13th-note
2014年1月センター試験
数学ⅠＡ・解説

Ver1.00（2014-1-21）

第 1 問 〔1〕

(1)

$$ab = \frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-3}{1-2} = \underline{\mathbf{2}}_{ア}$$

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}+1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1-2} \\ &= \frac{2-2\sqrt{6}}{-1} = \frac{-2(-1+\sqrt{6})}{-1} = {}_{イ}\underline{\mathbf{2}}\left({}_{ウエ}\underline{\mathbf{-1}} + \underline{\mathbf{\sqrt{6}}}_{オ}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab \\ &= \{2(-1+\sqrt{6})\}^2 - 2\cdot 2 \\ &= 4(1-2\sqrt{6}+6)-4 = -8\sqrt{6}+24 = {}_{カ}\underline{\mathbf{8}}\left({}_{キ}\underline{\mathbf{3}} - \underline{\mathbf{\sqrt{6}}}_{ク}\right) \end{aligned}$$

(2) (1) より，

$$a^2+b^2+4(a+b) = 8(3-\sqrt{6})+4\cdot 2(-1+\sqrt{6}) = \underline{\mathbf{16}}_{ケコ}$$

である．$ab=2$ より $b=\dfrac{2}{a}$ であるからこれを代入して

◀ a だけの式だけにしたいので，b を消去する．

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+4(a+b)=16 \\ \Leftrightarrow\ & a^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2+4\left(a+\frac{2}{a}\right)=16 \\ \Leftrightarrow\ & a^2+\frac{4}{a^2}+4a+\frac{8}{a}-16=0 \\ & a^4+4+4a^3+8a-16a^2=0 \\ & a^4+{}_{サ}\underline{\mathbf{4}}a^3-{}_{シス}\underline{\mathbf{16}}a^2+{}_{セ}\underline{\mathbf{8}}a+\underline{\mathbf{4}}_{ソ}=0 \end{aligned}$$

◀ 両辺を a^2 倍して分母を払った．

「最後に a の 4 次式が出てくるところは，少し気づきにくい．それまでは，式の値の計算をしっかり身につけておけば難しくない．」

解答番号	正解	配点
ア	**2**	1
イ (ウエ + $\sqrt{オ}$)	$\mathbf{2(-1+\sqrt{6})}$	2
カ (キ − $\sqrt{ク}$)	$\mathbf{8(3-\sqrt{6})}$	2
ケコ	**16**	2
a^4+ サ a^3- シス a^2+ セ $a+$ ソ $=0$	$a^4+\mathbf{4}a^3-\mathbf{16}a^2+\mathbf{8}a+\mathbf{4}=0$	3

［2］(1) U について，$5 < \sqrt{n} < 6 \Leftrightarrow 25 < n < 36$ より，$U = \{26,\ 27,\ 28,\ \cdots 35\}$ であり，$35 - 25 = \underline{\mathbf{10}}_{\text{タチ}}$ 個ある．

(2) $P = \{28,\ 32\}$，$Q = \{30,\ 35\}$，$R = \{30\}$，$S = \{28,\ 35\}$ であり，$P \cap R$ は空集合とわかり 0 は正しい．また，$\overline{Q}$ は 30, 35 以外であり，R とは共通部分がない．よって，$R \cap \overline{Q} = \emptyset$ になり 4 は正しい．$\underline{\mathbf{0},\ \mathbf{4}}_{\text{ツテ}}$．

◀ 順序不問

(3) 順に調べると

0 $P \cup R = \{28,\ 30,\ 32\}$ より，30 が $\overline{Q}$ に含まれず，誤り．

1 $S \cap \overline{Q} = \{28\}$ であり P に含まれ，正しい．

2 $\overline{Q} \cap \overline{S} = \overline{Q \cup S}$ は 28，30，35 以外であり，32 は $\overline{P}$ に含まれず，誤り．

3 $\overline{P} \cup \overline{Q} = \overline{P \cap Q}$ は空集合の補集合であり，U に一致し，$\overline{S}$ には含まれない．

4 $\overline{R} \cap \overline{S} = \overline{R \cup S}$ は 28，30，35 以外であり，30，35 以外の $\overline{Q}$ に含まれ，正しい．

