

13th-note

2012年1月センター試験 数学ⅠⅡB・解説

この教材を使う際は

- 表示：原作者のクレジット（「13th-note」）を表示してください.
- 継承：この教材を改変した結果生じた教材には，必ず，原作者のクレジット（「13th-note」）を表示してください.



Ver1.10 (2012-1-20)

第1問 [1] 真数条件より

$$0 < 8 - x, \quad 0 < x - 2 \quad \Leftrightarrow x < 8, \quad 2 < x$$

であるから、 $\text{ア} \underline{2} < x < \underline{8} \text{イ}$ が成り立つ.

①式を変形すると

$$\text{①} \Leftrightarrow \log_a (8 - x)^2 > \log_a (x - 2)$$

であり、 $a < 1$ から

$$(8 - x)^2 < x - 2$$

$$\Leftrightarrow 64 - 16x + x^2 < x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \text{ウエ} \underline{17}x + \underline{66} \text{オカ} < 0$$

であり、 $\text{キ} \underline{0}$ である. 左辺を因数分解して $(x - 6)(x - 11) < 0$ となるから $6 < x < 11$. これを真数条件 $2 < x < 8$ と連立して、①の解は $\text{ク} \underline{6} < x < \underline{8} \text{ケ}$ である.

$a > 1$ のときは、②の不等号が逆になって $x < 6, 11 < x$. これを真数条件 $2 < x < 8$ と連立して、①の解は $\text{コ} \underline{2} < x < \underline{6} \text{サ}$ である.

◀ 関数 $f(X) = \log_a X$ は減少関数

「基本的な対数関数の不等式の問題. 教科書レベルのことをきちんと理解しておけば解ける問題.」

ア : 2 (1点), イ : 8 (1点)

ウ : 1, エ : 7, オ : 6, カ : 6 (以上2点), キ : 0 (3点)

ク : 6 (2点), ケ : 8 (2点), コ : 2 (2点), サ : 6 (2点)

[2] $\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ であり, $0 \leq 2\beta \leq 2\pi$ であるから

$$\cos 2\beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

よって, $\beta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ である.

ここで, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ のときは

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

から $\frac{\pi}{2} - \alpha = 2\beta$ が成り立ち,

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left\{2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right\} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$$

から $\frac{3}{2}\pi + \alpha = 2\beta$ が成り立つ. よって, $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}$ であるから

$$\beta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \beta_2 = \frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}$$

となる.

$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ のときは

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = \cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha)\right\} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

から $-\frac{\pi}{2} + \alpha = 2\beta$ が成り立ち,

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin(\pi - \alpha) = \cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha)\right\} \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ &= \cos\left\{2\pi - \left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right\} \\ &= \cos\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right) \end{aligned}$$

から $\frac{5}{2}\pi - \alpha = 2\beta$ が成り立つ. よって, $\beta = -\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}, \frac{5}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}$ であるから

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}, \beta_2 = \frac{5}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}$$

となる.

したがって, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ のときは

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} &= \alpha + \frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{6} \\ &= \frac{3}{8}\pi + \frac{11}{12}\alpha \end{aligned}$$

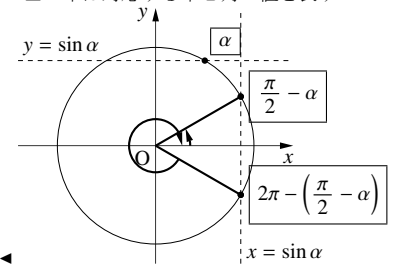
となり, とり得る値の範囲は

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}\pi + 0 &\leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} < \frac{3}{8}\pi + \frac{11}{12} \cdot \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{8}\pi &\leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} < \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ のときは

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} &= \alpha - \frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{4} + \frac{5}{12}\pi - \frac{\alpha}{6} \\ &= \frac{7}{24}\pi + \frac{13}{12}\alpha \end{aligned}$$

□の中は対応する中心角の値を表す



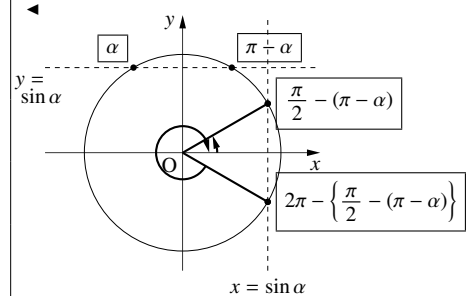
◀ 使っている公式は $\cos \theta = \cos(2\pi - \theta)$ だが、上のように単位円を用いるのがよい。

$$\blacktriangleleft 0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3}{4}\pi < \frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2} < \pi$$

である. もちろん, 空欄の空き方でどちらが β_1 かはすぐに分かる.

