13th-note
2011年1月センター試験
数学ＩＩＢ・解説

この教材を使う際は

- 表示 : 原著作者のクレジット（「13th-note」または「13th-note & www.ftext.org」）を表示してください.
- 継承 : この教材を改変した結果生じた教材には，必ず，原著作者のクレジット（「13th-note」または「13th-note & www.ftext.org」）を表示してください.

Ver1.50（2011-1-20）

第６問は近日掲載します

第 1 問 ［1］ $t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の両辺を 2 乗して

$$
\begin{aligned}
t^2 &= \sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta\\
&= {}_{\text{ア}}\underline{\mathbf{2}}\cos^2\theta+{}_{\text{イウ}}\underline{\mathbf{2\sqrt{3}}}\sin\theta\cos\theta+\underline{\mathbf{1}}_{\text{エ}}
\end{aligned}
$$

◀ 13th-note 数学ＩＩ第 4 章 (p.11)『三角関数の相互関係』

一方，y を変形すると，$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ より

◀ 13th-note 数学ＩＩ第 4 章 (p.29)『倍角の公式』

$$
\begin{aligned}
y &= 2\cos^2\theta-1+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta\\
&= (2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+1)-2-2(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)\\
&= t^2-{}_{\text{オ}}\underline{\mathbf{2}}t-{}_{\text{カ}}\underline{\mathbf{2}}
\end{aligned}
$$

◀ 逆に，t^2 を 2θ で表わし

$$
\begin{aligned}
t^2 &= (\cos 2\theta+1)+\sqrt{3}\sin 2\theta+1\\
&= \cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta+2
\end{aligned}
$$

と変形して，y に代入しても良い.

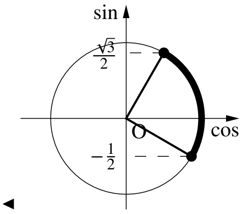
となる．また

$$
\begin{aligned}
t &= 2\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos\frac{\pi}{3}}\sin\theta+\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\frac{\pi}{3}}\cos\theta\right)\\
&= {}_{\text{キ}}\underline{\mathbf{2}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{\underline{\mathbf{3}}_{\text{ク}}}\right)
\end{aligned}
$$

◀ 13th-note 数学ＩＩ第 4 章 (p.36,37)『三角関数の合成』

である．$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0$ が定義域だったので

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq 0+\frac{\pi}{3}\\
\Leftrightarrow\ &-\frac{\pi}{{}_{\text{ケ}}\underline{\mathbf{6}}}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$



となるから，t の取り得る値の範囲は，右欄外の図より ◀

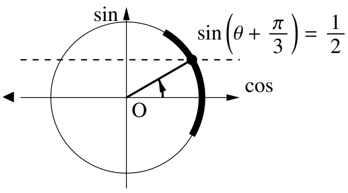
$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &{}_{\text{コサ}}\underline{\mathbf{-1}}\leqq t\leqq\underline{\mathbf{\sqrt{3}}}_{\text{シ}}
\end{aligned}
$$

◀ 両辺を 2 倍した

ここで，y の式を平方完成すると

$$
y=t^2-2t-2=(t-1)^2-3
$$

となって，右欄外のようなグラフになるから $t=\underline{\mathbf{1}}_{\text{ス}}$ のとき，最小値$\underline{\mathbf{-3}}_{\text{ソタ}}$をとる．このときの θ は



$$
\begin{aligned}
t=1 &\Leftrightarrow 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1\\
&\Leftrightarrow \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

◀

であるから，$\theta=-\dfrac{\pi}{\underline{\mathbf{6}}_{\text{セ}}}$ になる.

「基本的な三角関数の問題．教科書レベルのことをきちんと理解しておけば解ける問題.」

$\boxed{\text{ア}}$: 2，$\boxed{\text{イ}}$: 2，$\boxed{\text{ウ}}$: 3，$\boxed{\text{エ}}$: 1（以上２点），$\boxed{\text{オ}}$: 2，$\boxed{\text{カ}}$: 2（以上２点）
$\boxed{\text{キ}}$: 2，$\boxed{\text{ク}}$: 3（以上２点），$\boxed{\text{ケ}}$: 6（１点），$\boxed{\text{コ}}$: −，$\boxed{\text{サ}}$: 1（以上２点）
$\boxed{\text{シ}}$: 3（２点），$\boxed{\text{ス}}$: 1（１点），$\boxed{\text{セ}}$: 6（２点），$\boxed{\text{ソ}}$: −，$\boxed{\text{タ}}$: 3（以上１点）

