13th-note
2012年1月センター試験
数学ＩＡ・解説

Ver1.10（2012-1-20）

第 1 問 ［1］ (1)

$$
\begin{aligned}
&|2x+1| \leqq 3\\
\Leftrightarrow\ & -3 \leqq 2x+1 \leqq 3\\
\Leftrightarrow\ & -4 \leqq 2x \leqq 2\\
\Leftrightarrow\ & {}_{\text{アイ}}\underline{\mathbf{-2}} \leqq x \leqq \underline{\mathbf{1}}_{\text{ウ}}
\end{aligned}
$$

◀ 13th-note 数学 I『絶対値と方程式・不等式の関係 (p.78)』

◀ 各辺から 1 を引いた

◀ 各辺から 2 を割った

(2)

$$
\begin{aligned}
&|2x+1| \leqq a\\
\Leftrightarrow\ & -a \leqq 2x+1 \leqq a\\
\Leftrightarrow\ & -a-1 \leqq 2x \leqq a-1\\
\Leftrightarrow\ & \frac{-{}_{\text{エ}}\underline{\mathbf{1}}-a}{{}_{\text{オ}}\underline{\mathbf{2}}} \leqq x \leqq \frac{-1+a}{2}
\end{aligned}
$$

◀ (1) と同じ変形をしている

(3) $a=3$ のとき，$-2 \leqq x \leqq 1$ から整数 $x=-2, -1, 0, 1$ から 4 個となって，$N = \underline{\mathbf{4}}_{\text{カ}}$.

$a=4$ のとき $-\frac{5}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ より整数 $x=-2, -1, 0, 1$ となり，$N=4$.

$a=5$ のとき $-3 \leqq x \leqq 2$ より整数 $x=-3, -2, -1, 0, 1, 2$ となり $N>4$,

よって $a = {}_{\text{キ}}\underline{\mathbf{5}}$ のとき初めて N が 4 より大きくなる.

◀ $\frac{-1-a}{2}$, $\frac{-1+a}{2}$ とも，a が 2 増えて初めて 1 以上変化するから，と考えれば，いきなり $a=3+2=5$ と求められる.

「最初の不等式を，上のように解けば簡単な問題．$-3 \leqq 2x+1$, $2x+1 \leqq 3$ の連立不等式だと思ってしまうと計算は煩雑になる．しかし，解けないほどではない.」

$\boxed{\text{ア}}$: −, $\boxed{\text{イ}}$: 2（以上２点）, $\boxed{\text{ウ}}$: 1（２点）, $\boxed{\text{エ}}$: 1, $\boxed{\text{オ}}$: 2（以上２点）

$\boxed{\text{カ}}$: 4（１点）, $\boxed{\text{キ}}$: 5（３点）

［2］ k は「定数」だが，m, n は「自然数」であることに注意.

(1) $\overline{p}$ は $m \leqq k$ かつ $n \leqq k$ であるから $\underline{2}_{ク}$

◀ 13th-note 数学 A『ド・モルガンの法則 (p.19)』

(2)(i) p ：「$m > 1$ または $n > 1$」，q ：「$mn > 1$」であり

- $p \Rightarrow q$ は真なので，p は十分条件

◀ m, n は自然数であることに注意

- $q \Rightarrow p$ は真なので，p は必要条件

◀ $mn > 1$ となるには，$m = n = 1$ でさえなければよい.

よって，$\underline{0}_{ケ}$

【$q \Rightarrow p$ の別解】$q \Rightarrow p$ の真偽は $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ の真偽に一致し，$\overline{p}$ は $m \leqq 1$ かつ $n \leqq 1$ より $m = n = 1$ となり，$\overline{q}$ ：$mn \leqq 1$ を満たし，真である. よって，p は必要条件.

◀ 13th-note 数学 A『対偶の真偽は保たれる (p.25)』

(ii) p ：「$m > 2$ または $n > 2$」，r ：「$mn > 2$」であり

- $p \Rightarrow r$ について，p ならば「$m \geqq 3$ または $n \geqq 3$」であるから，$mn \geqq 3 > 2$ である．よって $p \Rightarrow r$ は真なので，p は十分条件

◀ そもそも $m \geqq 1, n \geqq 1$ に注意.