以上より正しいのは，$\underline{\mathbf{1},\ \mathbf{4}}_{\text{トナ}}$．

◀ 順序不問

「集合の要素を書き並べ，注意深く双方を比べればよい問題.」

解答番号	正解	配点
タチ	**10**	2
ツ と テ	**0, 4**または**4, 0**	4
ト と ナ	**1, 4**または**4, 1**	4

第 2 問

①を平方完成すると

$$y = (x+a)^2 - a^2 + 3a^2 - 6a - 36 = (x+a)^2 + 2a^2 - 6a - 36$$

であり，G の頂点の座標は

$$\left(\underline{\mathbf{-}}_{\text{ア}}a,\ \underline{\mathbf{2}}_{\text{イ}}a^2 - \underline{\mathbf{6}}_{\text{ウ}}a - \underline{\mathbf{36}}_{\text{エオ}}\right)$$

である．また，G と y 軸との交点は，$x = 0$ のときを考えて

$$p = 0^2 + 2a \cdot 0 + 3a^2 - 6a - 36 = 3a^2 - 6a - 36 \quad \cdots\cdots ②$$

である．

(1) $p = -27$ のとき，②より

$$3a^2 - 6a - 36 = -27 \iff a = \underline{\mathbf{3}}_{\text{カ}},\ \underline{\mathbf{-1}}_{\text{キク}}$$

である．ここで

$a = 3$ のとき，G の頂点は $(-3,\ 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - 36) = (-3, -36)$．

$a = -1$ のとき，G の頂点は $(-(-1),\ 2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 36) = (1, -28)$．

であり，$a = 3$ のときの頂点 $(-3, -36)$ を x 軸方向に $\underline{\mathbf{4}}_{\text{ケ}}$，$y$ 軸方向に $\underline{\mathbf{8}}_{\text{コ}}$ 平行移動すれば，$a = -1$ のときの頂点 $(1, -28)$ になる．

◀ $a = 3, -1$ の間での平行移動は，①のグラフの頂点を比べればよい．

(2) G が x 軸と交点をもつのは，下に凸な G の y 座標が 0 以下であればよいので

$$2a^2 - 6a - 36 \leqq 0 \iff a^2 - 3a - 18 \leqq 0 \iff (a-6)(a+3) \leqq 0$$

より，$\underline{\mathbf{-3} \leqq a \leqq \mathbf{6}}$ (サシス, セソ) であり，$\underline{③}_{\text{ス}}$，$\underline{③}_{\text{セ}}$．

この範囲での $p = 3a^2 - 6a - 36$ の最大・最小は

$$\begin{aligned} p &= 3(a^2 - 2a) - 36 \\ &= 3\{(a-1)^2 - 1\} - 36 = 3(a-1)^2 - 39 \end{aligned}$$

◀ 最大・最小を聞かれたら，まずはグラフを描く．

から，最小は頂点のときで $a = \underline{\mathbf{1}}_{\text{タ}}$ で最小値 $\underline{\mathbf{-39}}_{\text{チツテ}}$，最大は右端のときで $a = \underline{\mathbf{6}}_{\text{ト}}$ で最大値 $3 \cdot (6-1)^2 - 39 = 75 - 39 = \underline{\mathbf{36}}_{\text{ナニ}}$ をとる．

G と x 軸の共有点の x 座標が -1 より大きいためには，$-3 \leqq a \leqq 6$ の範囲において

G の軸が -1 より大きく，$x = -1$ のとき $y > 0$

でないといけない．軸について $-a > -1$ より $a < 1$．$x = -1$ のとき，G は

$$y = (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + 3a^2 - 6a - 36 = 3a^2 - 8a - 35$$

であり，これが正でないといけないから

$$3a^2 - 8a - 35 > 0 \iff (3a+7)(a-5) > 0 \iff a < -\frac{7}{3},\ 8 < a$$

以上を数直線に表わして共通部分を考えると $\underline{\mathbf{-3} \leqq a < -\mathbf{\frac{7}{3}}}$ (ヌネノ, ハヒフ) であり，$\underline{③}_{\text{ノ}}$，$\underline{①}_{\text{ハ}}$．

「やや易しめな，最後の問題以外は教科書の例題レベルの 2 次関数の問題．初めの問題で計算ミスをすると後に響く形になっている．最後だけは場合分けをしっかりとして解く必要があるが，定番の問題である．」

