# 13th-note
# 2015年1月センター試験
# 数学ＩＩＢ・解説



Ver1.00（2015-2-14）

第 1 問 ［1］

(1) $\mathrm{OP} = \sqrt{(2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2} = \sqrt{4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{4} = \underline{\mathbf{2}}_{ア}$

$\mathrm{PQ} = \sqrt{\{(2\cos\theta + \cos 7\theta) - 2\cos\theta\}^2 + \{(2\sin\theta + \sin 7\theta) - 2\sin\theta\}^2}$

$= \sqrt{\cos^2 7\theta + \sin^2 7\theta} = \underline{\mathbf{1}}_{イ}$

である。また

$$\begin{aligned}
\mathrm{OQ}^2 &= (2\cos\theta + \cos 7\theta)^2 + (2\sin\theta + \sin 7\theta)^2 \\
&= 4\cos^2\theta + 4\cos\theta\cos 7\theta + \cos^2 7\theta + 4\sin^2\theta + 4\sin\theta\sin 7\theta + \sin^2 7\theta \\
&= 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 4(\cos\theta\cos 7\theta + \sin\theta\sin 7\theta) + (\cos^2 7\theta + \sin^2 7\theta) \\
&= {}_{ウ}\underline{\mathbf{5}} + {}_{エ}\underline{\mathbf{4}}(\cos 7\theta\cos\theta + \sin 7\theta\sin\theta) \\
&= 5 + 4\cos(7\theta - \theta) \\
&= 5 + 4\cos\left({}_{オ}\underline{\mathbf{6}}\theta\right)
\end{aligned}$$

である。

$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{3}{4}\pi \leqq 6\theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ なので、$\cos 6\theta$ は $6\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最大値 0 をとる。よって、OQ は $\theta = \underline{\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}}_{カ}$ のとき、最大値 $\sqrt{5 + 4 \cdot 0} = \underline{\sqrt{\mathbf{5}}}_{キ}$ をとる。

(2) 直線 OP は、$\cos\theta \neq 0$ であれば、傾き $\dfrac{2\sin\theta}{2\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

$$y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x \Leftrightarrow (\cos\theta)y = (\sin\theta)x \Leftrightarrow (\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$$

これは $\cos\theta = 0$ のときも直線 OP を表しているので、直線 OP は$\underline{③}_{キ}$。

O、P、Q が一直線上にあるのは、Q が直線 OP 上にあるときなので

$$\begin{aligned}
&(\sin\theta)(2\cos\theta + \cos 7\theta) - (\cos\theta)(2\sin\theta + \sin 7\theta) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\sin\theta\cos 7\theta - \cos\theta\sin 7\theta = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\sin(\theta - 7\theta) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\sin(-6\theta) = 0
\end{aligned}$$

これが成り立つのは、$6\theta = n\pi$（$n$ は整数）の時であるから、$\dfrac{3}{4}\pi \leqq 6\theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲では、$6\theta = \pi$ のときであるから、$\theta = \underline{\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}}_{ケ}$。

(3) ∠OQP が直角であれば

$$\mathrm{OQ} = \sqrt{\mathrm{OP}^2 - \mathrm{PQ}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \underline{\sqrt{\mathbf{3}}}_{コ}$$

のときである。よって、このとき

$$5 + 4\cos(6\theta) = 3 \Leftrightarrow \cos(6\theta) = -\frac{1}{2}$$

である。$\dfrac{3}{4}\pi \leqq 6\theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲では、$6\theta = \dfrac{4}{3}\pi$ のときであり $\theta = {}_{サシ}\underline{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}}\pi$。

◀ P の座標の式の形から、P が半径 2 の円周上の点だと分かれば、即座に 2 と分かる。

◀ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$\cos^2 7\theta + \sin^2 7\theta = 1$

◀「三角関数の加法定理」

◀ 単位円を考える

◀ もちろん、傾き $\tan\theta$ であるが、$\cos\theta = 0$ の場合を考えるため、または選択肢に合わせ、$\cos\theta$, $\sin\theta$ を残した形で考えている。