［2］ 条件①について

$$\log_2 \sqrt{x} = \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_2 x = \frac{1}{2}X$$

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{1}{2}X$$

であるから

$$① \Leftrightarrow 12 \cdot \left(\frac{1}{2}X\right)^2 - 7 \cdot \frac{1}{2}X - 10 > 0$$

$$\Leftrightarrow 6X^2 - \underset{\text{チ}}{\underline{\mathbf{7}}}X - \underset{\text{ツテ}}{\underline{\mathbf{20}}} > 0$$

$$(3X+4)(2X-5) > 0 \qquad X < -\underset{\text{トナ}}{\underline{\mathbf{\frac{4}{3}}}},\quad \underset{\text{ニヌ}}{\underline{\mathbf{\frac{5}{2}}}} < X$$

◀ 両辺 2 倍し，X^2 の係数を 6 に合わせた

◀ 13th-note 数学Ⅰ (p.34,35)
『たすきがけ』 $\begin{array}{ccccc} 3 & \times & 4 & \to & 8 \\ 2 & & -5 & \to & -15 \\ & & & & \overline{-7} \end{array}$

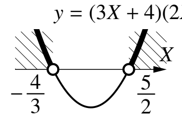
となる．これを満たす最小の自然数 x は，$X > 0$ の範囲にあるので

$$\frac{5}{2} < X \Leftrightarrow \frac{5}{2} < \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{5}{2}} < x$$

◀ 13th-note 数学Ⅰ (p.120,121)
『2 次不等式の解法の基本』

$y = (3X+4)(2X-5)$



$2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2} = 4 \cdot 1.414 \cdots = 5.656\cdot$ であるから，①を満たす最小の自然数 x は $\underset{\text{ネ}}{\underline{\mathbf{6}}}$ である．

次に，条件②について

$x = 10$ のとき，$x + \log_3 x = 10 + \log_3 10 < 10 + \log_3 27 = 13$

$x = 11$ のとき，$x + \log_3 x = 11 + \log_3 11 < 11 + \log_3 27 = 14$

$x = 12$ のとき，$x + \log_3 x = 12 + \log_3 12 > 12 + \log_3 9 = 14$

であるから，最大の自然数は $\underset{\text{ノハ}}{\underline{\mathbf{11}}}$ になる．

◀ x も $\log_3 x$ も x についての増加関数であり，答えは 2 桁と分かるので，10 から順に調べていく

「X の範囲を出すまでは，基本的な対数を含む 2 次不等式の問題．x の範囲を自然数で求めるときに，対数の定義を改めて聞かれている．

②の方程式は，ぱっと見て厳密に解けないことが分かるとよい．あとは，不等式の意味が分かっていればよい．」

$\boxed{\text{チ}}$: 7（２点），$\boxed{\text{ツ}}$: 2，$\boxed{\text{テ}}$: 0（以上２点），$\boxed{\text{ト}}$: 4，$\boxed{\text{ナ}}$: 3（以上２点）

$\boxed{\text{ニ}}$: 5，$\boxed{\text{ヌ}}$: 2（以上２点），$\boxed{\text{ネ}}$: 6（３点），$\boxed{\text{ノ}}$: 1，$\boxed{\text{ハ}}$: 1（以上４点）

第 2 問

C について $y' = 2x$ であるから，$\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線 l の方程式は

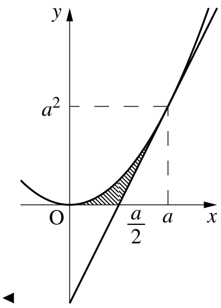
$$y - a^2 = 2a(x-a) \Leftrightarrow y = {}_{\text{アイ}}\underline{\mathbf{2a}}x - a^{\underline{2}}{}_{\text{ウ}}$$

になる．これが x 軸と交わるのは，$y = 0$ のときなので

$$0 = 2ax - a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

となるから，$\mathrm{Q}\left({}_{\text{エオ}}\underline{\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}},\ \underline{\mathbf{0}}_{\text{カ}}\right)$ である．

