13th-note 数学A

（2013 年度卒業生まで）

目次

Ver1.73(2012-7-21)

第2章　場合の数

場合の数 (number of cases) とは「何通りの場合が起こりうるか数える」ことである.

2.1　場合の数の基礎

起こりうる場合の数を正しく数えるには次のことが必要条件になる.
「数えもらさない」　「同じものを繰り返して数えない」

1.　積の法則

A.　表を用いる

「数えもらさない」「同じものを繰り返して数えない」ための基本的な手段は，表を用いることである.

たとえば，大小 2 個のさいころを投げたときの出る目を表でまとめると，右のようになる. このとき，すべての場合の数は $6 \times 6 = 36$ 通りと分かる.

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
2	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
3	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
5	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
6	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全部で6通り

全部で6通り

【例題 1】 4 種類のカード $\boxed{\text{A}}\,\boxed{\text{B}}\,\boxed{\text{C}}\,\boxed{\text{D}}$ を用いて 2 枚並べる. ただし，同じカードを繰り返し並べてよいとする. 右の表を完成させ，全部で何通りあるか答えなさい.

1 枚目＼2 枚目	A	B		
A	AA	AB		

【解答】
よって，$4 \times 4 =$ **16通り** ある.

1 枚目＼2 枚目	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD

3 枚以上選ぶ並べる場合には表で書き表すことが難しくなるので，樹形図を用いる.

B. 辞書順に並べる

場合の数の問題では，辞書と同じように，アルファベット順，あいうえお順，数字の小さい順などで，結果を並べるとよい．

(例 1) 5 枚のカード
A，B，C，D，E
のうち 3 枚を使った，A から始まる文字列は，右のように書き出すことができる．その結果，場合の数は $4 \times 3 = 12$ 通りと求められる．

悪いやり方（×）			辞書順並べ（○）			
ABC	AEB	ACD	ABC	ABD	ABE	（←ABで始まる文字列）
ACB	ABE	ADC	ACB	ACD	ACE	（←ACで始まる文字列）
ADE	ABD	AEC	ADB	ADC	ADE	（←ADで始まる文字列）
AED	ADB	ACE	AEB	AEC	AED	（←AEで始まる文字列）

(例 2) 大小 2 つのさいころを振ったとき，出た目を

(大きいさいころの目, 小さいさいころの目)

で表そう（このテキストでは以後，同じとする）．
出た目の和が 6 になる場合を辞書順並べで書き出すと，右図のようになって容易に，5 通りあると分かる．

悪いやり方（×）	辞書順並べ（○）
(1, 5)	(1, 5)
(5, 1)	(2, 4)
(4, 2)	(3, 3)
(2, 4)	(4, 2)
(3, 3)	(5, 1)

↑
上から１，２，３，４，５

【例題 2】

1. 上の (例 1) において，C から始まる文字列を辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．
2. 上の (例 2) において，目の和が 7 になる場合を，辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．
3. $a + b + c = 5$ となる自然数 $(a,\ b,\ c)$ の組を辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．

【解答】

1. **CAB　CAD　CAE**
CBA　CBD　CBE
CDA　CDB　CDE
CEA　CEB　CED

1. は $4 \times 3 =$ **12通り** ある．
2. は **6通り** ある．
3. は **6通り** ある．

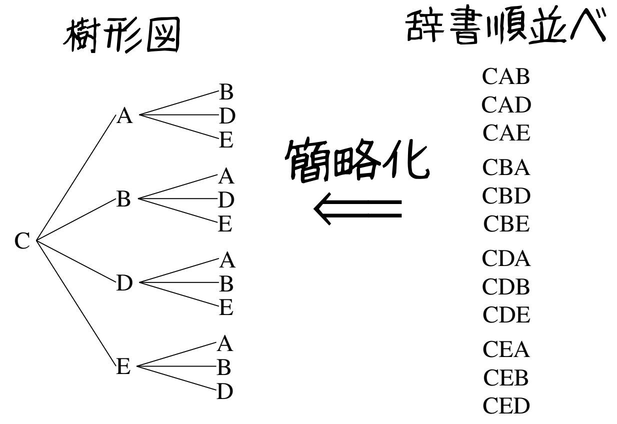
2. **(1, 6)**
(2, 5)
(3, 4)
(4, 3)
(5, 2)
(6, 1)

3. **$(a,\ b,\ c)$**
=(1, 1, 3),
(1, 2, 2),
(1, 3, 1),
(2, 1, 2),
(2, 2, 1),
(3, 1, 1)

C. 樹形図

辞書順並べを少し簡略化した書き方が，**樹形図** (tree diagram) である．

たとえば，前ページ左下の (1) の問題を樹形図で書き出すと，右のようになる．



D. 積の法則

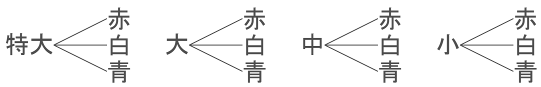
前ページの樹形図において，○<△▲▽ という形が 4 回現われることが分かる．これは，「2 番目の文字は 4 種類あり，2 番目の文字がどんな場合でも，3 番目の文字は 3 種類ある」ことを意味しており，場合の数は $3\times 4 = 12$ 通りとなる．

【例題 3】

1. A 社のかばんには，特大，大，中，小の 4 種類あり，いずれも，赤，白，青の 3 色から選べるという．樹形図を書いて，何種類のかばんがあるか答えなさい．
2. 1 から 4 の数字を用いた，2 桁の数字を樹形図で書き出し，何通りあるか答えなさい．

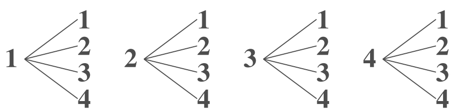
【解答】

1. (大きさ − 色) で樹形図を書けば，以下のようになる．



全部で $4\times 3 =$ **12通り** ある．

2. (十の位 − 一の位) で樹形図を書けば，以下のようになる．



全部で $4\times 4 =$ **16通り** ある．

◀ 樹形図によるまとめ方は複数ある．たとえば，(色，大きさ) の順で書けば，以下のような樹形図を書くことができる．

積の法則

2 つの事柄 A，B について，A の起こり方が a 通り，Aがどんな場合でも，B の起こり方が b 通りあるとする．このとき

A と B がともに起こる場合は $a\times b$ 通り

ある．このことを**積の法則** (multiplication law) という．

【練習 4：積の法則〜その１〜】

(1) 男子が 5 人，女子が 4 人のクラスから，男女一人ずつを選ぶ方法は何通りあるか．

(2) 1 から 9 までの数字を用いた，2 桁の数は何通りあるか．

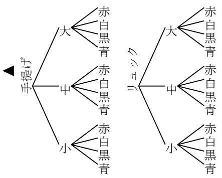
(3) B 社のかばんには，手提げとリュックの 2 種類があり，大きさは大中小の 3 種類から赤，白，黒，青の 4 色から選べるという．何種類のかばんがあるか．

【解答】

(1) 5 人のうちどの男子を選んでも，女子の選び方は 4 通りあるので，$5 \times 4 =$ **20通り** と求められる．

(2) 10 の位は 9 通り，10 の位がいくつであっても，1 の位は 9 通りある．つまり，$9 \times 9 =$ **81通り** である．

(3) かばんは 2 種類あり，どちらの場合でも大きさは 3 種類あり，さらに，どの場合も色は 4 種類ずつある．つまり，全部で $4 \times 3 \times 2 =$ **24 通り**ある．

◀ 

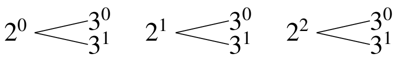
積の法則を用いるかどうかわからないときは，樹形図をイメージしよう．

E. 正の約数の個数

積の法則 (p.39) の応用例として，12 の約数について考えよう．$12 = 2^2 \times 3$ であるので，12 の約数は

$2^0 \times 3^0$，$2^0 \times 3^1$，　$2^1 \times 3^0$，$2^1 \times 3^1$，　$2^2 \times 3^0$，$2^2 \times 3^1$

ですべてとなる．これを樹形図にすれば，次のようになり，$3 \times 2 = 6$ 個の約数があるとわかる．



また，12 の約数の和は，$(2^0 + 2^1 + 2^2) \times (3^0 + 3^1) = (1 + 2 + 4) \times (1 + 3) = 7 \times 4 = 28$ で計算できる．これは，次の等式から分かる．

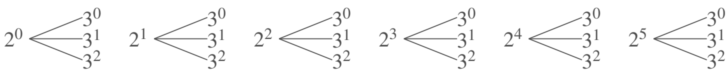
$$\begin{aligned}
&2^0 \times 3^0 + 2^0 \times 3^1 + 2^1 \times 3^0 + 2^1 \times 3^1 + 2^2 \times 3^0 + 2^2 \times 3^1 \\
=\ &2^0 \times (3^0 + 3^1) + 2^1 \times (3^0 + 3^1) + 2^2 \times (3^0 + 3^1) \\
=\ &(2^0 + 2^1 + 2^2) \times (3^0 + 3^1)
\end{aligned}$$

←$(3^0 + 3^1)$を共通因数と見て因数分解した

【発展 5：正の約数の個数】

上のやり方を参考に，288 の約数の個数を求めよ．また，約数の和を求めよ．

【解答】　$288 = 2^5 \times 3^2$ である．よって，288 の約数は



よって，約数の個数は $6 \times 3 =$ **18個** ある．また，約数の和は

$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) \times (3^0 + 3^1 + 3^2)$

$= (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) \times (1 + 3 + 9) = 63 * 13 =$ **819**

◀ 素因数分解した

◀ 慣れたら，素因数分解の指数部を見るだけで，$(5 + 1) \times (2 + 1) = 18$ と計算できる．

2.　集合と場合の数

A.　操作の結果を集合で表す

たとえば，大きさの異なる立方体のさいころ 2 個を振って「目の和が 5 になる場合」について，次のように書くことができる．

「目の和が 5 になる場合」の集合 A は，$A = \{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$ であり，$n(A) = 4$ である．

【例題 6】 大小 2 個のさいころを投げるとき，以下の集合の要素を書き出し，(4) の問いに答えよ．

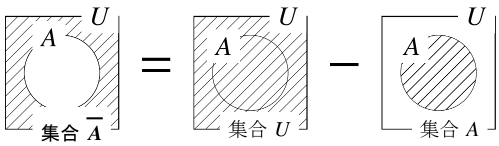
1. 出た目の和が 10 になる場合の集合 B
2. 出た目の差が 4 になる場合の集合 C
3. 出た目の積が 12 になる場合の集合 D
4. $n(B),\ n(C),\ n(D)$ はいくらか.

【解答】

1. $\boldsymbol{B = \{(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)\}}$
2. $\boldsymbol{C = \{(6,\ 2),\ (5,\ 1),\ (2,\ 6),\ (1,\ 5)\}}$
3. $\boldsymbol{D = \{(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)\}}$
4. $\boldsymbol{n(B) = 3,\ n(C) = 4,\ n(D) = 4}$

◀「差」とは「2 つの値の違い」なので，(5, 1), (1, 5) の差はいずれも 4.

B.　場合の数と集合の要素の個数



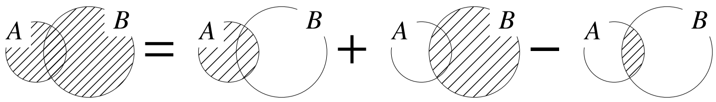
場合の数を集合を用いて考えれば,『集合の要素の個数』で学ぶ次の法則を用いることができる．

『補集合の要素の個数』

$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$

『包含と排除の原理』

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



$A \cap B = \emptyset$ のとき，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ となる．これは『和の法則』とも呼ばれる．

【例題 7】 大きさは大中小の 3 種類，赤，白，黒，青の 4 色がある D 社のかばんを買いにいったところ，大きいかばんと，黒のかばんは気に入らなかったが，他は気に入った．大きなかばんの集合を A，黒いかばんの集合を B とするとき，以下の問に答えよ．

1. $n(A),\ n(B),\ n(A \cap B)$ の値をそれぞれ求めよ．
2. 気に入らなかったかばんは何通りか.
3. 気に入ったかばんは何通りか.

【解答】

1. $\boldsymbol{n(A) = 4,\ n(B) = 3,\ n(A \cap B) = 1}$
2. 気に入らなかったかばんは $A \cup B$ に一致するので
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 3 - 1 = 6$ から **6通り**.
3. D 社のかばんは全部で $4 \times 3 = 12$ 通りある．(2) 以外のかばんの種類なので，$12 - 6 =$ **6通り** ある.

◀ $A \cap B$「大きくて黒いかばんの集合」，そのようなかばんは 1 つしかない

C. 場合分け

【例題 8】 大小 2 個のさいころを投げたとき，出た目の和が 5 の倍数となるのは次の場合がある．

- 「出た目の和が 5 になる場合」これは $\boxed{\text{ア}}$ 通りある
- 「出た目の和が $\boxed{\text{イ}}$ になる場合」これは $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある

この場合分けから，出た目の和が 5 の倍数となる場合は $\boxed{\text{エ}}$ 通りあるとわかる．

【解答】 ア：(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) の **4** 通りある．　　イ：**10**
ウ：(4, 6), (5, 5), (6, 4) の **3** 通りある．　　エ：$4 + 3 = \mathbf{7}$

出た目の和が 5 となる場合を A，出た目の和が 10 となる場合を B とすれば，$A \cap B = \emptyset$ であるので，（出た目の和が 5 の倍数となる場合の数）$= n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ である．

【練習 9：場合の数における集合】

1 から 50 までが書かれたカード 50 枚の中から，無作為に 1 枚引く．引いたカードが

2 の倍数である場合の集合を Z_2，3 の倍数である場合の集合を Z_3

また，すべての場合の集合を U とする．つまり，$n(U) = 50$ である．

(1) $n(Z_2)$, $n(Z_3)$, $n(Z_2 \cap Z_3)$ の値を求めなさい．

(2) 「奇数である場合の集合」を A,「6 の倍数である場合の集合」を B,「2 または 3 で割り切れる場合の集合」を C とする．それぞれ一致するものを選びなさい．

① Z_2　② Z_3　③ $\overline{Z_2}$　④ $\overline{Z_3}$　⑤ $Z_2 \cap Z_3$　⑥ $Z_2 \cup Z_3$

(3) $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ をそれぞれ答えなさい．

【解答】

(1) たとえば「1 を引いた場合」を「1」と表せば

$$Z_2 = \{2,\ 4,\ 6, \cdots,\ 50\ (= 2 \times 25)\}$$
$$Z_3 = \{3,\ 6,\ 9, \cdots,\ 48\ (= 3 \times 16)\}$$
$$Z_2 \cap Z_3 = \{6,\ 12,\ 18, \cdots,\ 48\ (= 6 \times 8)\}$$

なので，$\boldsymbol{n(Z_2) = 25}$, $\boldsymbol{n(Z_3) = 16}$, $\boldsymbol{n(Z_2 \cap Z_3) = 8}$

(2) A は ③，B は ⑤，C は ⑥

(3) $n(A) = n(\overline{Z_2}) = \mathbf{25}$，$n(B) = n(Z_2 \cap Z_3) = \mathbf{8}$

$n(C) = n(Z_2 \cup Z_3) = 25 + 16 - 8 = \mathbf{33}$

【練習 10：場合分けと積の法則】

(1) 1 から 5 までの数字を用いてできる 2 桁以下の数は何通りあるか.