◀ $\sin(-6\theta) = -\sin(6\theta)$ と考えてもよい。

◀ $-6\theta = n\pi$（$n$ は整数）の時と考えてもよい。

| 解答番号 | 正解 | 配点 |
|---|---|---|
| $\boxed{ア}$ | **2** | 1 |
| $\boxed{イ}$ | **1** | 1 |
| $\boxed{ウ}$ | **5** | 1 |
| $\boxed{エ}$ | **4** | 1 |
| $\boxed{オ}\theta$ | **6**$\theta$ | 2 |
| $\dfrac{\pi}{\boxed{カ}} - \sqrt{\boxed{キ}}$ | $\dfrac{\pi}{4} - \sqrt{\mathbf{5}}$ | 2 |

| 解答番号 | 正解 | 配点 |
|---|---|---|
| $\boxed{ク}$ | ③ | 1 |
| $\dfrac{\pi}{\boxed{ケ}}$ | $\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$ | 2 |
| $\sqrt{\boxed{コ}}$ | $\sqrt{\mathbf{3}}$ | 1 |
| $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi$ | $\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{\pi}$ | 3 |

[2]

(1) 連立方程式を指数で表すと $\begin{cases} xy^{\frac{3}{2}} = a \cdots\cdots\cdots ① \\ x^{\frac{1}{3}}y = b \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ である。

②式から $y = bx^{-\frac{1}{3}}$ であるから①に代入して

$$x\left(bx^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a \iff xb^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}} = a$$

$$\iff x^{\frac{1}{2}} = ab^{-\frac{3}{2}} \qquad \therefore \quad x = a^{\underline{\mathbf{2}}_{ス}}b^{\underline{\mathbf{-3}}_{セソ}}$$

また、①式から $x = ay^{-\frac{3}{2}}$ であるから②に代入して

$$\left(ay^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}y = b \iff a^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}y = b$$

$$\iff y^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{3}}b \qquad \therefore \quad y = a^{-\frac{2}{3}}b^{\underline{\mathbf{2}}_{タ}}$$

となり、$p = \underline{-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}_{チツテ}$ である。

(2) 指数で表すと $b = 2a^{\frac{4}{3}}$ であるから

$$x = a^2\left(2a^{\frac{4}{3}}\right)^{-3} = a^2 2^{-3}a^{-4} = 2^{-3}a^{\underline{\mathbf{-2}}_{トナ}}$$

$$y = a^{-\frac{2}{3}}\left(2a^{\frac{4}{3}}\right)^2 = a^{-\frac{2}{3}}2^2a^{\frac{8}{3}} = 2^2a^{\underline{\mathbf{2}}_{ニ}}$$

と表される。$x, y$ は正なので、相加平均と相乗平均の関係から

$$x + y \geqq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2^{-3}a^{-2}2^2a^2} = 2\sqrt{2^{-1}} = \underline{\sqrt{\mathbf{2}}}_{ヌ}$$

となり、等号は $x = y$ のとき、つまり

$$2^{-3}a^{-2} = 2^2a^2 \iff 2^{-5} = a^4$$

から $a = 2^{\underline{-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}}_{ネノハ}}$ のときに成立する。

◀ 別解はいくつかある。たとえば
・両辺に $\log_2$ をとる（底は 2 でなくてもよい）方法
・上の式の 3 乗を、下の式で両辺どうし割り

$$\frac{x^3y}{\sqrt[3]{xy}} = \frac{a^3}{b}$$

として $x$ を求める方法

| 解答番号 | 正解 | 配点 |
| --- | --- | --- |
| ス, セソ | **2, −3** | 3 |
| タ, $\frac{チツ}{テ}$ | **2, $\frac{-2}{3}$** | 3 |
| トナ | **−2** | 2 |
| ニ | **2** | 2 |
| $\sqrt{ヌ}$ | **$\sqrt{2}$** | 2 |
| $\frac{ネノ}{ハ}$ | **$\frac{-5}{4}$** | 3 |

第 2 問

(1) $x$ が $a$ から $a+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{\frac{1}{2}(a+h)^2-\frac{1}{2}a^2}{h} = \frac{ah+\frac{1}{2}h^2}{h} = {}_{\text{ア}}\underline{\boldsymbol{a}} + \frac{h}{\underline{\mathbf{2}}_{\text{イ}}}$$

◀ $x$ の変化 $(a+h)-a$ に対し、$f(x)$ は $f(a+h)-f(a)$ 変化している。

である。したがって、求める微分係数は

$$f'(a) = \lim_{h\to\underline{\mathbf{0}}_{\text{ウ}}}\left(a+\frac{h}{2}\right) = \underline{\boldsymbol{a}}_{\text{エ}}$$