◀ $\sin \alpha$ の代わりに, $\sin(\pi - \alpha)$ で考えれば, $0 \leq \pi - \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ なので, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ のときを利用できる.



◀ ここまでと同様の議論は, 13th-note 数学 II 第4章『 $2\pi - x, \pi + x, -x$ の三角関数 (p.158-160)』の発展

◀ 最右辺は, 不等号が < なので必要ないと判断して, 計算を後回しにしてもよい. ただし, ノ以降を解くのに厳密な解答はできなくなる. また, 計算しておく $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ のときと計算チェックはできる.

となり、とり得る値の範囲は

$$\frac{7}{24}\pi + \frac{13}{12} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{7}{24}\pi + \frac{13}{12} \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}\pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{33}{24}\pi = \frac{11}{8}\pi$$

以上から、 $\frac{3}{8}\pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{11}{8}\pi$ となる。よって、 $y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right)$ が最大となるのは $\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} = \frac{\pi}{2}$ のときであり、これは $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ のときに含まれるので

$$\frac{3}{8}\pi + \frac{11}{12}\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{12}\alpha = \frac{1}{8}\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{8^2}\pi \cdot \frac{12^3}{11} = \frac{3}{22}\pi$$

であり、そのとき $y = \sin \frac{1}{2}\pi = 1$ であるから、①。

◀ 最左辺は計算する必要はないが、もし計算して $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ のときの最右辺と合えば、計算ミスをしている可能性をかなり排除できる。

「加法定理、倍角の定理、三角関数の合成、三角関数の相互関係などを一切用いない、珍しい問題。

普段から単位円を用いて考え、 $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ などの諸公式が理解できているかが問われる。とはいえ、場合に分けて、計算も細かくて複雑な、難しい問題。」

シ : 6 (1点), **ス** : 5 (1点)

セ : 4, **ソ** : 2 (以上2点), **タ** : 3 (1点), **チ** : 4, **ツ** : 2 (以上2点), **テ** : 5 (1点)

ト : 3, **ナ** : 8 (以上2点), **ニ** : 1, **ヌ** : 1, **ネ** : 8 (以上2点)

ノ : 3, **ハ** : 2, **ヒ** : 2 (以上2点), **フ** : 1 (1点)

第2問

- (1) C の関数について、 $y' = 3x^2$ であるから、点 P での接線は点 (a, a^3) を通り傾き $3a^2$ の直線になり

$$y - a^3 = 3a^2(x - a) \Leftrightarrow y = 3a^2x - 2a^3$$

である。放物線 D 上に点 P があるから

$$a^3 = a^2 + pa + q \cdots \cdots (*)$$

また、 D の関数について、 $y' = 2x + p$ であるから、点 P での D の接線は傾き $2a + p$ の直線になり、

$$3a^2 = 2a + p \Leftrightarrow p = 3a^2 - 2a$$

これを $(*)$ に代入して

$$\begin{aligned} a^3 &= a^2 + (3a^2 - 2a)a + q \\ \Leftrightarrow q &= a^3 - a^2 - 3a^3 + 2a^2 = -2a^3 + a^2 \end{aligned}$$

となる。

- (2) D が点 $(0, b)$ を通るので

$$b = 0 + 0 + q = -2a^3 + a^2$$

が成り立つ。

$f(x) = -2a^3 + a^2$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6a^2 + 2a \\ &= -6a\left(a - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

よって、増減表は以下ようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって、 $f(x)$ は $x = 0$ で極小値 0 をとり、 $x = \frac{1}{3}$ で極大値 $f\left(\frac{1}{3}\right) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{2}{27} + \frac{3}{27} = \frac{1}{27}$ をとる。