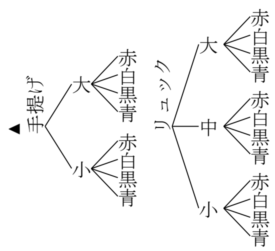
(2) C 社のかばんには，手提げは大中の 2 種類，リュックは大中小の 3 種類あり，どの種類も赤，白，黒，青の 4 色から選べるという．何種類のかばんがあるか.

【解答】

(1) 2 桁の数は $5 \times 5 = 25$ 通り，1 桁の数は 5 通りある.
つまり，全部で $25 + 5 =$ **30通り** の数がある.

(2) 手提げは 2×4 通り，リュックは，3×4 通りある.
よって，全部で $4 \times 2 + 4 \times 3 =$ **20 種類**ある.

◀



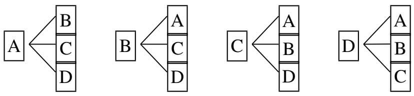
3. 「重複を許す」,「順列と組合せ」

A. 「重複を許す」とは

同じ操作を繰り返してもよいことを「重複を許す」という.

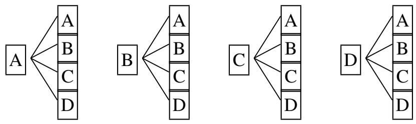
たとえば，4 種類のカード $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ を用いて 2 枚の列を作るとき

「重複を許さない」ならば



$4 \times 3 = 12$ 通りの並べ方がある.

「重複を許す」ならば



$4 \times 4 = 16$ 通りの並べ方がある.

【例題 11】 1 から 5 までの数字を用いて，2 桁の数字を作ろうと思う.

1. 重複を許して作るなら，何通りあるか.
2. 重複がないよう作るなら，何通りできるか.

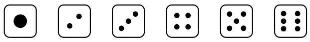
【解答】

1. 10 の位は 5 通り，そのいずれの場合も，1 の位は 5 通りあるので，$5 \times 5 =$ **25通り**
2. 10 の位は 5 通り，そのいずれの場合も，1 の位は 4 通りあるので，$5 \times 4 =$ **20通り**

◀ 2. において，1 の位は，10 の位と同じ数を入れることができない

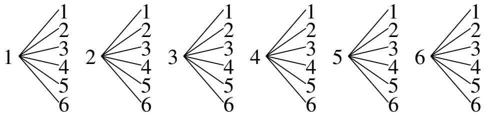
B. 「順列」とは，「組合せ」とは

たとえば，さいころを 2 回投げた場合の目の出方は，次の 2 通りの方法でまとめることができる．



a) 1 回目と 2 回目を区別する場合

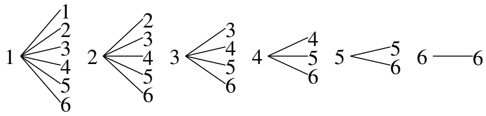
1 回目 − 2 回目の順に樹形図を書けば，次のようになる．



この場合は，試行順に結果を列挙した**順列** (permutation) を考えている．

b) 1 回目と 2 回目を区別しない場合

小さい目 − 大きい目の順で樹形図を書けば，次のようになる．



この場合は，試行した結果の**組合せ** (combination) を考えている．

順列か組合せのいずれで考える問題なのか，注意して樹形図を書こう．

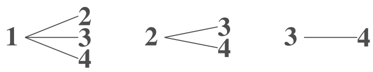
【例題 12】 1，2，3，4 の数字が書いてある 4 枚のカードがある．次の試行について，それぞれ樹形図を用いてすべて書き出し，何通りあるか答えよ．

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

1. 続けて 2 枚引く場合のカードの順列
2. 続けて 2 枚引いたときの，カードの組合せ

【解答】

1.  $4 \times 3 =$ **12通り**

2.  $3 + 2 + 1 =$ **6通り**

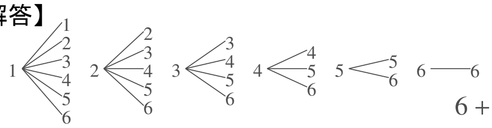
◀ (2) は，§2.3『組合せ』において学ぶことを用い，${}_4C_2 = 6$ 通りとも求められる．

【練習 13：さいころの区別】

(1) 同じ大きさの立方体のさいころ 2 個を振るとき，目の出方は何通りあるか．

(2) 大きさが異なる立方体のさいころ 2 個を振るとき，目の出方は何通りあるか．

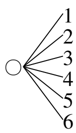
【解答】

(1) 

$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$ **21通り**

(2) 大きいさいころは 6 通り．そのいずれの場合も，小さいさいころが 6 通りあるので，$6 \times 6 =$ **36通り**

◀ 右のような樹形図が 6 つ書ける．(○には 1 から 6 が入る)



【練習 14：足して 5 になる数】

(1) 足して 5 になるような 2 つの自然数の組をすべて求めよ．

(2) $x + y = 5$ になるような，2 つの自然数 x, y の解をすべて求めよ．

【解答】

(1) **1 と 4**，**2 と 3** の 2 組

◀ 2 つの数字の組合せを考えている

(2) $(x, y) = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$

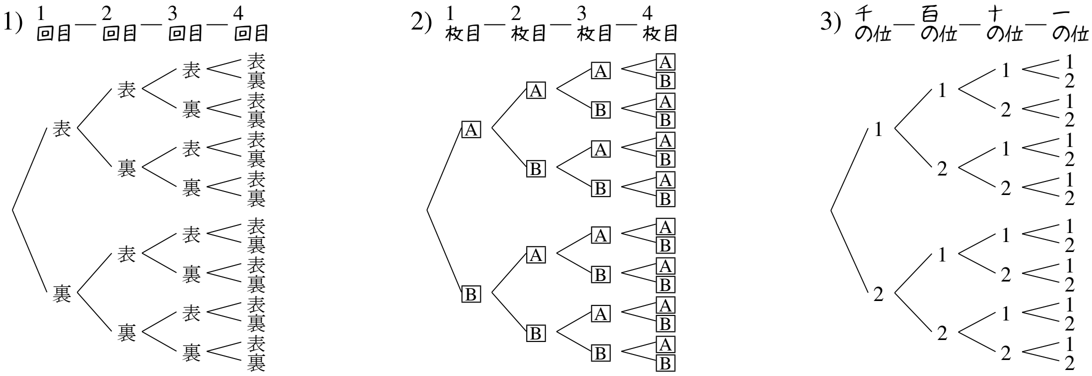
◀ 2 つの数字を x, y で区別した結果として順列を考えている

1. 重複順列

A. 重複順列とは

同じことを繰り返してできる順列のことを**重複順列**（ちょうふく）(permutation with repetitions) という．
次の問題について，それぞれ樹形図を書いて，何通りあるか考えてみよう．

1) 表と裏があるコインを 4 回振るときの，出た目の順列は何通りあるか．
2) $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$ の 2 枚から 1 枚引いて記録し，元に戻す操作を 4 回行ったとき，引いたカードの順列
3) 1 か 2 のみで作ることのできる，4 桁の整数



⇓ 簡略化 ⇓ 簡略化 ⇓

1) 1回目 2回目 3回目 4回目
□ □ □ □
2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り

2) 1枚目 2枚目 3枚目 4枚目
□ □ □ □
2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り

3) 千の位 百の位 十の位 一の位
□ □ □ □
2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り

結果，いずれも $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 通りと分かる．

【例題 15】 $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$ の 3 枚のカードから 1 枚引いて記録し，元に戻す操作を 4 回行った．右の $\boxed{}$ にあてはまる数字を答えよ．

1 枚目 2 枚目 3 枚目 4 枚目
□ □ □ □
$\boxed{ア}$通り　それぞれ $\boxed{イ}$通り　それぞれ $\boxed{ウ}$通り　それぞれ $\boxed{エ}$通り
並べ方は全部で $\boxed{オ}$ 通り

【解答】 ア : **3**，イ : **3**，ウ : **3**，エ : **3**，オ : $3 \times 3 \times 3 \times 3 =$ **81**

重複順列

n 通りの可能性のある操作を，r 回繰り返したときに得られる順列を重複順列といい，その場合の数は $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{r\text{ 回}} = n^r$ 通りである．

【練習 16：重複順列】

(1) 表と裏があるコインを 6 回振るときの，出た目の順列は何通りあるか.

(2) $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ の 4 枚のカードから，1 枚引いて元に戻す操作を 3 回行ったとき，引いたカードの順列は何通りあるか.

(3) 5 人 1 組のグループ 3 組から，リーダーを 1 人ずつ選ぶ方法は何通りあるか.

(4) 1, 2, 3 のみを用いた，4 桁以下の整数は何通りあるか.

【解答】

(1)

1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	6 回目
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り

よって，$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^6 =$ **64通り**

(2)

1 枚目	2 枚目	3 枚目
$\square$	$\square$	$\square$
4 通り	それぞれ 4 通り	それぞれ 4 通り

よって，$4^3 =$ **64通り**

(3)

1 組目	2 組目	3 組目
$\square$	$\square$	$\square$
5 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 5 通り

よって，$5^3 =$ **125通り**

(4) 4 桁の数は $3^4 = 81$ 通り，3 桁の数は $3^3 = 27$ 通り，
2 桁の数は $3^2 = 9$ 通り，1 桁の数は $3^1 = 3$ 通り
あるので，全部で $81 + 27 + 9 + 3 =$ **120通り** ある.

◀ $3^4 = 9 \times 9 = 81$ で計算するとよい.

B. 重複順列に置き換えられる問題

たとえば，集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ の部分集合は，何通りあるか考えてみよう.

A の部分集合には，$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\emptyset$, $\{1, 2, 3, 4\}$ などがあるが，これらを，右図の方法で順列に対応させることができる．結局

「A の部分集合を挙げる」
$\Longleftrightarrow$「○か×を 4 回並べる」

ことは 1 対 1 に対応し，「A の部分集合の数」と「○か×を 4 回並べる重複順列の場合の数」は一致する．つまり，A の部分集合は $2^4 = 16$ 通りあると求められる.

$\{1, 2\}$	$\Longleftrightarrow$	○	○	×	×
$\{1, 3\}$	$\Longleftrightarrow$	○	×	○	×
$\{2, 3, 4\}$	$\Longleftrightarrow$	×	○	○	○
$\emptyset$	$\Longleftrightarrow$	×	×	×	×
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\Longleftrightarrow$	○	○	○	○
Aの部分集合	$\Longleftrightarrow$	1の有無	2の有無	3の有無	4の有無

【例題 17】 集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ の部分集合は何通りあるか.

【解答】 X の部分集合を挙げることは，○か×を 5 回並べることに置き換えられるので，部分集合は $2^5 =$ **32通り** ある.

2.　順列 $_n\mathrm{P}_r$

A.　繰り返しのない順列

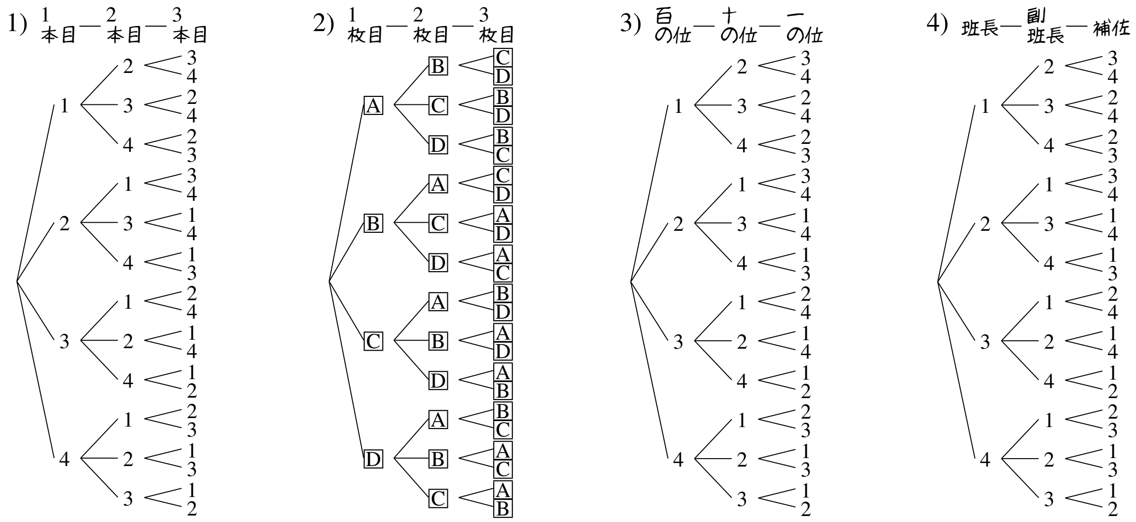
次の 2 つの問題について，樹形図を書いて，何通りあるか考えてみよう．

1) 1, 2, 3, 4 が書いてある 4 本の旗のうち，3 本を用いた旗の並べ方は何通りあるか．

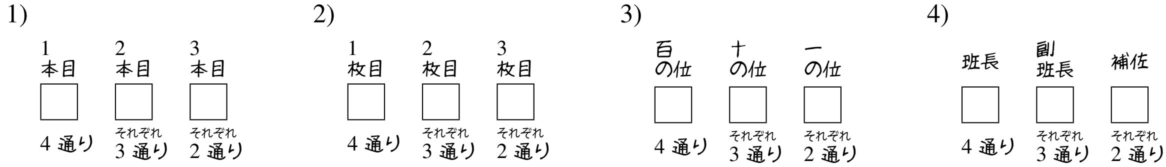
2) $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$ の 4 枚のカードのうち，3 枚を用いてできる順列は何通りあるか．

3) 1 から 4 を重複なく使ってできる，3 桁の整数は何通りあるか．

4) 出席番号 1 から 4 の 4 人から，班長，副班長，補佐を決める方法は何通りあるか．



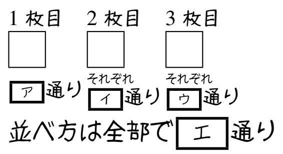
⇓　簡略化　⇓　簡略化　⇓　簡略化　⇓



結果，いずれも $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通りと分かる．

特に，1) から 3) の問題はいずれも「4 つの異なるものから，重複なしに 3 つを一列に並べる」操作によって得られる．

【例題 18】　$\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$, $\boxed{\mathrm{E}}$ の 5 枚のカードから 1 枚ずつ引いて記録する操作を 3 回行った．右の $\boxed{}$ にあてはまる数字を答えよ．ただし，一度引いたカードは元に戻さないとする．



