

# 13th-note 数学 I

(2013 年度卒業生まで)

この教材を使う際は

- 表示：著作者のクレジット「13th-note」を表示してください。
- 非営利：この教材を営利目的で利用してはいけません。ただし、学校・塾・家庭教師の授業で利用するための無償配布は可能です。
- 継承：この教材を改変した結果生じた教材には、必ず、著作者のクレジット「13th-note」を表示してください。
- クレジットを外して使用したいという方はご一報 ([kutomi@collegium.or.jp](mailto:kutomi@collegium.or.jp)) ください。

この教材は FTEXT 数学 I ([www.ftext.org](http://www.ftext.org)) の改訂から始まって作られた著作物です。



# 目次

第2章	方程式・不等式と関数	51
§2.1	1次不等式	52
§1.	不等式の性質	52
§2.	1次不等式とその解法	54
§2.2	2次方程式の基礎	61
§2.3	関数	69
§1.	関数とは	69
§2.	グラフによる関数の図示	71
§3.	方程式・不等式の解と関数のグラフ	75
§4.	絶対値を含む1次関数・方程式・不等式	78
§2.4	2次関数とそのグラフ	82
§1.	2次関数のグラフ	82
§2.	2次関数の決定	92
§3.	2次関数の対称移動・平行移動	97
§4.	2次関数の最大・最小	101
§5.	2次関数の応用問題	108
§6.	放物線と $x$ 軸の位置関係 — 判別式 $D$	112
§2.5	2次方程式と2次関数	115
§1.	2次方程式の判別式 $D$ と2次関数の判別式 $D$ を同一視する	115
§2.	2次方程式・2次関数の応用	119
§2.6	2次不等式と2次関数	122
§1.	2次不等式の解法の基礎	122
§2.	2次関数・2次方程式・2次不等式の応用問題	131
§3.	絶対値を含む2次関数・方程式・不等式	137
§2.7	第2章の補足	142
§1.	一般のグラフの移動について	142
§2.	頂点の移動を用いて2次関数の移動を考える	143

索引

## 第2章 方程式・不等式と関数



第2章では、方程式・不等式と関数（のグラフ）の関係について学ぶ。

はじめに1次不等式・2次方程式を学ぶが、後にこれらは、1次関数・2次関数のグラフと密接な関係があることが分かる。この関係をつかむことは、高校数学の最も大事なポイントの1つになっている。

最終的に、2次不等式を解くときには、簡単な計算問題であっても、2次関数を用いて解くことになる。

方程式・不等式からグラフへ、グラフから方程式・不等式へ。自由に行き来するまでに時間がかかるかもしれないが、じっくり考えて理解しよう。

## 2.1 1次不等式

2つの数が等しいことは等号(=)を使った等式で表されるように、2つの数の間の大小は、不等号(> や  $\leq$  など)を使って表される。

### 1. 不等式の性質

#### A. 不等号とその読み方

2つの数の大小関係は、**不等号** (a sign of inequality) を用いて表される。たとえば、「2より3の方が大きい」ことは  $2 < 3$  と表される。

	読み方*1	意味
$a < b$	$a$ は $b$ より小さい ( $a$ は $b$ 未満である)	
$a \leq b$	$a$ は $b$ 以下である	$a < b$ または $a = b$
$a > b$	$a$ は $b$ より大きい	
$a \geq b$	$a$ は $b$ 以上である	$a > b$ または $a = b$

「 $\sim$ 以 $\circ$ 」は等号ありの不等号、「 $\sim$ より $\circ\circ\circ$ 」「 $\sim$ 未満」は等号なしの不等号と理解できる。

#### B. 不等式とは何か

たとえば「ある数  $a$  を2倍してから3を加えた数は、4より大きい」ことは

$$2a + 3 > 4 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

と不等号を用いて表すことができる。①のように、2つの式の大小関係を不等号を使って表したものを**不等式** (inequality) という。

等式の場合と同じように、不等号の左側にある式を**左辺** (left side)、右側にある式を**右辺** (right side)、左辺と右辺をあわせて**両辺** (both sides) という。①の左辺は  $2a + 3$ 、右辺は4である。

**【例題1】** 次の文章を不等式で表せ。また、その左辺、右辺を答えよ。

- 「 $a$  と3の和は、 $b$  の2倍以上」
- 「 $x$  の2倍から3引いた数は、 $x$  の(-2)倍より小さい」

#### 【解答】

- |  |                             |  |
|--|-----------------------------|--|
| <p>1. 「<math>\underbrace{a \text{ と } 3 \text{ の和}}_{a+3}</math> は、<math>\underbrace{b \text{ の } 2 \text{ 倍}}_{2b}</math> 以上」</p> <p>左辺は <math>a + 3</math>、右辺は <math>2b</math> である。</p>  | $\rightarrow a + 3 \geq 2b$ | $\blacktriangleleft$ 「 $A$ は $B$ 以上」は $A \geq B$ |
| <p>2. 「<math>\underbrace{x \text{ の } 2 \text{ 倍}}_{2x}</math> から3引いた数は、<math>\underbrace{x \text{ の } (-2) \text{ 倍}}_{-2x}</math> より小さい」</p> <p><math>2x - 3</math></p> <p>左辺は <math>2x - 3</math>、右辺は <math>-2x</math> である。</p> | $\rightarrow 2x - 3 < -2x$  | $\blacktriangleleft$ 「 $A$ は $B$ より小さい」は $A < B$ |

\*1 次のような読み方もよく用いられる。

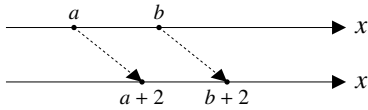
$a < b$  : 「 $a$  小なり  $b$ 」,  $a \leq b$  : 「 $a$  小なりイコール  $b$ 」,  $a > b$  : 「 $a$  大なり  $b$ 」,  $a \geq b$  : 「 $a$  大なりイコール  $b$ 」

### C. 不等式の性質

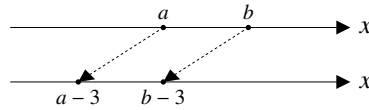
数直線上の点の移動をイメージしながら、不等式の性質を考えよう。

i) 両辺に同じ数を足す(引く)場合 ⇒不等号の向きは変わらない(“<”は“<”のまま)

$a < b$  のとき,  $a + 2 < b + 2$  である.

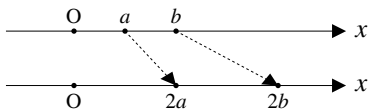


$a < b$  のとき,  $a - 3 < b - 3$  である.

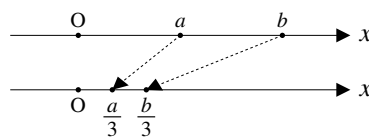


ii) 両辺に正の数(掛ける)の場合 ⇒不等号の向きは変わらない(“<”は“<”のまま)

$a < b$  のとき,  $2a < 2b$  である.

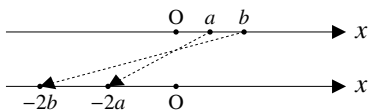


$a < b$  のとき,  $\frac{a}{3} < \frac{b}{3}$  である.

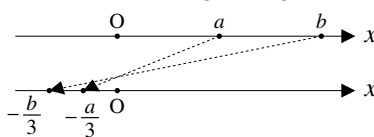


iii) 両辺に負の数(掛ける)の場合 ⇒不等号の向きが反対になる(“<”は“>”に変わる)

$a < b$  のとき,  $-2a > -2b$  である.



$a < b$  のとき,  $-\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$  である.



#### 【例題 2】

1.  $a > b$  のとき, 次の  に入る不等号を書け.

- i.  $a + 4$    $b + 4$     ii.  $a - 2$    $b - 2$     iii.  $a - 3$    $b - 3$     iv.  $3a$    $3b$   
 v.  $2a$    $2b$     vi.  $-3a$    $-3b$     vii.  $4a$    $4b$     viii.  $-a$    $-b$

2. i. ~v. のそれぞれについて,  $a > b$ ,  $a < b$ ,  $a \geq b$ ,  $a \leq b$  のいずれが成り立つか答えよ.

- i.  $5a < 5b$     ii.  $-2a < -2b$     iii.  $a - 4 < b - 4$     iv.  $\frac{a}{4} \leq \frac{b}{4}$     v.  $-\frac{a}{4} \leq -\frac{b}{4}$

#### 【解答】

1. i. >    ii. >    iii. >    iv. >    v. >    vi. <    vii. >    viii. <  
 2. i.  $a < b$     ii.  $a > b$     iii.  $a < b$     iv.  $a \leq b$     v.  $a \geq b$

#### 不等式の性質

- i) すべての実数  $c$  で  $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$  ,  $a - c < b - c$   
 ii)  $0 < c$  のとき  $a < b \Leftrightarrow ac < bc$  ,  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$   
 iii)  $c < 0$  のとき  $a < b \Leftrightarrow ac > bc$  ,  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$  ←逆符号!



これらの性質により, p.57 で学ぶように, 不等式も方程式と同じようにして解くことができる。

【練習3：不等式の性質】

以下の□にあてはまる適当な数字を答えよ.

(1)  $x + 3 < 5$

$\Leftrightarrow x + 3 - 3 < 5 - \square{\text{ア}}$

$\Leftrightarrow x < \square{\text{イ}}$

(2)  $2x < 8$

$\Leftrightarrow 2x \times \frac{1}{2} < 8 \times \square{\text{ウ}}$

$\Leftrightarrow x < \square{\text{エ}}$

(3)  $-3x \geq 15$

$\Leftrightarrow -3x \times \left(-\frac{1}{3}\right) \leq 15 \times \square{\text{オ}}$

$\Leftrightarrow x \leq \square{\text{カ}}$

【解答】

(1) ア: 3, イ: 2

(2) ウ:  $\frac{1}{2}$ , エ: 4

(3) オ:  $-\frac{1}{3}$ , カ: -5

◀ 負の数を両辺にかけると、不等号が逆向きになる。

2. 1次不等式とその解法

A. 1次不等式とは何か

左辺, 右辺とも ( $x$  について) 次数が 1 次以下である不等式を, ( $x$  についての) **1 次不等式** (linear inequality) という. たとえば, 次の式はすべて 1 次不等式である.

$2x + 3 > 5x - 3, \quad -x - 5 \geq 2x + 4, \quad 2x - 3 < 7$

( $x$  についての) 不等式の**解** (solution) とは, 不等式を満たす  $x$  の値のことをいう. たとえば, いろいろな  $x$  において, 不等式

$2x + 3 > 5x - 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$

を満たすかどうか調べてみよう.  $x = -2$  の時を調べると

(左辺)  $= 2 \times (-2) + 3 = -1$

(右辺)  $= 5 \times (-2) - 3 = -13$

となり, 左辺の方が大きい. つまり,  $x = -2$  は解である.

このことを繰り返せば, 右上の表を作る事ができ, ①の解は無数にあることが分かる.

$x$	左辺	右辺	
-2	-1	-13	○
-1	1	-8	○
0	3	-3	○
1	5	2	○
2	7	7	×
3	9	12	×
4	11	17	×

【例題4】 不等式  $2x - 1 < x + 2$  について, 次の問いに答えよ.

- $x = -2$  のとき, 左辺の値, 右辺の値をそれぞれ求めよ. また,  $x = -2$  は解になるか.
- $x = 3$  のとき, 左辺の値, 右辺の値をそれぞれ求めよ. また,  $x = 3$  は解になるか.
- $x = 4$  のとき, 左辺の値, 右辺の値をそれぞれ求めよ. また,  $x = 4$  は解になるか.

【解答】

1. (左辺)  $= -5$ , (右辺)  $= 0$ , (右辺) の方が大きいので解になる.

2. (左辺)  $= 5$ , (右辺)  $= 5$ , 左辺と右辺が等しいので解にならない.

3. (左辺)  $= 7$ , (右辺)  $= 6$ , (右辺) の方が小さいので解にならない.

◀ 左辺が右辺より小さくないと, 解にならない.

## B. 不等式の解法と解の図示

不等式を解く (solve) とは「不等式のすべての解を求めること」を意味する。

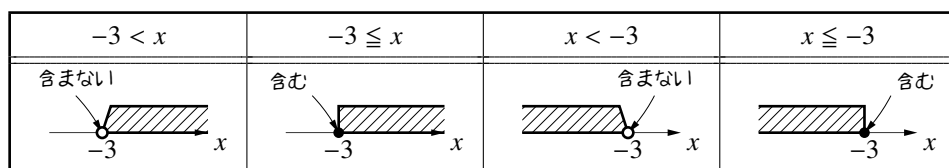
p.55 で学んだ性質から、不等式も、方程式と同じように<sup>いこう</sup>移項 (transposition) を用いて解くことができる。たとえば、不等式①は次のように解くことができる。

$$\begin{array}{ll}
 2x + 3 > 5x - 3 \\
 \Leftrightarrow 2x - 5x > -3 - 3 & \leftarrow \text{移項した} \\
 \Leftrightarrow -3x > -6 \\
 \Leftrightarrow x < 2 & \leftarrow -3 \text{ で割った (符号の向きが逆になる!!)}
 \end{array}$$

こうして、「 $x$  は 2 より小さければ解になる」ことが求められる。このことは、数直線を用いて右図のように表すことができる。



一般に、不等式の解は以下のように図示する。



不等号  $<$ ,  $>$  のときは、境目を「白丸」「斜め線」で表す。

一方、不等号  $\leq$ ,  $\geq$  のときは、境目を「黒丸」「垂直線」で表す。

**【例題 5】** それぞれの図が表す、不等式の解を答えなさい。



**【解答】**

1.  $x \leq 3$       2.  $x < 4$       3.  $1 < x$       4.  $-2 \leq x$

解の図示は、次で学ぶ「連立不等式」においてきわめて重要になる。

**【例題 6】** 次の 1 次不等式を解け。また、その解を数直線上に表せ。

1.  $x - 8 < 5$       2.  $4x - 8 > 2x$       3.  $5 - 3x \leq 7 - 10x$

**【解答】** 解を表す数直線はすべて、右欄外に書いた。

1.  $x - 8 < 5 \Leftrightarrow x < 13$

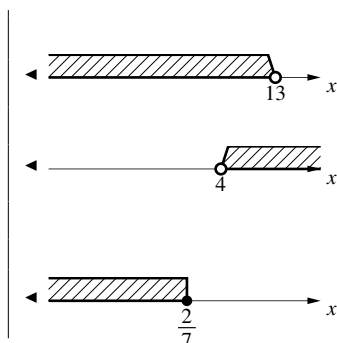
2.  $4x - 8 > 2x$

$\Leftrightarrow 2x > 8 \quad \therefore x > 4$

3.  $5 - 3x \leq 7 - 10x$

$\Leftrightarrow 5x + 10x \leq 7 - 5$

$\Leftrightarrow 7x \leq 2 \quad \therefore x \leq \frac{2}{7}$



【練習 7 : 1 次不等式】

次の 1 次不等式を解け. また, その解を数直線上に表せ.

(1)  $-8x \leq 32$

(2)  $2(x-2) > 3(4-x) + 4$

(3)  $3 - \frac{5x-1}{3} > 2x+1$

【解答】 解を表す数直線はすべて, 右欄外に書いた.

(1)  $-8x \leq 32$

$\Leftrightarrow x \geq -4$

(2)  $2(x-2) > 3(4-x) + 4$

$\Leftrightarrow 2x-4 > 12-3x+4$

$\Leftrightarrow 5x > 20 \quad \therefore x > 4$

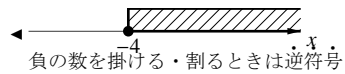
(3)  $3 - \frac{5x-1}{3} > 2x+1$

$\Leftrightarrow 9 - (5x-1) > 6x+3$

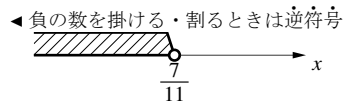
$\Leftrightarrow 9-5x+1 > 6x+3$

$\Leftrightarrow -11x > -7$

$\Leftrightarrow x < \frac{7}{11}$



◀ 両辺を 3 倍した



【練習 8 : 不等式の解】

(1) 不等式  $2x-3 < 7$  において,  $x = -3$  は解になるか,  $x = 5$  は解になるか.

(2) 不等式  $-x-5 \geq 2x+4$  において,  $x = -3$  は解になるか,  $x = 5$  は解になるか.

【解答】

(1)  $x = 5$  のとき, 左辺, 右辺とも 7 になり, 解ではない.

