13th-note
2013年1月センター試験
数学ＩＩＢ・解説

Ver1.00（2013-1-21）

第 1 問 ［1］

(1) P の座標は $\left(\dfrac{6\cdot 1+3\cdot 2}{2+1},\ \dfrac{0\cdot 1+3\cdot 2}{2+1}\right)=({}_{ア}\underline{\mathbf{4}},\ \underline{\mathbf{2}}_{イ})$．

◂『内分点の座標』

Q の座標は $(-1):2$ の内分と考えて $\left(\dfrac{6\cdot 2+3\cdot(-1)}{(-1)+2},\ \dfrac{0\cdot 2+3\cdot(-1)}{(-1)+2}\right)=$ $({}_{ウ}\underline{\mathbf{9}},\ \underline{\mathbf{-3}}_{エオ})$．

◂『外分点の座標』

(2) OP の中点は (2, 1)，OP の傾きは $\dfrac{1}{2}$ なので OP に垂直な直線は傾き -2 であるから

$$y-1=-2(x-2) \Leftrightarrow y={}_{カキ}\underline{\mathbf{-2}}x+\underline{\mathbf{5}}_{ク} \qquad \cdots\cdots ①$$

PQ の中点は $\left(\dfrac{4+9}{2},\ \dfrac{2+(-3)}{2}\right)=\left(\dfrac{13}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ であり，PQ の傾きは $\dfrac{2-(-3)}{4-9}=-1$ から PQ に垂直な直線は傾き 1 なので

$$y+\frac{1}{2}=1\cdot\left(x-\frac{13}{2}\right) \Leftrightarrow y=x-\underline{\mathbf{7}}_{ケ} \qquad \cdots\cdots ②$$

②を①に代入して

$$x-7=-2x+5 \Leftrightarrow x=4$$

ここから $y=4-7=-3$ なので中心は $(4,-3)$．O との距離 $\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$ が円 C の半径なので

$$(x-\underline{\mathbf{4}}_{コ})^2+(y+\underline{\mathbf{3}}_{サ})^2=\underline{\mathbf{25}}_{シ}$$

が円 C の方程式である．

(3) $y=0$ を代入して

$$(x-4)^2+3^2=5^2 \Leftrightarrow (x-4)^2=4^2$$

よって $x-4=\pm 4$ より $x=0,\ 8$．つまり，OR : RA $=8:(8-6)={}_{ス}\underline{\mathbf{4}}:1$．

「標準的な，座標平面上の内分・外分・直線の方程式・円の方程式の問題.」

$\boxed{ア}$: 4, $\boxed{イ}$: 2（以上 1 点），$\boxed{ウ}$: 9, $\boxed{エ}$: −, $\boxed{オ}$: 3（以上 1 点）

$\boxed{カ}$: −, $\boxed{キ}$: 2、$\boxed{ク}$: 5（以上 3 点），$\boxed{ケ}$: 7（2 点）

$\boxed{コ}$: 4, $\boxed{サ}$: 3（以上 3 点），$\boxed{シ}$: 2, $\boxed{ス}$: 5（以上 2 点），$\boxed{セ}$: 4（3 点）

［2］

$$x+y+z=3 \Leftrightarrow 2^{x+y+z}=2^3 \Leftrightarrow 2^x\cdot 2^y\cdot 2^z=2^3$$

より，$XYZ=\underline{\mathbf{8}}_{\text{ソ}}$.

$$\frac{49}{16} = \frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^y}+\frac{1}{2^z} = \frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z} = \frac{YZ+ZX+XY}{XYZ}$$

つまり，$XY+YZ+ZX=\frac{49}{16}XYZ=\frac{49}{16}\cdot 8=\underline{\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2}}}_{\text{タチツ}}$.

よって，$(t-X)(t-Y)(t-Z)=t^3-\frac{35}{2}t^2+\frac{49}{2}t-8$ であるが，問題文より $y-\frac{1}{2}$ で割れるので，右の組立除法から

$$\begin{aligned} t^3-\frac{35}{2}t^2+\frac{49}{2}t-8 &= \left(t-\frac{1}{2}\right)(t^2-17t+16) \\ &= \left(t-\frac{1}{2}\right)(t-\underline{\mathbf{1}}_{\text{テ}})(t-\underline{\mathbf{16}}_{\text{トナ}}) \end{aligned}$$