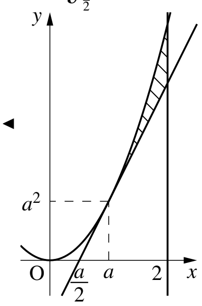
$a > 0$ のとき，$C,\ l$ のグラフは右欄外のようになるので，



$$\begin{aligned} S &= \int_0^a x^2 dx - \frac{1}{2}\cdot\left(a - \frac{1}{2}a\right)\cdot a^2 \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \frac{a^3}{4} \\ &= \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4} = \frac{a^{\underline{3}_{\text{キ}}}}{{}_{\text{クケ}}\underline{\mathbf{12}}} \end{aligned}$$

◀【別解】S を求める方法は，以下でも良い．
$\displaystyle\int_0^a \left\{x^2 - (2ax - a^2)\right\} dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot|-a^2|$
又は $\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^a \left\{x^2 - (2ax - a^2)\right\} dx + \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 dx$

$a < 2$ のとき，$C,\ l$ のグラフは右欄外のようになるので



$$\begin{aligned} T &= \int_a^2 \{x^2 - (2ax - a^2)\}dx \\ &= \int_a^2 (x-a)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^2 \\ &= \frac{(2-a)^3}{3} - 0 \\ &= \frac{1}{3}(8 - 12a + 6a^2 - a^3) \\ &= -\frac{a^3}{\underline{\mathbf{3}}_{\text{コ}}} + {}_{\text{サ}}\underline{\mathbf{2}}a^2 - {}_{\text{シ}}\underline{\mathbf{4}}a + \underline{\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}}_{\text{スセ}} \end{aligned}$$

◀もちろん，展開して積分しても良いが $\displaystyle\int (x-a)^n = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ を使うと計算がずっと楽になる．

$0 \leqq a \leqq 2$ において

$$\begin{aligned} U &= \frac{a^3}{12} - \frac{a^3}{3} + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} \\ &= -\frac{1}{4}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

であるから，これを微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dU}{da} &= -\frac{3}{4}a^2 + 4a - 4 \\ &= -\frac{1}{4}(3a^2 - 16a + 16) \\ &= -\frac{1}{4}(3a-4)(a-4) \end{aligned}$$

◀次のようにすると計算は楽になる．

$$\begin{aligned} \frac{dU}{da} &= \left(\frac{a^3}{12}\right)' + \left\{\frac{(2-a)^3}{3}\right\}' \\ &= \frac{a^2}{4} - (2-a)^2 \\ &= \left(\frac{a}{2} + 2 - a\right)\left(\frac{a}{2} - 2 + a\right) \\ &= \frac{1}{4}(a + 2 - 2a)(a - 2 + 2a) \\ &= -\frac{1}{4}(a-2)(3a-2) \end{aligned}$$

となるから，U の増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$\frac{dU}{da}$		$-$	0	$+$	
U		↘	極小	↗	

最大値は $a = 0,\ 2$ のいずれかでとる．$a = 0$ のとき，$U = T = \dfrac{8}{3}$，$a = 2$ のとき，$U = S = \dfrac{2^3}{12} = \dfrac{2}{3}$ になるから，$a = \underline{\mathbf{0}}_{\text{ソ}}$ で最大値 $\underline{\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}}_{\text{タチ}}$ をとる．

◀$a = 2$ のとき $T = 0$ を利用した．
『$a = 0$ のときは $S = 0$, $a = 2$ のときは $T = 0$ であるとして』という問題文に注意．

最小値は $a = \underline{\mathbf{\dfrac{4}{3}}}_{\text{ツテ}}$ のときであり

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\frac{4}{3} + \frac{8}{3} \\
&= -\frac{16}{27} + \frac{32}{9} - \frac{16}{3} + \frac{8}{3} \\
&= \frac{-16+96-72}{27} = \underline{\mathbf{\frac{8}{27}}}_{\text{トナニ}}
\end{aligned}
$$

「微積分について，聞かれていることは基本的で，計算の工夫ができると積分計算もさほど大変でない.」

$\boxed{\text{ア}}$: 2, $\boxed{\text{イ}}$: a, $\boxed{\text{ウ}}$: 2（以上３点）, $\boxed{\text{エ}}$: a, $\boxed{\text{オ}}$: 2, $\boxed{\text{カ}}$: 0（以上３点）

