13th-note
2013年1月センター試験
数学ＩＡ・解説

Ver1.00（2013-1-20）

第 1 問 ［1］分母に $1+\sqrt{6}$ が共通していることに注目して

$$AB = \frac{1}{\left(1+\sqrt{6}\right)+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\left(1+\sqrt{6}\right)-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\sqrt{6}\right)^2 - \underline{\mathbf{3}}_{\text{ア}}}$$

◀ 分母は $\left(1+\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$

$$= \frac{1}{1+2\sqrt{6}+6-3}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}+4}$$

◀ $\left(2\sqrt{6}\right)^2 > 4^2$ より $4+2\sqrt{6}$ としない

$$= \frac{2\sqrt{6}-4}{\left(2\sqrt{6}\right)^2 - 4^2}$$

◀ 分母と分子に $2\sqrt{6}-4$ を掛けた

$$= \frac{2\sqrt{6}-4}{8} = \frac{\sqrt{6}-\underline{\mathbf{2}}_{\text{イ}}}{\underline{\mathbf{4}}_{\text{ウ}}}$$

また，$\dfrac{1}{A} = 1+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ に注意して

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B} = \left(1+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)+\left(1-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$$

$$= {}_{\text{エ}}\underline{\mathbf{2}} + {}_{\text{オ}}\underline{\mathbf{2}}\sqrt{6}$$

ここで，$\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B} = \dfrac{A+B}{AB}$ から $\left(\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}\right)AB = A+B$ であるので

$$A+B = \left(2+2\sqrt{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{4}$$

$$= \left(1+\sqrt{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

◀ $2+2\sqrt{6} = 2\left(1+\sqrt{6}\right)$ に注意して，2 で約分

$$= \frac{\sqrt{6}-2+6-2\sqrt{6}}{2} = \frac{{}_{\text{カ}}\mathbf{4}-\sqrt{6}}{\underline{\mathbf{2}}_{\text{キ}}}$$

「日頃から展開を工夫するようにしていれば，標準的な問題．万が一，地道にやっても計算できないほどではない．」

ア : 3（２点), イ : 2, ウ : 4（以上３点), エ : 2, オ : 2（以上２点）

カ : 4, キ : 2（以上３点）

［2］(1) 対偶の定義より，ク は（p または q）の否定，つまり（$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$）であり，$\underline{\mathbf{1}}_{\text{ク}}$

◀ 『対偶』

◀ 13th-note 数学 A『ド・モルガンの法則 (p.19)』

(2) まず，（p または q）であるものを選ぶ．それは1，2，3，4である．このうち，r でないものを選ぶ．それは，45° を含む$\underline{\mathbf{1}と\mathbf{4}}_{\text{ケコ}}$である．

【別解 : 対偶の利用】「（p または q）$\Rightarrow r$」の反例は「$\overline{r} \Rightarrow$（$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$）」の反例と一致する．$\overline{r}$ であるのは 45° をもつ1，4のみ，これらは共に，（p または q）を満たすので，どちらも反例になっている．

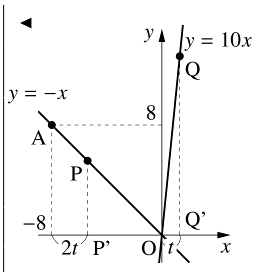
(3) 命題「（p または q）$\Rightarrow r$」は (2) より偽なので，r は必要条件ではない．命題「$r \Rightarrow$（p または q）」の真偽は，(1) より命題「（$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$）$\Rightarrow \overline{r}$」の真偽と一致する．これは，「三つの内角に同じ角があり直角三角形であるならば，45° の内角が少なくとも 1 つある」の真偽であるが，「三つの内角に同じ角があり直角三角形である」ような三角形は直角二等辺三角形しかない．つまり命題は真であり，r は十分条件である．