となる．したがって，$X=\frac{1}{2}$, $Y=1$, $Z=16$ であり，$x=\log_{\underline{\mathbf{2}}_{\text{ニ}}} X$ などから $x=\underline{\mathbf{-1}}_{\text{ヌネ}}$, $y=\underline{\mathbf{0}}_{\text{ノ}}$, $z=\underline{\mathbf{4}}_{\text{ハ}}$

$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{35}{2}$	$\frac{49}{2}$	-8
		$\frac{1}{2}$	$-\frac{17}{2}$	8
	1	-17	16	0

「3 文字の対数方程式，途中で誘導付きの 3 次方程式の解と係数の関係を用いているが，書いてある通りにやれば，難しくない.」

$\boxed{\text{ソ}}$: 8（３点）, $\boxed{\text{タ}}$: 4, $\boxed{\text{チ}}$: 9, $\boxed{\text{ツ}}$: 2（以上３点）

$\boxed{\text{テ}}$: 1, $\boxed{\text{ト}}$: 1, $\boxed{\text{ナ}}$: 6（以上２点）, $\boxed{\text{ニ}}$: 2（１点）, $\boxed{\text{ヌ}}$: –, $\boxed{\text{ネ}}$: 1（以上２点）

$\boxed{\text{ノ}}$: 0（２点）, $\boxed{\text{ハ}}$: 4（２点）

第 2 問

$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$ であり，$a > 0$ から $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，極大値は $x = \underline{\boldsymbol{-a}}_{アイ}$ で $f(-a) = (-a)^3 - 3a^2(-a) + a^3 = \underline{\boldsymbol{3a^3}}_{ウエ}$ をとり，極小値は $x = \underline{\boldsymbol{a}}_{オ}$ で $f(a) = a^3 - 3a^2 \cdot a + a^3 = \underline{\boldsymbol{-a^3}}_{カキ}$ をとる．

この 2 点と原点を通る放物線 C を $y = px^2 + qx$ とおくと，$a \neq 0$ から

$$\begin{cases} 3a^3 = p(-a)^2 + q(-a) \\ -a^3 = pa^2 + qa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 = pa - q \cdots\cdots ③ \\ -a^2 = pa + q \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③ + ④ から $2a^2 = 2pa$ となって $p = a$,

④ − ③ から $-4a^2 = 2q$ となって $q = -2a^2$,

よって C の方程式は $y = {}_{ク}\underline{\boldsymbol{a}}x^2 - \underline{\boldsymbol{2a^2x}}_{ケコ}$.

C の式を微分して，$y' = 2ax - 2a^2$ なので，原点における C の接線 l は傾き $-2a^2$ であり，l の方程式は $y = \underline{\boldsymbol{-2a^2x}}_{サシス}$ である．さらに，m の方程式は $y = \dfrac{1}{{}_{セソ}\underline{\boldsymbol{2a^2}}}x$ である．

D と l を連立して解くと

$$\begin{aligned} & -ax^2 + 2a^2x = -2a^2x \\ \Leftrightarrow\ & 0 = ax^2 - 4a^2x \\ \Leftrightarrow\ & 0 = ax(x-4a) \end{aligned}$$

となって，交点の x 座標は $x = 0,\ 4a$ となるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{4a} \{(-ax^2 + 2a^2x) - (-2a^2x)\}dx \\ &= -a\int_0^{4a} x(x-4a)dx \\ &= -a \cdot \left(-\frac{(4a-0)^3}{6}\right) = \underline{\boldsymbol{\frac{32}{3}a^4}}_{タチツテ} \end{aligned}$$

◀ $x = 0,\ 4a$ を用いるときの計算を利用

C と m を連立して解くと

$$\begin{aligned} & ax^2 - 2a^2x = \frac{1}{2a^2}x \\ \Leftrightarrow\ & ax^2 - \left(2a^2 + \frac{1}{2a^2}\right)x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & ax\left\{x - \frac{1}{a}\left(2a^2 + \frac{1}{2a^2}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

なので，交点の x 座標は 0 と $\dfrac{1}{a}\left(2a^2 + \dfrac{1}{2a^2}\right) = \underline{\boldsymbol{\dfrac{4a^4+1}{2a^3}}}_{トナ}$ である．つまり