②を満たす (a, b) は、 $y = b$, $y = f(a)$ を満たす解と一致するから、右欄外のグラフより、 $0 < b < \frac{1}{27}$ のときは、 a の解は 3 個である。

- (3) D の頂点が x 軸上ならば、 $y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ となるので、 $q = \frac{p^2}{4}$ である。これを①に代入して連立すると

$$\begin{aligned} \begin{cases} p = 3a^2 - 2a \\ \frac{p^2}{4} = -2a^3 + a^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(3a^2 - 2a)^2 = -2a^3 + a^2 \\ &\Leftrightarrow 9a^4 - 12a^3 + 4a^2 = -8a^3 + 4a^2 \\ &\Leftrightarrow 9a^4 - 4a^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9a^3\left(a - \frac{4}{9}\right) = 0 \end{aligned}$$

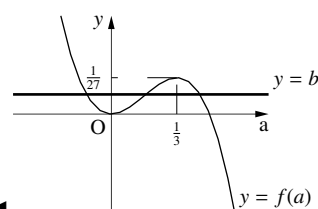
よって、 $a = 0, \frac{4}{9}$ となる。 D_1 の放物線は

$$y = x^2$$

であり、 D_2 の放物線は、

$$p = 3\left(\frac{4}{9}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{9}$$

◀ 13th-note 数学 II 第3章『1点と傾きが与えられた直線の方程式 (p.86)』



$$= \frac{16}{27} - \frac{24}{27} = -\frac{8}{27}$$

から、 $y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{4}{27}\right)^2$ となる。 D_1 , D_2 の交点の x 座標は、 D_1 , D_2 の軸から等しい距離になり、求める面積は D_1 , x 軸, $x = \frac{2}{27}$ で囲まれた面積の 2 倍になる。 よって

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{2}{27}} x^2 dx &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{2}{27}} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2}{27} \right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2^3}{3^9} = \frac{2^4}{3^{10}} \text{ヌネ} \end{aligned}$$

である。

【別解 1 : D_1 , D_2 の交点】

$$\begin{aligned} x^2 &= x^2 - \frac{8}{27}x + \left(\frac{4}{27}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{8}{27}x = \frac{16}{27^2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

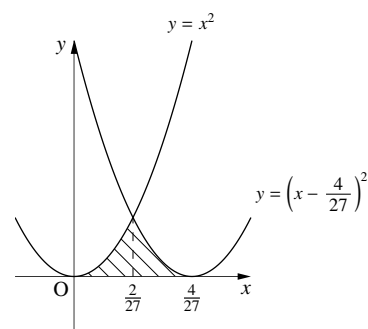
【別解 2 : 面積の計算】

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2}{27}}^{\frac{4}{27}} \left(x - \frac{4}{27}\right)^2 dx + \int_0^{\frac{2}{27}} x^2 dx &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{4}{27}\right)^3 \right]_{\frac{2}{27}}^{\frac{4}{27}} + \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{2}{27}} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 0 - \left(-\frac{2}{27}\right)^3 + \left(\frac{2}{27}\right)^3 - 0 \right\} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{27}\right)^3 \end{aligned}$$

もし、 $\left(x - \frac{4}{27}\right)^2$ を展開してしまうと、積分はとても大変になる。

◀ 連立して交点を求めてもよい (【別解 1】)

◀ 図を描けばそれが分かる。



気づかない場合も【別解 2】のようにするとよい。

$$\leftarrow \int (x-a)^n dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

を用いて工夫して計算する。

「(1)において、点 P における D の接線を直接求めてしまうと、 q が消えて①ができなくなる。 $a^3 = a^2 + pa + q$ を使うことに気づいてそれを超えれば、面積の手前まで解き進めやすい。

最後の積分は、日頃からグラフをきちんと描き、計算の工夫をしていなければ、解くのは難しい。」

ア : 2, **イ** : 2, **ウ** : 3 (以上 3 点), **エ** : 2, **オ** : 2 (以上 2 点)

カ : -, **キ** : 2, **ク** : 2 (以上 3 点), **ケ** : -, **コ** : 2, **サ** : 2 (以上 1 点)