$x = -3$  は解になる.

(2)  $x = -3$  のとき, 左辺, 右辺とも  $-2$  になり, 解になる.

$x = 5$  は解ではない.

◀ 「左辺が右辺より小さくなる  $x$  の値」が解なので, 両辺が等しいときは解ではない.

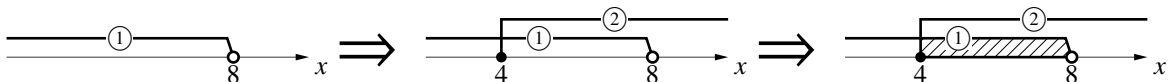
◀ 「左辺が右辺以上になる  $x$  の値」が解なので, 両辺が等しくても解である.

C. 連立不等式

連立不等式 (simultaneous inequalities) とは, 2 つ以上の満たすべき不等式の集まりを指す. 連立不等式を解くとは, 全ての不等式を同時に満たす  $x$  の範囲を求めることである.

たとえば, 連立不等式  $\begin{cases} x-3 < 5 & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ 3x+1 \leq 4x-3 & \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$  を解こう.

①の解は  $x < 8$  であり, ②の解は  $4 \leq x$  になる. これらをまとめて図示しよう.



$x < 8$  を図示した

$4 \leq x$  も書き込んだ

同時に満たす部分を斜線で図示

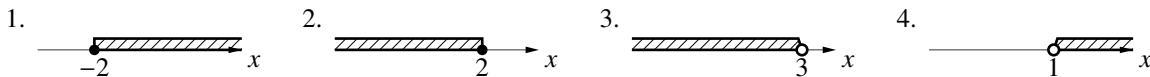
(①と②の横線2本が重なる部分)

こうして, 連立不等式の解は  $4 \leq x < 8$  と分かる.

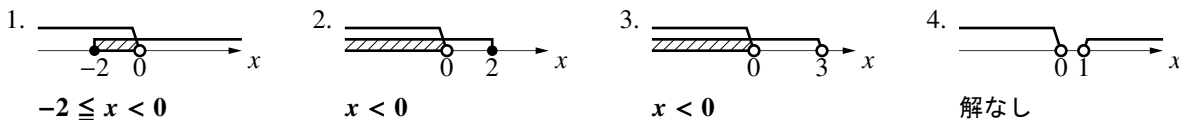


2つの不等式を同時に満たす範囲がない場合は「解なし」と答える。

**【例題 9】** 以下の図に  $x < 0$  を書き込み、同時に満たす  $x$  の範囲を答えなさい。同時に満たす  $x$  の範囲がなければ、「解なし」と答えなさい。



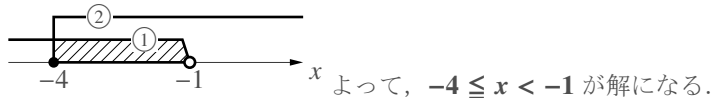
**【解答】**



**【例題 10】** 連立不等式  $\begin{cases} 4x - 3 < 2x - 5 & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ 3x + 1 \geq 2x - 3 & \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$  を解け。

**【解答】**  $\textcircled{1} \Leftrightarrow 2x < -2 \quad \textcircled{2} \Leftrightarrow x \geq -4$   
 $\Leftrightarrow x < -1$

2つの解を同じ数直線上に図示すれば、次のようになる。



連立不等式を解くときには必ず、解を数直線に書き表すこと。

### D. 3つ以上の式による不等式

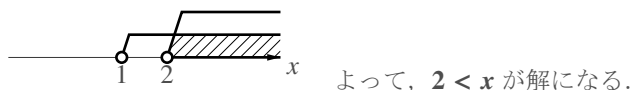
たとえば、 $x$  が不等式  $-2x + 6 < x < 4x - 3 \dots\dots\dots \textcircled{3}$  を満たすには、 $-2x + 6 < x$  と  $x < 4x - 3$  を同時に満たせばよい。つまり、 $\textcircled{3}$  を解くには連立不等式  $\begin{cases} -2x + 6 < x \\ x < 4x - 3 \end{cases}$  を解けばよい。

**【例題 11】** 不等式  $-2x + 6 < x < 4x - 3$  を解け。

**【解答】**  $-2x + 6 < x$  と  $x < 4x - 3$  をそれぞれ解くと

$$\begin{aligned} -2x + 6 < x & \quad x < 4x - 3 \\ \Leftrightarrow 6 < 3x & \quad \Leftrightarrow -3x < -3 \\ \Leftrightarrow 2 < x & \quad \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

2つの解を同じ数直線上に図示すれば、次のようになる。



【練習 12 : 連立不等式】

次の連立不等式を解け.

$$(1) \begin{cases} \frac{11}{4}x - \frac{3}{2} > 2x - 5 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \leq -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 0.25x - 0.18 \geq 0.6 - 0.14x \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \leq -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

【解答】

(1) まず,  $\frac{11}{4}x - \frac{3}{2} > 2x - 5$  を解く.

$$\Leftrightarrow 11x - 6 > 8x - 20$$

$$\Leftrightarrow 3x > -14$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{14}{3} \quad \dots\dots\dots ①$$

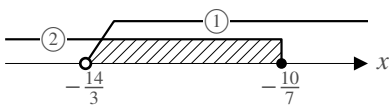
次に,  $\frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \leq -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$  を解く.

$$\Leftrightarrow 4x + 1 \leq -3x - 9$$

$$\Leftrightarrow 7x \leq -10$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{10}{7} \quad \dots\dots\dots ②$$

これらを図示して



となるので, 解は  $-\frac{14}{3} < x \leq -\frac{10}{7}$  である.

(2) まず,  $0.25x - 0.18 \geq 0.6 - 0.14x$  を解く.

$$\Leftrightarrow 25x - 18 \geq 60 - 14x$$

$$\Leftrightarrow 39x \geq 78$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \quad \dots\dots\dots ③$$

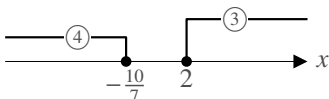
次に,  $\frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \leq -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$  を解く.

$$\Leftrightarrow 4x + 1 \leq -3x - 9$$

$$\Leftrightarrow 7x \leq -10$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{10}{7} \quad \dots\dots\dots ④$$

これらを図示すると



となり, 共通解は存在しないので, 答えは解なし.

◀ 両辺を 4 倍した

◀ 両辺を 6 倍した

◀ 両辺を 100 倍した

◀ 両辺を 6 倍した

E. ⑧⑨ 1次不等式の応用

【練習 13 : 1次不等式の応用】

- (1) A 地点から 15 km 離れた B 地点まで歩いた。はじめは急ぎ足で毎時 5 km, 途中から疲れたので毎時 3 km の速さで歩いた。所要時間が 4 時間以内のとき, 急ぎ足で何 km 以上歩いたか求めよ。
- (2) 5% の食塩水 800 g と 8% の食塩水を何 g か混ぜて, 6% 以上の食塩水を作りたい。8% の食塩水を何 g 以上混ぜればよいか求めよ。

【解答】

(1) 急ぎ足で歩いた距離を  $x$  km とする。

疲れて歩いた距離は  $(15 - x)$  km となり, 歩くのにかかる時間はそれぞれ,  $\frac{x}{5}$  時間,  $\frac{15 - x}{3}$  時間となる。

全体の所要時間は 4 時間以内であるから

$$\frac{x}{5} + \frac{15 - x}{3} \leq 4 \quad \dots\dots\dots ①$$

を満たす  $x$  を求めればよい。

$$① \Leftrightarrow 3x + 5(15 - x) \leq 60$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq -15$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{15}{2} = 7.5$$

よって, 急ぎ足では 7.5 km 以上歩いた。

(2) 8% の食塩水を  $x$  g 混ぜるとして,  $x$  について解けばよい。5% の食塩水 800 g の中には  $(\frac{5}{100} \times 800)$  g の食塩が溶けている。また, 混ぜる 8% の食塩水  $x$  g の中には,  $(\frac{8}{100} \times x)$  g の食塩が溶けている。

これらを混ぜて, 濃度が 6% 以上になるから

$$\left(\frac{5}{100} \times 800 + \frac{8}{100} \times x\right) \div (800 + x) \geq \frac{6}{100} \quad \dots\dots\dots ②$$

を満たす  $x$  を求めればよい。

$$② \Leftrightarrow \frac{5}{100} \times 800 + \frac{8}{100} \times x \geq \frac{6}{100} \times (800 + x)$$

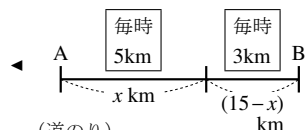
$$\Leftrightarrow 5 \times 800 + 8 \times x \geq 6 \times (800 + x)$$

$$\Leftrightarrow 4000 + 8x \geq 4800 + 6x$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 800$$

$$\Leftrightarrow x \geq 400$$

よって, 8% の食塩水は 400 g 以上混ぜればよい。



$$\left(\frac{\text{道のり}}{\text{速度}}\right) = (\text{時間})$$

◀ 両辺に 15 を掛けた

◀ 負の数を掛ける・割るときは逆符号

	食塩水の量 (g)	食塩の量 (g)
5%	800	$\frac{5}{100} \times 800$
8%	$x$	$\frac{8}{100}x$
	$800 + x$	$\frac{5}{100} \times 800 + \frac{8}{100}x$

$$\left(\frac{\text{食塩の量}}{\text{食塩水の量}}\right) = \frac{(\text{濃度})}{100}$$

◀ 両辺に  $800 + x$  を掛けた

◀ 両辺に 100 を掛けた

## F. 取り得る範囲を求める

### 【練習 14：取り得る範囲～その 1～】

実数  $x$  が  $-2 < x < 4$  であるとき，以下の値の取り得る範囲を答えよ．

- (1)  $x+3$                       (2)  $x-2$                       (3)  $2x$                       (4)  $2x-5$                       (5)  $-2x$

#### 【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad & -2 < x < 4 \\ \Leftrightarrow & -2+3 < x+3 < 4+3 \\ \Leftrightarrow & 1 < x+3 < 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & -2 < x < 4 \\ \Leftrightarrow & -2-2 < x-2 < 4-2 \\ \Leftrightarrow & -4 < x-2 < 2 \end{aligned}$$

◀ 同じ数を足しても引いても，大小関係は変わらない．

$$\begin{aligned} (3) \quad & -2 < x < 4 \\ \Leftrightarrow & 2 \times (-2) < 2x < 2 \times 4 \\ \Leftrightarrow & -4 < 2x < 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & -2 < x < 4 \\ \Leftrightarrow & -4 < 2x < 8 \\ \Leftrightarrow & -4-5 < 2x-5 < 8-5 \\ \Leftrightarrow & -9 < 2x-5 < 3 \end{aligned}$$

◀ 正の同じ数を掛けても，大小関係は変わらない．

$$\begin{aligned} (5) \quad & -2 < x < 4 \\ \Leftrightarrow & -2 \times (-2) > -2x > -2 \times 4 \\ \Leftrightarrow & 4 > -2x > -8 \end{aligned}$$

$$\therefore -8 < -2x < 4$$

◀ 負の同じ数を掛けると，大小関係は逆になる．

### 【発展 15：取り得る範囲～その 2～】

実数  $a$  は小数第 1 位を四捨五入して 4 になり，実数  $b$  は小数第 1 位を四捨五入して 6 になるという．

- ①  $a, b$  の取り得る範囲を不等式で答えよ．  
 ②  $3a+b$  の取り得る範囲を不等式で答えよ．  
 ③  $a-b$  の取り得る範囲を不等式で答えよ．

#### 【解答】

$$\textcircled{1} \quad 3.5 \leq a < 4.5, 5.5 \leq b < 6.5$$

$$\textcircled{2} \quad 3.5 \leq a < 4.5 \text{ より } 10.5 \leq 3a < 13.5$$

これと  $5.5 \leq b < 6.5$  より

$$10.5 \leq 3a < 13.5$$

$$+) \quad 5.5 \leq b < 6.5$$

$$\hline 16 \leq 3a+b < 20 \qquad \therefore 16 \leq 3a+b < 20$$

◀ すべての辺に 3 を掛けた．

$$\textcircled{3} \quad 5.5 \leq b < 6.5 \text{ より } -6.5 < -b \leq -5.5 \text{ になるので}$$

$$3.5 \leq a < 4.5$$

$$+) \quad -6.5 < -b \leq -5.5$$

$$\hline -3 < a+(-b) < -1 \qquad \therefore -3 < a-b < -1$$



## 2.2 2次方程式の基礎



ここでは、2次方程式の解法の基礎を学ぶ。

### A. 2次方程式とは

( $x$  についての) 2次方程式 (quadratic equation) とは、 $a (\neq 0)$ ,  $b$ ,  $c$  を定数として

$$ax^2 + bx + c = 0$$

という形で表せる方程式のことである。与えられた2次方程式を満たす  $x$  の値をすべて求めることを「2次方程式を解く」といい、その  $x$  の値をその「2次方程式の解」とよぶ。

### B. 因数分解を利用した解法

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の左辺が因数分解できる場合には、中学までで学んだように、因数分解を用いて解くのが一番よい。たとえば、 $2x^2 - x - 3 = 0$  を解くと、次のようになる。

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^*2x - 3 = 0 \quad \text{または} \quad x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{2}, -1 {}^*3$$

【例題 16】 2次方程式  $3x^2 + 2x - 8 = 0$  の左辺は因数分解できて

$$(x + \boxed{\text{ア}})(\boxed{\text{イ}}x - \boxed{\text{ウ}}) = 0$$

と変形できる。ここから  $\boxed{\text{エ}} = 0$  または  $\boxed{\text{オ}} = 0$  が成り立つ。

この2つの1次方程式をそれぞれ解いて  $x = \boxed{\text{カ}}$ ,  $x = \boxed{\text{キ}}$ 。

【解答】 ア：2，イ：3，ウ：4，

エ： $x + 2$ ，オ： $3x - 4$ ，カ： $-2$ ，キ： $\frac{4}{3}$

<sup>\*2</sup> ここで用いられる性質は、実数  $A$ ,  $B$  についての積の性質

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ または } B = 0 \iff A = 0 \text{ か } B = 0 \text{ の一方でも成り立てばよい (両方でもよい)}$$

である。通常の会話における「または」の意味は、「どちらかが正しく、残りは間違い」の意味であることが多い。しかし、数学における「または」は「少なくともどちらかが正しい (両方とも正しい場合を含む)」の意味で使われる。「または」の扱いについては、数学 A(p.2) において詳しく学ぶ。

<sup>\*3</sup> 2つの解の間にあるカンマ「,」は、「または」の代わりに使われている。

【練習 17 : 2 次方程式を解く (因数分解の利用)】

次の 2 次方程式を解け.

(1)  $x^2 - 2x - 15 = 0$

(2)  $x^2 - 8x + 16 = 0$

(3)  $12x^2 - 17x + 6 = 0$

(4)  $3x^2 + 2x - 3 = -2x + 1$

(5)  $\frac{1}{9}x^2 + x + 2 = 0$

【解答】

(1) 左辺を因数分解して  $(x+3)(x-5) = 0$  なので,  $x = -3, 5$ .

(2) 左辺を因数分解して  $(x-4)^2 = 0$  なので,  $x = 4$ .

(3) 左辺を因数分解して  $(4x-3)(3x-2) = 0$  なので,  $x = \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ .

(4) 式を整理して  $3x^2 + 4x - 4 = 0$  となり, この左辺を因数分解して  $(x+2)(3x-2) = 0$  なので,  $x = -2, \frac{2}{3}$ .

(5) 両辺を 9 倍すると  $x^2 + 9x + 18 = 0$  となるので, 左辺を因数分解して  $(x+6)(x+3) = 0$  なので,  $x = -6, -3$ .

◀  $x = 4$  または  $x = 4$ , つまり  $x = 4$  のみが適する.