である。

(2) 点 P における接線の傾きは (1) より $a$ であるから、接線 $l$ は、傾き $a$ で $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ を通る直線であり

$$y-\frac{1}{2}a^2 = a(x-a) \iff y = {}_{\text{オ}}\underline{\boldsymbol{a}}x - \frac{1}{{}_{\text{カ}}\underline{\mathbf{2}}}a^2$$

である。$l$ と $x$ 軸の交点 Q は、$y=0$ を $l$ の式に代入して

$$0 = ax-\frac{1}{2}a^2 \iff x=\frac{1}{2}a$$

であるから、$\mathrm{Q}\left(\underset{\text{キク}}{\underline{\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}}},\ 0\right)$ である。

傾きが $a$ である $l$ に垂直な直線は、傾きが $-\frac{1}{a}$ である。よって、直線 $m$ は、$\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ を通り傾き $-\frac{1}{a}$ であるから

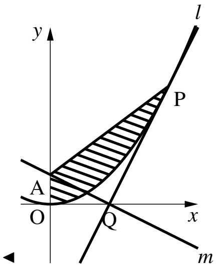
$$y-0=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right) \iff y = \underset{\text{ケコサ}}{\underline{-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}}}x + \underset{\text{シス}}{\underline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}}$$

$m$ と $y$ 軸の交点 A は、$m$ の切片なので $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ である。三角形 APQ を、A が原点 O になるよう平行移動して三角形 OP'Q' となったならば

$$\mathrm{P'}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\right),\quad \mathrm{Q'}\left(\frac{a}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{APQ} = \triangle\mathrm{OP'Q'} \\ &= \frac{1}{2}\left|a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{a}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{4}a^3-\frac{1}{4}a\right| \end{aligned}$$




$a>0$ なので、$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^3+a}{4} = \frac{a(a^2+\underline{\mathbf{1}}_{\text{セ}})}{\underline{\mathbf{8}}_{\text{ソ}}}$ となる。

また、$y$ 軸と線分 AP および曲線 $C$ によって囲まれた図形は、$0 \leqq a$ において直線 AP と $C$ と挟まれた図形であり、定積分で求められる。直線 AP は、傾き $\frac{\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}}{a-0}$ であり切片が A なので

◀

$$y = \frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned} T &= \int_0^a \left\{\left(\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}x^2\right\}dx \\ &= \left[\frac{a^2-1}{4a}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3\right]_0^a \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2-1}{4a}\cdot a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}a^3$$
$$= \frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}a^3$$
$$= \frac{1}{12}a^3 + \frac{1}{4}a = \frac{a(a^2+\underline{\mathbf{3}}_{\text{タ}})}{\underline{\mathbf{12}}_{\text{チツ}}}$$

となる。
以上より

$$\begin{aligned} S-T &= \frac{a(a^2+1)}{8} - \frac{a(a^2+3)}{12} \\ &= \frac{a\left\{3(a^2+1)-2(a^2+3)\right\}}{24} \\ &= \frac{a(a^2-\underline{\mathbf{3}}_{\text{テ}})}{\underline{\mathbf{24}}_{\text{トナ}}} \end{aligned}$$

である。$a>0$ より、$S-T>0$ となる範囲は

$$a^2-3>0 \iff a>\underline{\mathbf{\sqrt{3}}}_{\text{ニ}}$$

である。また、$S-T=g(a)=\dfrac{1}{24}a^3-\dfrac{1}{8}a$ とおくと

$$g'(a) = \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(a+1)(a-1)$$

となり、右の増減表から、$a=\underline{\mathbf{1}}_{\text{ヌ}}$ で最小値 $g(1)=\underline{\dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{12}}}_{\text{ネノハヒ}}$ をとると分かる。

◀

| $a$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $g$ | | ↘ | $g(1)$ | ↗ |