シ : 0 (2 点), **ス** : 0 (2 点), **セ** : 1, **ソ** : 3 (以上 2 点)

タ : 1, **チ** : 2, **ツ** : 7 (以上 2 点), **テ** : 3 (3 点)

ト : 0 (2 点), **ナ** : 4, **ニ** : 9 (以上 3 点), **ヌ** : 4, **ネ** : 1, **ノ** : 0 (以上 5 点)

第3問

a_n の公差を d とおくと, $a_2 + 3d = a_5$ であるから

$$-\frac{7}{3} + 3d = -\frac{25}{3} \Leftrightarrow 3d = -\frac{18}{3} = -6$$

よって $d = \underline{-2}$ であり, $a_1 = -\frac{7}{3} - d = -\frac{7}{3} + 2 = \underline{-\frac{1}{3}}$ である. したがって

$$a_n = -\frac{1}{3} + (-2)(n-1) = \underline{-2n + \frac{5}{3}}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) \\ &= \frac{1}{2}n\left\{-\frac{1}{3} + (-2n) + \frac{5}{3}\right\} \\ &= \frac{1}{2}n\left(-2n + \frac{4}{3}\right) \\ &= \underline{-n^2 + \frac{2}{3}n} \end{aligned}$$

である.

①の両辺に $n = 1$ を代入して

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{3}b_1 + S_1 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3}b_1 &= S_1 = a_1 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

よって, $b = \underline{1}$ である. さらに, ②から得られる

$$\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \frac{4}{3}b_{n+1} + S_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^n b_k = \frac{4}{3}b_n + S_n$$

を $\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^n b_k + b_{n+1}$ に代入して

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}b_{n+1} + S_{n+1} &= \frac{4}{3}b_n + S_n + b_{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}b_{n+1} + S_{n+1} - S_n &= \frac{4}{3}b_n \end{aligned}$$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = -2(n+1) + \frac{5}{3}$ を利用して

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{3}b_{n+1} - 2n - \frac{1}{3} &= \frac{4}{3}b_n \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - 6n - 1 &= 4b_n \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \underline{4b_n + 6n + 1} \cdots (*) \end{aligned}$$

が成り立つ. この漸化式を $b_{n+1} + p(n+1) + q = a(b_n + pn + q)$ と変形できるとすれば

$$(\text{左辺}) = (4b_n + 6n + 1) + pn + p + q = 4b_n + (6+p)n + (1+p+q)$$

であり, 右辺と係数を比較して次の連立方程式を解けばよい.

$$\begin{cases} 4 &= a \\ 6+p &= ap \\ 1+p+q &= aq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ 6+p = 4p \\ 1+p+q = 4q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ 3p = 6 \quad \therefore p = 2 \\ 1+p = 3q \quad \therefore 3q = 3, q = 1 \end{cases}$$

よって, 漸化式(*)は

$$b_{n+1} + \underline{2}(n+1) + \underline{1} = 4(b_n + 2n + 1)$$

と変形でき, $c_n = b_n + 2n + 1$ は初項 $c_1 = b_1 + 2 \cdot 1 + 1 = \underline{4}$, 公比 $\underline{4}$ の等比数列である. よって, $c_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$ であり

$$b_n = c_n - 2n - 1 = \underline{4^n - 2n - 1}$$

◀もちろん, $\begin{cases} a_2 = a_1 + d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases}$ の連立方程式を解こうと思ってもよい.

◀ S_{n+1}, S_n が並んでいれば, $a_n = S_{n+1} - S_n$ を使う可能性が思い浮かべられるとよい.

であり、②である。

「冒頭は等差数列の簡単な問題。セソタは階差数列の考え方を使う標準的な問題だが、チツを求める漸化式の変形は、漸化式の解法の中でも理解しづらいタイプであり、解き慣れていないと厳しい。」

ア : -, イ : 1, ウ : 3 (以上 1 点), エ : -, オ : 2 (以上 1 点)
カ : -, キ : 2, ク : 5, ケ : 3 (以上 2 点), コ : -, サ : 2, シ : 3 (以上 2 点)
ス : 1 (1 点), セ : 4 (2 点), ソ : 6, タ : 1 (以上 2 点)
チ : 2 (2 点), ツ : 1 (2 点), テ : 4 (1 点), ト : 4 (1 点)
ナ : 4, ニ : 2, ヌ : 2, ネ : 1 (以上 2 点)

第4問

(1) M は線分 CE の中点なので

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$$

N は線分 AD を 3 : 1 に内分した点なので

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OD}}{4} = \frac{\vec{a} + 3\vec{a} + 3\vec{b}}{4} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

と表される.