よって，答えは$\underline{\mathbf{2}}_{\text{サ}}$である．

「対偶・必要十分条件の定義が分かっていれば，難しくない」

ク : 1（３点), ケ : 1, コ : 4（各２点，順不同), サ : 2（３点）

第 2 問　図示すると右図のようになる．P の x 座標が 8 進むには，$8 \div 2 = \underline{\mathbf{4}}_{\text{ア}}$ 秒かかる．

◂


(1) P の x 座標は，t 秒後は $8-2t$ であるから，$\triangle\text{OPP'} = \dfrac{1}{2}(8-2t)^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 2^2(4-t)^2$．

一方，t 秒後は $\text{Q}(t,\ 10t)$ であるから，$\triangle\text{OQQ'} = \dfrac{1}{2}t\cdot 10t = 5t^2$．よって

$$\begin{aligned}
S &= 2(4-t)^2 + 5t^2 \\
&= 2(16-8t+t^2) + 5t^2 \\
&= {}_{\text{イ}}\underline{\mathbf{7}} - {}_{\text{ウエ}}\underline{\mathbf{16}}t + \underline{\mathbf{32}}_{\text{オカ}} \\
&= 7\left(t^2 - \frac{16}{7}t\right) + 32 \\
&= 7\left\{\left(t-\frac{8}{7}\right)^2 - \left(\frac{8}{7}\right)^2\right\} + 32 \\
&= 7\left(t-\frac{8}{7}\right)^2 - \frac{64}{7} + \frac{224}{7}
\end{aligned}$$

◂ 最小値を求めるため平方完成

この放物線の軸は $0 < t < 4$ の中にあるので，$t = \underline{\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{7}}}_{\text{キク}}$ のとき S は最小値 $\underline{\dfrac{\mathbf{160}}{\mathbf{7}}}_{\text{ケコサシ}}$ をとる．

(i) S が $t = \dfrac{8}{7}$ で最小値となるには，定義域 $a \leqq t \leqq a+1$ に $t = \dfrac{8}{7}$ が含まれていればよい．つまり

$$a \leqq \frac{8}{7} \leqq a+1 \quad \Leftrightarrow \quad {}_{\text{スセ}}\underline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}} \leqq a \leqq \underline{\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{7}}}_{\text{ソタ}}$$

(ii) $t = a$，つまり定義域の左端で最大となるには，定義域の中央 $t = a + \dfrac{1}{2}$ が，軸 $t = \dfrac{8}{7}$ より左側にあればよい．つまり

$$a + \frac{1}{2} \leqq \frac{8}{7} \quad \Leftrightarrow \quad a \leqq \frac{16}{14} - \frac{7}{14} = \underline{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{14}}}_{\text{チツテ}}$$

(2) 3 点 O，P，Q を通る放物線を $y = ax^2 + bx + c$ とおくと，O を通ることから $c = 0$ であり，$y = 2x^2$ のグラフを平行移動したものと一致したならば $a = 2$．つまり，3 点 O，P，Q を通る放物線を $y = 2x^2 + bx$ とおいてよい．

t 秒後，$\text{P}(-(8-2t),\ 8-2t)$，$\text{Q}(t,\ 10t)$ であるから，これらを代入して

$$\begin{cases} 8-2t = 2(8-2t)^2 - b(8-2t) \cdots\cdots\cdots ① \\ 10t = 2t^2 + bt \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

②において，$t \neq 0$ から両辺を t で割って $10 = 2t + b \Leftrightarrow b = 10 - 2t$ ………③．

①において，$t \neq 4$ から両辺を $8-2t$ で割って $1 = 2(8-2t) - b$．ここに，③を代入して

$$\begin{aligned}
& 1 = 16 - 4t - (10 - 2t) \\
\Leftrightarrow\ & 1 = 6 - 2t \\
\Leftrightarrow\ & 2t = 5 \qquad \therefore t = \underline{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}}_{\text{トナ}}
\end{aligned}$$

再び③から $b = 10 - 2\cdot\dfrac{5}{2} = 5$ であるから，3 点 O，P，Q を通る放物線は

$$\begin{aligned}
y &= 2x^2 + 5x \\
&= 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x\right) \\
&= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}
\end{aligned}$$