◀ まずは  $ax^2 + bx + c = 0$  の形に整頓する

◀ 係数が整数でないと, 因数分解はやりにくい

C.  $(x \text{ の式})^2 = (\text{定数})$  の形にする解法

2 次方程式  $x^2 + 4x - 3 = 0$  は, 左辺を因数分解できないが, 次のように解くことができる.

$$x^2 + 4x = 3$$

← 定数項を右辺に移項

$$x^2 + 4x + 4 = 3 + 4$$

← 両辺に 4 を足すと

$$(x+2)^2 = 7$$

← 左辺を 2 乗の形にできる

$$x+2 = \pm\sqrt{7}$$

← つまり,  $x+2 = \sqrt{7}$  または  $x+2 = -\sqrt{7}$

$$x = -2 \pm \sqrt{7}$$

← つまり,  $x = -2 + \sqrt{7}$  または  $x = -2 - \sqrt{7}$

【例題 18】 上と同じようにして  $x^2 + 6x - 13 = 0$  を解こう.  には

$$x^2 + 6x = \text{ア}$$

← 定数項を右辺に移項

$$x^2 + 6x + \text{イ} = \text{ア} + \text{イ}$$

← 両辺に  を足す

$$(x + \text{ウ})^2 = \text{エ}$$

← 左辺が 2 乗の形になった

$$x + \text{ウ} = \pm\sqrt{\text{エ}}$$

$$x = \text{オ} \pm \sqrt{\text{エ}}$$

これは,  $x$  の解が ,  の 2 つあることを意味している.

【解答】 ア : 13, イ : 9, ウ : 3, エ : 22, オ : -3, カ :  $-3 + \sqrt{22}$ , キ :  $-3 - \sqrt{22}$

## D. 2次方程式の解の公式

$x^2$  の係数が 1 でなくても、次のようにして  $(x \text{ の式})^2 = (\text{定数})$  の形にして解くことができる。

### 具体的な 2 次方程式

$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$3x^2 + 2x = 8$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{8}{3}$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$x + \frac{1}{3} = \pm \sqrt{\frac{25}{9}} = \pm \frac{5}{3}$$

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}, -2$$

### 一般の 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\leftarrow \boxed{\text{定数項を移項}} \rightarrow ax^2 + bx = -c$$

$$\leftarrow \boxed{x^2 \text{ の係数を 1 にする}} \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\leftarrow \boxed{x \text{ の係数の半分の 2 乗を両辺に足す}} \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\leftarrow \boxed{(x + \bigcirc)^2 \text{ を作る}} \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\leftarrow \boxed{\text{平方根を求める (ただし, } b^2 - 4ac \text{ の値は 0 以上とする)}} \rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\leftarrow \boxed{x \text{ について解く}} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\left( \text{つまり, } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

①より下の変形は、右辺にある「 $b^2 - 4ac$ 」の値が 0 以上でないといけな

### 2 次方程式の解の公式

2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  となる。この式を 2 次方程式の解の公式 (formula of solution) という。ただし、この解は  $b^2 - 4ac \geq 0$  のときに限る。  
 $b^2 - 4ac < 0$  のときは  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  が意味をもたず、2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は存在しない。

### 【例題 19】

1. 2 次方程式  $2x^2 + 3x - 4 = 0$  を解こう。解の公式に  $a = \boxed{\text{ア}}$ ,  $b = \boxed{\text{イ}}$ ,  $c = \boxed{\text{ウ}}$  を代入して、

$$x = \frac{\boxed{\text{エ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

2. 2 次方程式  $x^2 - 4x + 2 = 0$  を解こう。解の公式に  $a = \boxed{\text{キ}}$ ,  $b = \boxed{\text{ク}}$ ,  $c = \boxed{\text{ケ}}$  を代入して、

$$x = \frac{\boxed{\text{コ}} \pm \boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

### 【解答】

(1) ア: 2, イ: 3, ウ: -4, 解の公式に代入して  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$  であるので、  
 エ: -3, オ: 41, カ: 4

(2) キ: 1, ク: -4, ケ: 2, 解の公式に代入して  $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$  であるので、  
 コ: 4, サ: 2, シ: 2, ス: 2,  $\frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{2})}{2}$  であるので、セ:  $2 \pm \sqrt{2}$

【練習 20 : 2 次方程式を解く (解の公式の利用)】

次の 2 次方程式を解け.

(1)  $x^2 + 7x + 2 = 0$

(2)  $x^2 + 8x - 3 = 0$

(3)  $x^2 - x - 3 = 0$

(4)  $x^2 - 4x + 5 = 0$

(5)  $4x^2 + 6x + 1 = 0$

(6)  $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 0$



解の公式は暗記して、正確に使いこなせるようにしよう.

また、 $\sqrt{\quad}$  の中が負になったとき ( $b^2 - 4ac < 0$  のとき) は、「解なし」と答えればよい.

【解答】

(1)  $x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{2}$

(2)  $x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$   
 $= \frac{-8 \pm 2\sqrt{19}}{2} = -4 \pm \sqrt{19}$

(3)  $x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

(4)  $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ , 答えは解なし.

(5)  $x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$   
 $= \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$

(6) 方程式の両辺に 6 を掛けて整理すると  $x^2 + 3x - 2 = 0$  となるので

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

◀ 「 $x$  の係数が偶数の場合の解の公式 (p.69)」を用いてもよい.

◀  $\frac{-8 \pm 2\sqrt{19}}{2} = \frac{2(-4 \pm \sqrt{19})}{2}$

◀  $b = -1$  なので  $-b = 1$  である.

◀  $\sqrt{-4}$  が意味をもたないため

◀ 「 $x$  の係数が偶数の場合の解の公式 (p.69)」を用いてもよい.

◀  $\frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{2(-3 \pm \sqrt{5})}{8}$

◀ 基本的には、分数をなくしてから解の公式を使うようにしよう.

E. 2 次方程式の解と因数分解

2 次方程式の 2 つの解法を見比べてみよう.

i) 因数分解を利用した解法

$x^2 - 3x - 18 = 0$

$(x - 6)(x + 3) = 0$  ←左辺の因数分解→

$x = 6, -3$  ←方程式の解→

ii) 解の公式を用いた解法

$x^2 - 5x - 3 = 0$

???

$x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$  ←「解の公式」で求めた

i), ii) を見比べて、 $x^2 - 5x - 3$  の因数分解を得る.

$x^2 - 3x - 18 = (x - \underbrace{6}_{\text{解の1つ}})(x - \underbrace{(-3)}_{\text{もう1つの解}})$      $x^2 - 5x - 3 = \left(x - \frac{5 + \sqrt{37}}{2}\right) \left(x - \frac{5 - \sqrt{37}}{2}\right)$   
解の1つ      もう1つの解                      解の1つ                      もう1つの解



実際、 $\left(x - \frac{5 + \sqrt{37}}{2}\right) \left(x - \frac{5 - \sqrt{37}}{2}\right)$  を展開すれば、この因数分解が正しいと分かる.



【例題 21】  $x^2 - 3x + 1$  を実数の範囲で因数分解しなさい (因数には無理数が含まれてもよい).

【解答】 2 次方程式  $x^2 - 3x + 1 = 0$  を解けば,  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  となるので

$$x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

◀ 解の公式を用いて解く

## F. 2 次方程式の解の個数～判別式 $D$

解の公式の根号  $\sqrt{\quad}$  内の  $b^2 - 4ac$  を, 2 次方程式の判別式 (discriminant) といい,  $D$  で表す.

### 2 次方程式の判別式と解の個数

2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解の個数を調べるには判別式  $D = b^2 - 4ac$  の符号を調べればよい.

i)  $D = b^2 - 4ac > 0$  のとき, 解は 2 つ存在する.

ii)  $D = b^2 - 4ac = 0$  のとき, 解は 1 つ存在する.

このただ 1 つの解は重解 (multiple solution) とよばれる.

iii)  $D = b^2 - 4ac < 0$  のとき, 解は存在しない.

⋮  $D = 0$  のとき, 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は  $x = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a}$ ,  $\frac{-b - \sqrt{0}}{2a}$  であり, どちらも  $x = -\frac{b}{2a}$  に等しくなり, 解が重なってしまう. これが, 重解の語源である\*4.

【例題 22】 2 次方程式  $x^2 - (k-1)x + \frac{1}{4}k^2 + k + 1 = 0$  について, 以下の問いに答えよ.

1.  $k = 2$  のとき, 解はいくつあるか.

2.  $k = -4$  のとき, 解はいくつあるか.

3. 判別式  $D$  を  $k$  の式で表せ.

4. 解が 2 個存在するための  $k$  の範囲を求めよ.

### 【解答】

1.  $k = 2$  のとき, 2 次方程式は  $x^2 - x + 4 = 0$  となる.

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$$

であるので, 解は存在しない.

2.  $k = -4$  のとき, 2 次方程式は  $x^2 + 5x + 1 = 0$  となる.

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$$

であるので, 解は 2 つ存在する.

3.  $x^2$  の係数は 1,  $x$  の係数は  $-(k-1)$ , 定数項は  $\frac{1}{4}k^2 + k + 1$  であるので

$$\begin{aligned} D &= \{-(k-1)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{4}k^2 + k + 1\right) \\ &= k^2 - 2k + 1 - k^2 - 4k - 4 = -6k - 3 \end{aligned}$$

$$\left\{-(k-1)\right\}^2 = (k-1)^2$$

4.  $D = -6k - 3 > 0$  を解いて  $k < -\frac{1}{2}$ .

\*4 厳密な数学の定義によれば, 本来は重根 (multiple root) とよぶべきである. しかし, 高校数学においては「重解」という言葉が慣用的に用いられている. 13th-note 数学 I も現状に従うこととする.

【練習 23 : 2 次方程式の解と因数分解】

以下の 2 次式を、実数の範囲で因数分解せよ.

(1)  $x^2 + 7x - 4$

(2)  $x^2 - 2x - 5$

(3)  $2x^2 - 4x + 1$

【解答】

(1)  $x^2 + 7x - 4 = 0$  を解けば、 $x = \frac{-7 \pm \sqrt{65}}{2}$  となるので

$$x^2 + 7x - 4 = \left(x - \frac{-7 + \sqrt{65}}{2}\right) \left(x - \frac{-7 - \sqrt{65}}{2}\right)$$

(2)  $x^2 - 2x - 5 = 0$  を解けば、 $x = 1 \pm \sqrt{6}$  となるので

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 5 &= \{x - (1 - \sqrt{6})\} \{x - (1 + \sqrt{6})\} \\ &= (x - 1 + \sqrt{6})(x - 1 - \sqrt{6}) \end{aligned}$$

(3)  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  を解けば、 $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$  となる.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 1 &= 2 \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \left(x - \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) \left(x - \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

◀  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  の解と  
 $x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$  の解は  
一致する

【練習 24 : 2 次方程式の解の個数の判別】

2 次方程式  $x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 2a + 4 = 0$  について、以下の問いに答えよ.

(1) 判別式  $D$  を  $a$  の式で表せ.

(2) 解が存在しないための  $a$  の条件を求めよ.

【解答】

(1)  $x^2$  の係数は 1,  $x$  の係数は  $2a - 1$ , 定数項は  $a^2 - 2a + 4$  であるので

$$\begin{aligned} D &= (2a - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 2a + 4) \\ &= 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 + 8a - 16 \\ &= 4a - 15 \end{aligned}$$

(2)  $D = 4a - 15 < 0$  を解いて  $a < \frac{15}{4}$ .

### G. $x$ の係数が偶数の場合

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  において  $b$  が偶数の場合を考えよう.  $b = 2b'$  とおいて,  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  に解の公式を用いると, 次のようになる.

具体的な2次方程式

$$x^2 + 8x + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 12}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm 2\sqrt{13}}{2} \\ &= -4 \pm \sqrt{13} \quad \leftarrow 2 \text{で約分} \end{aligned}$$

一般の2次方程式

$$ax^2 + 2b'x + c = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} \\ &= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \quad \leftarrow 2 \text{で約分} \end{aligned}$$

こうして, 必ず計算の最後に2で約分する必要があるとわかる. そのため,  $b$  が偶数の場合には, 解の公式を別に用意して, この手間ははじめから回避することができる.

—  $x$  の係数が偶数の場合の解の公式・判別式 —

$D \geq 0$  のとき, 2次方程式  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  の解は  $x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$  である ( $D < 0$  のときは解なし). また, 解の個数は,  $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$  の符号を調べればよい.

☞  $\frac{D}{4}$  による解の判別は慣れると大変使いやすい. 一方,  $x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$  は使いにくいと感じる人もいる. そのような人は, 通常の解の公式で代用すればよい.

**【例題 25】** 2次方程式  $x^2 - 6x + 4 = 0$  を解け.

**【解答】**  $x$  の係数が偶数の場合の解の公式より

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 1 \cdot 4}}{1} = 3 \pm \sqrt{5}$$

**【例題 26】** エ, ケには「ある」「ない」のいずれかを答えなさい.

1.  $x^2 + 14x + 4 = 0$  の判別式を  $D$  とする.  $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$  に,  $b' = \boxed{\text{ア}}$ ,  $a = 1$ ,  $c = \boxed{\text{イ}}$  を代入して,  $\frac{D}{4} = \boxed{\text{ウ}}$  と分かる. よって, この2次方程式の解は  $\boxed{\text{エ}}$ .

2.  $3x^2 - 16x + 12 = 0$  の判別式を  $D$  とする.  $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$  に,  $b' = \boxed{\text{オ}}$ ,  $a = \boxed{\text{カ}}$ ,  $c = \boxed{\text{キ}}$  を代入して,  $\frac{D}{4} = \boxed{\text{ク}}$  と分かる. よって, この2次方程式は解を  $\boxed{\text{ケ}}$ .

**【解答】**

1. ア: 7, イ: 4, ウ:  $\frac{D}{4} = 7^2 - 1 \cdot 4 = 45$ , エ: ある

2. オ: -8, カ: 3, キ: 12, ク:  $\frac{D}{4} = (-8)^2 - 3 \cdot 12 = 28$ , ケ: ある

◀  $D$  を直接計算するには, 14 の 2 乗を計算しないとイケない.

【練習 27 : 2 次方程式の解の個数の判別 ( $x$  の係数が偶数の場合)】

$3x^2 - 2(m+1)x + \frac{1}{3}m^2 + m = 0$  の解の個数は、定数  $m$  の値によってどのように変わるか調べよ。

【解答】  $3x^2 - 2(m+1)x + \frac{1}{3}m^2 + m = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{-(m+1)\}^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}m^2 + m\right) \\ &= m^2 + 2m + 1 - m^2 - 3m = -m + 1 \end{aligned}$$

i)  $-m + 1 > 0$ , つまり  $m < 1$  のとき

$\frac{D}{4} > 0$  となり、方程式の解は 2 つ存在する。

ii)  $-m + 1 = 0$ , つまり  $m = 1$  のとき

$\frac{D}{4} = 0$  となり、方程式の解は 1 つ存在する。

iii)  $-m + 1 < 0$ , つまり  $m > 1$  のとき

$\frac{D}{4} < 0$  となり、方程式の解は存在しない。

以上 i)~iii) より、解の個数は次のようになる。

$m < 1$  のとき 2 個    $m = 1$  のとき 1 個    $m > 1$  のとき 0 個

◀  $x$  の係数が偶数の場合の判別式 (p.69)

◀ つまり、重解をもつ。

【例 28 : 2 次方程式を解く (係数に根号を含む場合)】

次の 2 次方程式を解け。

①  $\sqrt{2}x^2 - 4x - \sqrt{2} = 0$

②  $2(2 - \sqrt{3})x^2 + 2(1 - \sqrt{3})x + 1 = 0$

【解答】

① 方程式の両辺に  $\sqrt{2}$  を掛けて整理すると

$$2x^2 - 4\sqrt{2}x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$$

$x$  の係数が偶数の場合の解の公式より

$$x = \sqrt{2} \pm \sqrt{(-\sqrt{2})^2 - 1 \cdot (-1)} = \sqrt{2} \pm \sqrt{3}$$

② 方程式の両辺に  $2 + \sqrt{3}$  を掛けて整理すると

$$2(4-3)x^2 + 2(-1-\sqrt{3})x + (2+\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + 2 + \sqrt{3} = 0$$

$x$  の係数が偶数の場合の解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1+\sqrt{3}) \pm \sqrt{\{-(1+\sqrt{3})\}^2 - 2 \cdot (2+\sqrt{3})}}{2} \\ &= \frac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

◀ まず  $x^2$  の係数は有理数にしておくとい(解の分母を有理化しなくて済む)

◀ まず  $x^2$  の係数は有理数にしておくとい(解の分母を有理化しなくて済む)。

1. 関数とは

A. 関数とは何か

「実数  $x$  を決めればただ 1 つの実数が決まる式」を ( $x$  の) 関数 (function) といい、 $f(x)$ ,  $g(x)$  のように表す\*5。また、このときの  $x$  を変数 (variable) という。