| 解答番号 | 正解 | 配点 |
|---|---|---|
| $\boxed{ア}+\dfrac{h}{\boxed{イ}}$ | $\boldsymbol{a+\dfrac{h}{2}}$ | 2 |
| $\boxed{ウ}$ | **0** | 2 |
| $\boxed{エ}$ | $\boldsymbol{a}$ | 1 |
| $\boxed{オ}x-\dfrac{1}{\boxed{カ}}a^2$ | $\boldsymbol{ax-\dfrac{1}{2}a^2}$ | 3 |
| $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ | $\boldsymbol{\dfrac{a}{2}}$ | 1 |
| $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}+\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ | $\boldsymbol{\dfrac{-1}{a}x+\dfrac{1}{2}}$ | 3 |
| $\dfrac{a(a^2+\boxed{セ})}{\boxed{ソ}}$ | $\boldsymbol{\dfrac{a(a^2+1)}{8}}$ | 4 |
| $\dfrac{a(a^2+\boxed{タ})}{\boxed{チツ}}$ | $\boldsymbol{\dfrac{a(a^2+3)}{12}}$ | 5 |
| $\dfrac{a(a^2-\boxed{テ})}{\boxed{トナ}}$ | $\boldsymbol{\dfrac{a(a^2-3)}{24}}$ | 2 |
| $\sqrt{\boxed{ニ}}$ | $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ | 2 |
| $\boxed{ヌ}$ | **1** | 2 |
| $\dfrac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハヒ}}$ | $\boldsymbol{\dfrac{-1}{12}}$ | 3 |

第 3 問

(1) $2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32$ であるから

$$a_1 = 2,\ a_2 = \underline{\mathbf{4}}_{\text{ア}},\ a_3 = \underline{\mathbf{8}}_{\text{イ}},\ a_4 = \underline{\mathbf{6}}_{\text{ウ}},\ a_5 = \underline{\mathbf{2}}_{\text{エ}}$$

である。つまり、数列 $\{a_n\}$ は $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \cdots$ と 4 つずつ繰り返す数列と分かり、$a_5 = a_1,\ a_6 = a_2,\ a_7 = a_3,\ \cdots$ であるから $a_{n+4} = a_n$ であり、$\underline{③}_{\text{オ}}$。

◀ 一の位の変化に、一の位以外は関係ないので、一度 2 になったら、同じ事を繰り返すしかない。

(2) $b_{n+4} = \dfrac{a_{n+3}b_{n+3}}{4}$ に $b_{n+3} = \dfrac{a_{n+2}b_{n+2}}{4}$ を代入し

$$b_{n+4} = \frac{a_{n+3}\frac{a_{n+2}b_{n+2}}{4}}{4} = \frac{a_{n+3}a_{n+2}b_{n+2}}{4^2}$$

となる。順に、$b_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}b_{n+1}}{4},\ b_{n+1} = \dfrac{a_n b_n}{4}$ を代入し

$$b_{n+4} = \frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n b_n}{4^2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{2^{\underline{\mathbf{8}}_{\text{カ}}}} b_n$$

◀ $4^4 = (2^2)^4 = 2^8$

が成り立つ。ここで、$a_{n+3},\ a_{n+2},\ a_{n+1},\ a_n$ は $2, 4, 8, 6$ をすべて 1 つずつ含むので

$$a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot (3 \cdot 2) = 3 \cdot 2^{\underline{\mathbf{7}}_{\text{キ}}}$$

◀ たとえば、$a_n = 6$ であれば、$a_{m+1} = 2,\ a_{n+2} = 4,\ a_{n+3} = 8$ である。

であるから、$b_{n+4} = \dfrac{3 \cdot 2^7}{2^8} b_n = \underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}_{\text{クケ}} b_n$ が成り立つ。これより、

- 数列 $\{b_{4k-3}\}$、つまり数列 $b_1, b_5, b_9, \cdots$ は初項 $b_1 = 1$、公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列だから一般項 $b_{4k-3} = \left(\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}_{\text{コサ}}\right)^{k-1}$
- 数列 $\{b_{4k-2}\}$、つまり数列 $b_2, b_6, b_{10}, \cdots$ は初項 $b_2 = \dfrac{a_1b_1}{4} = \dfrac{2 \cdot 1}{4} = \dfrac{1}{2}$、公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列だから一般項 $b_{4k-2} = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}_{\text{シス}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$
- 数列 $\{b_{4k-1}\}$、つまり数列 $b_3, b_7, b_{11}, \cdots$ は初項 $b_3 = \dfrac{a_2b_2}{4} = \dfrac{4 \cdot \frac{1}{2}}{4} = \dfrac{1}{2}$、公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列だから一般項 $b_{4k-1} = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}_{\text{セソ}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$
- 数列 $\{b_{4k}\}$、つまり数列 $b_4, b_8, b_{12}, \cdots$ は初項 $b_4 = \dfrac{a_3b_3}{4} = \dfrac{8 \cdot \frac{1}{2}}{4} = 1$、公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列だから一般項 $b_{4k} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