となり，$y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に $\underline{\mathbf{-\dfrac{5}{4}}}_{\text{ニヌネ}}$，$y$ 軸方向に $\underline{\mathbf{-\dfrac{25}{8}}}_{\text{ノハヒフ}}$ 平行移動したグラフとわかる．

「前半は図を正しく書けば難しくない．(1) の後半は軸と，定義域の端，真ん中との位置関係を考える典型的な問題，(2) は

(1) と独立した標準的な 2 次関数の決定の問題.」

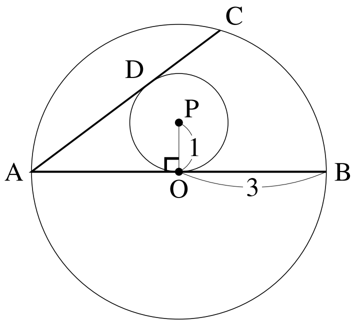
$\boxed{\text{ア}}$: 4（３点）, $\boxed{\text{イ}}$: 7, $\boxed{\text{ウ}}$: 1, $\boxed{\text{エ}}$: 6, $\boxed{\text{オ}}$: 3, $\boxed{\text{カ}}$: 2（以上３点）

$\boxed{\text{キ}}$: 8, $\boxed{\text{ク}}$: 7（以上３点）, $\boxed{\text{ケ}}$: 1, $\boxed{\text{コ}}$: 6, $\boxed{\text{サ}}$: 0, $\boxed{\text{シ}}$: 7（以上３点）

$\boxed{\text{ス}}$: 1, $\boxed{\text{セ}}$: 7, $\boxed{\text{ソ}}$: 8, $\boxed{\text{タ}}$: 7（以上３点）, $\boxed{\text{チ}}$: 9 $\boxed{\text{ツ}}$: 1, $\boxed{\text{テ}}$: 4（以上３点）

$\boxed{\text{ト}}$: 5, $\boxed{\text{ナ}}$: 2（以上３点） $\boxed{\text{ニ}}$: −, $\boxed{\text{ヌ}}$: 5, $\boxed{\text{ネ}}$: 4（以上２点）, $\boxed{\text{ノ}}$: −, $\boxed{\text{ハ}}$: 2, $\boxed{\text{ヒ}}$: 5 $\boxed{\text{フ}}$: 8（以上２点）,

第 3 問　図を描くと，右のようになる．



◀ 直線 AB を水平に引くと描きやすい．

$\triangle$OAP は直角三角形なので，AP $= \sqrt{3^2+1^2} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{10}}}$ アイ

また，OD と AP の交点を M とおくと，$\triangle$MOP $\backsim$ $\triangle$OAP であるから

$$\begin{aligned} & \mathrm{MO} : \mathrm{OP} = \mathrm{OA} : \mathrm{AP} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{MO} : 1 = 3 : \sqrt{10} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{10}\mathrm{MO} = 3 \end{aligned}$$

よって，OD $= 2$MO $= 2 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \underline{\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{10}}{5}}}$ ウエオカ である．

さらに，$\triangle$OAD について，A から見た余弦定理より

◀【別解】$\cos\angle\mathrm{PAO} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ について，倍角の公式を用いてもよい．

$$\begin{aligned} \cos\angle\mathrm{OAD} &= \frac{3^2+3^2-\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2}{2\cdot 3\cdot 3} \\ &= \frac{18-\frac{18}{5}}{18} \\ &= 1-\frac{1}{5} = \underline{\boldsymbol{\frac{4}{5}}}\ \text{キク} \end{aligned}$$

◀ 分母と分子が 18 で約分できる

また，$\angle$ACB $= 90^\circ$ より，AC $=$ AB $\cos\angle$OAD $= 6 \cdot \dfrac{4}{5} = \underline{\boldsymbol{\dfrac{24}{5}}}$ ケコサ．