$\boxed{\text{キ}}$: 3, $\boxed{\text{ク}}$: 1, $\boxed{\text{ケ}}$: 2（以上５点）

$\boxed{\text{コ}}$: 3, $\boxed{\text{サ}}$: 2, $\boxed{\text{シ}}$: 4, $\boxed{\text{ス}}$: 8, $\boxed{\text{セ}}$: 3（以上５点）, $\boxed{\text{ソ}}$: 0, $\boxed{\text{タ}}$: 8, $\boxed{\text{チ}}$: 3（以上４点）

$\boxed{\text{ツ}}$: 4, $\boxed{\text{テ}}$: 3（以上５点）, $\boxed{\text{ト}}$: 8, $\boxed{\text{ナ}}$: 2, $\boxed{\text{ニ}}$: 7（以上５点）

$P_3(x_3)$ は，$P_1(1)$ と $P_2(2)$ を 3 : 1 に内分する点なので

$$x_3 = \frac{1\cdot 1 + 3\cdot 2}{3+1} = \underline{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}}_{\text{アイ}}$$

◀ 13th-note 数学ＩＩ第３章 (p.3)『数直線上の内分点』

になる．$y_1 = x_2 - x_1 = \underline{\mathbf{1}}_{\text{ウ}}$ であり，また，$P_nP_{n+2} : P_{n+2}P_{n+1} = 3 : 1$ から，$P_{n+2}P_{n+1} = \frac{1}{1+3}P_{n+1}P_n$ であり，x_n と x_{n+1} の大小は，n の偶奇によって交互に入れ替わるので

$$y_{n+1} = \underline{\mathbf{-\frac{1}{4}}}_{\text{エオカ}}\,y_n$$

◀ この議論は難しい．実際のセンター試験の会場であれば，問題文から，y_n が等比数列であることが分かり，$y_1 = 1$，$y_2 = x_3 - x_2 = -\frac{1}{4}$ から，$y_2 = -\frac{1}{4}y_1$ と分かり，公比が $-\frac{1}{4}$ を導くことになるだろう．

になる．したがって，$y_n = 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ となって，$\underline{\mathbf{0}}_{\text{キ}}$ であり

$$\begin{aligned}
x_n &= x_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{4}\right)^{i-1}\\
&= 1 + \frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}\\
&= 1 + \frac{4}{5}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}\\
&= \underline{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}}_{\text{クケ}} - \frac{\overset{\text{コ}}{\mathbf{4}}}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

となって，$\underline{\mathbf{0}}_{\text{サ}}$ である．

次に，$|y_n| = \left|\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right| = r^{n-1}$ であるから

$$\begin{array}{rllllll}
S_n & = 1 & +2r & +3r^2 & +\cdots & +nr^{n-1} & \\
rS_n & = & r & +2r^2 & +\cdots & +(n-1)r^{n-1} & +nr^n \\
\hline
S_n - rS_n & = 1 & +r & +r^2 & +\cdots & +r^{n-1} & -nr^n \\
 & = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} - nr^n & & & & &
\end{array}$$

であるから，$\underline{\mathbf{1}}_{\text{シ}}$，$\underline{\mathbf{1}}_{\text{ス}}$ になり，$r = \frac{1}{4}$ に注意してこれを変形すると

$$\begin{aligned}
(1-r)S_n &= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n\\
\Leftrightarrow\ \frac{3}{4}S_n &= \frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - n\left(\frac{1}{4}\right)^n\\
\Leftrightarrow\quad S_n &= \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - \frac{4}{3}\cdot n\left(\frac{1}{4}\right)^n\\
&= \underline{\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{9}}}_{\text{セソタ}}\left\{1-\left(\frac{1}{\underline{\mathbf{4}}_{\text{チ}}}\right)^n\right\} - \frac{n}{\underline{\mathbf{3}}_{\text{テ}}}\left(\frac{1}{\underline{\mathbf{4}}_{\text{ト}}}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

◀ 最後の項は，$\frac{4}{3}n$ を残すことができないので，$\left(\frac{1}{4}\right)^n$ で 4 を約分した．

になり，$\underline{\mathbf{1}}_{\text{ツ}}$，$\underline{\mathbf{0}}_{\text{ナ}}$ と分かる．