(2) P は線分 FL を $s : (1-s)$ に内分した点なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-s)\overrightarrow{OF} + s\overrightarrow{OL} \\ &= (1-s)(\vec{a} + \vec{c}) + s \cdot \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{b}) \\ &= (1-s)\vec{a} + (1-s)\vec{c} + \frac{1}{2}s \cdot (2\vec{b}) + \frac{1}{2}s\vec{a} \\ &= \left(1-s + \frac{1}{2}s\right)\vec{a} + s\vec{b} + (1-s)\vec{c} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}s\right)\vec{a} + s\vec{b} + (1-s)\vec{c}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \left(1 - \frac{1}{2}s\right)\vec{a} + s\vec{b} + (1-s)\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}s\right)\vec{a} + \left(s - \frac{1}{2}\right)\vec{b} - s\vec{c} \\ \overrightarrow{MN} &= \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$

となり, $\vec{c}$ の係数から $\overrightarrow{MP}$ が $\overrightarrow{MN}$ の定数倍となるのは $\overrightarrow{MP} = s\overrightarrow{MN}$ となるとき
で $\vec{a}$ の係数から $1 - \frac{1}{2}s = s$ が成り立たなければならない. よって

$$1 = \frac{3}{2}s \Leftrightarrow s = \frac{2}{3}$$

となり, このとき, $\vec{b}$ の係数について $s - \frac{1}{2} = s \cdot \frac{1}{4}$ が成り立っている. よつ

て, $s = \frac{2}{3}$ のとき, $\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$ となり, M, N, P は一直線上にある.

(3) G は, $s = \frac{2}{3}$ のときの P なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)\vec{c} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ \overrightarrow{GF} &= \vec{a} + \vec{c} - \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})\end{aligned}$$

と表される. $|\overrightarrow{GF}| = \frac{1}{3}|\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|$ であるが, $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = \sqrt{3}$
のとき, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ を用いて

$$|\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 = 5 + 4 \cdot 4^2 + 4 \cdot 3 = 81$$

◀ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$ であるから, 異なる 4 点 O, A, B, C は同一平面上にない. そのため, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数比較ができる.

◀ 両辺とも $\frac{1}{6}$

となるから、 $|\vec{GF}| = \frac{1}{3} \sqrt{81} = \underline{3}$ となる。

次に

$$\begin{aligned}\vec{GF} \cdot \vec{GH} &= \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot \left(t\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(-\frac{2}{3}\right)|\vec{a}|^2 + (-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)|\vec{b}|^2 + 2 \cdot \left(t - \frac{1}{3}\right)|\vec{c}|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ -\frac{10}{3} + \frac{4}{3} \cdot 4^2 + 6 \left(t - \frac{1}{3}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{10}{3} + \frac{64}{3} + 6t - 2 \right) \\ &= \frac{1}{3}(6t + 16) = \underline{2t + \frac{16}{3}}\end{aligned}$$

と表される。

$\angle FGH = \angle MGH$ のとき、これを θ とおくと

$$\vec{GF} \cdot \vec{GH} = 3|\vec{GH}| \cos \theta$$

$$\vec{GM} \cdot \vec{GH} = 2|\vec{GH}| \cos \theta$$

であるから、 $\vec{GF} \cdot \vec{GH} = \underline{\frac{3}{2}} \vec{GM} \cdot \vec{GH}$ であり、①、②を代入すると

$$2t + \frac{16}{3} = \frac{3}{2} \left(2t + \frac{10}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2t + \frac{16}{3} = 3t + 5$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{1}{3}} = t$$