$\sin\angle\mathrm{OAD} = \sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$ より，CB $= 6 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{18}{5}$ であるから，

$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{24}{5} \cdot \dfrac{18}{5} = \underline{\boldsymbol{\dfrac{216}{25}}}$ シスセソタ

内接円の半径は，これを r とおくと

$$\begin{aligned} & \frac{r}{2}\left(6+\frac{24}{5}+\frac{18}{5}\right) = \frac{216}{25} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{5r}{2}(30+24+18) = 216 \\ \Leftrightarrow\ & 5r \cdot \cancel{36} = \cancel{216}^{\,6} \qquad \therefore r = \underline{\boldsymbol{\frac{6}{5}}}\ \text{チツ} \end{aligned}$$

◀ 両辺を 25 倍した

(1) まず，$\angle$A $= \angle$C $= 90^\circ$，CE $=$ AB，AC 共通より，$\triangle$ACE $\equiv$ $\triangle$CAB であるから，内接円 Q も R も半径 $\dfrac{6}{5}$ である．また，$\angle$A $= \angle$C $= 90^\circ$ に注意して，RQ $/\!/$ AC であり，RQ $=$ AC $- \dfrac{6}{5} - \dfrac{6}{5}$ とわかる．よって

$$\mathrm{RQ} = \mathrm{AC} - \frac{12}{5} = \frac{24}{5} - \frac{12}{5} = \underline{\boldsymbol{\frac{12}{5}}}\ \text{テトナ}$$

であり，これは，$\dfrac{6}{5}+\dfrac{6}{5}$ に等しいから，内接円 Q と R は外接し，$\underline{2}$ ニ．

(2) 円 P は AC，AB と接しているので，AP は $\angle$CAB の二等分線であり，A，P，Q は一直線上にある．よって，Q から AB へ下ろした垂線の足を H とすると，

$$\begin{aligned} & \mathrm{AP} : \mathrm{AQ} = \mathrm{PO} : \mathrm{QO} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{10} : \mathrm{AQ} = 1 : \frac{6}{5} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{AQ} = \underline{\boldsymbol{\frac{6}{5}\sqrt{10}}}\ \text{ヌネノハ} \end{aligned}$$

であり，PQ $=$ AQ $-$ AP $= \underline{\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{5}}}$ ヒフヘ．

$\dfrac{\sqrt{10}}{5} < 1$ より，Q は円 P の内部にあり，$\dfrac{\sqrt{10}}{5} < \dfrac{6}{5}$ より，P も円 Q の内部にあるから $\underline{②}_{\text{ホ}}$.

「図をうまく描きさえすれば，どちらかと言えば，中学の図形問題の要素が強い問題．円周角の定理，三平方の定理，相似，合同などを駆使できれば，比較的解きやすい．逆に言えば，それらの図形的性質に気づかないと，なかなか解きづらいだろう．」

$\boxed{\text{ア}}$: 1, $\boxed{\text{イ}}$: 0（以上３点）, $\boxed{\text{ウ}}$: 3, $\boxed{\text{エ}}$: 1, $\boxed{\text{オ}}$: 0, $\boxed{\text{カ}}$: 5（以上３点）

$\boxed{\text{キ}}$: 4, $\boxed{\text{ク}}$: 5（以上２点）, $\boxed{\text{ケ}}$: 2, $\boxed{\text{コ}}$: 4, $\boxed{\text{サ}}$: 5（以上２点）

$\boxed{\text{シ}}$: 2, $\boxed{\text{ス}}$: 1, $\boxed{\text{セ}}$: 6, $\boxed{\text{ソ}}$: 2, $\boxed{\text{タ}}$: 5（以上３点）, $\boxed{\text{チ}}$: 6, $\boxed{\text{ツ}}$: 5（以上３点）