たとえば、 $3 \text{ m}^3$  の水が入っている水槽へ、毎分  $2 \text{ m}^3$  の割合で水を入れることを考える。水を  $x$  分間入れた後の、水槽の中の水の量は  $2x + 3 (\text{m}^3)$  である。

つまり、「水槽の中の水の量 ( $\text{m}^3$ )」は  $x$  によって決まるので、それを  $f(x)$  とおけば

$$f(x) = 2x + 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

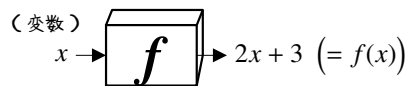
と書くことができる。①の変数  $x$  に、 $x = 3$  を代入すれば

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$$

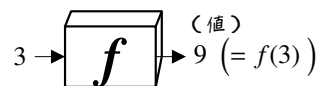
となって、3 秒後の水の量は  $9 \text{ m}^3$  と分かる。

ここで、 $f(3)$  は関数  $f(x)$  に  $x = 3$  を代入して得られる値 (value) と言う。

… 次のページで学ぶように、中学で学んだ関数の定義は、高校における関数の特別な場合になる。



時間 ( $x$ ) から水の量を定める規則



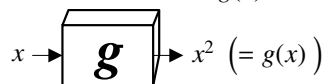
$x = 3$  を  $f(x)$  に代入して 9 を得る

【例題 29】 1 辺  $x \text{ cm}$  の正方形において「( $x$  によって決まる) 正方形の面積 ( $\text{cm}^2$ )」を  $g(x)$  とすれば

$$g(x) = x^2$$

となる。この  $g(x)$  について  $g(4)$  を求めなさい。

また、その値は、どんな図形の面積を計算した結果になるか。



正方形の 1 辺の長さ ( $x$ ) から面積を決める規則

【解答】  $g(4) = 4^2 = 16$ , 1 辺が 4 cm の正方形の面積 ( $\text{cm}^2$ ) を表している。

【例題 30】 ある関数  $h(x)$  が  $h(x) = 2x^2 - 3x + 3$  で表されるとき、 $h(1)$ ,  $h(-2)$  の値を求めよ。

【解答】  $2x^2 - 3x + 3$  に  $x = 1$ ,  $x = -2$  を代入すればよい。

$$h(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = 2$$

$$h(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 3 = 17$$

\*5  $p(x)$ ,  $a(x)$  などでもよいが、関数 (function) の頭文字である  $f$  からアルファベット順に、 $g$ ,  $h$  などであることが多い。また、大文字の  $F$ ,  $G$  などとも使われる。

【練習 31 : 関数を表す】

次の関数を求めよ。また、それぞれ、変数を表す文字を答えよ。

(1) 縦が 4, 横が  $x$  の長方形の面積  $a(x)$

(2)  $6 \text{ m}^3$  の水が入っている水槽へ、毎分  $3 \text{ m}^3$  の割合で水を入れたときの、 $w$  分後の水の量  $b(w) \text{ m}^3$

【解答】

(1)  $a(x) = 4x$ , 変数は  $x$

(2)  $b(w) = 3w + 6$ , 変数は  $w$

【練習 32 : 関数の値】

$f(x) = 2x + 3$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $h(x) = 2x^2 - 3x + 3$  について、以下の問いに答えよ。

(1)  $f(2)$ ,  $f(5)$ ,  $g(2)$ ,  $g(5)$  を求めよ、また、「 $x = 2t$  のときの  $f(x)$  の値」である  $f(2t)$  を  $t$  の式で表せ。

(2)  $h(a)$ ,  $h(2t)$  の値を求めよ ( $a, t$  を用いてよい)。

【解答】

(1)  $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ ,  $f(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$

$g(2) = 2^2 = 4$ ,  $g(5) = 5^2 = 25$   $f(2t) = 2 \cdot (2t) + 3 = 4t + 3$

(2)  $h(a) = 2 \cdot a^2 - 3 \cdot a + 3 = 2a^2 - 3a + 3$

$h(2t) = 2 \cdot (2t)^2 - 3 \cdot 2t + 3 = 8t^2 - 6t + 3$

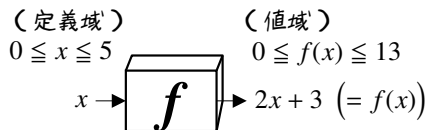
◀たとえば、 $t = 1$  のときは  $f(2)$  の値になる。

**B. 関数の定義域・値域・最大値・最小値**

中学で学んだ関数と同じように、定義域、値域、最大値、最小値を考えることができる。

たとえば、p.71 の関数  $f(x)$  の例において、水槽の容積が  $13 \text{ m}^3$  であったならば、 $f(x) = 2x + 3$  の定義域 (domain) は  $0 \leq x \leq 5$  である。というのも、 $5 < x$  では水槽から水があふれてしまうし、 $x < 0$  は意味では意味をもたない。

また、 $f(x)$  の値域 (range) は  $0 \leq f(x) \leq 13$ 、最小値 (minimum value) は  $f(0) = 0$ 、最大値 (maximum value) は  $f(5) = 13$  である。



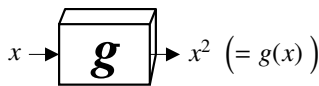
時間 ( $x$ ) から水の量を定める規則

【例題 33】 1 辺  $x \text{ cm}$  の正方形において、「( $x$  によって決まる) 正方形の面積 ( $\text{cm}^2$ )」を表す関数  $g(x) = x^2$  について、以下の問いに答えよ。

1.  $x = 2$  は定義域に含まれるか。  $x = -1$ ,  $x = 0$  はどうか。

2. 定義域を  $1 \leq x < 5$  としたとき、 $g(x)$  の値域を求めよ。

最小値・最大値があれば求めよ。



正方形の 1 辺の長さ ( $x$ ) から面積を定める規則

【解答】

1.  $x = 2$  は定義域に含まれる。1 辺  $(-1) \text{ cm}$  の正方形や、1 辺  $0 \text{ cm}$  の正方形は存在しないので、 $x = -1$ ,  $0$  は定義域に含まれない。

2. 値域は  $1 \leq g(x) < 25$ 、最小値は  $g(1) = 1$ 、最大値は存在しない。

◀  $x = 5$  は定義域に含まれないので、 $g(x) = 25$  になることはない。

### C. $y$ を与える $x$ の関数 — $y = f(x)$

中学において「関数」と呼んでいた  $y = 2x + 3$  のような式も、「 $y$  を与える  $x$  の関数」として、単に関数とよぶことができる。このような「 $y$  を与える  $x$  の関数」は、一般的に  $y = f(x)$  などと表される\*6。

☞ もう少し概念を広げれば、関数とは「変数を決めると、ただ1つの実数値が決まる規則」のことである。何かを入力すれば、何か実数値を出力するもの、それを「関数」とみなしてよい。

### D. 文字定数

関数を表す式において、変数でない数値・文字を**定数** (constant) という。特に、変数でない文字を文字定数ということもある。

【例題 34】 関数  $f(x) = ax^3 + x^2 + bx + 2$  について、以下の問いに答えよ。

1.  $f(x)$  に含まれる文字定数をすべて答えよ。
2.  $a \neq 0$  のとき、 $f(x)$  は何次式か。
3.  $a = 0$  のとき、 $f(x)$  は何次式か。
4.  $a = b = 0$  であるとき、 $f(x)$  は何次式か。

【解答】

1.  $a, b$
2. 3次式
3.  $f(x) = x^2 + bx + 2$  となるので、2次式
4.  $f(x) = x^2 + 2$  となるので、2次式

## 2. グラフによる関数の図示

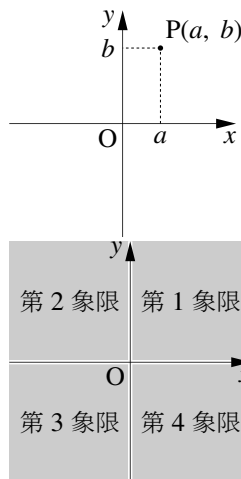
### A. 座標平面

関数を図示するには、中学までと同じように、**座標平面** (coordinate plane) を用いる。これは、平面に2本の直交する数直線 (**座標軸** (coordinate axes) という) で定められた平面である\*7。

座標平面は、座標軸によって次の4つの部分に分けられ、時計回りに

- $x > 0, y > 0$  の部分：第1象限 (first quadrant)
- $x < 0, y > 0$  の部分：第2象限 (second quadrant)
- $x < 0, y < 0$  の部分：第3象限 (third quadrant)
- $x > 0, y < 0$  の部分：第4象限 (fourth quadrant)

とよばれる。ただし、座標軸はどの象限にも含めない。



【例題 35】  $(-2, 2)$  は第 **ア** 象限、 $(1, -2)$  は第 **イ** 象限、 $(-2, -3)$  は第 **ウ** 象限である。

【解答】 ア: 2, イ: 4, ウ: 3

\*6 2つ以上の変数をもつ関数については、数学IIで詳しく学ぶ。

\*7 右の図の場合は、特に  $xy$  (座標) 平面といい、横の座標軸を  $x$  軸、縦の座標軸を  $y$  軸という。この  $x, y$  は他の文字でもよい。

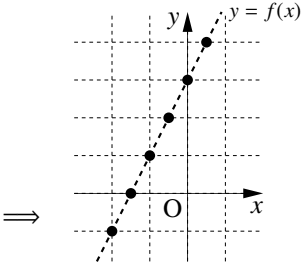
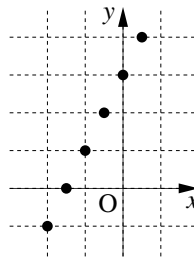
## B. 関数のグラフ

「変数の値」と「関数の値」の対応は、中学校で学んだやり方で、座標平面上に表すことができる。たとえば、関数  $f(x) = 2x + 3$  について考えよう。

まず、 $f(-2) = -1$ 、 $f(-1) = 0$  などの値を計算して、左下のような表ができる。

$x$	...	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	...
$f(x)$	...	-1	0	1	2	3	4	...

⇒



それぞれを座標平面上に点でとっていき、変数  $x$  の値は無数にあるので最終的に直線となる。この直線を関数  $y = f(x)$  のグラフ (graph) という。

一般には、関数  $f(x)$  について、 $(x, f(x))$  を座標とする点全体の作る座標平面上的図形を「関数  $y = f(x)$  のグラフ (graph)」という。

【例題 36】 以下の  にあてはまる数値を答えよ。ただし、 $f(x) = 2x + 3$  とする。

- 点 A(1, )、B(-3, )、C( $\frac{2}{3}$ , ) は  $y = f(x)$  のグラフ上にある。
- 点 D(, 7)、E(, 6)、F(,  $\frac{1}{3}$ ) は  $y = f(x)$  のグラフ上にある。
1. と 2. で求めた点のうち、第 2 象限にある点を答えよ。

【解答】

1. ア: 変数  $x = 1$  のときの  $f(x)$  の値、 $f(1) = 5$ 。

イ:  $f(-3) = -3$ .      ウ:  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{13}{3}$ 。

2. エ: 値  $f(x)$  が 7 になるときの  $x$  の値なので、 $f(x) = 2x + 3 = 7$  を解いて、 $x = 2$ 。

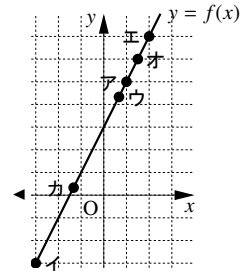
オ:  $f(x) = 2x + 3 = 6$  を解いて、 $x = \frac{3}{2}$ 。

カ:  $f(x) = 2x + 3 = \frac{1}{3}$  を解いて、 $x = -\frac{4}{3}$ 。

3. F( $-\frac{4}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ )

$$\leftarrow f(1) = 2 \cdot 1 + 3$$

$$\leftarrow f(-3) = 2 \cdot (-3) + 3$$



【例題 37】 以下の  にあてはまる数値を答えよ。ただし、 $g(x) = x^2$  とする。

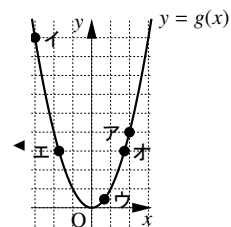
1. 点 (2, )、(-3, )、( $\frac{2}{3}$ , ) は、 $y = g(x)$  のグラフ上にある。

2.  $y = g(x)$  のグラフ上にある  $y$  座標が 3 の点は、(, 3)、(, 3) である。

【解答】

1. ア:  $g(1) = 4$ 、イ:  $g(-3) = 9$ 、ウ:  $g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$ 。

2. エ、オ: 値  $g(x)$  が 3 になるときの  $x$  の値なので、 $g(x) = x^2 = 3$  を解いて、 $x = -\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{3}$ 。

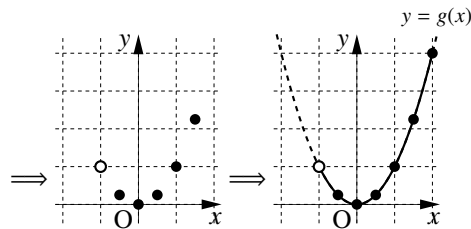




### C. グラフと最大値・最小値

関数  $g(x) = x^2$  を定義域  $-1 < x \leq 2$  において考えると、一番右のようなグラフ  $y = g(x) (-1 < x \leq 2)$  を得る。

$x$	$(-1)$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}$	$1$	$\frac{3}{2}$	$2$
$g(x)$	$(1)$	$\frac{1}{4}$	$0$	$\frac{1}{4}$	$1$	$\frac{9}{4}$	$4$



つまり、放物線の一部がグラフとなる。定義域から外れた部分は、右図のように点線で書く。  $x = -1$  のように定義域の境目にあるが、定義域に含まれない点は、白丸で表す。

…  $x = -1$  は定義域に含まれないが、  $x = -0.9, -0.99, -0.999, \dots$  はすべて定義域に含まれるので、グラフは必ず白丸とつながる。

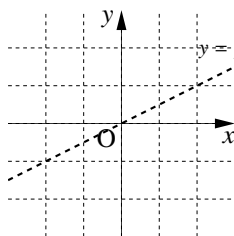
グラフの実数部分のうち、  $y$  座標が一番小さい点は  $(0, 0)$  であり、  $y$  座標が一番大きい点は  $(2, 4)$  である。ここから、関数  $g(x)$  の最小値が  $g(0) = 0$  であり、最大値が  $g(2) = 4$  であると分かる。

**【例題 38】** 関数  $p(x) = \frac{1}{2}x$ ,  $q(w) = -w^2$  について、以下の問いに答えよ。

1. 右のグラフに関数

$$y = p(x) \quad (-2 \leq x \leq 1)$$

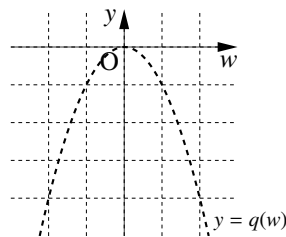
を書き込み、最大値・最小値があれば答えなさい。



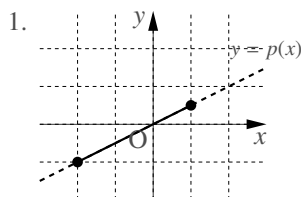
2. 右のグラフに関数

$$y = q(w) \quad (-2 < w \leq 1)$$

を書き込み、最大値・最小値があれば答えなさい。

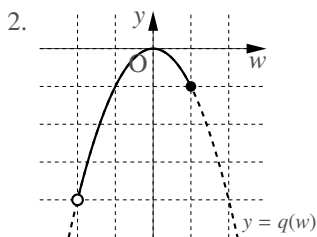


**【解答】**



$$\text{最大値は } p(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{最小値は } p(-2) = -1$$



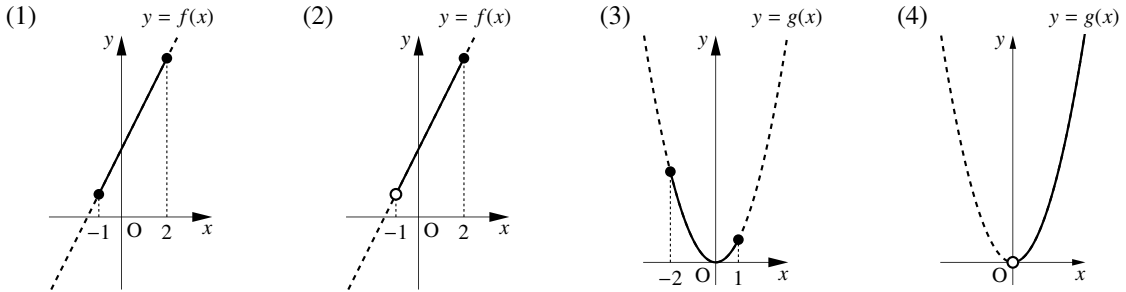
$$\text{最大値は } q(0) = 0$$

最小値はない

◀  $w = -2$  になることは無いので、 $q(-2)$  は最小値ではない。

【練習 39 : 定義域, 最大値, 最小値, 値域】

$f(x) = 2x + 3$ ,  $g(x) = x^2$  とする. 以下のグラフについて, それぞれ, 定義域, 最大値, 最小値, 値域を答えよ. 最大値・最小値がない場合は「なし」でよい.