である。

$$\leftarrow \vec{GM} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \text{ から,}$$

$$= -\frac{1}{6}(4\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c})$$

$$|\vec{GM}| = \frac{1}{6} \sqrt{16 \cdot 5 + 16 + 16 \cdot 3} = \frac{1}{6} \sqrt{144}$$

となって、2 となる。

$$\leftarrow \vec{GM} \cdot \vec{GH}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) \cdot \left(t\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot 5 + \frac{1}{9} \cdot 16 + \frac{2}{3} \left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot 3$$

$$= \frac{20}{9} + \frac{16}{9} + 2t - \frac{2}{3}$$

$$= 2t + \frac{10}{3}$$

「空間ベクトルの計算問題。特に複雑なことはしていないが、正確な計算力が問われる。後は時間が足りるかどうかな。」

ア : 2 (1点), **イ** : 3, **ウ** : 4 (以上1点), **エ** : 1, **オ** : 2, **カ** : 1 (以上3点)

キ : 2, **ク** : 3 (以上2点), **ケ** : 2, **コ** : 3 (以上2点)

サ : 1, **シ** : 3, **ス** : 2, **セ** : 2 (以上1点), **ソ** : 2 (1点), **タ** : 3 (2点)

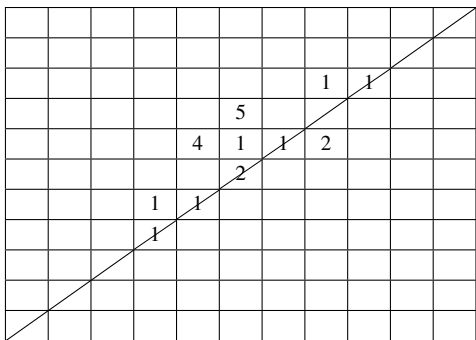
チ : 2, **ツ** : 1, **テ** : 6, **ト** : 3 (以上2点)

ナ : 3, **ニ** : 2 (以上3点), **ヌ** : 1, **ネ** : 3 (以上2点)

第5問

- (1) 国語が4点の縦の列には、4人、1人があって合計5人。

英語と国語が同じである欄に斜線を引いていくと



となっていく。この斜線上の6人と、下側の2人が英語の得点が国語以下になるから、8人。

- (2) 国語の平均点は

$$(3 \times 2 + 4 \times 5 + 5 \times 8 + 6 \times 2 + 7 \times 2 + 8 \times 1) \div 20 = 100 \div 20 = \underline{5.0}$$

英語の平均点が6.0なので分散は

$$\begin{aligned} & \{(3-6)^2 \times 1 + (4-6)^2 \times 2 + (5-6)^2 \times 2 + (7-6)^2 \times 5 + (8-6)^2 \times 2\} \div 20 \\ &= (9 + 8 + 2 + 5 + 8) \div 20 \\ &= 32 \div 20 = \underline{1.60} \end{aligned}$$

- (3) 英語が6点の横の列と、国語が5点の縦の列を除くと、右上に3人、左下に2人のみで合計5人。

共分散は、この5人についてのみ計算すればよいと分かり

$$\begin{aligned} & \{(3-5)(3-6) + (3-5)(4-6) + (4-5)(4-6) \\ & \quad + (6-5)(8-6) + (8-5)(8-6)\} \div 20 \\ &= (6 + 4 + 2 + 2 + 6) \div 20 \\ &= 20 \div 20 = 1 \end{aligned}$$

よって、相関係数の値は

$$\frac{1}{\sqrt{1.60} \sqrt{1.60}} = \frac{1}{1.60} = \frac{10}{16} = \underline{0.625}$$

である。

- (4) 52人の国語の合計点は

$$\begin{aligned} & 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 7 + 5 \times 11 + 6 \times 16 + 7 \times 8 + 8 \times 3 + 9 \times 1 \\ &= 1 + 4 + 9 + 28 + 55 + 96 + 56 + 24 + 9 \\ &= \underline{282} \end{aligned}$$

である。まず、人数について

$$52 + D + E + F = 60 \Leftrightarrow D + E + F = \underline{8}$$

国語の点について、

$$\begin{aligned} & 272 + 4D + 5E + 8F = 60 \times 5.4 \\ & \Leftrightarrow 4D + 5E + 8F = 324 - 282 = \underline{42} \end{aligned}$$

