$: 5（以上２点）, $\boxed{\text{ソ}}$: 1, $\boxed{\text{タ}}$: 0（以上３点）

$\boxed{\text{チ}}$: 1, $\boxed{\text{ツ}}$: 1, $\boxed{\text{テ}}$: 2, $\boxed{\text{ト}}$: 7, $\boxed{\text{ナ}}$: 2, $\boxed{\text{ニ}}$: 9（以上４点）