解答番号	正解	配点
$\left(\boxed{ア}a,\ \boxed{イ}a^2-\boxed{ウ}a-\boxed{エオ}\right)$	$(\mathbf{-}a,\ \mathbf{2}a^2-\mathbf{6}a-\mathbf{36})$	3
$\boxed{カ},\ \boxed{キク}$	**3, −1**	2
$\boxed{ケ}$	**4**	2
$\boxed{コ}$	**8**	2
$\boxed{サシ}$	**−3**	1
$\boxed{ス},\ \boxed{セ}$	**3, 3**	1
$\boxed{ソ}$	6	1
$\boxed{タ}$	1	3
$\boxed{チツテ}$	**−39**	1
$\boxed{ト}$	**6**	3
$\boxed{ナニ}$	**36**	1
$\boxed{ヌネ}$	**−3**	2
$\boxed{ノ},\ \boxed{ハ}$	**3, 1**	1
$\dfrac{\boxed{ヒフ}}{\boxed{ヘ}}$	$\dfrac{\mathbf{-7}}{\mathbf{3}}$	2

第 3 問

∠B から見た余弦定理より

$$CA^2 = 4^2 + 2^2 - 2\cdot 4\cdot 2\cdot \frac{1}{4} = 16$$

より，CA = $\underline{\mathbf{4}}_{\text{ア}}$ である．また，∠A から見た余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{4^2+4^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 4} = \underline{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}}_{\text{イウ}}$$

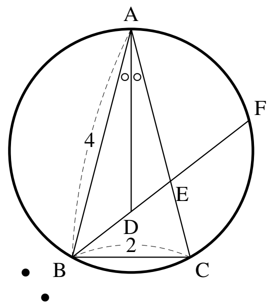
であり，$\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \underline{\frac{\mathbf{\sqrt{15}}}{\mathbf{8}}}_{\text{エオカ}}$ になる．

◀ sin は正の値しかとらない．

また，$\sin\angle\mathrm{ABC} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ から正弦定理より

$$2R = \frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{16}{\sqrt{15}} = \frac{16}{15}\sqrt{15}$$

よって，$R = \underline{\frac{\mathbf{8\sqrt{15}}}{\mathbf{15}}}_{\text{キクケコサ}}$ である．



(1) BE は角の二等分線なので

AE : EC = AB : BC = 2 : 1

より $\mathrm{AE} = \frac{2}{2+1}\mathrm{AC} = \underline{\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}}_{\text{シス}}$，

BE = x とおくと，△ABE について余弦定理より

◀

$$\cos\angle\mathrm{ABE} = \frac{4^2+x^2-\left(\frac{8}{3}\right)^2}{2\cdot 4\cdot x}$$

△CBE について，$\mathrm{CE} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ を用いて余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{CBE} = \frac{2^2+x^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{2\cdot 2\cdot x}$$

である．∠ABE = ∠CBE であるから

$$\frac{4^2+x^2-\left(\frac{8}{3}\right)^2}{2\cdot 4\cdot x} = \frac{2^2+x^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{2\cdot 2\cdot x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{144}{9} + x^2 - \frac{64}{9} = 2\left(\frac{36}{9} + x^2 - \frac{16}{9}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{80}{9} + x^2 = \frac{40}{9} + 2x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{40}{9}$$

◀ 両辺を $8x$ 倍した

となって，$x = \mathrm{BE} = \underline{\frac{\mathbf{2\sqrt{10}}}{\mathbf{3}}}_{\text{セソタチ}}$ である．また，線分 AD は ∠BAE の二等分線より $\mathrm{BD} : \mathrm{DE} = \mathrm{BA} : \mathrm{AE} = 4 : \frac{8}{3} = 3 : 2$ であるから，$\mathrm{BD} = \frac{3}{3+2}\mathrm{BE} = \frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{3} = \underline{\frac{\mathbf{2\sqrt{10}}}{\mathbf{5}}}_{\text{ツテトナ}}$．

(2) △EBC と △EAF は相似であり，相似比は $\mathrm{EB} : \mathrm{EA} = \frac{2\sqrt{10}}{3} : \frac{8}{3} = \sqrt{10} : 4$ であるから，面積比は $(\sqrt{10})^2 : 4^2 = 5 : 8$ である．よって，△EBC は △EAF の ${}_{\text{ニヌ}}\underline{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}}$ 倍である．

(3) まず，円周角の定理より

∠FAC = ∠FBC,　∠FCA = ∠FBA

であるが，BF は ∠B の二等分線より ∠FAC = ∠FCA である．よって FA = FC.