- $r \Rightarrow p$ は偽（反例：$m = n = 2$）

よって，$\underline{2}_{コ}$

p ：「$m > 2$ または $n > 2$」，q ：「$mn > 4$」であり

- $p \Rightarrow q$ は偽（反例：$m = 3, n = 1$）

◀ 上の $p \Rightarrow r$ がヒントになる

- $q \Rightarrow p$ は真なので，p は必要条件

◀ $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ を考えてもよい.

よって，$\underline{1}_{サ}$

「m, n が自然数という条件を見落とさなければ，難しくない.」

$\boxed{ク}$: 2（２点），$\boxed{ケ}$: 0（３点），$\boxed{コ}$: 2（２点），$\boxed{サ}$: 1（３点）

第 2 問

①式を平方完成して

$$y = -\left\{x^2 - (2a+4)x\right\} + b = -\left[\{x-(a+2)\}^2 - (a+2)^2\right] + b$$
$$= -\{x-(a+2)\}^2 + (a+2)^2 + b$$

◀ 13th-note 数学 I『平方完成 (p.85)』

であるから，関数①の頂点の座標は

$$\left(a + \underline{\mathbf{2}}_{\text{ア}},\ a^2 + {}_{\text{イ}}\underline{\mathbf{4}}a + b + \underline{\mathbf{4}}_{\text{ウ}}\right)$$

である．この頂点が直線 $y = -4x - 1$ 上にあるとき，この式に

$$(x,\ y) = (a+2,\ a^2+4a+b+4)$$

を代入して

◀ 13th-note 数学 I『準備 1 〜方程式への代入 (p.92)』

$$a^2 + 4a + b + 4 = -4(a+2) - 1$$
$$\Leftrightarrow b = -4a - 8 - 1 - a^2 - 4a - 4 = -a^2 - {}_{\text{エ}}\underline{\mathbf{8}}a - \underline{\mathbf{13}}_{\text{オカ}}$$

である．

結果，①式は $y = -x^2 + (2a+4)x - a^2 - 8a - 13$ であり，G の頂点は

$$(a+2,\ a^2+4a-a^2-8a-13+4) = (a+2,\ -4a-9)$$

である．

◀ この操作をしなくても問題はないが，消せる文字は消しておくとよい．

(1) グラフ G が x 軸で異なる 2 点で交わるのは，G の頂点の y 座標が正であればよく

$$-4a - 9 > 0 \Leftrightarrow -4a > 9$$
$$\Leftrightarrow a < \underline{\mathbf{-\frac{9}{4}}}_{\text{キクケ}}$$

◀ ①の判別式 D が正であることから求めてもよい．直前で b を消去していない場合は，次のようになる．

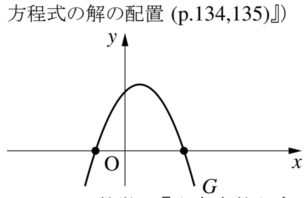
$$\frac{D}{4} < 0 \Leftrightarrow (a+2)^2 - (-1)\cdot b < 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 + (-a^2 - 8a - 13) < 0$$

(以下略)

である．また，G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わる必要十分条件は，G が $x = 0$ のとき $y > 0$ であるから

$$-a^2 - 8a - 13 > 0 \Leftrightarrow a^2 + 8a + 13 < 0$$

◀ 次のような図になる（13th-note 数学 I『2 次方程式の解の配置 (p.134,135)』）



$a^2 + 8a + 13 = 0$ を解けば $a = -4 \pm \sqrt{3}$ であるから

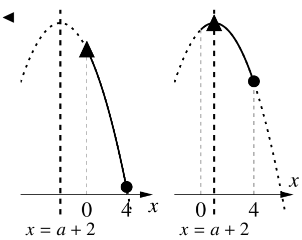
$$\underline{\mathbf{-4-\sqrt{3}}}_{\text{コサ}} < a < -4 + \sqrt{3}$$

(2) 定義域 $0 \leqq x \leqq 4$ の中央は $x = 2$ であるから，G の軸 $x = a + 2$ と $x = 2$ との位置関係によって場合分けする．