である。連立方程式
$$\begin{cases} D + E + F = 8 & \dots \textcircled{1} \\ 4D + 5E + 8F = 42 & \dots \textcircled{2} \\ 4D + 4E + 6F = 36 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$
 を解くと、 $\textcircled{3} - 4 \times \textcircled{1}$ より $2F = 4$ 、よって $F = 2$ 、すると

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow D + E = 8 - 2 = 6 \dots \textcircled{4}$$

◀ 1つ目と3つ目の式で、D、Eの係数が一致していることに注目

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 4D + 5E = 42 - 16 = 26 \cdots \textcircled{5}$$

であるから、 $\textcircled{5} - 4 \times \textcircled{4}$ より $E = 2$ 、 $\textcircled{4}$ より $D = 4$ 。つまり、D、E、F の値はそれぞれ、 $\overline{7}4$ 人、 $\overline{1}2$ 人、 $\overline{+}2$ 人である。

(5) 40 人の合計点は

$$60 \cdot 5.4 - 20 \cdot 6 = 204$$

であるので、平均点は $204 \div 40 = \underline{5.1}$ 点である。

中央値を求めるため、表の上から A クラスの分を引いていくと

								2	1	
						7	3	2		
				3	3	5	1			
					$\vdots$					

となつて、6 点以上の人が $2 + 1 + 7 + 3 + 2 = 15$ 人おり、5 点の人が 6 人以上いるので、中央値は $\underline{5.0}$ 点である。

(6) $x = 1$ のときは、 $M(x) = 1$, $N(x) = 1$

$x = 2$ のときは、 $M(x) = 2$, $N(x) = 2$

以降、中央値が整数であることを確認しながら、およその平均値を考えていく。

$x = 3$ のときは、 $N(x) = 4$ であり $3 < M(x) < 4$

$x = 4$ のときは、 $N(x) = 5$ であり $N(x) = 5$

$x = 5$ のときは、 $N(x) = 5$ であり $5 < M(x) < 6$, $N(x) = 5$

$x = 6$ のときは、 $N(x) = 5$ である。合計 16 人であり、6 点を仮平均として違いを合計すると $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 + (-2) \cdot 2 = -7$ なので $5 < M(x) < 6$

$x = 7$ のときは、 $N(x) = 6$ であり $5 < M(x) < 6$

$x = 8$ のときは、 $N(x) = 6$ であり $6 < M(x) < 7$

$x = 9$ のときは、 $M(x) = 7$, $N(x) = 7$ であるから、

$M(x) \neq N(x)$ となるのは $x = 3, 5, 6, 7, 8$ の $\underline{5}$ 個ある。

$M(x) < x$ かつ $N(x) < x$ となるのは $x = 7, 8, 9$ の $\underline{3}$ 個ある。

◀ 4、3、4 人なので平均も真ん中

◀ 英語が 7、6、5 点の人で平均 6 点だが、さらに 4 点の人が 2 人いる。

「(3) までは、表を見ながら定義通り計算するだけ。(4) も計算問題だが量が増える。(5) は 2 つの表から新たに表を作ることになるが、上半分だけで十分と気がつけばさほどでもない。(6) は、データの傾向を読み取る習慣を付けておかないと、値の散らばりからおよその平均値を求めていくことに気がつかないかもしれない。」

ア : 5 (1 点), **イ** : 8 (1 点)

ウ : 5, **エ** : 0 (以上 1 点), **オ** : 1, **カ** : 6, **キ** : 0 (以上 2 点)

ク : 5 (1 点), **ケ** : 0, **コ** : 6, **サ** : 2, **シ** : 5 (以上 3 点)

ス : 2, **セ** : 8, **ソ** : 2 (以上 1 点), **タ** : 8 (1 点), **チ** : 4, **ツ** : 2 (以上 1 点)

テ : 4, **ト** : 2, **ナ** : 2 (以上 2 点), **ニ** : 5, **ヌ** : 1 (以上 2 点), **ネ** : 5, **ノ** : 0 (以上 2 点)

ハ : 5 (1 点) **ヒ** : 3 (1 点)