また，AD が ∠A の二等分線であることにも注意して

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{FAD} &= \angle \mathrm{FAC} + \angle \mathrm{CAD}\\ &= \angle \mathrm{FBC} + \angle \mathrm{DAB}\\ &= \angle \mathrm{FBA} + \angle \mathrm{DAB} = \angle \mathrm{ADF}\end{aligned}$$

よって FA = FD でもある．つまり，$\underline{4}_{\text{ネ}}$.

◀ なお，FA : AE = CB : BE より

$$\mathrm{FA} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{3} = \frac{8}{3} \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FA} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$$

「基本的な公式や事柄の確認がバランスよく並んだ，標準的な問題.」

解答番号	正解	配点
$\boxed{ア}$	**4**	3
$\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$	$\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}$	3
$\dfrac{\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カ}}$	$\dfrac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{8}}$	3
$\dfrac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{クケ}}}{\boxed{コサ}}$	$\dfrac{\mathbf{8}\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{15}}$	3
$\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$	$\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$	4
$\dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソタ}}}{\boxed{チ}}$	$\dfrac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{10}}}{\mathbf{3}}$	4
$\dfrac{\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テト}}}{\boxed{ナ}}$	$\dfrac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{10}}}{\mathbf{5}}$	4
$\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$	$\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$	3
$\boxed{ネ}$	**4**	3

第 4 問

(1) 3 が 2 回，4 が 2 回であるから $_4C_2 = \underline{6}_{ア}$ 通りある．

(2) 3，4，5 が 1 回ずつ出ればよく，$3! = \underline{6}_{イ}$ 通りある．

◀ 数えてもすぐに求められる．

(3) A から 3 回で C へ行くのは 6 通り，それぞれについて，C から 3 回で D へいくのも 6 通り．よって $6 \times 6 = \underline{36}_{ウエ}$ 通り．

6 回の移動は全部で 6^6 通りあるので，確率は $\dfrac{36}{6^6} = \dfrac{1}{6^4} = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1296}}}_{オカキクケ}$ である．

(4)
- 1 の向きを含んだ場合は，残りはすべて 4 の向きでないといけない．1 が 6 回のうち何回目で出るかを考え，$\underline{6}_{コ}$通り．
- 2 の向きを含んだ場合は，残り 5 回のうち 1 回は 5 の向き，4 回は 4 の向きでないといけない．つまり，2, 5, 4, 4, 4, 4 の順列になり，$\dfrac{6!}{1!1!4!} = \underline{30}_{サシ}$ 通り．
- 6 の向きを含む場合も 30 通り．
- 残りの場合は，例を 1 つ考えると 4 の向きが$\underline{2}_{シ}$回でないといけないとわかる．

◀ たとえば，3，5，3，5，4，4

  さらに考えていくと，3 が 1 回出れば，5 が 1 回出ないといけない．しかし，これだけでは，D には 5 回でたどり着いてしまう．そのため，3 がさらに 1 回出る必要がある．結局，3 は 2 回出なくてはならず，5 も 2 回出る．

  まとめると，3，4，5 が 2 回ずつであればよいと分かり $\dfrac{6!}{2!2!2!} = \underline{90}_{スセ}$ 通りある．

これらをすべて足して，$6 + 30 + 30 + 90 = \underline{156}_{セソタ}$ 通り．

「状況を把握するには少し時間がかかるかもしれないが，実際には複雑な設定はなく，丁寧に読めば，題意はとらえやすい．ただ，1 から 6 の数字の順列へ問題を置き換えて考えられることに気付かないままだと，時間がかかるだろう．」

解答番号	正解	配点
ア	**6**	2
イ	**6**	2
ウエ	**36**	3
オ / カキクケ	**1 / 1296**	3
コ	**6**	3
サ	**30**	3
シ	**2**	3
ス	**90**	3
セ	**156**	3