【解答】

- (1) 定義域は  $-1 \leq x \leq 2$ ,  
 最大値は  $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ ,  
 最小値は  $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$ ,  
 値域は  $1 \leq f(x) \leq 7$ .
- (2) 定義域は  $-1 < x \leq 2$ ,  
 最大値は  $f(2) = 7$ , 最小値はなし,  
 値域は  $1 < f(x) \leq 7$ .
- (3) 定義域は  $-2 \leq x \leq 1$ ,  
 最大値は  $g(-2) = (-2)^2 = 4$ , 最小値は  $g(0) = 0$ ,  
 値域は  $0 \leq g(x) \leq 4$ .
- (4) 定義域は  $0 < x$ , 最大値も最小値もなし,  
 値域は  $0 < g(x)$ .

◀  $1 \leq y \leq 7$  でもよい.

◀  $f(x)$  は, 1.1, 1.01, 1.001, ... を取ることができるが, 1 になることはない.

◀  $g(x)$  はどんな大きい値も取れるので, 最大値はない.  $g(x)$  は, 0.1, 0.01, 0.001, ... を取ることができるが, 0 になることはない.

### 3. 方程式・不等式の解と関数のグラフ

#### A. 1次方程式の解・1次関数のグラフ

たとえば、1次関数  $y = 2x + 1$  が  $y = 0$  となるときの  $x$  の値は1次方程式  $2x + 1 = 0$  を解けばよい。

このように、1次関数の  $y = 0$  となるときの値を求めるときに、1次方程式を解く必要があり、その逆も成り立つ。

#### 【暗記 40 : 1次方程式と1次関数】

以下の  にあてはまる数値を答えよ。

1. 1次関数  $y = 2x - 4$  のグラフ上のうち  $y$  座標が  になる点 A を求めるには、1次方程式

$$\text{イ} = 0$$

を解けばよい。その結果、A(, 0) と分かる。

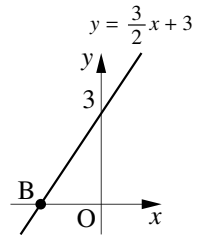
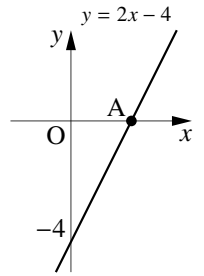
2. 1次関数  $y = \frac{3}{2}x + 3$  と  軸の交点 B を求めるには

$$\frac{3}{2}x + 3 = 0$$

という1次方程式の解を求めればよい。その結果、B(, ) と分かる。

3. 次のいずれの場合も、1次方程式  $3x - 9 = 0$  を解けばよい。

- 関数  と  軸の交点を求める。
- 関数  の  $y$  座標が  になるときの  $x$  座標を求める。



#### 【解答】

1. ア: 0, イ:  $2x - 4$ , ウ: 2  
 2. エ:  $x$ , (オ, カ) =  $(-2, 0)$   
 3. キ:  $y = 3x - 9$ , ク:  $x$ , ケ: 0

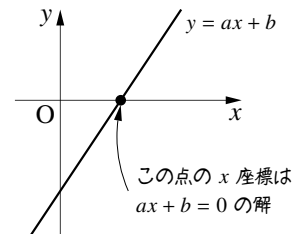
以上のことは、次のようにまとめられる。

#### 1次関数のグラフと1次方程式の解

$ax + b$  という1次式に対して

- $ax + b = 0$  を解く
- $y = ax + b$  のグラフと  $x$  軸の交点 (の  $x$  座標) を求める
- $y = ax + b$  のグラフ上の  $y$  座標が 0 になる点 (の  $x$  座標) を求める

はいずれも同じである。



## B. 連立方程式の解・1次関数のグラフ

### 【暗記 41: 連立方程式と1次関数】

以下の□にあてはまる数値を答えよ。

1. 2つの1次関数  $y = 2x + 1$  と  $y = -3x + 3$  の交点 A の座標は

連立方程式  $\boxed{\text{ア}}$

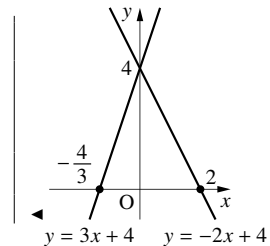
を解いて求めることができ、A( $\boxed{\text{イ}}$ ,  $\boxed{\text{ウ}}$ ) である。

2. 連立方程式  $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ -2x + 4 = y \end{cases}$  の解は、2つの1次関数  $\boxed{\text{エ}}$ ,  $\boxed{\text{オ}}$  の交点に一致し、 $(x, y) = (\boxed{\text{カ}}$ ,  $\boxed{\text{キ}})$  である。

### 【解答】

1. ア:  $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -3x + 3 \end{cases}$ , (イ, ウ):  $(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$

2. エ:  $y = 3x + 4$ , オ:  $y = -2x + 4$ ,  
(カ, キ) = (0, 4)



### 2つの1次関数のグラフの共有点と連立方程式

2つの1次関数

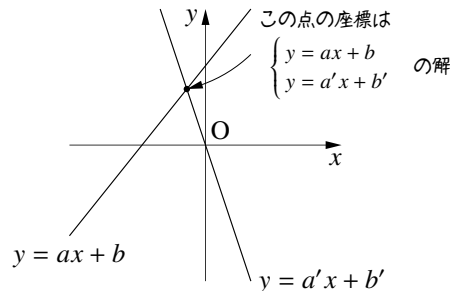
$$y = ax + b$$

$$y = a'x + b'$$

のグラフの共有点の(x座標, y座標)は、連立方程式

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

の解(x, y)に一致する。



… 1次方程式  $ax + b = 0$  は、連立方程式  $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax + b \end{cases}$  の解に一致する。このことから、『1次方程式の解・1次関数のグラフ』の内容は、『連立方程式の解・1次関数のグラフ』の特別な場合と考えることもできる。

C. 1次不等式と1次関数の関係

【暗記 42 : 1次不等式と1次関数】

□に適切な数値・文字を答えよ。□ウ, □クには  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$ ,  $\geq$  の中から答えよ。

1. 右の直線  $y = -2x - 8$  について, A の座標は

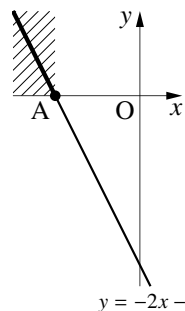
1次方程式 □ア = 0

を解いて, A(□イ, 0) と求められる。

また, グラフの太線部分である  $y \geq 0$  の範囲は

1次不等式 □エ

を解いて □オ と求められ, これは右上のグラフとも一致する。



2. 右の直線  $y = 7x - 2$  について, B の座標は

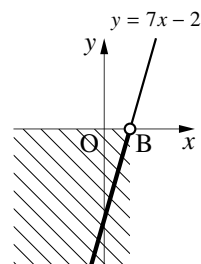
1次方程式 □カ = 0

を解いて, B(□キ, 0) である。

また, グラフの太線部分である  $y < 0$  の範囲は

1次不等式 □ケ

を解いて □コ と求められ, これは右上のグラフとも一致する。



【解答】

1. ア:  $-2x - 8$ , イ:  $-4$ , ウ:  $\geq$ ,

エ:  $y \geq 0$  に  $y = -2x - 8$  を代入して,  $-2x - 8 \geq 0$

オ:  $-2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 8 \Leftrightarrow x \leq -4$

2. カ:  $7x - 2$ , キ:  $\frac{2}{7}$ , ク:  $<$ ,

ケ:  $y < 0$  に  $y = 7x - 2$  を代入して,  $7x - 2 < 0$

コ:  $7x - 2 < 0 \Leftrightarrow 7x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{7}$

1次不等式の解

$a > 0$  の場合の, 1次不等式と1次関数の解の関係はつぎのようにまとめることができる。

	$ax + b = 0$ の解	$x = -\frac{b}{a}$
	$ax + b > 0$ の解	$x > -\frac{b}{a}$
	$ax + b \geq 0$ の解	$x \geq -\frac{b}{a}$
	$ax + b < 0$ の解	$x < -\frac{b}{a}$
	$ax + b \leq 0$ の解	$x \leq -\frac{b}{a}$



上の表は覚えなくてよい。1次不等式と1次関数の対応を確認できればよい。

## 4. 絶対値を含む1次関数・方程式・不等式

### A. 絶対値と方程式・不等式の関係

『絶対値』(第1章)でも学んだように、実数  $x$  の絶対値  $|x|$  は、数直線上での原点と実数  $x$  に対応する点との距離を表すので、次のことがいえる。

#### 絶対値と方程式・不等式の関係

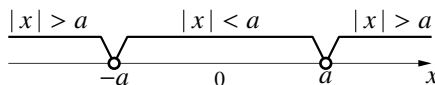
絶対値を含む  $x$  の方程式、不等式に関して

$$|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ または } a < x$$

ただし、 $a > 0$  とする\*<sup>8</sup>。



#### 【練習43：絶対値を含む1次方程式・1次不等式】

次の方程式・不等式を解け。

(1)  $|x - 1| = 3$

(2)  $|3x - 2| = 6$

(3)  $|x + 1| > 4$

(4)  $|5x - 2| \leq 4$

#### 【解答】

(1) (右辺) =  $3 > 0$  なので、 $x - 1 = \pm 3$  より、 $x = -2, 4$

(2) (右辺) =  $6 > 0$  なので、 $3x - 2 = \pm 6$  より

$$3x - 2 = \pm 6$$

$$\Leftrightarrow 3x = -4, 8 \quad \therefore x = -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$$

(3) (右辺) =  $4 > 0$  なので

$$x + 1 < -4 \text{ または } 4 < x + 1$$

$$\Leftrightarrow x < -5 \text{ または } 3 < x$$

(4) (右辺) =  $4 > 0$  なので、 $-4 \leq 5x - 2 \leq 4$  より

$$-4 \leq 5x - 2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 5x \leq 6$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{6}{5}$$

◀  $x - 1 = -3$  のときは  $x = -2$   
 $x - 1 = 3$  のときは  $x = 4$

◀ 各辺に2を足した。  
『不等式の性質 i』(p.55) を利用。

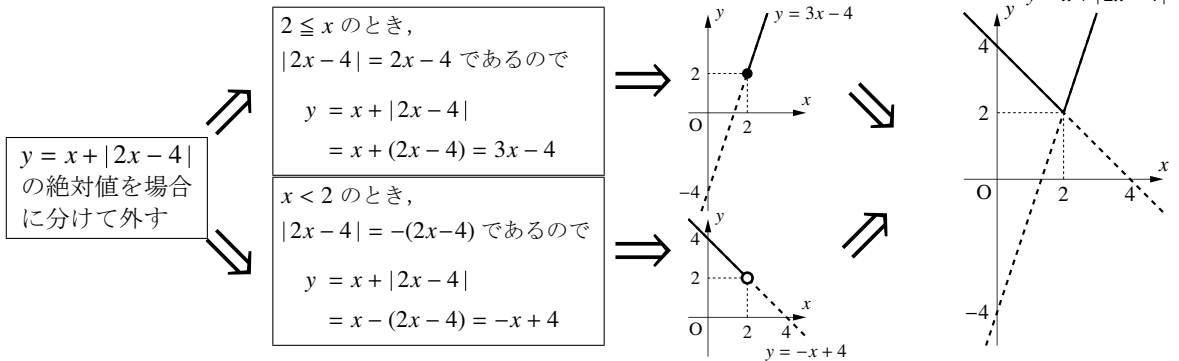
◀ 各辺を5で割った。  
『不等式の性質 ii』(p.55) を利用。

\*<sup>8</sup> 実数の絶対値は0以上の値なので、 $a = 0$  や  $a < 0$  の場合を考える必要性は低い。たとえば、不等式  $|x| < -2$  の解は「解なし」、不等式  $|x| > 0$  の解は「0以外のすべての実数」である。

## B. 場合に分けて絶対値を外す

前ページの関係が使えない場合は、場合に分けて絶対値を外す必要がある。

たとえば、関数  $y = x + |2x - 4|$  のグラフは、次のように場合に分けて描く。



### 【練習 44：絶対値を含む 1 次関数】

次の式で与えられた関数のグラフを描け。

(1)  $y = 2x + |x - 1|$

(2)  $y = |x - 4|$

### 【解答】

(1)  $x - 1$  が正か負かで、場合に分けてグラフを考える。

i)  $x - 1 \geq 0$ , つまり  $1 \leq x$  のとき

$$y = 2x + (x - 1)$$

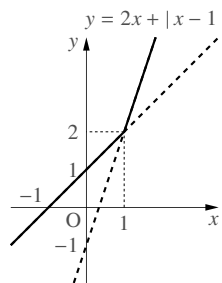
$$= 3x - 1$$

ii)  $x - 1 < 0$ , つまり  $x < 1$  のとき

$$y = 2x - (x - 1)$$

$$= x + 1$$

以上 i), ii) より、グラフは右図のようになる。



(2)  $x - 4$  が正か負かで、場合に分けてグラフを考える。

i)  $x - 4 \geq 0$ , つまり  $4 \leq x$  のとき

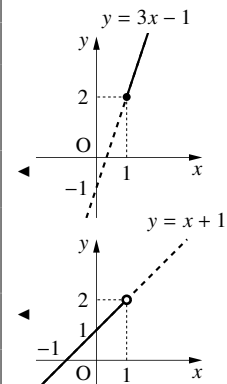
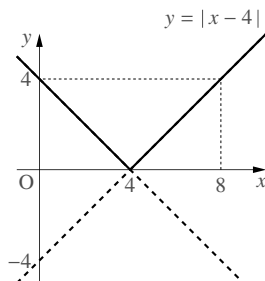
$$y = x - 4$$

ii)  $x - 4 < 0$ , つまり  $x < 4$  のとき

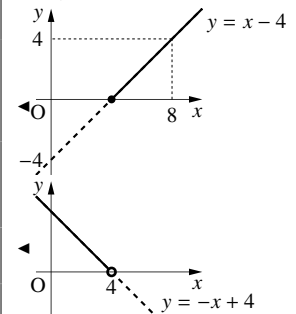
$$y = -(x - 4)$$

$$= -x + 4$$

以上 i), ii) より、グラフは右図のようになる。



◀  $1 \leq x$  の範囲でのグラフと、 $x < 1$  の範囲でのグラフをつないだ。



◀  $4 \leq x$  の範囲でのグラフと、 $x < 4$  の範囲でのグラフをつないだ。



(2) のグラフは、直線  $y = x - 4$  のうち  $y < 0$  の部分を、 $y > 0$  になるよう  $x$  軸に対して対称移動したグラフになっている。

【発展 45：絶対値を含む1次方程式】

次の方程式を解け.

①  $|x + 1| = 2x$

②  $|3x - 4| = x + 8$

③  $|2x - 2| = x - 4$

【解答】

① i)  $x + 1 \geq 0$ , つまり  $-1 \leq x$  …… ① のとき

$$x + 1 = 2x \quad \therefore x = 1$$

これは、①に適している.

ii)  $x + 1 < 0$ , つまり  $x < -1$  …… ② のとき

$$-x - 1 = 2x$$

$$\Leftrightarrow 3x = -1 \quad \therefore x = -\frac{1}{3}$$

これは、②に適さない.

i) または ii) を満たすものが解となり、 $x = 1$

② i)  $3x - 4 \geq 0$ , つまり  $\frac{4}{3} \leq x$  …… ③ のとき

$$3x - 4 = x + 8$$

$$\Leftrightarrow 2x = 12 \quad \therefore x = 6$$

これは、③に適している.

ii)  $3x - 4 < 0$ , つまり  $x < \frac{4}{3}$  …… ④ のとき

$$-3x + 4 = x + 8$$

$$\Leftrightarrow 4x = -4 \quad \therefore x = -1$$

これは、④に適している.

i) または ii) を満たすものが解となり、 $x = -1, 6$

③ i)  $2x - 2 \geq 0$ , つまり  $1 \leq x$  …… ⑤ のとき

$$2x - 2 = x - 4 \quad \therefore x = -2$$

これは、⑤に適さない.

ii)  $2x - 2 < 0$ , つまり  $x < 1$  …… ⑥ のとき

$$-2x + 2 = x - 4$$

$$\Leftrightarrow -3x = -6 \quad \therefore x = 2$$

これは、⑥に適さない.

i), ii) のどちらにも満たす解がないので、答えは解なし.