(3) $b_1$ から $b_{4m}$ までの和 $S_{4m}$ は、数列 $\{b_{4k-3}\}$、$\{b_{4k-2}\}$、$\{b_{4k-1}\}$、$\{b_{4k}\}$ をすべて $m$ 項目まで足したもの、つまり

◀ たとえば、$S_{12}$ であれば

$$S_{12} = (b_1 + b_5 + b_9) + (b_2 + b_6 + b_{10}) + (b_3 + b_7 + b_{11}) + (b_4 + b_8 + b_{12})$$

$$S_{4m} = \sum_{k=1}^{m} b_{4k-3} + \sum_{k=1}^{m} b_{4k-2} + \sum_{k=1}^{m} b_{4k-1} + \sum_{k=1}^{m} b_{4k}$$

であるから、(2) より

$$\begin{aligned} S_{4m} &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ は初項 1、公比 $\dfrac{3}{2}$、項数 $m$ の等比数列の和であるから

$$S_{4m} = 3 \cdot \frac{1\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^m - 1\right\}}{\frac{3}{2} - 1} = 6\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^m - 1\right\} = {}_{\text{タ}}\underline{\mathbf{6}}\left(\frac{3}{2}\right)^m - \underline{\mathbf{6}}_{\text{チ}}$$

(4) (2) より

$$b_{4k-3}b_{4k-2}b_{4k-1}b_{4k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{\underline{4}_{\text{ツ}}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\underline{4}_{\text{テ}}(k-1)}$$

であることから

$$\begin{aligned} T_{4m} &= (b_1b_2b_3b_4)(b_5b_6b_7b_8)(b_9b_{10}b_{11}b_{12})\cdots(b_{4m-3}b_{4m-2}b_{4m-1}b_{4m}) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^0 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot\cdots\cdot \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(m-1)} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^m \left(\frac{3}{2}\right)^{0+4+8+\cdots+4(m-1)} \end{aligned}$$

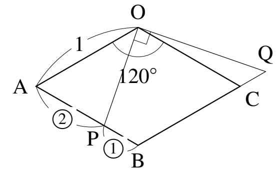
$\frac{3}{2}$ の指数部分 $0+4+8+\cdots+4(m-1)$ は初項 0、末項 $4(m-1)$、項数 $m$ の等差数列の和であるから $\frac{1}{2}m\{0+4(m-1)\} = \underline{2}_{\text{ト}}m^2 - \underline{2}_{\text{ナ}}m$ である。また

$$\begin{aligned} T_{10} &= (b_1b_2b_3b_4)(b_5b_6b_7b_8)b_9b_{10} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^0 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3-1} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3-1} \\ &= \frac{1}{4\cdot4\cdot2}\left(\frac{3}{2}\right)^8 \\ &= \frac{3^8}{4\cdot4\cdot2\cdot2^8} = \frac{3^{\underline{8}_{\text{ニ}}}}{2^{\underline{13}_{\text{ヌネ}}}} \end{aligned}$$

| 解答番号 | 正解 | 配点 |
|---|---|---|
| ア, イ, ウ, エ | **4, 8, 6, 2** | 2 |
| オ | ③ | 1 |
| カ | **8** | 2 |
| キ | **7** | 2 |
| $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ | $\frac{3}{2}$ | 1 |
| $\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ | $\frac{3}{2}$ | 1 |
| $\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| タ, チ | **6, 6** | 3 |
| ツ テ | **4, 4** | 2 |
| ト $m^2 -$ ナ $m$ | $2m^2 - 2m$ | 3 |
| ニ, ヌネ | **8, 13** | 1 |

第 4 問

図は右欄外のようになる。




(1) P は線分 AB を 2 : 1 に内分するので $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1} = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}_{\text{アイ}}\vec{a} + \dfrac{\underline{\mathbf{2}}_{\text{ウ}}}{3}\vec{b}$ である。

Q が直線 BC 上にあることから $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるが

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{b} + (-\vec{a})$$

であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\vec{b} + t(\vec{b} - \vec{a}) = \underline{\mathbf{-}}_{\text{エ}}t\vec{a} + \vec{b}$$

である。ここで、

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\angle\mathrm{AOB} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}_{\text{オカ}}$$

であり、$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \underline{\mathbf{0}}_{\text{キ}}$ であることから