「冒頭の問題文の多さに困惑してしまうと，先へ進みづらい．また，y_n が等比数列であることを，問題の誘導に乗ってできるかも，一つのポイントになる．それらを超えれば，教科書レベルの基本的な問題が並んでいる．」

$\boxed{\text{ア}}$: 7，$\boxed{\text{イ}}$: 4（以上１点），$\boxed{\text{ウ}}$: 1（１点），$\boxed{\text{エ}}$: −，$\boxed{\text{オ}}$: 1，$\boxed{\text{カ}}$: 4（以上３点）

$\boxed{\text{キ}}$: 0（１点）$\boxed{\text{ク}}$: 9，$\boxed{\text{ケ}}$: 5（以上２点），$\boxed{\text{コ}}$: 4，$\boxed{\text{サ}}$: 0（以上３点）

$\boxed{\text{シ}}$: 1，$\boxed{\text{ス}}$: 1（以上３点），$\boxed{\text{セ}}$: 1，$\boxed{\text{ソ}}$: 6，$\boxed{\text{タ}}$: 9（以上２点）

$\boxed{\text{チ}}$: 4，$\boxed{\text{ツ}}$: 1（以上２点），$\boxed{\text{テ}}$: 3，$\boxed{\text{ト}}$: 4，$\boxed{\text{ナ}}$: 0（以上２点）

第 4 問

底面の四角形 ABCD が長方形であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= \underline{\vec{a}}_{ア}-\underline{\vec{b}}_{イ}+\vec{c}\end{aligned}$$

となる．L は OD を 1 : 2 に内分するので，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AL}} &= \overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{a}\\ &= -\underline{\frac{2}{3}}_{ウエ}\vec{a}-\frac{\underline{1}_{オ}}{3}\vec{b}+\frac{\underline{1}_{カ}}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

さらに $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$ なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ON}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}\\ &= \vec{a}+s\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\ &= \vec{a}+s\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)\\ &= \left(\underline{1}_{キ}-\underline{\frac{2}{3}}_{クケ}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{\underline{3}_{コ}}+\frac{t}{\underline{2}_{サ}}\right)\vec{b}+\frac{s}{\underline{3}_{シ}}\vec{c}\end{aligned}$$

N が辺 OC 上にあることから，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の係数は 0 なので

$$1-\frac{2}{3}s-t=0,\quad -\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}t=0$$

これを解いて，$s=\frac{3}{4}$, $t=\frac{1}{2}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{s}{3}\vec{c}=\underline{\frac{1}{4}}_{スセ}\vec{c}$ となる．

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}-\vec{b}|=2r$ であるから

$$\begin{aligned} & |\vec{a}-\vec{b}|^2 = (2r)^2\\ \Leftrightarrow\ & 1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1^2 = 4r^2\\ \Leftrightarrow\ & \vec{a}\cdot\vec{b} = \underline{1}_{ソ}-\underline{2}_{タ}r^2\end{aligned}$$

であり，他も同様にして

$$\begin{aligned} & |\vec{b}-\vec{c}|^2 = 2^2\\ \Leftrightarrow\ & 1^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4\\ \Leftrightarrow\ & \vec{b}\cdot\vec{c} = \underline{0}_{チ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |\vec{a}-\vec{c}|^2 = (2r)^2+2^2\\ \Leftrightarrow\ & 1^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4r^2+4\\ \Leftrightarrow\ & \vec{a}\cdot\vec{c} = \underline{-2}_{ツテ}r^2\end{aligned}$$

よって，直線 AM と直線 MN が垂直になるのは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=0\\ &\Leftrightarrow 0-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2-\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot(-2r^2)+\frac{1}{2}(1-2r^2)=0\end{aligned}$$

◀ これを読み落とさないよう注意が必要．

◀「△OBC と △OAD は合同」であるから

◀【別解】△OAB について余弦定理から $\cos AOB=\frac{1^2+1^2-(2r)^2}{2\cdot1\cdot1}=1-2r^2$ であるので，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos AOB=1-2r^2$ と求めてもよい．以降の $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$ も同様である．

◀ 四角形 ABCD が長方形なので，三平方の定理を用いた

◀ $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ を用いた

$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}-r^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ r^2=\frac{1}{2}\qquad \therefore\ r=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となるから，AB = $2r = \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}_{\text{ト}}$ のときである．