◀  $x + 1$  が正のとき、負のときで場合に分けて考える.

◀  $3x - 4$  が正のとき、負のときで場合に分けて考える.

◀  $2x - 2$  が正のとき、負のときで場合に分けて考える.

◀ 実際、 $y = |2x - 2|$ ,  $y = x - 4$  のグラフを両方書いてみると、交点をもたない.



【発展 46 : 絶対値を含む 1 次不等式】

次の不等式を解け.

①  $|x+6| > 3x$

②  $|2x-1| \leq x+2$

【解答】

① i)  $x+6 \geq 0$ , つまり  $-6 \leq x$  …… ① のとき

$$x+6 > 3x$$

$$\Leftrightarrow 2x < 6 \quad \therefore x < 3$$

これと, ①を合わせて,  $-6 \leq x < 3$

ii)  $x+6 < 0$ , つまり  $x < -6$  …… ② のとき

$$-x-6 > 3x$$

$$\Leftrightarrow 4x < -6 \quad \therefore x < -\frac{3}{2}$$

これと, ②を合わせて,  $x < -6$

i) または ii) を満たすものが解となり,  $x < 3$

② i)  $2x-1 \geq 0$ , つまり  $\frac{1}{2} \leq x$  …… ③ のとき

$$2x-1 \leq x+2 \quad \therefore x \leq 3$$

これと, ③を合わせて,  $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

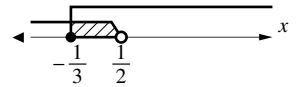
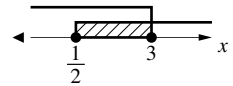
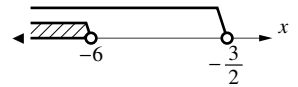
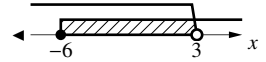
ii)  $2x-1 < 0$ , つまり  $x < \frac{1}{2}$  …… ④ のとき

$$-2x+1 \leq x+2$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 3x \quad \therefore -\frac{1}{3} \leq x$$

これと, ④を合わせて,  $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$

i) または ii) を満たすものが解となり,  $-\frac{1}{3} \leq x \leq 3$



## 2.4 2次関数とそのグラフ

2次関数のグラフは、「頂点」「軸（に対する対称性）」という大きな特徴を持ち、2次方程式、2次不等式を解くときの重要な道具ともなる。

### 1. 2次関数のグラフ

#### A. 2次関数の定義

関数  $f(x)$  が  $x$  の2次式で表されるとき、つまり、 $a (\neq 0)$ 、 $b$ 、 $c$  を定数として

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

の形で表されるとき、 $f(x)$  は  $x$  の**2次関数** (quadratic function) であるという。

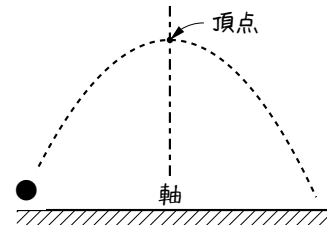
2次関数の値を  $y$  とおいた式  $y = ax^2 + bx + c$  も、( $y$  を与える)  $x$  の2次関数という。

#### B. 2次関数のグラフの基本

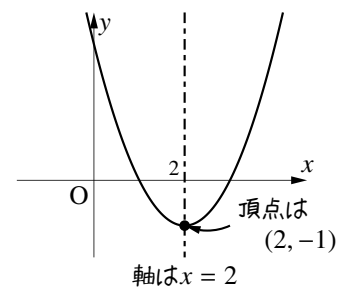
後で見ると、2次関数のグラフは必ず**放物線** (parabola) になる\*9。

放物線は必ず対称軸をもつ。この対称軸のことを単に**軸** (axis) といい、この軸と放物線の交点のことを**頂点** (vertex) という。

また、放物線の頂点が上にあれば「上に**凸** (convex)」な放物線といい、頂点が下にあれば「下に**凸**」な放物線という。



↑↑上に凸な放物線↑↑  
↓↓下に凸な放物線↓↓



#### C. 直線 $x = a$

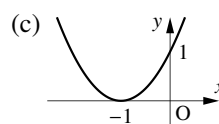
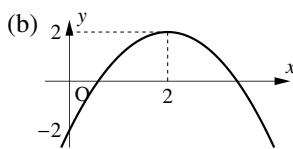
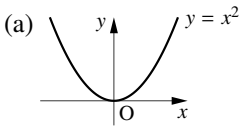
右の放物線の軸は、図中の直線 --- である。この直線は

「 $x$  座標が 2 である点を全て集めてできる直線」

に一致するので、「直線  $x = 2$ 」とよばれる。

数学 I で学ぶ放物線の軸は、必ず「直線  $x = a$ 」の形をしている。

**【例題 47】** 3つの放物線 (a)-(c) について、以下の問いに答えよ。



- 上に凸なグラフ、下に凸なグラフをそれぞれすべて選びなさい。
- 頂点の座標、軸の方程式をそれぞれ答えなさい。

#### 【解答】

1. 上に凸なグラフは (b)、下に凸なグラフは (a), (c)。

\*9 放物線とは、空中に物を投げたときにできる軌跡 (物の通った跡) のことである。野球のホームランの打球や、サッカーのゴールキック、バレーボールのトスなど、ボールはいずれも放物線を描く。そのため、物理において投げられた物体の通り道について学ぶとき、2次関数がいられる。

2. (a) 頂点は  $(0, 0)$ , 軸は直線  $x = 0$  (b) 頂点は  $(2, 2)$ , 軸は直線  $x = 2$ .  
 (c) 頂点は  $(-1, 0)$ , 軸は直線  $x = -1$ .



この確認問題の (a) のグラフを「放物線  $y = x^2$ 」と言うことがある.

このように「2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフ」のことを「放物線  $y = ax^2 + bx + c$ 」と言うこともある. このときの  $y = ax^2 + bx + c$  は, 放物線の方程式 (equation of parabola) といわれる.

【例題 48】  $y$  軸上の点は,  $x$  座標が **ア** となるので,  $y$  軸は「直線 **イ**」とも言われる.

【解答】 ア : 0, イ :  $x = 0$

#### D. $y = ax^2$ のグラフ

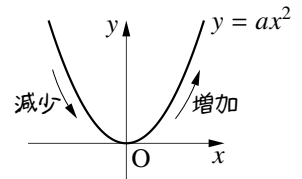
2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  において  $b = c = 0$  の場合, つまり  $y = ax^2$  のグラフは, 中学校で学んだように次のような特徴がある.

$y = ax^2$  のグラフの特徴

I) 軸は直線  $x = 0$  ( $y$  軸), 頂点は原点  $(0, 0)$  の放物線になる.

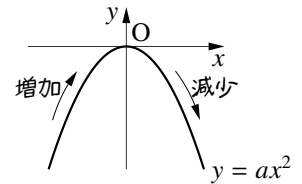
II) i)  $a > 0$  のとき

- $y \geq 0$  の範囲にある.
- 放物線は「下に凸」である.
- $x$  の増加に対し  $\begin{cases} x < 0 \text{ では } y \text{ は減少する} \\ x > 0 \text{ では } y \text{ は増加する} \end{cases}$



ii)  $a < 0$  のとき

- $y \leq 0$  の範囲にある.
- 放物線は「上に凸」である.
- $x$  の増加に対し  $\begin{cases} x < 0 \text{ では } y \text{ は増加する} \\ x > 0 \text{ では } y \text{ は減少する} \end{cases}$



【例題 49】 3つの放物線 (a)-(c) について, 以下の問いに答えよ.

- (a) 放物線  $y = x^2$  (b) 放物線  $y = -3x^2$  (c) 放物線  $y = 2x^2$

1. 上に凸なグラフ, 下に凸なグラフをそれぞれすべて選びなさい.
2.  $x > 0$  で  $y$  が増加するグラフをすべて求めなさい.
3. それぞれ, グラフ上における  $x$  座標が 1 である点の座標を答えなさい.

【解答】

1. 上に凸なグラフは (b), 下に凸なグラフは (a), (c).      2. (a), (c)
3. (a)  $y = x^2$  に  $x = 1$  を代入して  $y = 1$  を得るので (1, 1).  
 (b)  $y = -3x^2$  に  $x = 1$  を代入して  $y = -3$  を得るので (1, -3).  
 (c)  $y = 2x^2$  に  $x = 1$  を代入して  $y = 2$  を得るので (1, 2).

◀  $x > 0$  で  $y$  が増加するグラフは, 下に凸である.

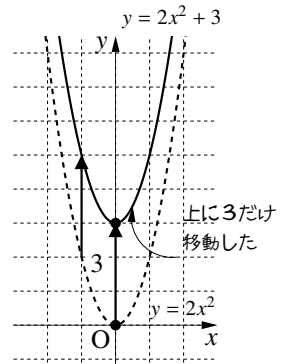
### E. $y = ax^2 + c$ のグラフ

例として、次の2つの2次関数の関係を考えてみよう。

$$y = 2x^2, \quad y = 2x^2 + 3$$

$x$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$2x^2$	...	18	8	2	0	2	8	18	...
$2x^2 + 3$	...	21	11	5	3	5	11	21	...

3を足す



上の表から、 $y = 2x^2 + 3$  のグラフは、 $y = 2x^2$  のグラフを  $y$  軸方向に +3 平行移動した放物線とわかる\*10。

この平行移動によって、放物線の軸が  $y$  軸から変わることはない。しかし、頂点は移動し、原点より  $y$  軸方向に 3 大きい点  $(0, 3)$  であることがわかる。

【例題 50】  に適当な数・式を答え、放物線 、、 $y = 2x^2 - 4$  のグラフを書け。

1. 頂点  $(0, 0)$  の放物線  $y = -x^2$       2. 頂点  $(0, 0)$  の放物線  $y = 3x^2$       3. 頂点  $(0, 0)$  の放物線  $y = 2x^2$

↓  $y$  軸方向に  
+3 平行移動

頂点  $(\text{ア}, \text{イ})$   
の放物線

これは  $(1, \text{エ})$  を通る

↓  $y$  軸方向に  
+5 平行移動

頂点  $(\text{オ}, \text{カ})$   
の放物線

これは  $(1, \text{ク})$  を通る

↓  $y$  軸方向に  
 平行移動

頂点  $(\text{コ}, \text{サ})$   
の放物線  $y = 2x^2 - 4$

これは  $(1, \text{シ})$  を通る

⋯ 高校数学においてグラフを描くときは、方眼紙を用いず、概形を示すだけのことが多い。

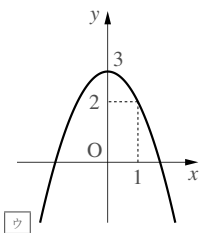
放物線の場合、頂点と、他の 1 点を書き入れれば十分である。

#### 【解答】

1. ア, イ :  $(0, 3)$

ウ :  $y = -x^2 + 3$

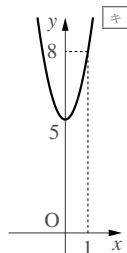
エ : 2



2. オ, カ :  $(0, 5)$

キ :  $y = 3x^2 + 5$

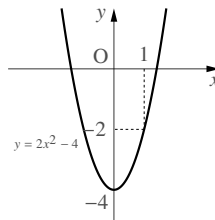
ク : 8



3. ケ : -4

コ, サ :  $(0, -4)$

シ : -2



◀ 2 次関数の式に  $x = 1$  を代入すればよい。たとえば、1. ならば  $y = -x^2 + 3$  に  $x = 1$  を代入して、 $y = -1^2 + 3 = 2$  となる。

#### $y = ax^2 + c$ のグラフ

$y = ax^2 + c$  のグラフは、 $y = ax^2$  のグラフを

「 $y$  軸方向に  $c$  だけ平行移動」

した放物線である。このとき、軸は  $y$  軸(直線  $x = 0$ )、頂点は  $(0, c)$  となる。

\*10 このことは、式の形からも理解できる。同じ  $x$  の値を代入しても、 $y = 2x^2 + 3$  の  $y$  の値の方が、 $y = 2x^2$  の  $y$  の値より 3 だけ大きく計算されるからである。

## F. $y = a(x - p)^2$ のグラフ

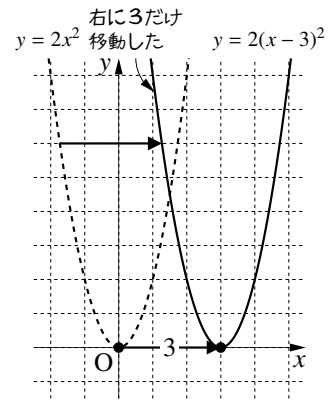
例として、次の2つの2次関数の関係を考えてみよう。

$$y = 2x^2, \quad y = 2(x - 3)^2$$

$x$	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$2x^2$	...	8	2	0	2	8	18	32	50	...
$2(x-3)^2$	...	50	32	18	8	2	0	2	8	...

上の表から、 $y = 2(x - 3)^2$  のグラフは、 $y = 2x^2$  のグラフを  $x$  軸方向に +3 平行移動した放物線とわかる\*11。

この平行移動によって、軸は  $x$  軸方向に 3 移動し、直線  $x = 3$  に重なる。また、頂点も移動し、原点より  $x$  軸方向に 3 大きい点  $(3, 0)$  であることがわかる。



【例題 51】  に適当な数・式を答え、放物線 , ,  $y = -2(x - 4)^2$  のグラフを書け。

1. 頂点  $(0, 0)$ , 軸  $x = 0$   
の放物線  $y = 2x^2$

↓  $x$  軸方向に  
+3 平行移動

頂点  $(\text{ア}, \text{イ})$ ,  
軸  の放物線

これは  $(0, \text{オ})$  を通る

2. 頂点  $(0, 0)$ , 軸  $x = 0$   
の放物線  $y = -3x^2$

↓  $x$  軸方向に  
-2 平行移動

頂点  $(\text{カ}, \text{キ})$ ,  
軸  の放物線

これは  $(0, \text{コ})$  を通る

3. 頂点  $(0, 0)$ , 軸  $x = 0$   
の放物線  $y = -2x^2$

↓  $x$  軸方向に  
サ 平行移動

頂点  $(\text{シ}, \text{ス})$ , 軸

の放物線  $y = -2(x - 4)^2$   
これは  $(0, \text{ソ})$  を通る

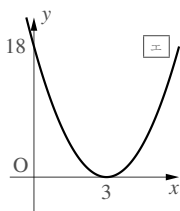
### 【解答】

1. ア, イ:  $(3, 0)$

ウ:  $x = 3$

エ:  $y = 2(x - 3)^2$

オ: 18

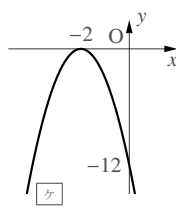


2. カ, キ:  $(-2, 0)$

ク:  $x = -2$

ケ:  $y = -3(x + 2)^2$

コ: -12

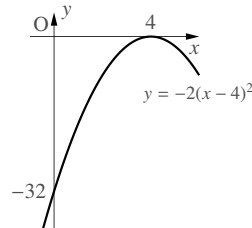


3. サ: +4

シ, ス:  $(4, 0)$

セ:  $x = 4$

ソ: -32



◀ 2次関数の式に  $x = 0$  を代入すればよい。たとえば、1. ならば  $y = 2(x - 3)^2$  に  $x = 0$  を代入して、 $y = 2 \cdot (-3)^2 = 18$  となる。

### $y = a(x - p)^2$ のグラフ

$y = a(x - p)^2$  のグラフは、 $y = ax^2$  のグラフを

「 $x$  軸方向に  $p$  だけ平行移動」

した放物線である。このとき、軸は直線  $x = p$ , 頂点は  $(p, 0)$  となる。

\*11 このことは、式の形からも理解できる。 $y = 2(x - 3)^2$  の  $y$  の値と  $y = 2x^2$  の  $y$  の値を一致させるには、 $2(x - 3)^2$  の  $x$  には、 $2x^2$  の  $x$  より 3 大きい値を代入しなければならない。