【解答】　ア : **5**，イ : **4**，ウ : **3**，エ : $5 \times 4 \times 3 = \mathbf{60}$

【練習 19：順列〜その１〜】

1 から 6 までのカードが 1 枚ずつ，計 6 枚ある．次の順列は何通りあるか．

(1) 2 枚を用いた順列　　(2) 3 枚を用いた順列　　(3) 4 枚を用いた順列

【解答】

(1) 1つ目　2つ目

$\square$　$\square$

6 通り　それぞれ 5 通り

よって，$6 \times 5 =$ **30通り**

(2) 1つ目　2つ目　3つ目

$\square$　$\square$　$\square$

6 通り　それぞれ 5 通り　それぞれ 4 通り

よって，$6 \times 5 \times 4 =$ **120通り**

(3) 1つ目　2つ目　3つ目　4つ目

$\square$　$\square$　$\square$　$\square$

6 通り　それぞれ 5 通り　それぞれ 4 通り　それぞれ 3 通り

よって，$6 \times 5 \times 4 \times 3 =$ **360通り**

B.　順列 ${}_n\mathrm{P}_r$

ここまで学んだ順列の場合の数は，記号 ${}_n\mathrm{P}_r$ を用いて表されることがある[*1]．

順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ の定義

「n 個の異なるものから r 個を用いて一列に並べる順列」の場合の数を，記号 ${}_n\mathrm{P}_r$（エヌピーアール）で表す（自然数 n と r は $n \geqq r$ とする）．

1 番目	2 番目	3 番目	……	$r-1$ 番目	r 番目
$\square$	$\square$	$\square$	……	$\square$	$\square$
n 通り	それぞれ $n-1$ 通り	それぞれ $n-2$ 通り	……	それぞれ $n-(r-2)$ 通り	それぞれ $n-(r-1)$ 通り

右上の図から，${}_n\mathrm{P}_r$（エヌピーアール）$= \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}_{n\text{ から始まる } r \text{ 個の数の積}}$ で計算できる．

たとえば，p.47 の 1) から 4) はすべて，${}_4\mathrm{P}_3$（よんピーさん）$= \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2}_{\text{4 から始まる 3 個の数の積}} = 24$ である．

【例題 20】

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 個の数字を使ってできる 3 桁の整数は，${}_{\boxed{ア}}\mathrm{P}_{\boxed{イ}} = \boxed{ウ}$ 通りある．
2. 5 色の旗を 1 列に並べるときの場合の数は ${}_{\boxed{エ}}\mathrm{P}_{\boxed{オ}} = \boxed{カ}$ 通りある．

【解答】

1. ア：**6**，イ：**3**，ウ：${}_6\mathrm{P}_3 = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}_{\text{6 から始まる 3 個の数の積}} = \mathbf{120}$

2. エ：**5**，オ：**5**，カ：${}_5\mathrm{P}_5 = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{1 から 5 までの積}} = \mathbf{120}$

[*1] ただし，${}_n\mathrm{P}_r$ はあまり有用な記号ではない．応用範囲が狭く，後に学ぶ記号 ${}_n\mathrm{C}_r$ と混同しやすい．順列の問題は，これまで通り『積の法則』(p.39) で処理するのがよい．

C. 階乗 $n!$

階乗 $n!$ の定義

「異なる n 個すべてを一列に並べる順列」の場合の数を n の**階乗** (factorial) といい，$n!$ で表す.

下の図から，$n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}_{1\text{ から } n \text{ までの自然数の積}}$ となる.

1 番目	2 番目	3 番目	……	$n-1$ 番目	n 番目
□	□	□	……	□	□
n 通り	それぞれ $n-1$ 通り	それぞれ $n-2$ 通り	……	それぞれ 2 通り	それぞれ 1 通り

（例）

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

【例題 21】 ${}_7\mathrm{P}_3$，${}_{10}\mathrm{P}_5$，$6!$ の値を計算せよ.

【解答】 ${}_7\mathrm{P}_3 = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}_{7\text{ から始まる } 3\text{ 個の数の積}} = \mathbf{210}$，　${}_{10}\mathrm{P}_5 = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}_{10\text{ から始まる } 5\text{ 個の数の積}} = \mathbf{30240}$

$6! = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{1\text{ から } 6\text{ までの積}} = \mathbf{720}$

掛け算の順番に気をつけて，順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ の値を計算しよう．たとえば

$${}_8\mathrm{P}_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 6 \cdot 5 = 336 \cdot 5 = 1680$$
$${}_8\mathrm{P}_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680$$

のように，5 と偶数を利用して計算すると，手間が大きく変わる.

D. ${}_n\mathrm{P}_0$, $0!$

0 を含む順列，階乗は，${}_n\mathrm{P}_0 = 1$, $0! = 1$ と定義される*2.

*2 直感的には，次の関係からも簡単に確認できる.

$4! \xrightarrow{\div 4} 3! \xrightarrow{\div 3} 2! \xrightarrow{\div 2} 1! \xrightarrow{\div 1} 0!$　　${}_n\mathrm{P}_3 \xrightarrow{\div (n-2)} {}_n\mathrm{P}_2 \xrightarrow{\div (n-1)} {}_n\mathrm{P}_1 \xrightarrow{\div n} {}_n\mathrm{P}_0$

また，「n 個のものから 0 個を用いて並べる」順列も，「異なる 0 個すべてを一列に並べる」順列も，「何も並べない」という 1 通りしか存在しないことから理解することもできる.

E. 順列 $_n\mathrm{P}_r$ と重複順列

同じものを繰り返し用いるときは重複順列になるため，順列 $_n\mathrm{P}_r$ を用いることはできない.

【例題 22】 7 色の絵の具で 3 つの場所を塗る．次の 2 つの場合について $\boxed{}$ に数字を入れよ.

1. 同じ色を使わず塗る場合は

1つ目　2つ目　3つ目

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

$\boxed{ア}$通り　それぞれ $\boxed{イ}$通り　それぞれ $\boxed{ウ}$通り

であるから，全部で $\boxed{エ}$ 通りある.

2. 同じ色を使って塗る場合は

1つ目　2つ目　3つ目

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

$\boxed{オ}$通り　それぞれ $\boxed{カ}$通り　それぞれ $\boxed{キ}$通り

であるから，全部で $\boxed{ク}$ 通りある.

【解答】

1. ア : **7**，イ : **6**，ウ : **5**，エ : $7\times6\times5=$ **210**
2. オ : **7**，カ : **7**，キ : **7**，ク : $7\times7\times7=$ **343**

F. 順列と和の法則・積の法則

【練習 23：条件を満たす整数の個数～その１～】

(1) 1 から 7 までの数字を重複なく用い，4 桁の数字を作る.

1) 千の位が 5 である整数は何通りか.　2) 5000 以上の整数は何通りか.

3) 一の位が 2 である整数は何通りか.　4) 偶数は何通りか.　5) 奇数は何通りか.

(2) 1 から 7 までの数字を用いて，4 桁の数字を作る．**ただし，同じ数字を繰り返し用いてよい**.

1) 偶数は何通り作れるか.　2) 5 の倍数は何通り作れるか.

3) 6666 より大きな数は何通り作れるか.

【解答】

(1) 1) 千の位　百の位　十の位　一の位

$\boxed{5}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

1 通り　6 通り　それぞれ 5 通り　それぞれ 4 通り

$1\cdot6\cdot5\cdot4=$ **120通り**

2) 千の位　百の位　十の位　一の位

$\boxed{5以上}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

3 通り　それぞれ 6 通り　それぞれ 5 通り　それぞれ 4 通り

$3\cdot6\cdot5\cdot4=$ **360通り**

◀ 千の位が 5, 6, 7 のいずれかであればよい

3) 千の位　百の位　十の位　一の位

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{2}$

6 通り　それぞれ 5 通り　それぞれ 4 通り　1 通り

$1\cdot(6\cdot5\cdot4)=$ **120通り**

4) 千　百　十　一

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{2,4,6}$

それぞれ 6 通り　3 通り

$\Rightarrow$

千　百　十　一

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{2,4,6}$

それぞれ 6 通り　それぞれ 5 通り　それぞれ 4 通り　3 通り

$3\cdot(6\cdot5\cdot4)=$ **360通り**

◀ 一の位が偶数であればよい

◀ 一の位がいくつでも，千の位は 6 通りある

◀ 順列を用いれば $3\times{}_6\mathrm{P}_3$ となる

5) 偶数でなければよいので，$840-360=$ **480通り**.

◀ 【別解】一の位が奇数であればよいので，5) と同様に考えて $4\cdot(6\cdot5\cdot4)=$ **480通り**.

(2) 1) 千の位 百の位 十の位 一の位

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{2,4,6}$

それぞれ 7 通り　それぞれ 7 通り　それぞれ 7 通り　3 通り

$3\cdot(7\cdot7\cdot7)=$ **1029通り**

2) 千の位 百の位 十の位 一の位

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{5}$

それぞれ 7 通り　それぞれ 7 通り　それぞれ 7 通り　1 通り

$1\cdot(7\cdot7\cdot7)=$ **343通り**

◀ 一の位が 5 であればよい

3) 6666 より大きい数は,

千の位百の位十の位一の位

$\boxed{7}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\leftarrow 7\times7\times7=7^3$ 通り　◀ 7000 番台

$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\leftarrow 7\times7=7^2$ 通り　◀ 6700 番台

$\boxed{6}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{}$ $\leftarrow$7 通り　◀ 6670 番台

$\boxed{6}$ $\boxed{6}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\leftarrow$1 通り　◀ 6667

で全てなので, $7^3+7^2+7+1=$ **400通り**

【練習 24：条件を満たす整数の個数～その２～】

0 から 5 までの数字を重複なしに使って, 3 桁の数字を作る.

(1) 一の位が 0 のとき, 何通りの数字作れるか.

(2) 一の位が 2 のとき, 何通りの数字作れるか.

(3) 偶数は何通り作れるか.

(4) 5 の倍数は何通り作れるか.

【解答】

(1) 百の位 十の位 一の位

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{0}$

5 通り　それぞれ 4 通り　1 通り

$1\cdot(5\cdot4)=$ **20通り**

(2) 百の位 十の位 一の位

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{2}$

0以外の 4 通り　それぞれ 4 通り　1 通り

$1\cdot(4\cdot4)=$ **16通り**

◀ たとえば, 百の位が 3 ならば, 十の位には 0, 1, 4, 5 の 4 通りを入れることができる.

(3) 1 の位が 0, 2, 4 のいずれかであればよい.

1 の位が 0 のとき, (1) より 20 通り

1 の位が 2 のとき, (2) より 16 通り

1 の位が 4 のとき, (2) と同様にして 16 通り

以上より, $20+16\times2=$ **52通り**.

(4) 1 の位が 0, 5 のいずれかであればよい.

1 の位が 0 のとき, (1) より 20 通り

1 の位が 5 のとき, (2) と同様にして 16 通り

以上より, $20+16=$ **36通り**.

【練習 25：並べ方に条件のある順列～その１～】

1 から 7 までの 7 つの数を一列に並べる．

(1) 6 と 7 が隣り合うものは何通りあるか．

(2) 5 と 6 と 7 が隣り合うものは何通りあるか．

(3) 両端が 1 と 2 になるものは何通りあるか．

【解答】

(1) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6,\ 7\text{の組}}$ の順列で 6! 通り．それぞれについて，6, 7 の並び方は 2! 通りあるので，$6! \times 2 =$ **1440通り**．

◀ 具体的には，$\boxed{67}$ か $\boxed{76}$

(2) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5,\ 6,\ 7\text{の組}}$ の順列で 5! 通り．それぞれについて，5, 6, 7 の並び方は，3! 通りあるので，$5! \times 3! =$ **720通り**．

(3) 両端には 1 と 2 の順列を考え 2 通り．それぞれについて，両端でない文字は 5! 通りの並び方があるので，$5! \times 2 =$ **240通り**

◀ 1○○○○○2
2○○○○○1

【発展 26：並べ方に条件のある順列～その２～】

男子 5 人と女子 4 人を一列に並べる．

① 男子は男子で，女子は女子で固まる並べ方は何通りあるか．

② 男子のみ固まる並べ方は何通りあるか．

③ 両端が女子になる並べ方は何通りあるか．

④ どの女子どうしも隣り合わないような並べ方は何通りあるか．

【解答】

① $\boxed{\text{男子 5 人}}$, $\boxed{\text{女子 4 人}}$ の順列で 2! 通り．
どちらの場合も，$\boxed{\text{男子 5 人}}$ の並び方は 5! 通り，
どちらの場合も，$\boxed{\text{女子 4 人}}$ の並び方は 4! 通り，
よって，$2! \times 5! \times 4! =$ **5760通り**．

◀ 具体的には，$\boxed{\text{男子 5 人}}$ と $\boxed{\text{女子 4 人}}$ のどちらが左か

② $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{男子の組}}$ の並び方で 5! 通り．
それぞれについて，$\boxed{\text{男子の組}}$ の並び方は 5! 通り，
よって，$5! \times 5! =$ **14400通り**．

③ 左端には 4 通りの女子，右端には 3 通りの女子，
それ以外の 7 人が真ん中に並ぶ順列は 7! 通り．
よって，$4 \times 3 \times 7! =$ **60480通り**．

◀ 順列を用いれば，${}_4P_2 \times 7!$

④ まず男子だけを並べる．この並べ方は 5! 通り．
1 人目の女子が入れる場所は 6 ヶ所ある．
いずれの場合も 2 人目の女子が入れる場所は 5 ヶ所，
3 人目の女子は 4 ヶ所，4 人目の女子は 3 ヶ所あるので，
$5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 =$ **43200通り**．

◀ ↑のある場所に女子は入れる．
$\boxed{\text{男}}\boxed{\text{男}}\boxed{\text{男}}\boxed{\text{男}}\boxed{\text{男}}$
↑　↑　↑　↑　↑　↑

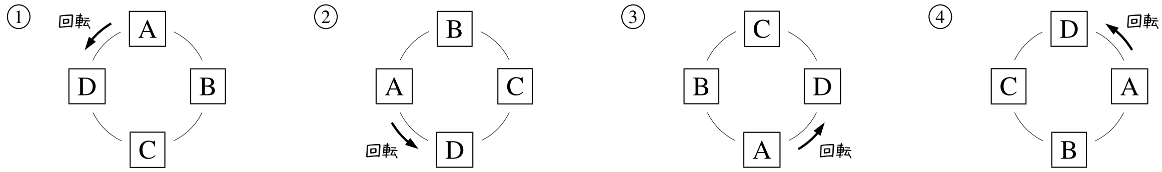
◀ 順列を用いれば，${}_6P_4$ 通り

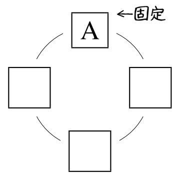
ものを並べる問題で，“隣り合う”ものを考える場合には，その隣り合うものをひとまとめにして考えるとよい．
一方，ものを並べる問題で，3 つ以上のものが“隣り合わない”ものを考える問題では，隣り合ってもよいものを先に並べるとよい場合が多い．

3. 円順列と商の法則

A. 円順列とは

円順列 (circular permutation) とは，複数のものを円形に並べることを意味する．ただし，下の①から④のように，回転させて同じになる場合はすべて同じ並べ方とみなす．





円順列を考えるときは，どれか 1 つを固定して，他を並べればよい．

たとえば，$\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$を円形に並べ方法を考えるとき，どんな円形の並べ方も，回転させて$\boxed{\text{A}}$を一番上の位置にできる．

そこで，$\boxed{\text{A}}$を固定し，他の$\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$を並べればよい．結局，$\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$の 3 つを 3 ヶ所に並べる順列となり，3! で求められる．

以上の結果は，次のようにしてまとめられる．

円順列

「n 個のものを円形に並べた列」のことを，n 個の**円順列** (circular permutation) といい，n 個のものがすべて区別できる場合，$(n-1)!$ 通りの並べ方がある．

円順列の問題では「誰か 1 人を固定」して考えるようにしよう．

【例題 27】

1. 5 人が円形に並ぶ方法は何通りあるか.
2. 6 個の区別できる石を円形に並べるとき，その円順列は何通りあるか.