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\frac{4a^4+1}{2a^3}} \left\{\frac{1}{2a^2}x - (ax^2 - 2a^2x)\right\}dx \\ &= -a\int_0^{\frac{4a^4+1}{2a^3}} x\left(x - \frac{4a^4+1}{2a^3}\right)dx \\ &= -a \cdot \left\{-\frac{\left(\frac{4a^4+1}{2a^3} - 0\right)^3}{6}\right\} \\ &= \frac{a(4a^4+1)^3}{6\left(2a^3\right)^3} \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} S = T &\iff \frac{32}{3}a^4 = \frac{(4a^4+1)^3}{48a^8} \\ &\iff \frac{32}{3}a^4 \cdot 48a^8 = (4a^4+1)^3 \\ &\iff 32 \cdot 16a^{12} = (4a^4+1)^3 \\ &\iff 2^9 a^{12} = (4a^4+1)^3 \\ &\iff (2^3 a^4)^3 = (4a^4+1)^3 \\ &\iff 2^3 a^4 = 4a^4 + 1 \end{aligned}$$

つまり，$a^4 = \underline{\mathbf{\frac{1}{4}}}_{ニヌ}$ となり，このとき $S = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\mathbf{\frac{8}{3}}}_{ネノ}$ である.

「途中までは微積分の標準的な問題．ただし，放物線や直線が多数出てくるので，混乱しないようにしたい．後半の積分計算は，$\frac{1}{6}$ の定積分の公式がないと厳しい．また，その後の計算も工夫が必要.」

$\boxed{ア}$: −, $\boxed{イ}$: a（以上２点）, $\boxed{ウ}$: 3, $\boxed{エ}$: 3（以上３点）, $\boxed{オ}$: a（２点）, $\boxed{カ}$: −, $\boxed{キ}$: 3（以上３点）

$\boxed{ク}$: a, $\boxed{ケ}$: 2, $\boxed{コ}$: 2（以上３点）, $\boxed{サ}$: −, $\boxed{シ}$: 2, $\boxed{ス}$: 2（以上３点）, $\boxed{セ}$: 2, $\boxed{ソ}$: 2（以上３点）

$\boxed{タ}$: 3, $\boxed{チ}$: 2, $\boxed{ツ}$: 3, $\boxed{テ}$: 4（以上５点）

$\boxed{ト}$: 4, $\boxed{ナ}$: 3（以上２点）, $\boxed{ニ}$: 1, $\boxed{ヌ}$: 4（以上３点）, $\boxed{ネ}$: 8, $\boxed{ノ}$: 3（以上１点）

第 3 問

(1) 特性方程式を解くと $t=\dfrac{1}{3}t+1 \Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}$ なので

$$① \Leftrightarrow\ p_{n+1}-\underline{\mathbf{\frac{3}{2}}}_{\text{アイ}} = \frac{1}{3}\left(p_n-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(p_1-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

となるので，$p_n=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{{}_{\text{ウエ}}\underline{\mathbf{2\cdot 3^{n-2}}}}+\underline{\mathbf{\dfrac{3}{2}}}_{\text{オカ}}$.

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}$ は初項 $\dfrac{3}{2}$，公比 $\dfrac{1}{3}$，項数 n の等比数列の和なので $\dfrac{\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{9}{4}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$ なので

$$\sum_{k=1}^{n}p_k={}_{\text{キク}}\underline{\mathbf{\frac{9}{4}}}\left(1-\frac{1}{{}_{\text{ケ}}\underline{\mathbf{3}}^n}\right)+\underline{\mathbf{\frac{3n}{2}}}_{\text{コサ}}$$

(2) $a_4=\dfrac{3+3}{3}=\underline{\mathbf{2}}_{\text{シ}}$, $a_5=\dfrac{3+3}{2}=3$, $a_6=\dfrac{3+2}{3}=\underline{\mathbf{\dfrac{5}{3}}}_{\text{スセ}}$，$a_7=3$ である．以下，$b_n=a_{2n-1}=3$ と示すため，④式 $b_{n+1}=b_n$ を数学的帰納法（$\underline{\mathbf{②}}_{\text{ソ}}$）で示す．

I $n=1$ のとき，$b_1=3$, $b_2=3$ から④は正しい．

II ④が $n=k$ のとき正しい，つまり，⑤式 $b_{k+1}=b_k$ と仮定する．このとき，$b_{k+2}=b_{k+1}$ を示せば良い．

$$b_{k+2}=a_{2(k+2)-1}=a_{2k+3},\qquad b_{k+1}=a_{2(k+1)-1}=a_{2k+1},\qquad b_k=a_{2k-1}$$
$$c_{k+1}=a_{2(k+1)}=a_{2k+2},\qquad c_k=a_{2k}$$