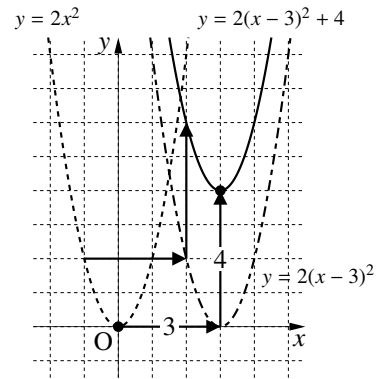
### G. $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

たとえば、 $y = 2(x-3)^2 + 4$  のグラフは、 $y = 2x^2$  のグラフを次のように移動させればよい。

$$y = 2x^2 \xrightarrow[\text{3 平行移動}]{x \text{ 軸方向に}} y = 2(x-3)^2$$

$$\xrightarrow[\text{4 平行移動}]{y \text{ 軸方向に}} y = 2(x-3)^2 + 4$$

この平行移動によって、頂点は、原点より  $x$  軸方向に 3 大きく  $y$  軸方向に 4 大きい点  $(3, 4)$  に移動する。軸は直線  $x = 3$  になる。



【例題 52】  に適当な数・式を答え、放物線 , ,  のグラフを書け。

1. 放物線  $y = 2x^2$

↓  $x$  軸方向に  
+1 平行移動

頂点 (, )、軸   
の放物線

↓  $y$  軸方向に  
+3 平行移動

頂点 (, )、軸   
の放物線

これは  $(0, \text{ケ})$  を通る

2. 放物線  $y = -x^2$

↓  $x$  軸方向に  
-4 平行移動

頂点 (, )、軸   
の放物線

↓  $y$  軸方向に  
+7 平行移動

頂点 (, )、軸   
の放物線

これは  $(0, \text{ツ})$  を通る

3. 放物線  $y = 3x^2$

↓  $x$  軸方向に  
 平行移動

↓  $y$  軸方向に  
 平行移動

頂点  $(1, -5)$ 、軸   
の放物線

これは  $(0, \text{ヌ})$  を通る

### 【解答】

1. ア, イ:  $(1, 0)$ , ウ:  $x = 1$ , エ:  $y = 2(x-1)^2$

オ, カ:  $(1, 3)$ , キ:  $x = 1$ , ク:  $y = 2(x-1)^2 + 3$

ケ:  $y = 2(x-1)^2 + 3$  に  $x = 0$  を代入して、 $y = 2 \cdot (-1)^2 + 3 = 5$

グラフは右欄外の図のようになる。

2. コ, サ:  $(-4, 0)$ , シ:  $x = -4$ , ス:  $y = -(x+4)^2$

セ, ソ:  $(-4, 7)$ , タ:  $x = -4$ , チ:  $y = -(x+4)^2 + 7$

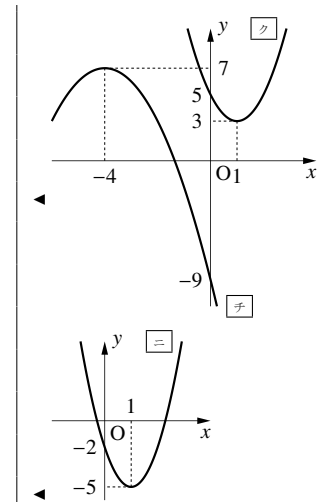
ツ:  $y = -(x+4)^2 + 7$  に  $x = 0$  を代入して、 $y = -4^2 + 7 = -9$

グラフは右欄外の図のようになる。

3. テ: +1, ト: -5, ナ:  $x = 1$ , ニ:  $y = 3(x-1)^2 - 5$

ケ:  $y = 3(x-1)^2 - 5$  に  $x = 0$  を代入して、 $y = 3 \cdot (-1)^2 - 5 = -2$

グラフは右欄外の図のようになる。



### $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

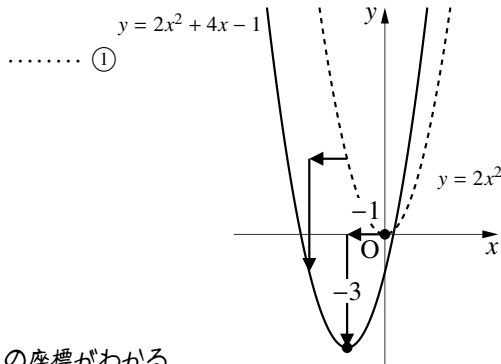
$y = a(x-p)^2 + q$  のグラフは、 $y = ax^2$  のグラフを

「 $x$  軸方向に  $p$  だけ平行移動し、 $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動」  
した放物線である。このとき、軸は直線  $x = p$ 、頂点は  $(p, q)$  となる。

## H. 平方完成

2次式  $ax^2 + bx + c$  を  $a(x-p)^2 + q$  の形に変形することを、平方完成 (completing square) という\*12. たとえば、

$$y = 2x^2 + 4x - 1$$



のグラフを描くには、次のような平方完成が必要となる。

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x - 1 \\ &= 2\{x^2 + 2x\} - 1 && \leftarrow x^2 \text{の係数でくくる} \\ &= 2\{(x+1)^2 - 1\} - 1 && \leftarrow \text{平方の形にする(平方完成)} \\ &= 2(x+1)^2 - 2 - 1 && \leftarrow \{ \} \text{をはずす} \\ &= 2(x+1)^2 - 3 && \leftarrow \text{定数項を整理する, これで頂点の座標がわかる} \end{aligned}$$

①のグラフは、 $y = 2x^2$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-1$ ,  $y$  軸方向に  $-3$  平行移動した放物線になるとわかる。

平方完成の変形のうち、 $\dot{\square}$ を作る変形を取り出すと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} &x^2 + \bigcirc x \\ &\quad \downarrow \text{半分} \\ &= \left( x + \frac{\bigcirc}{2} \right)^2 - \left( \frac{\bigcirc}{2} \right)^2 \\ &\quad \uparrow \text{ここの2乗を引く} \end{aligned}$$

【例題 53】 以下の2次式を平方完成しなさい。

1.  $x^2 + 6x$     2.  $x^2 - 4x$     3.  $x^2 - 8x + 5$     4.  $2x^2 - 4x$     5.  $2x^2 + 4x + 3$     6.  $-3x^2 - 6x + 1$

【解答】

1. $x^2 + 6x$	2. $x^2 - 4x$	3. $x^2 - 8x + 5$
$= (x + 3)^2 - 9$	$= (x - 2)^2 - 4$	$= (x - 4)^2 - 16 + 5$
		$= (x - 4)^2 - 11$
4. $2x^2 - 4x$	5. $2x^2 + 4x + 3$	6. $-3x^2 - 6x + 1$
$= 2(x^2 - 2x)$	$= 2(x^2 + 2x) + 3$	$= -3(x^2 + 2x) + 1$
$= 2\{(x-1)^2 - 1\}$	$= 2\{(x+1)^2 - 1\} + 3$	$= -3\{(x+1)^2 - 1\} + 1$
$= 2(x-1)^2 - 2$	$= 2(x+1)^2 - 2 + 3$	$= -3(x+1)^2 + 3 + 1$
	$= 2(x+1)^2 + 1$	$= -3(x+1)^2 + 4$

\*12 変形によって、 $(x-p)^2$  という平方 (2乗) を作ることから、この名称が付いている。これはたいへん重要な式変形であり、実際、2次方程式の解の公式も、平方完成の考え方で導かれている。

【練習 54 : 平方完成】

以下の2次式を ( $x$  について) 平方完成しなさい。

- (1)  $x^2 - 6x$    (2)  $x^2 + 4x$    (3)  $x^2 - 3x$    (4)  $x^2 - 6x + 3$    (5)  $x^2 - 3x + 1$    (6)  $2x^2 - 8x$   
 (7)  $-2x^2 - 4x$    (8)  $2x^2 + 8x + 1$    (9)  $-3x^2 + 9x + 2$    (10)  $\frac{1}{2}x^2 + 2x$    (11)  $-\frac{1}{3}x^2 - 4x + 3$   
 (12)  $-\frac{3}{2}x^2 - 5x + 1$    (13)  $x^2 - 2ax$    (14)  $2x^2 + 4ax + a^2$

【解答】

$$(1) \quad x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$$

$$(2) \quad x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

$$(3) \quad x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$(4) \quad x^2 - 6x + 3 = (x - 3)^2 - 9 + 3 = (x - 3)^2 - 6$$

$$(5) \quad x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$$(6) \quad 2x^2 - 8x = 2\{x^2 - 4x\} = 2\{(x - 2)^2 - 4\} = 2(x - 2)^2 - 8$$

$$(7) \quad -2x^2 - 4x = -2\{x^2 + 2x\} = -2\{(x + 1)^2 - 1\} = -2(x + 1)^2 + 2$$

$$(8) \quad 2x^2 + 8x + 1 = 2\{x^2 + 4x\} + 1 = 2\{(x + 2)^2 - 4\} + 1 = 2(x + 2)^2 - 8 + 1 = 2(x + 2)^2 - 7$$

$$(9) \quad -3x^2 + 9x + 2 = -3\{x^2 - 3x\} + 2 = -3\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} + 2 = -3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} + 2 = -3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{35}{4}$$

$$(10) \quad \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{1}{2}\{x^2 + 4x\} = \frac{1}{2}\{(x + 2)^2 - 4\} = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2$$

$$(11) \quad -\frac{1}{3}x^2 - 4x + 3 = -\frac{1}{3}\{x^2 + 12x\} + 3 = -\frac{1}{3}\{(x + 6)^2 - 36\} + 3 = -\frac{1}{3}(x + 6)^2 + 12 + 3 = -\frac{1}{3}(x + 6)^2 + 15$$

$$(12) \quad -\frac{3}{2}x^2 - 5x + 1 = -\frac{3}{2}\left\{x^2 + \frac{10}{3}x\right\} + 1 = -\frac{3}{2}\left\{\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}\right\} + 1 = -\frac{3}{2}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{25}{6} + 1 = -\frac{3}{2}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{31}{6}$$

$$(13) \quad x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$$

$$(14) \quad 2x^2 + 4ax + a^2 = 2(x^2 + 2ax) + a^2 = 2\{(x + a)^2 - a^2\} + a^2 = 2(x + a)^2 - a^2$$

◀ 平方完成した

◀ 定数項を整理した

◀ 括弧でまとめて、 $x^2$  の係数を 1 にした

◀ 括弧の中を平方完成した



# I. $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

次のようにして、2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフが必ず放物線になることが分かる。

$y = ax^2 + bx + c$  のグラフ

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a \left\{ x^2 + \frac{b}{a}x \right\} + c \quad \leftarrow x^2 \text{ の係数でくくる}$$

$$= a \left\{ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right\} + c \quad \leftarrow \text{平方完成}$$

$$= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \quad \leftarrow \{ \} \text{をはずす}$$

$$= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \leftarrow \text{定数項を整理する}$$

**$a > 0$  の場合**

**$a < 0$  の場合**

と平方完成して、2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは

- 軸は直線  $x = -\frac{b}{2a}$ 、頂点は  $\left( -\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$  の放物線となる。また、 $y$  軸との交点は  $(0, c)$  である。

上の結果を暗記する必要はない。2次関数のグラフを考えるときは毎回、平方完成をしよう。また、2次関数のグラフには、放物線の開き具合を決めるため、 $y$  軸との交点を必ず書きこむ（軸が直線  $x = 0$  であった場合は、適当な1点を書き込む）。

**【例題 55】** 2次関数  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ,  $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$  について、以下の問いに答えなさい。

- $f(x)$ ,  $g(x)$  を平方完成しなさい。
- $y = f(x)$  の頂点の座標、軸の方程式を求め、グラフを書きなさい（ $y$  軸との交点を書き込むこと）。
- $y = g(x)$  の頂点の座標、軸の方程式を答え、グラフを書きなさい（ $y$  軸との交点を書き込むこと）。

**【解答】**

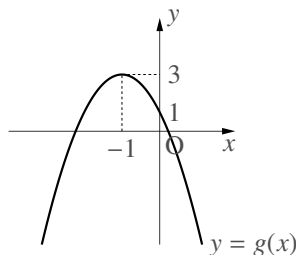
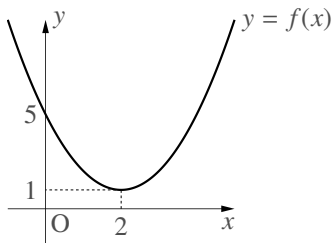
$$1. \quad f(x) = (x-2)^2 - 4 + 5 \quad g(x) = -2\{x^2 + 2x\} + 1$$

$$= (x-2)^2 + 1 \quad = -2\{(x+1)^2 - 1\} + 1$$

$$= -2(x+1)^2 + 2 + 1$$

$$= -2(x+1)^2 + 3$$

2.  $f(x)$  の頂点は **(2, 1)**,  
軸は  $x = 2$  である。
3.  $g(x)$  の頂点は **(-1, 3)**  
軸は  $x = -1$  である。



【練習 56 : 放物線を描く】

次の放物線の頂点の座標と軸の方程式を答え、グラフを描け。

(1)  $y = x^2 - 2x + 3$

(2)  $y = -3x^2 + 6x$

(3)  $y = 2x^2 + 8x + 5$

(4)  $y = -2x^2 - 6x - \frac{5}{2}$

(5)  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$

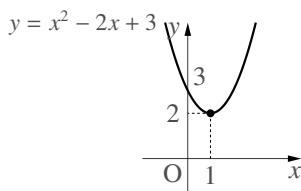
【解答】

(1)  $y = (x - 1)^2 - 1 + 3$

$= (x - 1)^2 + 2$

頂点は **(1, 2)**, 軸は  $x = 1$  であり,

グラフは右図のようになる。



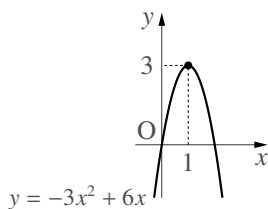
(2)  $y = -3\{x^2 - 2x\}$

$= -3\{(x - 1)^2 - 1\}$

$= -3(x - 1)^2 + 3$

頂点は **(1, 3)**, 軸は  $x = 1$  であり,

グラフは右図のようになる。



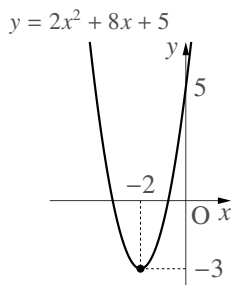
(3)  $y = 2\{x^2 + 4x\} + 5$

$= 2\{(x + 2)^2 - 4\} + 5$

$= 2(x + 2)^2 - 3$

頂点は **(-2, -3)**, 軸は  $x = -2$  であり,

グラフは右図のようになる。



(4)  $y = -2\{x^2 + 3x\} - \frac{5}{2}$

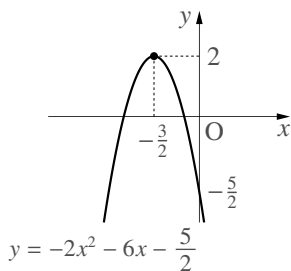
$= -2\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} - \frac{5}{2}$

$= -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} - \frac{5}{2}$

$= -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 2$

頂点は  **$\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$** , 軸は  $x = -\frac{3}{2}$  であり,

グラフは右図のようになる。



(5)  $y = \frac{1}{2}\{x^2 - 2x\} - 2$

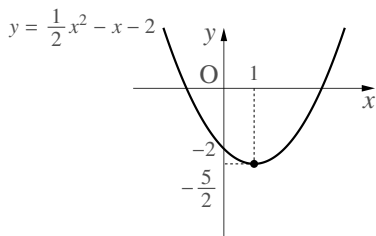
$= \frac{1}{2}\{(x - 1)^2 - 1\} - 2$

$= \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{2} - 2$

$= \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{5}{2}$

頂点は  **$\left(1, -\frac{5}{2}\right)$** , 軸は  $x = 1$  であり,

グラフは右図のようになる。



【練習 57 : 2 次関数の平行移動】

放物線  $y = \frac{1}{2}x^2$  のグラフを平行移動し、頂点が  $(-2, -6)$  となったグラフを  $C$  とする。

- (1) 放物線  $C$  の方程式を求めよ。
- (2)  $C$  を  $x$  軸方向に 3,  $y$  軸方向に  $-2$  平行移動したグラフを  $C_1$  とする。  $C_1$  の頂点の座標と,  $C_1$  の方程式を求めよ。
- (3)  $C$  を平行移動した結果, 頂点が  $(-3, 2)$  にあるグラフを  $C_2$  とする。  $C_2$  の式を求めよ。このとき,  $C$  をどのように平行移動して  $C_2$  になっただろうか。