【解答】

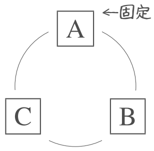
1. 1 人の場所を固定して，他の 4 人を並べればよいので，$4! =$ **24通り**.
2. 1 個の場所を固定して，他の 5 個を並べればよいので，$5! =$ **120通り**.

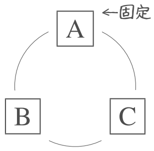
【例題 28】 円形のテーブルがある．ここに，男子 3 人と女子 3 人が男女交互に座る場合の数を考える．男子のうち 1 人を固定すると，残り 2 人の座り方は $\boxed{\text{ケ}}$ 通りある．男子がどのように座っても，女子 3 人の座り方は $\boxed{\text{コ}}$ 通りある．よって，求める場合の数は $\boxed{\text{サ}}$ 通りと分かる．

【解答】 ケ : **2**，コ : $3! =$ **6**，サ : $2 \times 6 =$ **12**

【例題 29】 $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ の 3 枚による円順列を考える．$\boxed{\text{A}}$ の位置を固定して，作ることのできる円順列をすべて図示しなさい．

【解答】 $\boxed{\text{A}}$ を固定して考えれば，次のようになる．





【練習 30：円順列〜その３〜】

両親と 4 人の子供，計 6 人が円形のテーブルに座る．ただし，回転して一致する座り方は同じとする．

(1) 座り方は全部で何通りか．

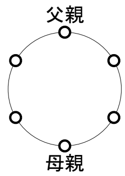
(2) 両親が真正面に向かい合う座り方は何通りか．

(3) 両親が隣り合う座り方は何通りか．

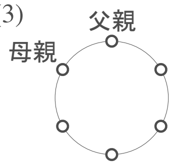
【解答】

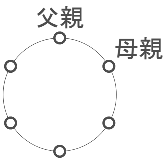
(1) 6 人のうち 1 人を固定して考えて，$(6-1)! = 5! =$ **120通り**

(2) 父親の場所を固定すると，母親の場所は右欄外のように 1 通りに決まる．残りの 4 ヶ所に，4 人の子供が入るので，$4! =$ **24通り** になる．



(3)



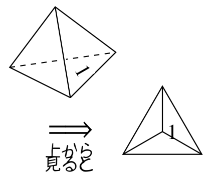


父親の場所を固定する．母親の位置は次の 2 通りがある．いずれの場合も，子供の並び方は 4! 通りあるので，全部で $2 \cdot 4! =$ **48通り** になる．

【発展 31：正四面体の順列】

正四面体の 4 つの面に番号を 1 から 4 までつけるとき，番号のつけ方は何通りか．ただし，回転して一致する場合は，同じ番号のつけ方とする．

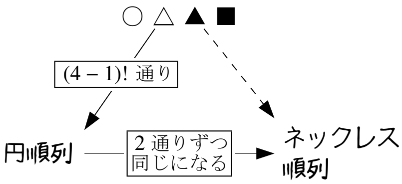
【解答】 底面の番号を 1 に固定する．これを上から見ると，3 つの場所に 2, 3, 4 の数字を入れる円順列になるので，$(3-1)! = 2! =$ **2通り** ある．

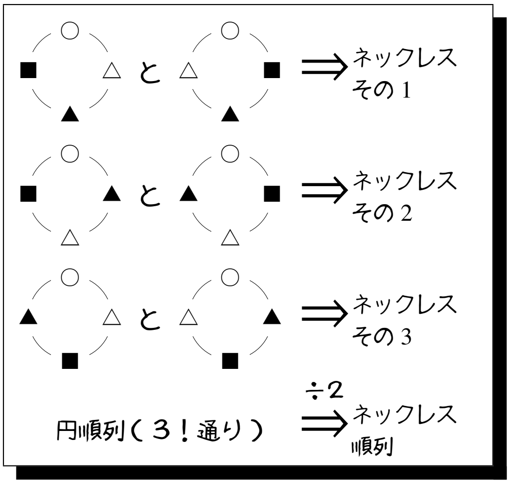


B.　ネックレス順列（数珠順列）

○，△，▲，■の 4 つの石を使ってネックレスを作る方法が何通りあるか考えよう．

- まず，4 つの石○，△，▲，■を円順列に並べる．これは，$(4-1)!$ 通りである．
- 表裏の関係にある円順列は，同じネックレスになるので，円順列 2 つずつが同じになる．

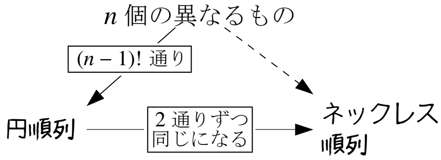




こうして，$(4-1)! \div 2 = 3$ 通りのネックレスを作ることができると分かる．

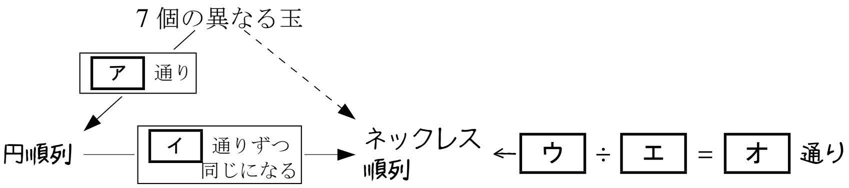
ネックレス順列（数珠順列）

「裏返すことが可能な，n 個のものを円形に並べた列」のことを，n 個の**ネックレス順列** (nacklace permutation) または**数珠**（じゅず）**順列** (beads permutation) といい，n 個（$2 \leqq n$）のものがすべて区別できる場合，$\dfrac{(n-1)!}{2}$ 通りある．



【暗記 32：ネックレス順列と商の法則】

7 個の異なる玉から作る順列について，以下の$\boxed{}$に適当な値・式を入れなさい．



【解答】　ア : $(7-1)! =$ **6!**（または **720**），イ : **2**，
ウ : **6!**（または **720**），エ : **2**，オ : **360**

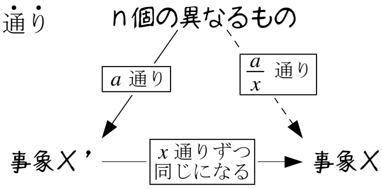
C.　商の法則 ～ 同じ結果になるものをまとめる

商の法則

2 つの事象 X’，X について，X’ の起こり方が a 通り，事象 X’ の x 通りずつをまとめて事象 X になるならば

　事象 X が起こる場合は $\dfrac{a}{x}$ 通り

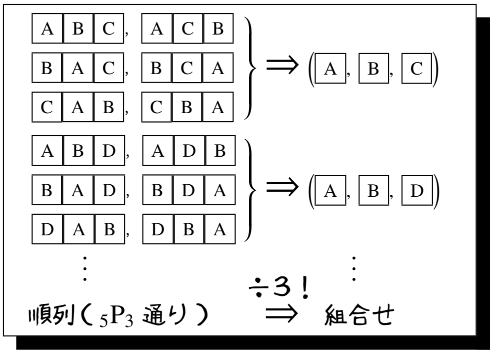
ある．このことを**商の法則** (division law) という．



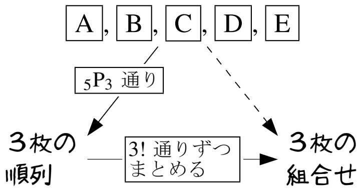
1. 組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$

A. 順列と組合せ

「5 枚のカード $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$, $\boxed{\mathrm{E}}$ のうち 3 枚を使った組合せは何通りか」という問題は次の 2 段階に分けて考えることができる.



- $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$, $\boxed{\mathrm{E}}$ の 5 枚のうち 3 枚を使った順列を考えると，${}_5\mathrm{P}_3 = 5\cdot4\cdot3$ 通りある.
- 順列としては異なるが，組合せとしては同じになるものが，3! 通りずつある.

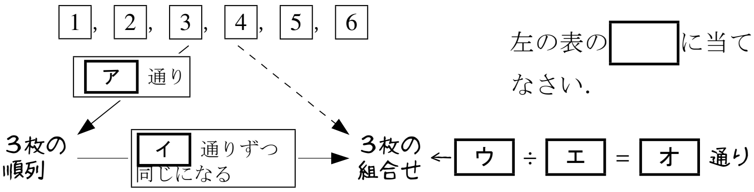


つまり，商の法則から次のように求めることができる.

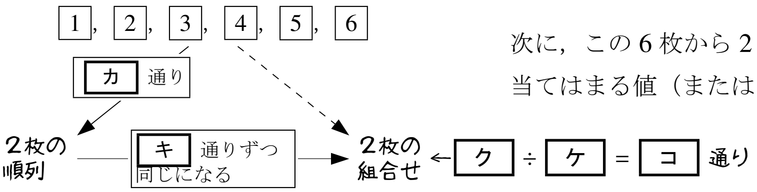
$$\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{3!} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = \frac{5\cdot\cancel{4}^2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} = 10 \text{ 通り}$$

【例題 33】 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ のカードが 1 枚ずつ，計 6 枚ある.

1. $\boxed{1\,|\,2\,|\,3}$ という順列は，組合せとしては $\boxed{1\,|\,3\,|\,2}$ と同じである.
   他に，$\boxed{1\,|\,2\,|\,3}$ と同じ組合せになる順列を，辞書順ですべて挙げよ.
2. 左の表の $\boxed{}$ に当てはまる値（または，式）を答えなさい.



3. 次に，この 6 枚から 2 枚選ぶとき，左の表の $\boxed{}$ に当てはまる値（または，式）を答えなさい.



【解答】

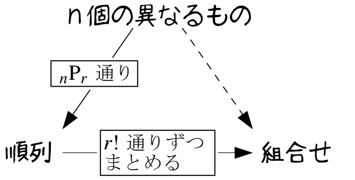
1. $\boxed{2\,|\,1\,|\,3}$, $\boxed{2\,|\,3\,|\,1}$, $\boxed{3\,|\,1\,|\,2}$, $\boxed{3\,|\,2\,|\,1}$
2. ア : **120**（または ${}_6\mathrm{P}_3$），イ : **6**（または **3!**）
   ウ : **120**（または ${}_6\mathrm{P}_3$），エ : **6**（または **3!**），オ : **20**
3. カ : **30**（または ${}_6\mathrm{P}_2$），キ : **2**（または **2!**）
   ク : **30**（または ${}_6\mathrm{P}_2$），ケ : **2**（または **2!**），コ : **15**

B. 組合せ $_n\mathrm{C}_r$

組合せ $_n\mathrm{C}_r$ の定義

「n 個の異なるものから r 個を選ぶ**組合せ** (combination) 」の場合の数を，記号 $\overset{\text{エヌシーアール}}{{}_n\mathrm{C}_r}$ で表し，次で計算できる[*3]（n と r は $n \geqq r$ である正の整数とする）.

$$_n\mathrm{C}_r = \frac{_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{n\text{ から始まる }r\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から }1\text{ までの積}}}$$



たとえば,「12 人の班から 3 人を選ぶ組合せ」の場合の数は $_{12}\mathrm{C}_3$ であり，これは

$$_{12}\mathrm{C}_3 = \frac{\overbrace{12\cdot 11\cdot 10}^{\substack{12\text{ から始まる}\\3\text{ 個の数の積}}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{3\text{ から }1\text{ までの積}}} = \frac{\cancel{12}^{\cancel{4}^{2}}\cdot 11\cdot 10}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 2\cdot 11\cdot 10 = 220$$ と計算できるので，220 通りである.

【例題 34】 $_5\mathrm{C}_2$，$_{10}\mathrm{C}_3$ の値をそれぞれ求めよ.

【解答】 $_5\mathrm{C}_2 = \dfrac{\overbrace{5\cdot 4}^{\substack{5\text{ から始まる}\\2\text{ 個の数の積}}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{2\text{ から }1\text{ まで}}} = \mathbf{10}$，$_{10}\mathrm{C}_3 = \dfrac{\overbrace{10\cdot 9\cdot 8}^{\substack{10\text{ から始まる}\\3\text{ 個の数の積}}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{3\text{ から }1\text{ まで}}} = \mathbf{120}$

【例題 35】 次の $\boxed{}$ に当てはまる数字を答えなさい.

1. 15 人のクラスから 2 人の委員を選ぶ組合せの場合の数は，$_{\boxed{ア}}\mathrm{C}_{\boxed{イ}} = \boxed{ウ}$ 通りある.
2. 8 個の異なる石から 4 個の石を選ぶ組合せの場合の数は，$_{\boxed{エ}}\mathrm{C}_{\boxed{オ}} = \boxed{カ}$ 通りある.
3. 異なるボールが 20 個入った袋から 3 個を選ぶ組合せの場合の数は，$_{\boxed{キ}}\mathrm{C}_{\boxed{ク}} = \boxed{ケ}$ 通りある.

【解答】

1. ア : **15**，イ : **2**，ウ : $_{15}\mathrm{C}_2 = \dfrac{15\cdot\cancel{14}^{7}}{\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{105}$**通り**
2. エ : **8**，オ : **4**，カ : $_8\mathrm{C}_4 = \dfrac{\cancel{8}^{2}\cdot 7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{70}$**通り**
3. キ : **20**，ク : **3**，ケ : $_{20}\mathrm{C}_3 = \dfrac{20\cdot 19\cdot\cancel{18}^{\cancel{6}^{3}}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{1140}$**通り**

$_n\mathrm{C}_r$ を計算するときは，約分の方法を工夫するようにしよう.