「図に惑わされず，冒頭の $\triangle$OBC $\equiv$ $\triangle$OAD，底面の四角形 ABCD が長方形であること，を利用し忘れなければ，大変親切な誘導がある問題になっている．」

$\boxed{\text{ア}}$: a, $\boxed{\text{イ}}$: b（以上２点）, $\boxed{\text{ウ}}$: 2, $\boxed{\text{エ}}$: 3, $\boxed{\text{オ}}$: 1, $\boxed{\text{カ}}$: 1（以上２点）
$\boxed{\text{キ}}$: 1, $\boxed{\text{ク}}$: 2, $\boxed{\text{ケ}}$: 3（以上２点）, $\boxed{\text{コ}}$: 3, $\boxed{\text{サ}}$: 2（以上２点）
$\boxed{\text{シ}}$: 3（１点）, $\boxed{\text{ス}}$: 1, $\boxed{\text{セ}}$: 4（以上３点）, $\boxed{\text{ソ}}$: 1, $\boxed{\text{タ}}$: 2（以上２点）
$\boxed{\text{チ}}$: 0（１点）, $\boxed{\text{ツ}}$: $-$, $\boxed{\text{テ}}$: 2（以上２点）, $\boxed{\text{ト}}$: 2（３点）

第 5 問

(1) 30 点と比べた差の合計は、右欄外の表から

$$\frac{\cancel{3}+14+0+8-\cancel{1}-4+13-7-\cancel{2}+\cancel{4}+\cancel{3}-\cancel{4}+6+0-\cancel{3}}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

となるので、平均値 A は、$30+2=\underline{\mathbf{32.0}}_{\text{アイウ}}$ になる。

15 人の合計点は $15\times \mathrm{A}$ 点、

上位 10 人のみの合計点は $10\times \mathrm{A}_1$ 点、下位 5 人のみの合計点は $5\times \mathrm{A}_2$ 点であるから

$$10\mathrm{A}_1+5\mathrm{A}_2=15\mathrm{A}$$

$$\Leftrightarrow\ \underline{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}_{\text{エオ}}\mathrm{A}_1+\underline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}_{\text{カキ}}\mathrm{A}_2=\mathrm{A}$$

が成り立つ。

番号	差
1	+3
2	+14
3	0
4	+8
5	−1
6	−4
7	+13
8	−7
9	−2
10	+4
11	+3
12	−4
13	+6
14	0
15	−3

(2) 平均との差は、右の表のようになる。

よって偏差の最大値は$\underline{\mathbf{7.0}}_{\text{クケ}}$点である。

また、分散 B の値は

$$\frac{49\times 2+16\times 3+9+4+1+0+0}{10}$$

$$=\frac{160}{10}=\underline{\mathbf{16.00}}_{\text{コサシス}}$$

になる。

標準偏差 C の値は $\sqrt{16.00}=\underline{\mathbf{4.0}}_{\text{スセ}}$

番号	平均との差	左の2乗
1	0	0
2	+7	49
3	−3	9
4	−2	4
5	−7	49
6	−−−	−−−
7	+4	16
8	−−−	−−−
9	−−−	−−−
10	+1	1
11	−4	16
12	−−−	−−−
13	+4	16
14	0	0
15	−−−	−−−

(3) 平均値との差は、4 人全て足せば 0 になるので

$x+0+y+z=\underline{\mathbf{0}}_{\text{ソ}}\ \cdots\cdots①$

最大である D と、最小である F の差は 7 なので

$x-z=\underline{\mathbf{7}}_{\text{タ}}\ \cdots\cdots②$

分散は 6.50 であるから

$$\frac{x^2+0^2+y^2+z^2}{4}=6.5$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+y^2+z^2=\underline{\mathbf{26}}_{\text{チツ}}\ \cdots\cdots③$$

②から $x=z+7$ なので、①に代入して

$$(z+7)+y+z=0\quad\Leftrightarrow\quad y=-2z-7$$

◀ 文字を 1 つだけにすることを考えながら、解く。②式から $z=x-7$ として x だけに揃えても、解くことが出来る。

これらを③に代入して

$$(z+7)^2+(-2z-7)^2+z^2=26$$
$$\Leftrightarrow\ z^2+14z+49+4z^2+28z+49+z^2=26$$
$$\Leftrightarrow\ 6z^2+42z+72=0$$
$$\Leftrightarrow\ z^2+7z+12=0$$
$$\Leftrightarrow\ (z+3)(z+4)=0\qquad\therefore\ z=-3,\ -4$$