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot(-t\vec{a} + \vec{b}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\vec{a} + 2\vec{b})\cdot(-t\vec{a} + \vec{b}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -t\left|\vec{a}\right|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} - 2t\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\left|\vec{b}\right|^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -t + \frac{1}{2} - 2t\cdot\frac{1}{2} + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -2t + \frac{5}{2} = 0 \qquad \therefore\quad t = \underline{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}}_{\text{クケ}}
\end{aligned}
$$

である。

これらのことから

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 &= \frac{1}{9}\left|\vec{a} + 2\vec{b}\right|^2 \\
&= \frac{1}{9}\left(\left|\vec{a}\right|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\left|\vec{b}\right|^2\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(1 + 4\cdot\frac{1}{2} + 4\right) = \frac{7}{9}
\end{aligned}
$$

より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \underline{\dfrac{\mathbf{\sqrt{7}}}{\mathbf{3}}}_{\text{コサ}}$ であり

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 &= \left|-\frac{5}{4}\vec{a} + \vec{b}\right|^2 \\
&= \left(\frac{25}{16}\left|\vec{a}\right|^2 - \frac{5}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2\right) \\
&= \left(\frac{25}{16} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{25-20+16}{16} = \frac{21}{16}
\end{aligned}
$$

より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \underline{\dfrac{\mathbf{\sqrt{21}}}{\mathbf{4}}}_{\text{シスセ}}$ である。よって

$$S_1 = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{4} = \underline{\frac{\mathbf{7\sqrt{3}}}{\mathbf{24}}}_{\text{ソタチツ}}$$

である。

(2) T は直線 OR 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = r\overrightarrow{\mathrm{OR}} = r\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{1+3} = \frac{r}{4}(3\vec{b} + \vec{b} - \vec{a}) = -\frac{r}{4}\vec{a} + r\vec{b}$$

また、T は直線 PQ 上の点でもあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$= (1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + s\left(-\frac{5}{4}\vec{a} + \vec{b}\right)$$
$$= \left\{\frac{1}{3}(1-s) - \frac{5}{4}s\right\}\vec{a} + \left\{\frac{2}{3}(1-s) + s\right\}\vec{b}$$
$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{19}{12}s\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}s\right)\vec{b}$$

である。$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので、この 2 式の係数を比較して

$$-\frac{r}{4} = \frac{1}{3} - \frac{19}{12}s,\quad r = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}s$$

後ろの式を前の式へ代入して

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}s\right) = \frac{1}{3} - \frac{19}{12}s$$
$$\Leftrightarrow\quad -2 - s = 4 - 19s \qquad \therefore\quad s = \frac{6}{18} = \underline{\mathbf{\frac{1}{3}}}_{\text{ナニ}}$$

よって、$r = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \underline{\mathbf{\frac{7}{9}}}_{\text{テト}}$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{9}\vec{a} + \frac{7}{9}\vec{b} = {}_{\text{ヌネノハ}}\underline{\mathbf{-\frac{7}{36}}}\vec{a} + {}_{\text{ヒフ}}\underline{\mathbf{\frac{7}{9}}}\vec{b}$$

である。

$S_1, S_2$ は、直線 PQ を底辺とみると、底辺が PQ : PT、高さが OT : TR になっている。

ここで $\overrightarrow{\mathrm{OT}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より、PT : TQ = $s : (1-s)$ から PQ : PT = $1 : s = 1 : \frac{1}{3} = 3 : 1$ である。

また $\overrightarrow{\mathrm{OT}} = r\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より、OT : TR = $t : (1-t) = \frac{7}{9} : \frac{2}{9} = 7 : 2$ である。

よって、$S_1 : S_2 = (3\cdot 7) : (1\cdot 2) = {}_{\text{ヘホ}}\underline{\mathbf{21}} : 2$ である。

◀ $S_1$ は、底辺が $S_2\frac{3}{1}$ 倍、高さが $S_2$ の $\frac{7}{2}$ 倍なので、面積は $\frac{3}{1}\cdot\frac{7}{2} = \frac{21}{2}$ 倍

| 解答番号 | 正解 | 配点 |
|---|---|---|
| $\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}, \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}$ | $\mathbf{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}$ | 2 |
| $\boxed{エ}$ | **−** | 1 |
| $\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ | $\mathbf{\frac{1}{2}}$ | 1 |
| $\boxed{キ}$ | **0** | 1 |
| $\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ | $\mathbf{\frac{5}{4}}$ | 2 |
| $\frac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$ | $\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{3}}$ | 1 |
| $\frac{\sqrt{\boxed{シス}}}{\boxed{セ}}$ | $\mathbf{\frac{\sqrt{21}}{4}}$ | 1 |
| $\frac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チツ}}$ | $\mathbf{\frac{7\sqrt{3}}{24}}$ | 2 |