[*3] 次の等式も成り立つ．ただし，$_n\mathrm{C}_r$ の値を計算するときには必要がない.

$$_n\mathrm{C}_r = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{n\text{ から始まる }r\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{r(r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から }1\text{ までの積}}} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}^{n\text{ から }1\text{ までの積}}}{\underbrace{r(r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から }1\text{ までの積}}\underbrace{(n-r)(n-r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{n-r\text{ から }1\text{ までの積}}} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

【練習 36：$_nC_r$ の計算練習】

(1) $_5C_2$，$_{10}C_3$，$_{20}C_2$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 30 人のクラスの中から，3 人の委員を選ぶ方法は何通りあるか．

(3) 10 個の点から 4 点を選ぶ方法は何通りあるか．

【解答】

(1) $_5C_2 = \dfrac{\overbrace{5\cdot 4}^{\text{5 から始まる 2 個の数の積}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{\text{2 から 1 まで}}} = \mathbf{10}$，$_{10}C_3 = \dfrac{\overbrace{10\cdot 9\cdot 8}^{\text{10 から始まる 3 個の数の積}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{\text{3 から 1 まで}}} = \mathbf{120}$，$_{20}C_2 = \dfrac{\overbrace{20\cdot 19}^{\text{20 から始まる 2 個の数の積}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{\text{2 から 1 まで}}} = \mathbf{190}$

(2) $_{30}C_3 = \dfrac{\cancel{30}^{10}\cdot 29\cdot \cancel{28}^{14}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = $ **4060通り**

(3) $_{10}C_4 = \dfrac{10\cdot \cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}^{2}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = $ **210通り**

C. $_nC_0$，$_nC_n$ の値

$_nC_0$ の値も[*4]，$_nC_n$ の値も[*5]，必ず 1 になる．たとえば，$_{10}C_0 = 1$，$_{10}C_{10} = 1$ である．

D. 等式 $_nC_r = {_nC_{n-r}}$

たとえば，10 人の集まりから 7 人を選ぶとき，次のどちらを行ってもよい．

- 選ばれる 7 人を決める，これは $_{10}C_7$ 通りある．
- 選ばれない 3 人を決める，これは $_{10}C_3$ 通りある．

$$_{10}C_7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}}{\cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = {_{10}C_3}$$

結局，$_{10}C_7 = {_{10}C_3}$ である．これは，右の計算式からも分かり，一般には，$_nC_r = {_nC_{n-r}}$ が成り立つ[*6]．

…… r が n の半分より大きい値の場合は，$_nC_r$ でなく $_nC_{n-r}$ を計算するとよい．

【例題 37】

1. $_3C_0$，$_4C_4$ の値をそれぞれ求めよ．
2. $_{100}C_{98} = {_{100}C_{\boxed{ア}}} = \boxed{イ}$
3. $_{12}C_{10}$，$_{20}C_{17}$ の値をそれぞれ求めよ．
4. 13 人の中から 9 人を選ぶ方法は何通りか．

【解答】

1. $_3C_0 = \mathbf{1}$，$_4C_4 = \mathbf{1}$
2. ア：**2**，イ：$_{100}C_2 = \dfrac{100\cdot 99}{2} = \mathbf{4950}$
3. $_{12}C_{10} = {_{12}C_2} = \dfrac{\cancel{12}^{6}\cdot 11}{\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{66}$，$_{20}C_{17} = {_{20}C_3} = \dfrac{\cancel{20}^{10}\cdot 19\cdot \cancel{18}^{6}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{1140}$
4. $_{13}C_9 = {_{13}C_4} = \dfrac{13\cdot \cancel{12}\cdot 11\cdot \cancel{10}^{5}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = $ **715通り**

◀ または，$_4C_4 = \dfrac{\overbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}^{\text{4 から始まる 4 個の数の積}}}{\underbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{\text{4 から 1 まで}}} = \mathbf{1}$

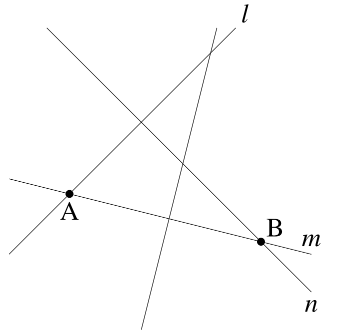
◀ 13 人から 9 人を選ぶことは，13 人から選ばない 4 人を決めることと同じである．

[*4] $_nC_0 = \dfrac{_nP_0}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1$ である．これは，「n 個のものから 0 個を選ぶ」方法は「何も選ばない」という 1 通りしか存在しないことからも理解することができる．

[*5] $_nC_n = \dfrac{_nP_n}{n!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$ である．これは，「n 個のものから n 個を選ぶ」方法は「すべてを選ぶ」という 1 通りしか存在しないことから理解することができる．

[*6] n 個の異なるものから r 個を選ぶとき，「選ばれる r 個を決める」ことと「選ばれない $n-r$ 個を決めること」は 1 対 1 に対応することからも理解できる．

E. 組合せに置き換えられる問題



右図には直線が 4 本，平面上に引かれている．この 4 本の直線が作る交点の数は，組合せを用いて求めることができる．

まず，2 本の直線を選ぶと，交点が 1 つ決まる．たとえば

交点 A を選ぶ $\Leftarrow$ 直線 l, m を選ぶ

逆に，交点を 1 つ選ぶと，交点を作る 2 直線が決まる．

交点 B を選ぶ $\Rightarrow$ 直線 m, n を選ぶ

こうして，「直線の交点の数」=「直線 2 本の選び方」と分かる．「直線 2 本の選び方」は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り なので，「直線の交点の数」は 6 点あると求められる．

【例題 38】 平面上に，どの 2 本を選んでも互いに平行でない，8 本の直線が引かれている．ただし，どの 3 本も 1 点で交わらないものとする．

1. この平面上で直線の交点を 1 つ選ぶことは，$\boxed{\text{ア}}$ 本の直線を選ぶことと一致する．よって，この平面上に，直線の交点は $\boxed{\text{イ}}$ 個ある．
2. この平面上で三角形を 1 つ選ぶことは，$\boxed{\text{ウ}}$ 本の直線を選ぶことと一致する．よって，この平面上に，三角形は $\boxed{\text{エ}}$ 個ある．

【解答】

1. ア: **2**，イ: ${}_8\mathrm{C}_2 = \dfrac{\cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{2}} = \mathbf{28}$
2. ウ: **3**，エ: ${}_8\mathrm{C}_3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \mathbf{56}$

◀ 8 本の直線から，交点を決める 2 本を選ぶ組合せ
◀ 8 本の直線から，三角形を決める 3 本を選ぶ組合せ

F. 組合せと和の法則・積の法則

【例題 39】 男子が 5 人，女子が 5 人いる中で，4 人を選ぶ場合の数について以下の問に答えよ．

1. 男子から 2 人，女子から 2 人選ぶときの場合の数は何通りか．
2. 男子から 2 人以上選ぶ場合の数は何通りか．

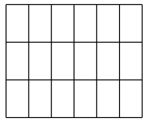
【解答】

1. 男子 2 人の組合せは ${}_5\mathrm{C}_2$ 通り，そのどの場合も女子 2 人の組合せが ${}_5\mathrm{C}_2$ 通りあるので，${}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \mathbf{100}$**通り**．
2. 男子が 2 人のときは，1. より 100 通り．
   男子を 3 人選ぶときは，女子を 1 人選ぶので
   ${}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_5\mathrm{C}_1 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \dfrac{5}{1} = 50$ 通り．
   4 人とも男子を選ぶときは ${}_5\mathrm{C}_4 = {}_5\mathrm{C}_1 = 5$ 通り．
   よって，$100 + 50 + 5 = \mathbf{155}$**通り**．

◀『積の法則 (p.39)』
◀『積の法則 (p.39)』
◀ 和の法則

【練習 40：四角形・対角線】

(1) 右図のように，横に 4 本，縦に 7 本の直行する平行線が引かれている．
この中に長方形はいくつあるか求めよ．



(2) 正十角形の対角線の本数を求めよ．

【解答】

(1) 横 4 本のうちから 2 本，縦 7 本のうちから 2 本をそれぞれ選べば，1 個の長方形が定まる．よって

$${}_4C_2 \cdot {}_7C_2 = \mathbf{126個}$$

(2) 10 個の頂点のうち 2 個を選べば，1 本の対角線か辺が定まる．辺の数は 10 本あるので，これを除いて

$${}_{10}C_2 - 10 = 45 - 10 = \mathbf{35本}$$

◀ 正十角形を実際に書いて考えてみよう

G. 組分けの問題 ～ 組合せと商の法則

【例題 41】 10 人を次のように分ける方法は何通りあるか．

1. 7 人，3 人に分ける．
2. 5 人，3 人，2 人に分ける．

【解答】

1. 10 人から 3 人を選びグループとするのが ${}_{10}C_3$ 通り，
残った 7 人から 7 人を選んで ${}_7C_7$ 通り，よって

$${}_{10}C_3 \cdot {}_7C_7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = \mathbf{120通り}$$

2. 10 人から 2 人を選びグループとするのが ${}_{10}C_2$ 通り，
残った 8 人から 3 人を選んで ${}_8C_3$ 通り，
さらに残った 5 人を 5 人でまとめて ${}_5C_5$ 通り，よって

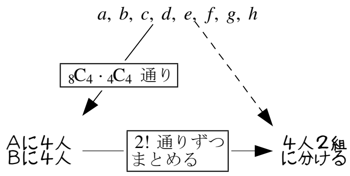
$${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_3 \cdot {}_5C_5 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = \mathbf{2520通り}$$

◀ まず 5 人を選び，次に 3 人を選ぶ，という順序で計算しても，同じ結果になるが，計算は複雑になる

組分けの問題においては，人数の少ない組から ${}_nC_r$ を計算するとよい．

たとえば，8 人を組分ける方法として，次の 2 通りを考えてみよう．

1) グループ A に 4 人，グループ B に 4 人に分ける．
  8 人から，グループ A の 4 人を選ぶ方法は ${}_8C_4$，残りはそのままグループ B になるので，${}_8C_4 = 70$ 通り．
2) 4 人 2 組に分ける．
  8 人を a, b, c, d, e, f, g, h とする．ここで，次の組分け i.，ii. を考えよう．
  i. 初めの 4 人において (a, b, c, d) を選ぶ
   $\to$ (a, b, c, d) と (e, f, g, h) の 2 組
  ii. 初めの 4 人において (e, f, g, h) を選ぶ
   $\to$ (e, f, g, h) と (a, b, c, d) の 2 組



  上の i.，ii. の組分けは 1) においては異なる．
  しかし 2) においては，i.，ii. の組分けは同じになる．結局，右上の表を書くことができ，商の法則によって ${}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \div 2! = 35$ 通りと求められる．

組分けの問題は，「各グループが区別できる場合」を基本に考えるとよい．この場合が，もっとも簡単に計算できるからである．

【練習 42：組分け】

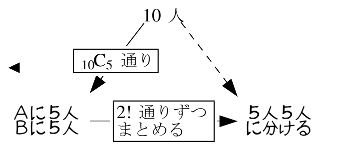
10 人を次のように分ける方法は何通りあるか．

(1) 5 人，5 人に分ける．
(2) 4 人，3 人，3 人に分ける．
(3) 2 人，2 人，2 人，2 人，2 人に分ける．

【解答】

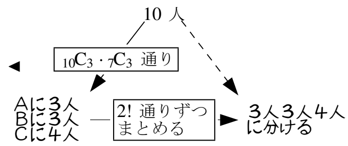
(1) 10 人から，A 組として 5 人を選ぶのが ${}_{10}C_5$ 通り，残りは B 組．
  A と B の区別をなくすために 2! で割ればよいので

$$\frac{{}_{10}C_5}{2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = \textbf{126通り}$$



(2) 10 人から，A 組として 3 人を選ぶのが ${}_{10}C_3$ 通り，
  残りの 7 人から B 組 3 人を選ぶのが ${}_7C_3$ 通り，残りは C 組．
  A と B の区別をなくすために 2! で割ればよいので

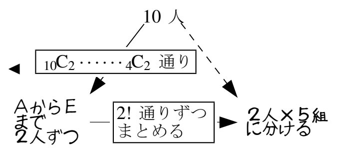
$$\frac{{}_{10}C_4 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = \textbf{2100通り}$$



(3) A 組から E 組まで 2 人ずつを選ぶのが ${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2$ 通り，
  A から E までの区別をなくすために 5! で割って

$$\frac{{}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2}{5!}$$

$$= \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \textbf{945通り}$$



2.　同じものを含むときの順列

A.　同じものを含むときの順列

$\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{C}}$ の 7 枚を 1 列に並べる順列が何通りあるのか考えてみよう．

これを，通常の順列のように考えることはできない．7 枚のカードがあるが，カードは 7 種類ではないからである．

1 枚目	2 枚目	3 枚目	4 枚目	5 枚目	6 枚目	7 枚目
$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$

↑
3通り??

B.　組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いて考える

カード置き場を 7 ヶ所用意しておく．

まず，2 枚の $\boxed{\text{C}}$ の置き場を選ぶ（${}_7\mathrm{C}_2$ 通り）．

いずれの場合も，残りの置き場は 5 ヶ所ある．ここから，2 枚の $\boxed{\text{B}}$ の置き場を選ぶ（${}_5\mathrm{C}_2$ 通り）．

どの場合でも，残りの置き場は 3 ヶ所あるから，3 枚の $\boxed{\text{A}}$ を入れる（${}_3\mathrm{C}_3$ 通り）．

以上から，7 枚のカード $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{C}}$ を 1 列に並べる順列は『積の法則 (p.39)』によって，次で計算できる．

$${}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_3$$
$$= \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ 通り}$$

7 つのカード置き場をまず用意しておく

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

↓ 7 つの置き場から 2 つ選び
C を配置する（${}_7\mathrm{C}_2$ 通り）

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{\text{C}}$

↓ 残り 5 つの置き場から 2 つ選び
B を配置する（${}_5\mathrm{C}_2$ 通り）

$\boxed{\text{B}}$ $\boxed{}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$

↓ 残り 3 つの置き場へは
A を配置する（${}_3\mathrm{C}_3$ 通り）

$\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$

A の置き場，B の置き場，C の置き場の順で決めてもよいが，${}_7\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2$ は計算量が多くなる．一般に，数の少ないものから場所を決めるとよい．

【例題 43】 次の場合の数を，上の方法で求めなさい．

1. 8 つの数字 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 を一列に並べる方法が何通りあるか．
2. 7 つのアルファベット S，C，I，E，N，C，E を一列に並べる方法が何通りあるか．

【解答】

1. 数字を置く場所を 8 つ用意する．
   1 を置く 2 ヶ所は ${}_8\mathrm{C}_2$ 通り，2 を置く 3 ヶ所は ${}_6\mathrm{C}_3$ 通り，
   残り 3 ヶ所に 3 を置くので，『積の法則 (p.39)』より
   $${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3 = \textbf{560通り}$$
2. S，I，N が 1 つずつ，C と E が 2 つずつなので
   $${}_7\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 7 \times 6 \times 5 \times \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 3}{\cancel{2}} = \textbf{1260通り}$$

C.　商の法則を用いて考える

まず，$\boxed{A_1}$, $\boxed{A_2}$, $\boxed{A_3}$, $\boxed{B_1}$, $\boxed{B_2}$, $\boxed{C_1}$, $\boxed{C_2}$ の 7 枚を並べる順列を考える．これは，7! 通りある．

次に，$\boxed{A_1}$, $\boxed{A_2}$, $\boxed{A_3}$ の 3 枚をすべて $\boxed{A}$ に戻す．これによって，3! 通りずつまとめられる．

さらに，$\boxed{B_1}$, $\boxed{B_2}$ の 2 枚をすべて $\boxed{B}$ に戻す．これによって，2! 通りずつまとめられる．

最後に，$\boxed{C_1}$, $\boxed{C_2}$ の 2 枚をすべて $\boxed{C}$ に戻す．これによって，2! 通りずつまとめられる．

以上から，商の法則によって次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
7! \div 3! \div 2! \div 2! &= \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} \\
&= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 210 \text{ 通り}
\end{aligned}
$$