$\boxed{\text{テ}}$: 1, $\boxed{\text{ト}}$: 2, $\boxed{\text{ナ}}$: 5（以上３点）, $\boxed{\text{ニ}}$: 2（３点）, $\boxed{\text{ヌ}}$: 6, $\boxed{\text{ネ}}$: 1, $\boxed{\text{ノ}}$: 0, $\boxed{\text{ハ}}$: 5（以上２点）, $\boxed{\text{ヒ}}$: 1, $\boxed{\text{フ}}$: 0, $\boxed{\text{ヘ}}$: 5（以上３点）, $\boxed{\text{ホ}}$: 2（３点）

第 4 問

(1) すべての桁が 4 通りずつなので，$4^4 = {}_{\text{アイウ}}\underline{\mathbf{256}}$ 個ある．

◀『重複順列』

(2) 重複がないので，$4! = {}_{\text{エオ}}\underline{\mathbf{24}}$ 個．

◀『順列』

(3) (i) 1, 2, 3, 4 から 2 つ選ぶので，${}_4C_2 = {}_{\text{カ}}\underline{\mathbf{6}}$ 通り．

(ii) 一・十・百・千の位の 4 つから 2 つ選ぶので，${}_4C_2 = {}_{\text{キ}}\underline{\mathbf{6}}$ 通り．

(iii) $6 \cdot 6 = {}_{\text{クケ}}\underline{\mathbf{36}}$ 個．

(4) (i) 得点が 9 点，つまりすべて同じ数字になるのは 4 通り，つまり確率は $\dfrac{4}{4^4} = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{64}}}_{\text{コサシ}}$

得点が 3 点は，(3) より $\dfrac{36}{4^4} = \underline{\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{64}}}_{\text{スセソ}}$

(ii) 得点が 2 点は，3 回現れる数字を選ぶのが ${}_4C_1 = 4$ 通り，それをどの位に置くかが ${}_4C_3 = 4$ 通り，残りの数字を選ぶのが ${}_3C_1 = 3$ 通り，つまり $\dfrac{4 \cdot 4 \cdot 3}{4^4} = {}_{\text{タチツ}}\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}}}$ 通り

得点が 1 点は，2 回現れる数字を選ぶのが ${}_4C_1 = 4$ 通り，それをどの位に置くかが ${}_4C_2 = 6$ 通り，残りの数字を選ぶのが ${}_3C_2 = 3$ 通り，2 ヶ所に配置するのが 2 通り，つまり $\dfrac{4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2}{4^4} = {}_{\text{テトナ}}\underline{\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}}$ 通り

(iii) 期待値は

$$\begin{aligned} & 9 \cdot \frac{1}{64} + 3 \cdot \frac{9}{64} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 1 \cdot \frac{9}{16} + 0 \cdot \frac{24}{256} \\ = & \frac{9 + 27 + 24 + 36}{64} = \frac{96}{64} = \underline{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}_{\text{ニヌ}} \end{aligned}$$

「標準的な，場合の数と確率の問題．」

$\boxed{\text{ア}}$: 2, $\boxed{\text{イ}}$: 5, $\boxed{\text{ウ}}$: 6（以上３点）, $\boxed{\text{エ}}$: 2, $\boxed{\text{オ}}$: 4（以上３点）

$\boxed{\text{カ}}$: 6（２点）, $\boxed{\text{キ}}$: 6（２点）, $\boxed{\text{ク}}$: 3, $\boxed{\text{ケ}}$: 6（以上２点）

$\boxed{\text{コ}}$: 1, $\boxed{\text{サ}}$: 6, $\boxed{\text{シ}}$: 4（以上２点）, $\boxed{\text{ス}}$: 9, $\boxed{\text{セ}}$: 6, $\boxed{\text{ソ}}$: 4（以上２点）

$\boxed{\text{タ}}$: 3, $\boxed{\text{チ}}$: 1, $\boxed{\text{ツ}}$: 6（以上３点）, $\boxed{\text{テ}}$: 9, $\boxed{\text{ト}}$: 1, $\boxed{\text{ナ}}$: 6（以上４点）, $\boxed{\text{ニ}}$: 3, $\boxed{\text{ヌ}}$: 2（以上２点）