◀ 13th-note 数学 I『文字定数を含む 2 次関数の最大・最小 (p.104-107)』

(i) $a + 2 < 2$ のとき，つまり $a < 0$ のとき

◀



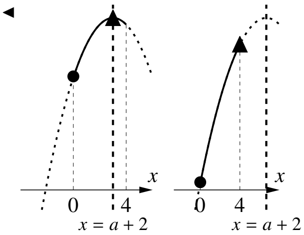
G の最小値は $x = 4$ のとき，$y = -4^2 + (2a+4)\cdot 4 - a^2 - 8a - 13$ であるから

$$\text{最小値が } -22 \Leftrightarrow \cancel{-16} + \cancel{8a} + \cancel{16} - a^2 \cancel{-8a} - 13 = -22$$
$$\Leftrightarrow -a^2 = -9$$

よって $a = \pm 3$ であり，$a < 0$ から $a = \underline{\mathbf{-3}}_{\text{シス}}$

(ii) $2 \leqq a + 2$ のとき，つまり $0 \leqq a$ のとき

◀



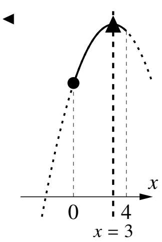
G の最小値は $x = 0$ のとき，$y = -a^2 - 8a - 13$，よって

$$\text{最小値が } -22 \Leftrightarrow -a^2 - 8a - 13 = -22$$
$$\Leftrightarrow 0 = a^2 + 8a - 9$$
$$\Leftrightarrow (a+9)(a-1) = 0$$

よって $a = -9,\ 1$ であり，$0 \leqq a$ から $a = \underline{\mathbf{1}}_{\text{セ}}$

$a = 1$ のとき，軸が $0 \leqq x \leqq 4$ に含まれるから，G の頂点の y 座標が最大値になり $-4a - 9 = \underline{\mathbf{-13}}_{\text{ソタチ}}$．

◀



$a = -3$ のとき，G の頂点は $(a+2,\ -4a-9) = (-1,\ 3)$ であり，

$a = 1$ のとき，G の頂点は $(a+2,\ -4a-9) = (3, -13)$ であるから，

$$a=-3 \text{ のとき } (-1,3) \xrightarrow{\text{平行移動}} a=1 \text{ のとき } (3,-13)$$

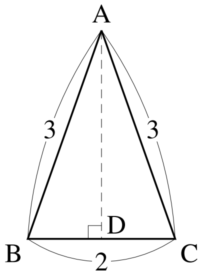
となって，x 軸方向に$\underline{\mathbf{4}}_{\text{ツ}}$，$y$ 軸方向に$\underline{\mathbf{-16}}_{\text{テトナ}}$ 平行移動したとわかる．

「2 次関数の標準的な問題．(1) の後半，(2) の前半をスムーズに解くことが，2 次関数の完璧な理解の試金石になっている．」

$\boxed{\text{ア}}$: 2, $\boxed{\text{イ}}$: 4, $\boxed{\text{ウ}}$: 4（以上４点）, $\boxed{\text{エ}}$: 8, $\boxed{\text{オ}}$: 1, $\boxed{\text{カ}}$: 3（以上３点）
$\boxed{\text{キ}}$: −, $\boxed{\text{ク}}$: 9, $\boxed{\text{ケ}}$: 4（以上３点）, $\boxed{\text{コ}}$: 4, $\boxed{\text{サ}}$: 3（以上３点）
$\boxed{\text{シ}}$: −, $\boxed{\text{ス}}$: 3（以上２点）, $\boxed{\text{セ}}$: 1（２点）, $\boxed{\text{ソ}}$: −, $\boxed{\text{タ}}$: 1, $\boxed{\text{チ}}$: 3（以上４点）
$\boxed{\text{ツ}}$: 4（２点）, $\boxed{\text{テ}}$: −, $\boxed{\text{ト}}$: 1, $\boxed{\text{ナ}}$: 6（以上２点）

第 3 問

図を描くと，右のようになる．



A から BC へ垂線を引いて BC の中点を D とすると

$$\cos\angle ABC = \frac{BD}{AB} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$ アイ