まず $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2$ の 7 枚を並べる

（並べ方は 7! 通りある）

$\boxed{B_2}\ \boxed{A_2}\ \boxed{C_1}\ \boxed{A_3}\ \boxed{A_1}\ \boxed{B_1}\ \boxed{C_2}$

÷3!　↓　A_1, A_2, A_3 の区別をなくす（3! 通りずつまとめる）

$\boxed{B_2}\ \boxed{A}\ \boxed{C_1}\ \boxed{A}\ \boxed{A}\ \boxed{B_1}\ \boxed{C_2}$

÷2!　↓　B_1, B_2 の区別をなくす（2! 通りずつまとめる）

$\boxed{B}\ \boxed{A}\ \boxed{C_1}\ \boxed{A}\ \boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C_2}$

÷2!　↓　C_1, C_2 の区別をなくす（2! 通りずつまとめる）

$\boxed{B}\ \boxed{A}\ \boxed{C}\ \boxed{A}\ \boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}$

【例題 44】 次の場合の数を，上の方法で求めなさい．

1. 8 つの数字 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 を一列に並べる方法が何通りあるか．
2. 7 つのアルファベット S，C，I，E，N，C，E を一列に並べる方法が何通りあるか．

【解答】

1. 1_a，1_b，2_a，2_b，2_c，3_a，3_b，3_c の順列は 8! 通り，
   1_a，1_b の区別をなくすには 2! ずつまとめ，
   2_a，2_b，2_c の区別をなくすには 3! ずつまとめ，
   3_a，3_b，3_c の区別をなくすには 3! ずつまとめることになる．よって，
   商の法則より $\dfrac{8!}{2!3!3!}$ = **560通り** になる．
2. 全部で 7 文字あり，C と E が 2 つずつ，S，I，N が 1 つずつなので
   $\dfrac{7!}{2!2!1!1!1!}$ = **1260通り**

同じものを含む順列の計算

「k 個の同じもの，l 個の同じもの，m 個の同じもの」による順列の総数は

- 「組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いて」${}_{k+l+m}\mathrm{C}_k \times {}_{l+m}\mathrm{C}_l \times {}_m\mathrm{C}_m$ 通りと求められる．
- 「商の法則を用いて」$\dfrac{(k+l+m)!}{k!l!m!}$ 通りと求められる．

これら 2 つの結果は，次のようにして等しいことが分かる．

$$
{}_{k+l+m}\mathrm{C}_k \times {}_{l+m}\mathrm{C}_l \times {}_m\mathrm{C}_m = \frac{(k+l+m)!}{\cancel{(l+m)!}k!} \times \frac{\cancel{(l+m)!}}{\cancel{m!}l!} \times \frac{\cancel{m!}}{0!m!} = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}
$$

どちらのやり方も，4 種類以上のものを含む順列にも応用できる．

$\cdots$ 上の計算は「なぜそうなるのか」を理解していないと，やり方を忘れてしまいやすい．

【例題 45】 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$ を 1 列に並べる方法を，次の 2 通りで求めたい．

1. 「組合せを用いて求める」

8 つのカードの置き場をまず用意しておく

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

2 ヶ所選んで $\boxed{3}$ を配置
（${}_{\boxed{ア}}\mathrm{C}_{\boxed{イ}}$ 通り）

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{3}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{3}$

3 ヶ所選んで $\boxed{2}$ を配置
（${}_{\boxed{ウ}}\mathrm{C}_{\boxed{エ}}$ 通り）

$\boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

残りの置き場へは $\boxed{1}$ を配置
（${}_{\boxed{オ}}\mathrm{C}_{\boxed{カ}}$ 通り）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

以上より，計算式 $\boxed{キ}$ によって $\boxed{ク}$ 通りと求められる．

2. 「商の法則を用いて求める」

まず $1_A, 1_B, 1_C, 2_A, 2_B, 2_C, 3_A, 3_B$ の 8 枚を並べる
（並べ方は $\boxed{ケ}$ 通りある）

$\boxed{2_B}\ \boxed{1_B}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2_C}\ \boxed{1_C}\ \boxed{1_A}\ \boxed{2_A}\ \boxed{3_B}$

$1_A, 1_B, 1_C$ の区別をなくす
（$\boxed{コ}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2_B}\ \boxed{1}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2_C}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2_A}\ \boxed{3_B}$

$2_A, 2_B, 2_C$ の区別をなくす
（$\boxed{サ}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3_B}$

$3_A, 3_B$ の区別をなくす
（$\boxed{シ}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

以上より，計算式 $\boxed{ス}$ によって $\boxed{セ}$ 通りと求められる．

【解答】

1. ア, イ : ${}_8\mathrm{C}_2$　　ウ, エ : ${}_6\mathrm{C}_3$　　オ, カ : ${}_3\mathrm{C}_3$
キ, ク : ${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3 = \mathbf{560}$**通り**

2. ケ : **8!**　　コ : **3!**　　サ : **3!**　　シ : **2!**
ス, セ : $\dfrac{\mathbf{8!}}{\mathbf{3!\cdot 3!\cdot 2!}} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)} = \mathbf{560}$**通り**

「組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いて」解く方が仕組みを理解しやすいが，「商の法則を用いて」解く方が計算しやすい．今後このテキストでは，主に「商の法則を用いて」解いて話を進める．

【練習 46：同じものを含む順列〜その１〜】

(1) a, a, a, b, b を並び替えるとき，何通りの並べ方があるか．
(2) 1, 2, 3 を 2 個ずつ用いてできる 6 桁の整数は何通りあるか．
(3) S，U，U，G，A，K，U，A を並び替えるとき，何通りの並べ方があるか．

【解答】

(1) a を 3 つ，b を 2 つ含む順列であるので $\dfrac{5!}{3!2!} = \mathbf{10}$**通り**

◀ または，${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り

(2) 1, 2, 3 を 2 つずつ含む順列であるので

$$\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{\,2}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1}{(\cancel{2}\cdot 1)\cdot(\cancel{2}\cdot 1)\cdot(\cancel{2}\cdot 1)} = \mathbf{90}\text{通り}$$

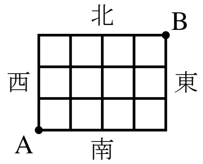
◀ または，${}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2 = 90$ 通り

(3) U を 3 つ，A を 2 つ，S，G，K を 1 つずつ含むから

$$\frac{8!}{3!2!1!1!1!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = \mathbf{3360}\text{通り}$$

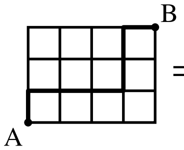
◀ または，${}_8\mathrm{C}_1\cdot{}_7\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_3 =$ 3360 通り

D. 同じものを含む順列の応用 ～ 最短経路の数

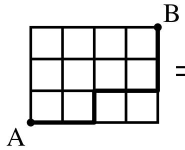


右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路があるとき，A 地点から B 地点への最短経路について考えよう．

ここで，北に 1 区画進むことを↑，東に 1 区画進むことを→で表すとすれば，すべての最短経路を↑と→で表すことができる．



⇒ 「↑→→→↑↑→」



⇒ 「→→↑→→↑↑」

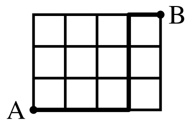
逆に，右の例のように，「↑ 3 つと→ 4 つが作る順列」を 1 つ決めれば，最短経路はただ 1 つに決まる．こうして，「A から B までの最短経路」は，「↑ 3 つと→ 4 つの順列」と 1 対 1 に対応し

$\dfrac{7!}{3!4!} = 21$ 通り（または ${}_7C_3 = 21$ 通り） ←『同じものを含む順列の計算』を用いた

と求めることができる．

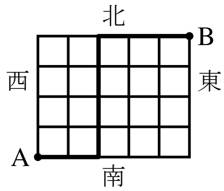
「→→→↑↑↑→」

⇓



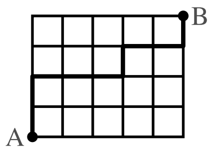
【例題 47】 右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．A 地点から B 地点への最短経路について以下の問に答えよ．

1. A 地点から「↑↑→→→↑→→↑」と進んだときの経路を図示しなさい．
2. 右図の太線のように進んだときの経路を「↑」「→」を用いて表しなさい．
3. A 地点から B 地点まで進むには「↑」へ $\boxed{\text{ア}}$ 回，「→」へ $\boxed{\text{イ}}$ 回進めばよいので，最短経路の場合の数は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りであると分かる．



【解答】

1.



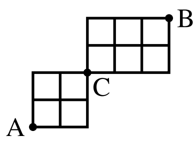
2. →→↑↑↑↑→→→
3. ア : **4**，イ : **5**

   ウ : $\dfrac{9!}{4!5!} = \mathbf{126}$**通り**

◂ または ${}_9C_4 = \mathbf{126}$**通り**

【例題 48】 右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．

1. A から C への最短経路は全部で何通りあるか求めよ．
2. C から B への最短経路は全部で何通りあるか求めよ．
3. A から C を通って B へ進む最短経路は全部で何通りあるか求めよ．



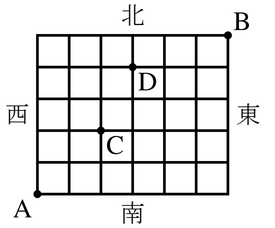
【解答】

1. $\dfrac{4!}{2!2!} = \mathbf{6}$**通り**
2. $\dfrac{5!}{2!3!} = \mathbf{10}$**通り**
3. $6 \times 10 = \mathbf{60}$**通り**

◂ A から C へどのように進んでも (6 通り)，それぞれ，C から B へ 10 通り行き方がある．

【練習 49：最短経路】

右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．A 地点から B 地点への最短経路について以下の問に答えよ．



(1) 最短経路は全部で何通りあるか求めよ．

(2) C 地点を通る最短経路は何通りあるか．また，D 地点を通る最短経路は何通りあるか，それぞれ求めよ．

(3) C 地点または D 地点を通る最短経路は何通りあるか求めよ．

【解答】

(1) 最短経路の数は，↑ 5 つと→ 6 つの順列の場合の数と一致するので

$\dfrac{11!}{5!6!} = \mathbf{462}$**通り**　　または　${}_{11}C_5 = \mathbf{462}$**通り**

◀『同じものを含む順列』(p.62)

(2)（C 地点を通る最短経路）

A〜C の最短経路の数は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り，

◀ ↑ 2 つ，→ 2 つの順列に一致

それぞれに対し，

◀「それぞれに」あるので積の法則

C〜B の最短経路の数は $\dfrac{7!}{3!4!}$ 通り あるので

◀ ↑ 3 つ，→ 4 つの順列に一致

$\dfrac{4!}{2!2!} \times \dfrac{7!}{3!4!} = 6 \times 35 = \mathbf{210}$**通り**

◀ または，${}_4C_2 \cdot {}_7C_3 = 210$

（D 地点を通る最短経路）

同様にして $\dfrac{7!}{4!3!} \times \dfrac{4!}{1!3!} = 35 \times 4 = \mathbf{140}$**通り**

◀ A から D までは↑ 4 つ，→ 3 つ D から B までは↑ 1 つ，→ 3 つの順列に一致する

(3) 集合 C，D をそれぞれ

C：C 地点を通る最短経路，D：D 地点を通る最短経路

とおくと，求める値は $n(C \cup D)$ である．ここで，$n(C \cap D)$ は，C，D 両地点を通る最短経路の数であり

◀ A から C までは↑ 2 つ，→ 2 つ C から D までは↑ 2 つ，→ 1 つ D から B までは↑ 1 つ，→ 3 つの順列に一致

$$n(C \cap D) = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{2!1!} \times \frac{4!}{1!3!} = 6 \times 3 \times 4 = 72$$

であるから，$n(C \cup D)$，つまり求める最短経路の数は

$$\begin{aligned} n(C \cup D) &= n(C) + n(D) - n(C \cap D) \\ &= 210 + 140 - 72 = \mathbf{278}\text{通り} \end{aligned}$$

E. 発展　重複順列の応用問題

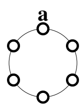
【発展 50：同じものを含む円順列】

① a を 1 つ，b を 2 つ，c を 3 つ，計 6 つの文字を円形に並べるとき，何通りの並べ方があるか．

② a，b，c をそれぞれ 2 つずつ，計 6 つの文字を円形に並べるとき，何通りの並べ方があるか．

【解答】

① 1 つの a を固定すれば，残りは 2 つの b と 3 つの c の順列になるので

◀


$\dfrac{5!}{2!3!} = \mathbf{10}$**通り**

② 2 つの a の並べ方は次の 3 つの場合に分けられる．

i) 隣り合うタイプ

残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り

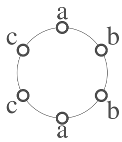
ii) 1 つ間をおくタイプ

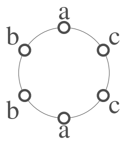
残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り

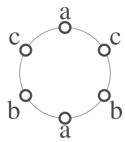
iii) 2 つ間をおくタイプ

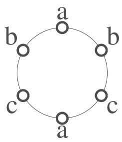
残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り

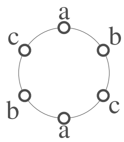
しかし，この 6 通りのうち

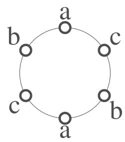
①


②


③


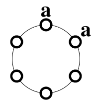
④


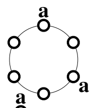
⑤


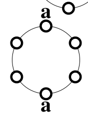
⑥


①と②，③と④も同じものである．よって，4 通りとなる．

以上 i)，ii)，iii) より，$6+6+4=$ **16通り**

◀


◀


◀


【発展 51：同じものを含む順列〜その２〜】

7 つの数字 1，1，1，2，2，3，3 を用いてできる 4 桁の数字を考える．

① 1213 や 2311 のように，3 種類の数字をすべて使ってできる数字は何通りあるか．

② 4 桁の数字は全部で何通りできるか．

【解答】

① 3 種類とも用いた 4 桁の数字は

$$\underbrace{{}_3C_1}_{\substack{1,2,3\\ \text{のうち何を}\\ 2\text{つ使うか}}}\times\underbrace{\frac{4!}{2!1!1!}}_{\substack{2\text{つ}1\text{つ}1\text{つ}\\ \text{の順列}}}=3\times 12=\textbf{36通り}$$