に注意すると

$$b_{k+2}=a_{2k+3}=\frac{a_{2k}+a_{2k+1}}{a_{2k+2}}=\frac{c_k+{}_{\text{タ}}\underline{\mathbf{b}}_{k+1}}{{}_{\text{チ}}\underline{\mathbf{c}}_{k+1}}$$
$$c_{k+1}=a_{2k+2}=\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{a_{2k+1}}=\frac{{}_{\text{ツ}}\underline{\mathbf{b}}_k+c_k}{{}_{\text{テ}}\underline{\mathbf{b}}_{k+1}}\ \cdots\cdots\ ⑤$$

となる．下の式を上の式に代入して

$$b_{k+2}=\frac{c_k+b_{k+1}}{\frac{b_k+c_k}{b_{k+1}}}=\frac{({}_{\text{ト}}\underline{\mathbf{c}}_k+{}_{\text{ナ}}\underline{\mathbf{b}}_{k+1}){}_{\text{ニ}}\underline{\mathbf{b}}_{k+1}}{b_k+c_k}$$
$$=\frac{(c_k+b_k)b_{k+1}}{b_k+c_k}=b_{k+1}$$

よって，$b_{k+2}=b_{k+1}$ を示せた．

以上から，すべての自然数 n について $b_{n+1}=b_n$ が成り立ち，$b_n=b_1=3$ である．

また，$c_1=a_2=\underline{\mathbf{3}}_{\text{ヌ}}$ と，??から $c_{k+1}=\dfrac{3+c_k}{3}$ から $c_{n+1}=\dfrac{1}{3}c_n+1$ であることより，$c_n=p_n$ である．

「冒頭は標準的な漸化式の問題と，等比数列の和．後半は，見慣れない数列が出てきて，文字が多く煩雑ではあるが，書いてある通りやればさほど難しくない．数学的帰納法も，問題文中でほとんど行われている．日頃から，式変形の意味を理解しながら行っていることが求められる」

$\boxed{\text{ア}}$: 3, $\boxed{\text{イ}}$: 2（以上２点），$\boxed{\text{ウ}}$: 2, $\boxed{\text{エ}}$: 3（以上２点），$\boxed{\text{オ}}$: 3, $\boxed{\text{カ}}$: 2（以上１点）

$\boxed{\text{キ}}$: 9, $\boxed{\text{ク}}$: 4, $\boxed{\text{ケ}}$: 3（以上２点），$\boxed{\text{コ}}$: 3, $\boxed{\text{サ}}$: 2（以上１点）

$\boxed{\text{シ}}$: 2（１点）$\boxed{\text{ス}}$: 5, $\boxed{\text{セ}}$: 3（以上２点），$\boxed{\text{ソ}}$: 2（２点），$\boxed{\text{タ}}$: b, $\boxed{\text{チ}}$: c（以上２点）

$\boxed{\text{ツ}}$: b, $\boxed{\text{テ}}$: b（以上２点），$\boxed{\text{ト}}$: c, $\boxed{\text{ナ}}$: b, $\boxed{\text{ニ}}$: b（以上２点）$\boxed{\text{ヌ}}$: 3（１点）

第 4 問

(1) D は線分 OA を 3 : 2 に内分した点なので $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{3}{5}\vec{a}$，また $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{a} + \vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = (\vec{a} + \vec{c}) - \frac{3}{5}\vec{a} = \underline{\mathbf{\frac{2}{5}}}_{\text{アイ}}\vec{a} + \vec{c}$$

また，$\vec{a} \cdot \vec{c} = 5 \cdot 4 \cdot \cos\theta = \underline{\mathbf{20}}_{\text{ウエ}} \cos\theta$ である．

ここで，AE と DB は垂直なので $\overrightarrow{\mathrm{AE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} = \underline{\mathbf{0}}_{\text{オ}}$ である一方

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} &= (t\vec{c} - \vec{a}) \cdot \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \vec{c}\right) \\
&= \frac{2}{5}t\vec{c} \cdot \vec{a} + t|\vec{c}|^2 - \frac{2}{5}|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} \\
&= \frac{2}{5}t \cdot (20\cos\theta) + 16t - \frac{2}{5} \cdot 25 - 20\cos\theta \\
&= 8t\cos\theta + 16t - 10 - 20\cos\theta
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& 8t\cos\theta + 16t - 10 - 20\cos\theta = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 8t\cos\theta + 16t = 10 + 20\cos\theta \\
\Leftrightarrow\ & 8t(\cos\theta + 2) = 10(1 + 2\cos\theta) \\
\Leftrightarrow\ & t = \underline{\mathbf{\frac{5(2\cos\theta + 1)}{4(\cos\theta + 2)}}}_{\text{カキクケ}}
\end{aligned}$$