◀ 角 B から見た余弦定理（13th-note 数学 I, p.170,171）より

$$\cos\angle ABC = \frac{3^2+2^2-3^2}{2\cdot 3\cdot 2} = \frac{1}{3}$$

でもよい．

また，sin は正であるから

$$\sin\angle ABC = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$ ウエオ

であり，三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}} = \mathbf{2\sqrt{2}}$$ カキ

◀ 13th-note 数学 I『三角形の面積 (p.183)』 AD = $2\sqrt{2}$ から，底辺と高さから計算してもよい．

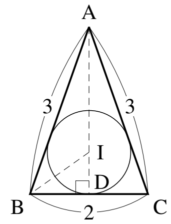
となる．内接円の半径 r は

$$S = \frac{1}{2}r(AB+BC+CA) \Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}r(3+3+2)$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} = 8r$$

◀ 13th-note 数学 I『三角形の内接円と面積の関係 (p.187)』

より，$r = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ クケ である．

◀



△IBD について，ID = $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$，BD = 1 より

$$IB = \sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$ コサ

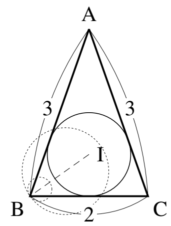
である．

(1) △BPQ の外接円の半径を R とすると，直径は

$$\frac{PQ}{\sin\angle ABC} = 2R \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2R$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = 2R$$
$$\Leftrightarrow 2R = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$ シス

◀ 13th-note 数学 I『正弦定理 (p.179)』

である．



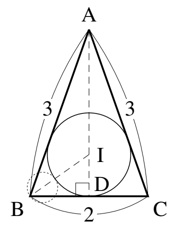
◀

円 O は円 I より小さく，円 O の周上の点 B は円 I の外にあるから，0, 1 はありえない．

円 O と円 I が外接するのは

（円 O の直径）+（円 I の半径）= BI = $\frac{\sqrt{6}}{2}$

◀ 13th-note 数学 A『2 円の位置関係 (p.134)』



のときであり，左辺を計算して BI と比べると

（円 O の直径）+（円 I の半径）= $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > BI$

となる．よって，**3** セ である．

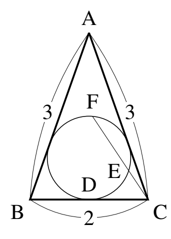
◀ よって，4, 2 ではない．

(2) 方べきの定理より

◀ 13th-note 数学 A，p.130

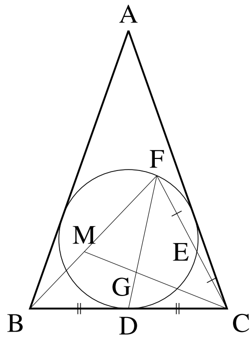
$$CE\cdot CF = CD^2 \Leftrightarrow CE\cdot\sqrt{2} = 1$$
$$\Leftrightarrow CE = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$ ソタ

$$\frac{EF}{CE} = \frac{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \mathbf{1}$$ チ



である．

△FBC について，E は FC の中点，D は BC の中点であるから，G は △FBC の重心である．つまり，M は FB の中点であり，CG : GM = 2 : 1 であるから $\dfrac{\mathrm{GM}}{\mathrm{CG}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ ツテ となる．



◂ チェバの定理（13th-note 数学 A，p.139）を用いてもよい

◂ △FCM と直線 EB についてメネラウスの定理（13th-note 数学 A，p.137）を用いてもよい

「図を描いて解いていれば，**シス**までは容易に解ける．**セ**は，できるだけ正確な図を書いて考えられているかによる．外接円が内接円より小さい（半分の大きさ）であることにだまされないこと．
最後の問題は，次々と新しい点が増えるが，落ち着いて読んで絵を描いていれば，意外と難しくない．E が CF の中点となることを，描いている図に反映させているかどうかが，1 つのポイントかもしれない．」

ア : 1，イ : 3（以上３点），ウ : 2，エ : 2，オ : 3（以上３点）
カ : 2，キ : 2（以上３点），ク : 2，ケ : 2（以上３点）
コ : 6，サ : 2（以上３点），シ : 2，ス : 2（以上２点），セ : 3（４点）
ソ : 2，タ : 2（以上３点），チ : 1（２点），ツ : 1，テ : 2（以上３点）