| 解答番号 | 正解 | 配点 |
|---|---|---|
| $\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ | $\mathbf{\frac{7}{9}}$ | 2 |
| $\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ | $\mathbf{\frac{1}{3}}$ | 2 |
| $\frac{\boxed{ヌネ}}{\boxed{ノハ}}\vec{a} + \frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}\vec{b}$ | $\mathbf{\frac{-7}{36}\vec{a} + \frac{7}{9}\vec{b}}$ | 2 |
| $\boxed{ヘホ}$ | **21** | 3 |

第 5 問

(1) すべての取り出し方は ${}_7C_3 = 35$ 通りであり

$$P(W=0) = \frac{{}_4C_0 \cdot {}_3C_3}{35} = \underline{\mathbf{\frac{1}{35}}}_{アイウ}$$

$$P(W=1) = \frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_2}{35} = \underline{\mathbf{\frac{12}{35}}}_{エオ}$$

$$P(W=2) = \frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_1}{35} = \underline{\mathbf{\frac{18}{35}}}_{カキ}$$

$$P(W=3) = \frac{{}_4C_3 \cdot {}_3C_0}{35} = \underline{\mathbf{\frac{4}{35}}}_{ク}$$

であり、期待値（平均）は

$$0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35} = \frac{12+36+12}{35} = \frac{60}{35} = \underline{\mathbf{\frac{12}{7}}}_{ケコサ}$$

であり、分散は

$$0^2 \cdot \frac{1}{35} + 1^2 \cdot \frac{12}{35} + 2^2 \cdot \frac{18}{35} + 3^2 \cdot \frac{4}{35} - \left(\frac{12}{7}\right)^2$$

$$= \frac{12+72+36}{35} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{24}{7} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{12}{7}\left(2 - \frac{12}{7}\right) = \underline{\mathbf{\frac{24}{49}}}_{シスセソ}$$

である。

(2) $P(-a \leqq Z \leqq a) = 0.99 \iff P(0 \leqq Z \leqq a) = 0.495$ であるから、正規分布の表より $2.57 < a < 2.58$ であり、適切な値は $\underline{\mathbf{3}}_{タ}$。

(3) 母平均 $m$、母標準偏差 $\sigma$ の母集団から、十分大きな大きさ $n$ の無作為標本を抽出すると、標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ に従うので、変数 $\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

ここで、$N(0, 1)$ に従う変数 $Z$ は、正規分布より $P(0 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.475$ から $P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.95$ であり、(2) より $P(-2.58 \leqq Z \leqq 2.58) = 0.99$ である。

つまり、$\overline{X}$ から $m$ を推定するときの 95 %の信頼区間は

$$-1.96 \leqq \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqq 1.96 \iff \overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

であり、信頼区間の幅 $L_1$ は

$$L_1 = \left(\overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

である。同様にして、99 %の信頼区間の幅 $L_2$ は

$$L_2 = \left(\overline{X} + 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{X} - 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2 \cdot 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

である。よって、

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{2 \cdot 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{2.58}{1.96} = 1.31\cdots \fallingdotseq \underline{\mathbf{1.3}}_{チツ}$$

また、$L_3$ は、大きさ $4n$ であるから、$L_1$ の $n$ に $4n$ を代入すればよいから

$$L_3 = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

であるので

$$\frac{L_3}{L_1} = \frac{1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2} = \underline{\mathbf{0.5}}_{テト}$$

| 解答番号 | 正解 | 配点 |
| --- | --- | --- |
| $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ | $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{35}}$ | 2 |
| $\boxed{エオ}$ | **12** | 2 |
| $\boxed{カキ}$ | **18** | 2 |
| $\boxed{ク}$ | **4** | 2 |
| $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ | $\dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{7}}$ | 3 |
| $\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セソ}}$ | $\dfrac{\mathbf{24}}{\mathbf{49}}$ | 3 |
| $\boxed{タ}$ | ③ | 2 |
| $\boxed{チ}.\boxed{ツ}$ | **1.3** | 2 |
| $\boxed{テ}.\boxed{ト}$ | **0.5** | 2 |