② 1 種類だけ用いた 4 桁の数字はない．　◀ 1 も 2 も 3 も，3 個以下しかない

数字を 2 種類だけ用いた数字は，次の 1)，2) がある．

1) 2 種類の数字を 2 つずつ用いた数　◀ 1122，1331 など

2 つずつの順列は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通りあり，2 種類の数字の選び方は ${}_3C_2$ 通りあるので

$$\frac{4!}{2!2!}\times{}_3C_2=6\times 3=18 \text{ 通り}$$

2) 1 を 3 つ，2 か 3 を 1 つ用いた数　◀ 2111，1131 など

1 を 3 つ，2 を 1 つ用いた順列は $\dfrac{4!}{3!1!}$ 通り，

1 を 3 つ，3 を 1 つ用いた順列も同様なので

$$\frac{4!}{3!1!}\times 2=4\times 2=8 \text{ 通り}$$

よって，数字を 2 種類だけ用いた数は $18+8=26$ 個ある．1) と合わせて，全部で $26+36=$ **62通り** ある．

3. 重複組合せ

A. ○と｜のモデル

次の問題を考えてみよう．

3 種類の果物，りんご，かき，なしを使って，7 個入りの果物かごを作る．
1 つも入らない種類があってもよいとすると，何通りの果物かごができるか．

この問題は，「○と｜のモデル」への置き換えによって解くことができる．7 つの○を 2 つの｜で区切り

一番左の○の数をりんごの数
真ん中の○の数をかきの数
一番右の○の数をなしの数

りんご 2 個，かき 3 個，なし 2 個
$\iff$ ○○｜○○○｜○○
りんご 4 個，かき 0 個，なし 3 個
$\iff$ ○○○○｜｜○○○

とすれば，「果物かごの種類の数」と「○ 7 つと｜ 2 つの順列」
は一致する．よって，「果物かごの種類の数」は，『同じものを含む順列』(p.62) によって $\dfrac{9!}{7!2!} = 36$ 通りあると分かる（または，${}_9C_2 = 36$ 通り）．

【例題 52】 8 個の区別しないアメを 3 人に分ける．1 個もアメをもらえない人がいてもよいとする．

1. 上の○と｜のモデルにおいて「○○｜○○｜○○○○」と対応する分け方は，
   A が $\boxed{\text{ア}}$ 個，B が $\boxed{\text{イ}}$ 個，C が $\boxed{\text{ウ}}$ 個である．
2. 上の○と｜のモデルにおいて「｜○○○○｜○○○○」と対応する分け方は，
   A が $\boxed{\text{エ}}$ 個，B が $\boxed{\text{オ}}$ 個，C が $\boxed{\text{カ}}$ 個である．
3. A が 3 個，B が 5 個，C が 0 個のときを，○と｜のモデルで表せ．
4. アメの分け方は何通りあるか．

【解答】

1. ア : **2**，イ : **2**，ウ : **4**
2. エ : **0**，オ : **4**，カ : **4**
3. ○○○｜○○○○○｜
4. ○ 8 つと｜ 2 つの順列に一致するので，$\dfrac{10!}{8!2!} = \mathbf{45}$**通り**

重複組合せ

n 種類のものを，重複を許して組み合わせて，r 個にすることを，**重複組合せ**（ちょうふく）(combination with repetitions) という．組合せに選ばれない種類があってもよいならば，r 個の○と，$n-1$ 個の｜を用いた「○と｜のモデル」を用いて，場合の数を求められる．

B. すべての種類を含む重複組合せ（資源配分）

重複組合せにおいて，すべての種類が 1 つは選ばれないといけない場合を考えよう．

3 種類の果物，りんご，かき，なしを使って，7 個入りの果物かごを作る．
どの種類も最低 1 個含めるとすると，何通りの果物かごができるか．

この問題は，次のように考えればよい．

(A) はじめに，りんご，かき，なしを 1 個ずつ入れる．
(B) 次に，りんご，かき，なしを，合わせて 4 個入れる．このときは，1 つも入らない種類があってもよい．

(A) の入れ方は 1 通りしかないので，(B) の入れ方が何通りであるか求めればよい．
(B) の入れ方は，○ 4 つと｜ 2 つの順列を考えればよいので

$\dfrac{6!}{4!2!} = 15$ 通り　　または　${}_6C_2 = 15$ 通り

(B) が ○○｜○｜○ のとき
りんご 2 個，かき 1 個，なし 1 個
(A) と合わせて
りんご 3 個，かき 2 個，なし 2 個

(B) が ｜○○○｜○ のとき
りんご 0 個，かき 3 個，なし 1 個
(A) と合わせて
りんご 1 個，かき 4 個，なし 2 個

【例題 53】 8 個の区別しないアメを 3 人に分ける．どの人も最低 1 個はアメをもらう場合，分け方は何通りあるか．

【解答】 まず，3 人に 1 個ずつアメを配る．残りの 5 個のアメを 3 人に配る方法は，「○ 5 つ，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{7!}{5!2!} = \mathbf{21}$**通り**

C. 整数問題への応用

○と｜のモデルを用いて，「$x+y+z=7$ となる 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数」を求めることができる．○ 7 個と｜ 2 つを横一列に並べ

一番左の○の数を x の値
真ん中の○の数を y の値
一番右の○の数を z の値

$x=2,\ y=3,\ z=2$
$\iff$ ○○｜○○○｜○○
$x=4,\ y=0,\ z=3$
$\iff$ ○○○○｜｜○○○

とすれば，「$(x,\ y,\ z)$ の組」と「○ 7 個と｜ 2 つの順列」は 1 対 1 に対応する．つまり，$\dfrac{9!}{2!7!} = 36$ 通り．

【例題 54】
1. $x+y+z=12$ を満たす 0 以上の整数の解 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ．
2. $a+b+c+d=10$ を満たす 0 以上の整数の解 $(a,\ b,\ c,\ d)$ の個数を求めよ．

【解答】
1. 「$(x,\ y,\ z)$ の組」と「○ 12 個と｜ 2 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{14!}{12!2!} = \frac{\cancel{14}^{7}\cdot 13}{\cancel{2}} = \mathbf{91}\text{通り}$$

2. 「$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組」と「○ 10 個と｜ 3 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{13!}{10!3!} = \frac{13\cdot \cancel{12}\,\cancel{4}^{2}\cdot 11}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \mathbf{286}\text{通り}$$

◂ $x=2,\ y=2,\ z=8$
$\Leftrightarrow$ ○○｜○○｜○○○○○○○○
$x=5,\ y=0,\ z=7$
$\Leftrightarrow$ ○○○○○｜｜○○○○○○○

◂ $a=4,\ b=2,\ c=3,\ d=1$
$\Leftrightarrow$ ○○○○｜○○｜○○○｜○
$p=3,\ q=1,\ r=4,\ s=2$
$\Leftrightarrow$ ○○○｜○｜○○○○｜○○

【練習 55：重複組合せと不定方程式[*7]】

(1) 10 個のボールを 3 つの箱に配分する．

1) すべての箱に少なくとも 1 個のボールを入れる方法は何通りあるか．

2) 1 個も入っていない箱があってもよいとすると，配分の方法は何通りあるか．

(2) $p+q+r+s=15$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ の数を求めよ．

【解答】

(1) 1) はじめに 1 個ずつのボールを箱に入れ，残りの 7 つを 3 箱に分ければよい．これは「○ 7 つ，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{9!}{7!2!}=$ **36通り**

2) 「○ 10 個，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{12!}{10!2!}=$ **66通り**

(2) 「$(p,\ q,\ r,\ s)$ の組」と「○ 15 個と｜ 3 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{18!}{15!3!}=\frac{\cancel{18}^{3}\cdot 17\cdot 16}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=\textbf{816通り}$$

◂ $p=2,\ q=2,\ r=3,\ s=8$
⇔ ○○｜○○｜○○○｜○○○○○○○○
$p=5,\ q=0,\ r=4,\ s=6$
⇔ ○○○○○｜｜○○○○｜○○○○○○

D. 発展 ○と｜のモデルの応用

【発展 56：整数問題〜その１〜】

$p+q+r+s=15$ を満たす自然数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ の数を求めよ．

【解答】 $P+Q+R+S=11$ を満たす 0 以上の整数の組 $(P,\ Q,\ R,\ S)$ の個数に等しい．

その個数は「○ 11 個と｜ 3 つの順列」の場合の数と一致するので

$$\frac{14!}{11!3!}=\frac{14\cdot 13\cdot \cancel{12}^{2}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=\textbf{364通り}$$

◂ $p=P+1,\ q=Q+1,\ r=R+1,\ s=S+1$ とすればよい．

◂ $P=1,\ Q=1,\ R=2,\ S=7$
⇔ ○｜○｜○○｜○○○○○○○
このとき，$(p,\ q,\ r,\ s)=(2,\ 2,\ 3,\ 8)$
$P=4,\ Q=0,\ R=3,\ S=4$
⇔ ○○○○｜｜○○○｜○○○○
このとき，$(p,\ q,\ r,\ s)=(5,\ 1,\ 4,\ 5)$

【発展 57：整数問題〜その２〜】

$p+q+r\leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r)$ の数を求めよ．

【解答】 $p+q+r\leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r)$ は，次のようにして，$p+q+r+s=10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ に一致する．

$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 0)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 0,\ 10)$
$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 1)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 1,\ 9)$
$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 2)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 2,\ 8)$
$(p.\ q,\ r)=(2,\ 2,\ 4)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(2,\ 2,\ 4,\ 2)$

よって，○ 10 個と｜ 3 個の順列に等しいので，$\dfrac{13!}{10!3!}=$ **286通り**

◂ これに気づかなければ，次のように地道に解くことになる．
$p+q+r=10$ を満たす組の個数は，○ 10 個と｜ 2 個の順列に等しいので，$\dfrac{12!}{10!2!}$ 通り，
$p+q+r=9$ を満たす組の個数は・・・と順に考えれば

$$\frac{12!}{10!2!}+\frac{11!}{9!2!}+\frac{10!}{8!2!}+\cdots+\frac{3!}{1!2!}+\frac{2!}{0!2!}=\textbf{286通り}$$

[*7] 一般に，整数係数の多項式を 0 とおいた（連立）方程式のうち，整数解のみを求めることを不定方程式を解くという．

2.4 2項定理 〜 $(a+b)^n$ の展開

ここでは，$(a+b)^3$, $(a+b)^4, \cdots$ の展開について考える．このとき，組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ が重要な役目をする．また，逆に，${}_n\mathrm{C}_r$ のいくつかの性質も明らかになる．

1. 2項定理

A. 展開と項の個数

たとえば，$(a+b)(p+q)(x+y)$ を展開すると

$$\begin{aligned}(a+b)(p+q)(x+y) &= (ap+aq+bp+bq)(x+y)\\ &= apx+apy+aqx+aqy+bpx+bpy+bqx+bqy\end{aligned}$$

となるが，すべての項は $(a$ または $b) \times (p$ または $q) \times (x$ または $y)$ となることが分かる．

【例題 58】 式 $(a+b)(s+t+u)(x+y+z)$ について，以下の問いに答えよ．

1. この式を展開してできる項の中に含まれるものを，次の中からすべて選べ．

   $+at$，$+aty$，$+bst$，$+buy$

2. この式の展開によって，全部で何種類の項が作られるか．

【解答】

1. すべての項は 3 つの文字の掛け算になり，$(a$ か $b) \times (s$ か t か $u) \times (x$ か y か $z)$ になるので，$\boldsymbol{+aty}$**，**$\boldsymbol{+buy}$．
2. $2 \times 3 \times 3 = \mathbf{18}$ **種類**

【例題 59】 式 $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ について，以下の問いに答えよ．

1. この式を展開してできる項の中に含まれるものを，次の中からすべて選べ．

   $+abab$，$+abbaa$，$+a^2b$，$+a^3b$，$+ab^4$

2. この式を展開して，項 $+ab^3$ は何回作られるか．

【解答】

1. すべての項は，$(a$ か $b)$ を 4 回掛けた項になるので，$\boldsymbol{+abab}$**，**$\boldsymbol{+a^3b}$．
2. $+a\times b\times b\times b$，$+b\times a\times b\times b$，$+b\times b\times a\times b$，$+b\times b\times b\times a$ の 4 つが $+ab^3$ と一致するので，**4 回**作られる．

B.　2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$

たとえば，$(a+b)^5$ を展開したときの a^3b^2 の係数を次のようにして求めることができる．

$(a+b)^5$ を展開してできる項は，(a か b) を 5 回掛けた項になり，項 $+a^3b^2$ が作られるのは右のような場合がある．

結局，5 つの $(a+b)$ から b を 2 つ選べばよく，「5 ヶ所から 2 ヶ所を選ぶ組み合わせ」${}_5\mathrm{C}_2$ 通りであるので，a^3b^2 の係数は ${}_5\mathrm{C}_2=10$ と分かる．

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} a & a & a & b & b \\ a & b & a & a & b \\ b & b & a & a & a \end{array}}_{\substack{\text{5ヶ所から } b \text{ を2つ選べばよい} \\ \text{そのような選び方は } {}_5\mathrm{C}_2 \text{ 通り}}} \begin{array}{l} \to\ +aaabb=+a^3b^2 \\ \to\ +abaab=+a^3b^2 \\ \to\ +bbaaa=+a^3b^2 \end{array}$$

2 項係数

$(a+b)^n$ を展開したとき，$a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$ になる．このことから，${}_n\mathrm{C}_r$ のことを **2 項係数** (binomial coefficient) ともいう．

…… ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ であるので，$a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_{n-r}$ とも一致する．

【例題 60】 次の展開式において，[　] 内で指定された項の係数を求めよ．

1. $(a+b)^6$　$[a^3b^3]$　　2. $(x+y)^8$　$[x^5y^3]$　　3. $(x+1)^{10}$　$[x^4]$

【解答】

1. ${}_6\mathrm{C}_3=\mathbf{20}$　　2. ${}_8\mathrm{C}_3=\mathbf{56}$　　3. x^41^6 の係数なので ${}_{10}\mathrm{C}_4=\mathbf{210}$

◀ ${}_{10}\mathrm{C}_6$ を計算してもよい．

C.　2 項定理

a^5	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 0 個選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_0$
a^4b	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 1 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_1$
a^3b^2	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 2 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_2$
a^2b^3	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 3 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_3$
ab^4	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 4 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_4$
b^5	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 5 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_5$

となるので，$(a+b)^5$ は次のように展開できる．

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= {}_5\mathrm{C}_0a^5+{}_5\mathrm{C}_1a^4b+{}_5\mathrm{C}_2a^3b^2+{}_5\mathrm{C}_3a^2b^3+{}_5\mathrm{C}_4ab^4+{}_5\mathrm{C}_5b^5 \\ &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\end{aligned}$$

2 項定理

n を自然数とするとき，$(a+b)^n$ は次のように展開できる．

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

これを **2 項定理** (binomial theorem) という．

【例題 61】 $(a+b)^4$, $(a+b)^6$ を展開しなさい．

【解答】

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4\\ &= \boldsymbol{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^6 &= {}_6C_0a^6 + {}_6C_1a^5b + {}_6C_2a^4b^2 + {}_6C_3a^3b^3\\ &\qquad + {}_6C_4a^2b^4 + {}_6C_5ab^5 + {}_6C_6b^6\\ &= \boldsymbol{a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3}\\ &\qquad \boldsymbol{+15a^2b^4+6ab^5+b^6}\end{aligned}$$

D.　二項定理における係数

$(2x-y)^7$ を展開したときの x^4y^3 の係数を求めてみよう．$(2x-y)^7$ を展開すると

$$\begin{aligned}(2x-y)^7 &= \{2x+(-y)\}^7\\ &= {}_7C_0\,(2x)^7 + {}_7C_1\,(2x)^6\,(-y) + {}_7C_2\,(2x)^5\,(-y)^2 + \overbrace{{}_7C_3\,(2x)^4\,(-y)^3}^{x^4y^3\text{ の係数は}\\\text{ここで決まる}}\\ &\qquad + {}_7C_4\,(2x)^3\,(-y)^4 + {}_7C_5\,(2x)^2\,(-y)^5 + {}_7C_6 2x\,(-y)^6 + {}_7C_7\,(-y)^7\end{aligned}$$