(2) $r = \cos\theta$, $0 \leqq t \leqq 1$, $r + 2 > 0$ から

$$0 \leqq 5(2r + 1) \leqq 4(r + 2)$$

$0 \leqq 5(2r + 1)$ を解いて $-\dfrac{1}{2} \leqq r$，$5(2r + 1) \leqq 4(r + 2)$ を解いて $6r \leqq 3$ から $r \leqq \dfrac{1}{2}$．よって $-\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$ から $\underline{\mathbf{\frac{\pi}{3}}}_{\text{コ}} \leqq \theta \leqq \underline{\mathbf{\frac{2}{3}\pi}}_{\text{サシ}}$ となる．

(3) $\cos\theta = -\dfrac{1}{8}$ より，$t = \dfrac{5\left\{2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 1\right\}}{4\left(-\frac{1}{8} + 2\right)} = \dfrac{\frac{15}{4}}{\frac{15}{2}} = \underline{\mathbf{\frac{1}{2}}}_{\text{スセ}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{1}{2}\vec{c}$.

ここで，右欄外の図のように，直線 AE と直線 BC の交点を G とする．E が OC の中点なので AE : EG = 1 : 1．一方，△DAF ∽ △BGF であり相似比 AD : GB = 2 : (2 + 3 + 5) = 1 : 5．つまり，AG = (1 + 5)AF = 6AF から AE = 3AF．よって AF : FE = 1 : (3 − 1) = 1 : $\underline{\mathbf{2}}_{\text{テ}}$ であり

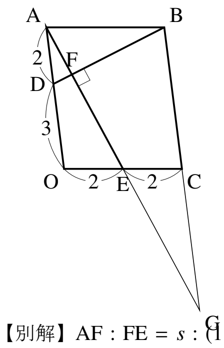
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}}{1 + 2} \\
&= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{c}\right) = \underline{\mathbf{\frac{2}{3}}}_{\text{ソタ}}\vec{a} + \underline{\mathbf{\frac{1}{6}}}_{\text{チツ}}\vec{c}
\end{aligned}$$

である．平行四辺形 OABC の面積は

$$\begin{aligned}
\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OC}\sin\theta &= 5 \cdot 4 \cdot \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{8}\right)^2} \\
&= 20\sqrt{\frac{63}{64}} \\
&= 20 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \underline{\mathbf{\frac{15\sqrt{7}}{2}}}_{\text{トナニヌ}}
\end{aligned}$$

であり，$\triangle\mathrm{BEF} = \dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BEA} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}\,▱\mathrm{OABC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{15\sqrt{7}}{2} = \underline{\mathbf{\frac{5\sqrt{7}}{2}}}_{\text{ネノハ}}$

である．

◀ 

【別解】AF : FE = s : $(1 - s)$, DF : FB = t : $(1 - t)$ とおき、ベクトルを用いてもよい.

「平面ベクトルの標準的な問題．多少計算が複雑そうに見えるが，計算してみるとさほどでもない．」

$\boxed{ア}$: 2, $\boxed{イ}$: 5（以上２点）, $\boxed{ウ}$: 2, $\boxed{エ}$: 0（以上１点）, $\boxed{オ}$: 0（１点）

$\boxed{カ}$: 5, $\boxed{キ}$: 2, $\boxed{ク}$: 4, $\boxed{ケ}$: 2（以上３点）, $\boxed{コ}$: 3（２点）

$\boxed{サ}$: 2, $\boxed{シ}$: 3（以上２点）, $\boxed{ス}$: 1, $\boxed{セ}$: 2（以上１点）

$\boxed{ソ}$: 2, $\boxed{タ}$: 3, $\boxed{チ}$: 1, $\boxed{ツ}$: 6（以上３点）, $\boxed{テ}$: 2（１点）

$\boxed{ト}$: 1, $\boxed{ナ}$: 5, $\boxed{ニ}$: 7, $\boxed{ヌ}$: 2（以上２点）, $\boxed{ネ}$: 5, $\boxed{ノ}$: 7, $\boxed{ハ}$: 2（以上２点）