第 4 問

9 枚から 5 枚取り出すのは ${}_9C_5 = {}_9C_4 = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 9\cdot 2\cdot 7 = \underline{\mathbf{126}}_{\text{アイウ}}$ 通りである．

◂ 13th-note 数学 A『組合せ (p.56,57)』

(1) 5 の取り出し方は 1 通りであり，5 以外の 8 枚から 4 枚取り出すから

$${}_8C_4 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \underline{\mathbf{70}}_{\text{エオ}}\text{通り}$$

あり，余事象である 5 を取り出さない場合は $126 - 70 = \underline{\mathbf{56}}_{\text{カキ}}$ 通りである．

◂ 13th-note 数学 A『余事象 (p.88)』

(2) 0 点は，5 が含まれない場合なので，確率は $\dfrac{\cancel{56}^{4}}{9\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{7}} = \underline{\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}}_{\text{クケ}}$ である．

◂ 分母は 9 · 2 · 7 で計算するとよい（13th-note 数学 A『「場合の数」と確率 (p.81)』）

得点が 1 点となるのは，5 枚のうち 5 が一番小さいときで，そのような取り出し方は (5, 6, 7, 8, 9) しかない．よって確率は $\underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{126}}}_{\text{コサシス}}$．

得点が 2 点となるのは，1 から 4 が 1 枚，6 から 9 が 3 枚含まれるときなので，確率は

$$\frac{{}_4C_1\cdot{}_4C_3}{9\cdot 2\cdot 7} = \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 4}{9\cdot\cancel{2}\cdot 7} = \underline{\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{63}}}_{\text{セソタ}}$$

得点が 3 点となるのは，1 から 4 が 2 枚，6 から 9 が 2 枚含まれるときなので，確率は

$$\frac{{}_4C_2\cdot{}_4C_2}{9\cdot 2\cdot 7} = \frac{\cancel{6}\cdot\cancel{6}^{2}}{\cancel{9}\cdot\cancel{2}\cdot 7} = \underline{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}}_{\text{チツ}}$$

得点が 4 点となるのは，1 から 4 が 1 枚，6 から 9 が 3 枚含まれるときなので，確率は $\dfrac{{}_4C_1\cdot{}_4C_3}{9\cdot 2\cdot 7} = \dfrac{8}{63}$

得点が 5 点となるのは，1 点のときと同じで $\dfrac{1}{126}$ 以上より，次のような確率分布の表が書ける．

◂ 13th-note 数学 A『期待値 (p.100-102)』

得点	0	1	2	3	4	5
確率	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{1}{126}$

よって，求める期待値は

$$\begin{aligned}&1\cdot\frac{1}{126} + 2\cdot\frac{16}{126} + 3\cdot\frac{36}{126} + 4\cdot\frac{16}{126} + 5\cdot\frac{1}{126}\\ =\ &\frac{1+32+108+64+5}{126}\\ =\ &\frac{210}{9\cdot 2\cdot 7} = \underline{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}}_{\text{テト}}\end{aligned}$$

◂ 表から写すときに分母を 126 に揃えた

である．

「標準的な，場合の数と確率の問題.」

$\boxed{\text{ア}}$: 1, $\boxed{\text{イ}}$: 2, $\boxed{\text{ウ}}$: 6（以上３点）, $\boxed{\text{エ}}$: 7, $\boxed{\text{オ}}$: 0（以上３点）, $\boxed{\text{カ}}$: 5, $\boxed{\text{キ}}$: 6（以上３点）
$\boxed{\text{ク}}$: 4, $\boxed{\text{ケ}}$: 9（以上２点）, $\boxed{\text{コ}}$: 1, $\boxed{\text{サ}}$: 1, $\boxed{\text{シ}}$: 2, $\boxed{\text{ス}}$: 6（以上３点）
$\boxed{\text{セ}}$: 8, $\boxed{\text{ソ}}$: 6, $\boxed{\text{タ}}$: 3（以上３点）, $\boxed{\text{チ}}$: 2, $\boxed{\text{ツ}}$: 7（以上３点）
$\boxed{\text{テ}}$: 5, $\boxed{\text{ト}}$: 3（以上５点）