$z=-3$ のとき、$y=-1,\ x=4$ になり、$z=-4$ のとき、$y=1,\ x=3$ になる。

$z<y<0<x$ から $z=-3$ が適する。

◀ F < E < 43 < D から $z<y<0<x$ が分かる。

D は $43+4=\underline{\mathbf{47}}_{\text{トナ}}$ 点、E は $43+(-1)=\underline{\mathbf{42}}_{\text{ニヌ}}$ 点、F は $43+(-3)=\underline{\mathbf{40}}_{\text{ネノ}}$ 点であることが分かる。

(4) $p=44$ の人は $q=44$ であるから3は誤り。

$p=43$ の人は $q=41$ であるから1は誤り。

$q>40$ の人は 3 人しかいないから0は誤り。

以上から、正しい相関図（散布図）は$\underline{\mathbf{2}}_{\text{ハ}}$ であり、図より明らかに p, q には正の相関があるから$\underline{\mathbf{0}}_{\text{ヒ}}$。

(5) r が 0 以上 10 未満である、G の値は、$q-p$ が正であり、$0.1p$ より小さければよいので番号 2、5、11 の$\underline{\mathbf{3}}_{\text{フ}}$人。
H は番号 1、3、10、13 の$\underline{\mathbf{4}}_{\text{ヘ}}$人。

番号	$q-p$	p	$0.1p$
1	4	33	3.3
2	0	44	4.4
3	4	30	3.0
4	−3	38	3.8
5	1	29	2.9
6	− − −	− − −	− − −
7	−2	43	4.3
8	− − −	− − −	− − −
9	− − −	− − −	− − −
10	4	34	3.4
11	0	33	3.3
12	− − −	− − −	− − −
13	5	36	3.6
14	7	30	3.0
15	− − −	− − −	− − −

◀【別解】2の散布図に 3 本の直線 $q=p$, $1.1p$, $1.2p$ を描き（これらの直線は (20, 20) を通らないことに注意）、冒頭の表で確認しながらでも求められる。

◀ $2+4+3+1=10$ から、答えの正しいことが確認できる。

「途中で 3 元 2 次方程式を解く必要があるなど、計算が多く、思考力も試される。最後の問題も、実際に r を求めていては時間がかかりすぎる。どのようにすれば、たくさんのデータを手際よくまとめ、知りたいデータを得られるか、日頃からの訓練が必要な問題。」

$\boxed{\text{ア}}$: 3, $\boxed{\text{イ}}$: 2, $\boxed{\text{ウ}}$: 0（以上２点）, $\boxed{\text{エ}}$: 2, $\boxed{\text{オ}}$: 3, $\boxed{\text{カ}}$: 1、$\boxed{\text{キ}}$: 3（以上２点）
$\boxed{\text{ク}}$: 7, $\boxed{\text{ケ}}$: 0（以上１点）, $\boxed{\text{コ}}$: 1, $\boxed{\text{サ}}$: 6、$\boxed{\text{シ}}$: 0, $\boxed{\text{ス}}$: 0（以上１点）
$\boxed{\text{セ}}$: 4, $\boxed{\text{ソ}}$: 0（以上２点）, $\boxed{\text{タ}}$: 0（１点）、$\boxed{\text{チ}}$: 7（１点）, $\boxed{\text{ツ}}$: 2, $\boxed{\text{テ}}$: 6（以上１点）
$\boxed{\text{ト}}$: 4, $\boxed{\text{ナ}}$: 7（以上１点）、$\boxed{\text{ニ}}$: 4, $\boxed{\text{ヌ}}$: 2（以上１点）, $\boxed{\text{ネ}}$: 4, $\boxed{\text{ノ}}$: 0（以上１点）
$\boxed{\text{ハ}}$: 2（２点）$\boxed{\text{ヒ}}$: 0（２点）, $\boxed{\text{フ}}$: 3, $\boxed{\text{ヘ}}$: 4（以上２点）

第６問は近日掲載します