となるので，x^4y^3 の係数は次の計算によって -560 と分かる．

$${}_7C_3\,(2x)^4\,(-y)^3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\cdot16x^4\cdot\left(-y^3\right) = -560x^4y^3$$

【練習 62：展開された式の係数～その１～】

次の展開式において，[　] 内で指定された項の係数を求めよ．

(1) $(2x+1)^6$ $[x^2]$　　(2) $(x-2y)^7$ $[x^2y^5]$　　(3) $(2x-3y)^5$ $[x^3y^2]$

【解答】

(1) $(2x+1)^6$ を展開したとき，x^2 を含む項は

$${}_6C_4(2x)^2 1^4 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\left(4x^2\right) = 60x^2$$

となる．よって，x^2 の係数は **60** である．

◀ $2x$ を 2 回掛ける項に『2 項定理』を部分的に使った

(2) $(x-2y)^7$ を展開したとき，x^2y^5 を含む項は

$${}_7C_2x^2(-2y)^5 = \frac{7\cdot6}{2\cdot1}\cdot x^2\cdot\left(-32y^5\right) = -672x^3y^2$$

となる．よって，x^2y^5 の係数は **−672** である．

◀ x を 2 回掛ける項に『2 項定理』を部分的に使った

(3) $(2x-3y)^5$ を展開したとき，x^3y^2 を含む項は

$${}_5C_2(2x)^3(-3y)^2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\left(8x^3\right)\cdot\left(9y^2\right) = 720x^3y^2$$

となる．よって，x^3y^2 の係数は **720** である．

◀ $2x$ を 3 回掛ける項に『2 項定理』を部分的に使った

$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$ を展開したときの x の係数を求めてみよう．$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$ を展開すると

$$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7 = \left\{2x+\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}^7$$

$$= {}_7C_0\,(2x)^7 + {}_7C_1\,(2x)^6\left(-\frac{1}{x}\right) + {}_7C_2\,(2x)^5\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \overbrace{{}_7C_3\,(2x)^4\left(-\frac{1}{x}\right)^3}^{x\text{の係数は ここで決まる}}$$

$$+ {}_7C_4\,(2x)^3\left(-\frac{1}{x}\right)^4 + {}_7C_5\,(2x)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^5 + {}_7C_6\,2x\left(-\frac{1}{x}\right)^6 + {}_7C_7\left(-\frac{1}{x}\right)^7$$

となるので，x の係数は次の計算によって -560 と分かる．

$${}_7C_3\,(2x)^4\left(-\frac{1}{x}\right)^3 = 35\cdot\left(16x^4\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^3}\right) = -560x$$

【練習 63：展開された式の係数〜その２〜】

次の展開式において，[　　] 内で指定された項の係数を求めよ．

(1) $(3x^2+1)^7$　$[x^6]$　　(2) $\left(x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^7$　$\left[\dfrac{1}{x}\right]$　　(3) $\left(x-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{12}$　[定数項]

【解答】

(1) x^6 の項は ${}_7C_3\cdot(3x^2)^3\cdot 1^4$ を含む項から作られる．これを計算して

$${}_7C_3(3x^2)^3\cdot 1^4$$
$$= \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\cdot(27x^6)\cdot 1 = 945x^6$$

よって，求める係数は **945** である．

(2) $\dfrac{1}{x}$ の項は ${}_7C_2(x^2)^2\left(-\dfrac{1}{2x}\right)^5$ を含む項から作られる．これを計算して

$${}_7C_2\cdot(x^2)^2\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)^5$$
$$= 21\cdot\cancel{x^4}\cdot\left(-\frac{1}{32x^{\cancel{5}}}\right) = -\frac{21}{32}\cdot\frac{1}{x}$$

よって，求める係数は $\boldsymbol{-\dfrac{21}{32}}$ である．

(3) 定数項は ${}_{12}C_4x^8\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)^4$ を含む項から作られる．これを計算して

$${}_{12}C_4\cdot x^8\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)^4$$
$$= \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot \cancel{10}^5\cdot 9}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\cdot\cancel{x^8}\cdot\left(\frac{1}{16\cancel{x^8}}\right) = \frac{495}{16}$$

よって，求める係数は $\boldsymbol{\dfrac{495}{16}}$ である．

E. $(a+b+c)^n$ の展開

たとえば，$(a+b+c)^5$ を展開したときの a^2b^2c の係数は次のように求めることができる．

$$
\begin{array}{cccccccl}
(a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) & & & \\
a & a & c & b & b & \to & +aacbb = +a^2b^2c \\
a & b & a & c & b & \to & +abacb = +a^2b^2c \\
\underbrace{b \quad\quad b \quad\quad a \quad\quad a}_{a,\ a,\ b,\ b,\ c \text{ の順列になって } \frac{5!}{2!2!1!} \text{ 通り}^{*8}} & & & & c & \to & +bbaac = +a^2b^2c
\end{array}
$$

結局，a^2b^2c の係数は $\dfrac{5!}{2!2!1!} = 30$ と分かる．

2 項係数

$(a+b+c)^n$ を展開したとき，$a^pb^qc^r$ の係数は $\dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$ になる．

【発展 64：展開された式の係数〜その３〜】

次の展開式において，[　　] 内で指定された項の係数を求めよ．

① $(x+y+z)^6$ $[x^2y^2z^2]$　　② $(2x-3y+z)^5$ $[xyz^3]$　　③ $(x^2+x-1)^4$ $[x^6]$

【解答】

① $\dfrac{6!}{2!2!2!} = \dfrac{6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = \mathbf{90}$

② xyz^3 の項は，$\dfrac{5!}{1!1!3!}(2x)(-3y)z^3$ の項から作られる．これを計算すれば

$$\frac{5!}{1!1!3!}(2x)(-3y)z^3 = -120xyz^3$$

となるので，xyz^3 の係数は $\mathbf{-120}$ である．

③ x^6 の項は，$(x^2)^3\cdot x^0\cdot(-1)^1$ を含む項と $(x^2)^2\cdot x^2\cdot(-1)^0$ を含む項から作られる．

$(x^2)^3\cdot x^0\cdot(-1)^1$ の係数は $\dfrac{4!}{3!0!1!}$

$(x^2)^2\cdot x^2\cdot(-1)^0$ の係数は $\dfrac{4!}{2!2!0!}$

であるので，これらの項だけを取り出して計算すれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{4!}{3!0!1!}(x^2)^3\cdot x^0\cdot(-1)^1 + \frac{4!}{2!2!0!}(x^2)^2\cdot x^2\cdot(-1)^0 \\
&= 4\cdot x^6\cdot 1\cdot(-1) + 6\cdot x^4\cdot x^2\cdot 1 \\
&= -4x^6 + 6x^6 = 2x^6
\end{aligned}
$$

となるので，x^6 の係数は $\mathbf{2}$ である．

[*8] 『同じものを含むときの順列』を用いた．${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2$ でも求められる．

F. 2項係数の和

2項定理において，a や b に具体的な値を入れると，様々な等式が得られる．

【発展 65：2項係数の和】

2項定理を用いて次の等式を証明せよ．

① $2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$

② $0 = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$

③ $(-1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 - 2{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2{}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-2)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-2)^n{}_n\mathrm{C}_n$

【解答】 2項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n$$

において

① $a = b = 1$ とおくと

(左辺) $= (1+1)^n = 2^n$

(右辺) $= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$

となり，確かに成立する． ■

② $a = 1$，$b = -1$ とおくと

(左辺) $= \{1+(-1)\}^n = 0^n = 0$

(右辺) $= {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$

となり，確かに成立する． ■

③ $a = 1$，$b = -2$ とおくと

(左辺) $= (-1)^n$

(右辺) $= {}_n\mathrm{C}_0 - 2{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2{}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-2)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-2)^n{}_n\mathrm{C}_n$

となり，確かに成立する． ■

上の等式から，たとえば，次のような等式が成り立つ（$n = 5$ とおいた）．

① $2^5 = {}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4 + {}_5\mathrm{C}_5$

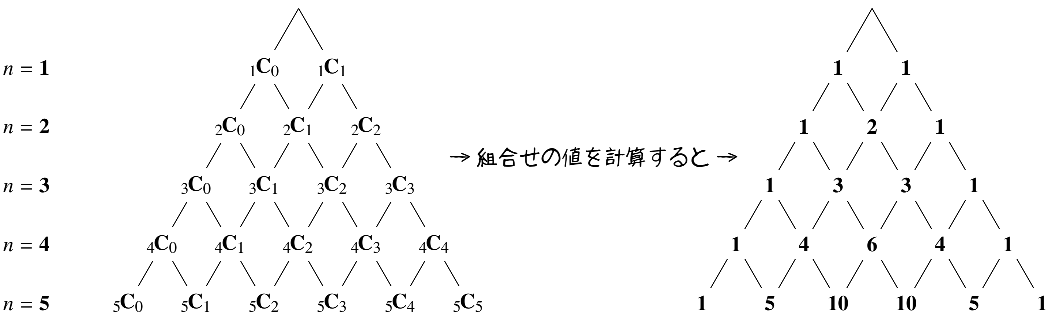
② $0 = {}_5\mathrm{C}_0 - {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 - {}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4 - {}_5\mathrm{C}_5$

③ $-1 = {}_5\mathrm{C}_0 - 2{}_5\mathrm{C}_1 + 4{}_5\mathrm{C}_2 - 8{}_5\mathrm{C}_3 + 16{}_5\mathrm{C}_4 - 32{}_5\mathrm{C}_5$

2. パスカルの三角形と $_n\mathrm{C}_r$ の性質

A. パスカルの三角形とは

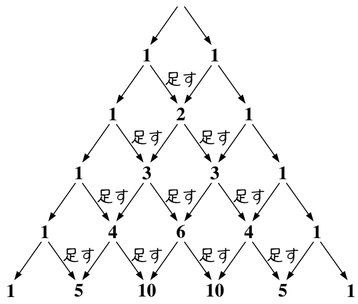
下図のように，2 項係数 $_n\mathrm{C}_0$，$_n\mathrm{C}_1$，$_n\mathrm{C}_2$，$\cdots$，$_n\mathrm{C}_n$ の値を，上から順に $n = 1, 2, 3, \cdots$ の場合について三角形の形に並べたものを，**パスカルの三角形** (Pascal's triangle) という．



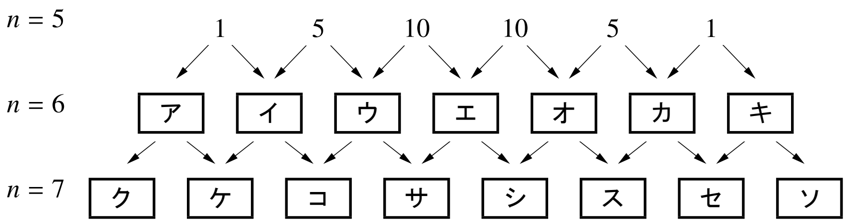
パスカルの三角形は次のような特徴を持つ．

i) 各行の左右両端の数字は 1 である．
ii) 各行は左右対称である．
iii) 左右両端以外の数字は，その左上の数と右上の数を足したものとなる．

このことは，パスカルの三角形のすべてにおいて成り立つ．



【例題 66】 パスカルの三角形から $n = 5, 6, 7$ のみを記した下の図式のうち，$\boxed{}$ にあてはまる値を答えよ．



【解答】 ア : **1**，イ : **6**，ウ : **15**，エ : **20**，オ : **15**，カ : **6**，キ : **1**
ク : **1**，ケ : **7**，コ : **21**，サ : **35**，シ : **35**，ス : **21**，セ : **7**，ソ : **1**

B. ${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

パスカルの三角形の iii) の性質が成り立つ理由を考えるため，例として，$n = 4$ のときの 2 項係数と，$n = 5$ のときの 2 項係数の関係を見てみよう.

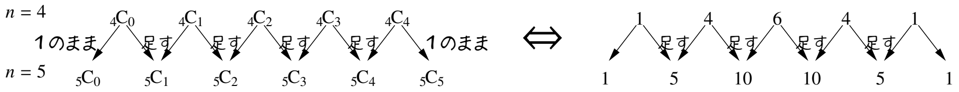
$(a+b)^5$ は 2 項定理によって

$$(a+b)^5 = {}_5\mathrm{C}_0a^5 + {}_5\mathrm{C}_1a^4b + {}_5\mathrm{C}_2a^3b^2 + {}_5\mathrm{C}_3a^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5b^5$$

となるが，一方で，$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4$ であるので

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= (a+b)\left({}_4\mathrm{C}_0a^4 + {}_4\mathrm{C}_1a^3b + {}_4\mathrm{C}_2a^2b^2 + {}_4\mathrm{C}_3ab^3 + {}_4\mathrm{C}_4b^4\right)\\ &= {}_4\mathrm{C}_0a^5 + {}_4\mathrm{C}_1a^4b + {}_4\mathrm{C}_2a^3b^2 + {}_4\mathrm{C}_3a^2b^3 + {}_4\mathrm{C}_4ab^4\\ &\qquad + {}_4\mathrm{C}_0a^4b + {}_4\mathrm{C}_1a^3b^2 + {}_4\mathrm{C}_2a^2b^3 + {}_4\mathrm{C}_3ab^4 + {}_4\mathrm{C}_4b^5\\ &= {}_4\mathrm{C}_0a^5 + \underbrace{({}_4\mathrm{C}_0 + {}_4\mathrm{C}_1)}_{{}_5\mathrm{C}_1\text{ に等しい}}a^4b + \underbrace{({}_4\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_2)}_{{}_5\mathrm{C}_2\text{ に等しい}}a^3b^2 + \underbrace{({}_4\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_3)}_{{}_5\mathrm{C}_3\text{ に等しい}}a^2b^3 + \underbrace{({}_4\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_4)}_{{}_5\mathrm{C}_4\text{ に等しい}}ab^4 + {}_4\mathrm{C}_4b^5\end{aligned}$$

このことから，パスカルの三角形の $n = 4, 5$ の部分について以下のことが成り立つ.



パスカルの三角形

パスカルの三角形には次のような特徴があり，これは ${}_n\mathrm{C}_r$ の性質に置き換えることもできる.

i) 各行の左右両端の数字は 1 である．つまり，${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$ である.

ii) 各行は左右対称である．つまり，${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ である.

iii) 左右両端以外の数字は，その左上の数と右上の数を足したものとなる．つまり，${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ である.

【練習 67：パスカルの三角形】

次の $\boxed{}$ にあてはまる値を答えよ.

(1) ${}_6\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_{\boxed{ア}} + {}_5\mathrm{C}_{\boxed{イ}}$　(2) ${}_7\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_{\boxed{ウ}} + {}_6\mathrm{C}_{\boxed{エ}}$　(3) ${}_{\boxed{オ}}\mathrm{C}_{\boxed{カ}} = {}_8\mathrm{C}_3 + {}_8\mathrm{C}_4$

【解答】

(1) ア : **2**，イ : **3**（順不同）　(2) ウ : **3**，エ : **4**（順不同）

(3) オ : **9**，カ : **4**

索引