【解答】

(1) 頂点が  $(-2, -6)$  であり,  $x^2$  の係数が  $\frac{1}{2}$  であるので, 求める  $C$  の方程式

は  $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 6$  である。

(2) 平行移動によって  $C$  の頂点は

$C$ の頂点	$\xrightarrow{\begin{matrix} x \text{ 軸方向に } 3 \\ y \text{ 軸方向に } -2 \end{matrix}}$	$C_1$ の頂点
$(-2, -6)$		$(1, -8)$

と移動するので,  $C_1$  の頂点は  $(1, -8)$  である。

また,  $C_1$  の  $x^2$  の係数は,  $C$  と同じ  $\frac{1}{2}$  であるので,  $C_1$  の方程式は次のようになる。

$$y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 8 \quad \text{または} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{15}{2}$$

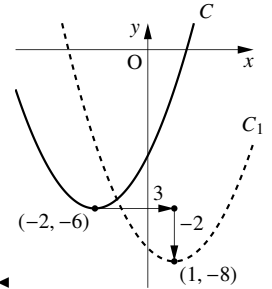
【別解：『グラフの平行移動と方程式』(p.101) を用いて解く】(1) で求めた  $C$  の式の  $x$  を  $x - 3$  に,  $y$  を  $y + 2$  に代えて,  $C_1$  の式を得る。

$$y + 2 = \frac{1}{2}\{(x - 3) + 2\}^2 - 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 8$$

(3)  $C_2$  の  $x^2$  の係数は,  $C$  と同じ  $\frac{1}{2}$  であり,  $C_2$  の頂点の座標は  $(-3, 2)$  であるので,  $C_2$  の方程式は

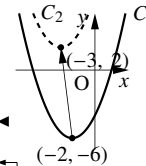
$$y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2 \quad \text{または} \quad y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{13}{2}$$

となる。また, 頂点が  $(-2, -6)$  から  $(-3, 2)$  へ動いて  $C_2$  になるので, これは,  $x$  軸方向に  $-1$ ,  $y$  軸方向に  $8$  平行移動した結果である。



◀  $C_1$  は,  $C$  を平行移動してできる放物線であるから。

◀ 答えは, 平方完成された状態のまま構わない。



◀  $C_2$  は,  $C$  を平行移動してできる放物線であるから。

◀  $-3 - (-2) = -1, 2 - (-6) = 8$

## 2. 2次関数の決定

### A. 準備1～方程式への代入

たとえば、関数  $y = x^2 + bx$  のグラフが  $(2, 1)$  を通るならば、 $y = x^2 + bx$  に  $(x, y) = (2, 1)$  を代入した等式は成り立つ。つまり

$$1 = 2^2 + b \cdot 2 \Leftrightarrow 1 = 4 + 2b$$

より  $b = -\frac{3}{2}$  と分かる。一般に、関数  $y = f(x)$  のグラフが  $(p, q)$  を通るなら  $q = f(p)$  が成り立つ (p.74).

【例題 58】 以下の問いに答えなさい。

- 放物線  $y = -x^2 + bx + 3$  が  $(-1, -3)$  を通るとき、 $b$  の値を求めよ。
- 放物線  $y = 2(x - p)^2 + 3$  が  $(1, 5)$  を通るとき、 $p$  の値を求めよ。

【解答】

1.  $y = -x^2 + bx + 3$  に  $(x, y) = (-1, -3)$  を代入して

$$-3 = -(-1)^2 + b \cdot (-1) + 3 \Leftrightarrow -3 = -1 - b + 3 \quad \therefore b = 5$$

2.  $y = 2(x - p)^2 + 3$  に  $(x, y) = (1, 5)$  を代入して

$$5 = 2(1 - p)^2 + 3 \Leftrightarrow p^2 - 2p = 0 \quad \therefore p = 0, 2$$

◀  $b$  について方程式を解いた

◀  $p$  について (2次) 方程式を解いた

### B. 準備2～連立3元1次方程式を解く

一般に、未知の文字を3つ含む、3つの(1次)連立方程式のことを連立3元1次方程式という。これを解くには、消去する文字を決め、代入法・加減法によって消去すればよい。

【例題 59】 連立3元1次方程式

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x + y - z = 4 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ x - 2y + 3z = -1 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases} \text{ を解こう。}$$

① - ② によって、 $\boxed{\text{ア}}$  を消去した式  $\boxed{\text{イ}}$  を得る。

$2 \times \textcircled{1} + \textcircled{3}$  によって、 $\boxed{\text{ウ}}$  を消去した式  $\boxed{\text{エ}}$  を得る。

イ と エ を連立して、 $(x, z) = (\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}})$  を得て、最後に②から  $y = \boxed{\text{キ}}$  を得る。



「連立3元1次方程式を解く」とは、上の問題でいえば「式①、②、③を全て同時に満たす  $(x, y, z)$  の組を見つける」ということになる。

【解答】 ① - ② によって  $2x + y - 2z = 1$

$$\begin{array}{r} -) \quad x + y - z = 4 \\ \hline x \quad - z = -3 \end{array}$$

であるから、 $(\text{ア})y$  を消去した式  $(\text{イ})x - z = -3$  ( $\cdots \textcircled{2}'$ ) を得る。

また、 $2 \times \textcircled{1} + \textcircled{3}$  によって  $4x + 2y - 4z = 2$

$$+) \quad x - 2y + 3z = -1$$

$$\hline 5x \quad \quad - z = 1$$

であるから、 $(ウ) y$  を消去した式  $(エ) 5x - z = 1$  ( $\dots \textcircled{3}'$ ) を得る.

次に  $z$  を消すために  $\textcircled{2}' - \textcircled{3}'$  をすれば

$$\begin{array}{r} x - z = -3 \\ -) \quad 5x - z = 1 \\ \hline -4x \quad \quad = -4 \quad \therefore x = 1 \text{(オ)} \end{array}$$

この  $x$  の値を  $\textcircled{2}'$  に代入して  $1 - z = -3$  なので  $z = 4$  ( $カ$ )

$x, z$  の値を  $\textcircled{2}$  に代入して、 $1 + y - 4 = 4 \therefore y = 7$  ( $キ$ )

◀  $\textcircled{2}'$ ,  $\textcircled{3}'$  の2つで、連立方程式

$$\begin{cases} x - z - 3 \dots \textcircled{2}' \\ 5x - z = 1 \dots \textcircled{3}' \end{cases}$$

になった.

◀  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{3}$  より、 $\textcircled{2}$  に代入する方が計算が簡単に済む.

### C. 一般型 $y = ax^2 + bx + c$ の決定～軸や頂点について何もわかっていない場合

グラフが通る3点を与えるだけでも、2次関数はただ1つに決まる. この場合は、求める2次関数を  $y = ax^2 + bx + c$  の形において考える.

【例題 60】 (1, 5), (-1, 1), (-2, 2) を通る2次関数を求めてみよう.

1. 求める2次関数を  $y = ax^2 + bx + c$  とおく. これが

(1, 5) を通るので等式  $\boxed{ア}$  を満たし、

(-1, 1) を通るので等式  $\boxed{イ}$  を満たし、

(-2, 2) を通るので等式  $\boxed{ウ}$  を満たす.

2.  $\boxed{ア}$ ,  $\boxed{イ}$ ,  $\boxed{ウ}$  の3元一次連立方程式を解いて、 $(a, b, c) = (\boxed{エ}, \boxed{オ}, \boxed{カ})$  を得るので、求める2次関数は  $\boxed{キ}$  と分かる.

#### 【解答】

1.  $ア: 5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow a + b + c = 5$

$イ: 1 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \Leftrightarrow a - b + c = 1$

$ウ: 2 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Leftrightarrow 4a - 2b + c = 2$

2.  $ア - イ$  より  $a + b + c = 5$

$$\begin{array}{r} -) \quad a + b + c = 5 \\ \quad a - b + c = 1 \\ \hline \quad \quad 2b = 4 \end{array}$$

であるので、 $b = 2$ .

また、 $ウ - イ$  より  $4a - 2b + c = 2$

$$\begin{array}{r} -) \quad a - b + c = 1 \\ \quad 4a - 2b + c = 2 \\ \hline \quad 3a - b = 1 \end{array}$$

であり、 $b = 2$  を代入して解けば、 $a = 1$ .

これを  $イ$  に代入して、 $c = 2$  を得る. つまり、 $エ: 1$ ,  $オ: 2$ ,  $カ: 2$ .

これらを  $y = ax^2 + bx + c$  に代入して、 $キ: y = x^2 + 2x + 2$  となる.

【練習 61 : 軸や頂点について何もわかっていない場合】

グラフが 3 点 A(1, 6), B(-2, -9), C(4, 3) を通るような 2 次関数を求めよ.

【解答】 求める 2 次関数を  $y = ax^2 + bx + c$  とおく. このグラフは

$$A \text{ を通ることから } 6 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$B \text{ を通ることから } -9 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$$

$$C \text{ を通ることから } 3 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = a + b + c & \dots\dots ① \\ -9 = 4a - 2b + c & \dots\dots ② \\ 3 = 16a + 4b + c & \dots\dots ③ \end{cases}$$

を得る. 以下, 3 つの文字を含むこの連立方程式を解く.

まず, ② - ① より

$$\begin{array}{r} 4a - 2b + c = -9 \\ -) a + b + c = 6 \\ \hline 3a - 3b = -15 \end{array} \quad \therefore a - b = -5 \quad \dots ④$$

さらに, ③ - ② より

$$\begin{array}{r} 16a + 4b + c = 3 \\ -) 4a - 2b + c = -9 \\ \hline 12a + 6b = 12 \end{array} \quad \therefore 2a + b = 2 \quad \dots ⑤$$

④, ⑤の連立方程式を解いて  $a = -1, b = 4$ . さらに, これらを①に代入して  $c = 3$  を得る.

よって, 求める 2 次関数は  $y = -x^2 + 4x + 3$  である.

◀ 頂点や軸に関する情報がないので, 一般的な 2 次関数で考える

◀ 『連立 3 元 1 次方程式』(p.94)

◀ 両辺を 3 で割った.

◀ 両辺を 6 で割った.

【練習 62 : 連立 3 元 1 次方程式】

$$\text{連立 3 元 1 次方程式} \begin{cases} 3x + 2y - 2z = 7 & \dots\dots ① \\ x + 3y = -5 & \dots\dots ② \\ -3x + z = -7 & \dots\dots ③ \end{cases} \text{ を解け.}$$

【解答】 まず  $z$  を消そう. ① + 2 × ③ によって

$$\begin{array}{r} 3x + 2y - 2z = 7 \\ +) -6x \quad + 2z = -14 \\ \hline -3x + 2y = -7 \end{array} \quad \dots\dots ①'$$

次に  $x$  を消すために ①' + 3 × ② をすれば

$$\begin{array}{r} -3x + 2y = -7 \\ +) 3x + 9y = -15 \\ \hline 11y = -22 \end{array} \quad \therefore y = -2$$

この  $y$  の値を②に代入して  $x + 3 \cdot (-2) = -5 \therefore x = 1$

さらに,  $x$  の値を③に代入して  $-3 + z = -7 \therefore z = -4$

つまり, 求めるべき解は  $(x, y, z) = (1, -2, -4)$ .

◀  $y$  を消去してもよいが, 少し計算が増える.

$x$  を消去した場合は, 加減法の回数が 1 回余分に必要になる.

◀ これと②の 2 つで, 通常の(文字が 2 つの)連立方程式になった.

**D. 平方完成型  $y = a(x - p)^2 + q$  の決定～軸や頂点について条件が与えられた場合**

頂点とグラフが通る1点、もしくは、軸とグラフが通る2点がわかれば、2次関数はただ1つに決まる。  
p.88の『 $y = a(x - p)^2 + q$  のグラフ』で学んだことを用いて考えよう。

**【例題 63】** 次の4つの2次関数について、問いに答えなさい。

a)  $y = a(x - p)^2 + 2$       b)  $y = a(x - 3)^2 + q$       c)  $y = 3(x - 2)^2 + q$       d)  $y = a(x - 2)^2 + 3$

- 上の2次関数のうち、 $a, p, q$ の値に関係なく頂点が(2, 3)であるものを選び。また、そのグラフが(1, 2)を通るとき、2次関数を決定せよ。
- 上の2次関数のうち、軸が $x = 3$ であるものを選び。また、そのグラフが(1, 4), (-1, -2)を通るとき、2次関数を決定せよ。

**【解答】**

1. 頂点が(2, 3)であるものは**d)**である。グラフが(1, 2)を通るときは、 $y = a(x - 2)^2 + 3$ に $(x, y) = (1, 2)$ を代入して

$$2 = a(1 - 2)^2 + 3 \Leftrightarrow 2 = a + 3$$

より $a = -1$ となるので、 $y = -(x - 2)^2 + 3$ と決定される。

2. 軸が $x = 3$ であるものは**b)**である。

グラフが(1, 4), (-1, -2)を通るときは、 $y = a(x - 3)^2 + q$ が

$$(x, y) = (1, 4) \text{ を通ることから } 4 = a(1 - 3)^2 + q$$

$$(x, y) = (-1, -2) \text{ を通ることから } -2 = a(-1 - 3)^2 + q$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4a + q & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ -2 = 16a + q & \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$  から連立方程式を解いて $(a, q) = \left(-\frac{1}{2}, 6\right)$ となる。つまり、

$$y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 6 \text{ と決定される。}$$

◀「グラフが(1, 2)を通る」  
⇔「方程式に $(x, y) = (1, 2)$ を代入しても等号が成り立つ」



上の問題で、a)は「頂点のy座標が2であるグラフ」、c)は「軸が $x = 2$ であり、 $y = 3x^2$ を平行移動してできたグラフ」ということができる。

**【例題 64】** 2点(0, 0), (3, 6)を通り、軸が $x = 1$ である放物線の方程式を求めよ。

**【解答】** 求める方程式は $y = a(x - 1)^2 + q$ とおくことができる。

$$(0, 0) \text{ を通ることから } 0 = a(0 - 1)^2 + q$$

$$(3, 6) \text{ を通ることから } 6 = a(3 - 1)^2 + q$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a + q & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ 6 = 4a + q & \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$  から連立方程式を解いて $(a, q) = (2, -2)$ となる。つまり、 $y = 2(x - 1)^2 - 2$ と決定される。

◀いいかえれば、頂点の座標を(1, q)とおいた

【練習 65 : 頂点や軸について条件が与えられた場合】

グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ.

- (1) 頂点が  $(1, -3)$  で, 点  $(-1, 5)$  を通る.  
 (2) 軸が直線  $x = -2$  で, 2 点  $(-3, 2)$ ,  $(0, -1)$  を通る.  
 (3) **(発)****(展)** 放物線  $y = -2x^2$  を平行移動した結果, 直線  $y = 2x + 1$  上に頂点があり,  $(3, 3)$  を通る.

【解答】

(1) グラフの頂点が  $(1, -3)$  であるから, 求める 2 次関数は

$$y = a(x - 1)^2 - 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

と表せる. さらに, このグラフは点  $(-1, 5)$  を通るから

$$5 = a(-1 - 1)^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow 5 = 4a - 3 \quad \therefore a = 2$$

式①に  $a = 2$  を代入して, 求める 2 次関数は

$$y = 2(x - 1)^2 - 3 \quad (\text{または } y = 2x^2 - 4x - 1)$$

(2) 軸が直線  $x = -2$  であるから, 求める 2 次関数は

$$y = a(x + 2)^2 + q \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

と表せる. さらに, このグラフは 2 点  $(-3, 2)$ ,  $(0, -1)$  を通るから

$$\begin{cases} 2 = a(-3 + 2)^2 + q \\ -1 = a(0 + 2)^2 + q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a + q \\ -1 = 4a + q \end{cases}$$

この連立方程式を解いて,  $a = -1$ ,  $q = 3$  を得る. ②に代入して

$$y = -(x + 2)^2 + 3 \quad (\text{または } y = -x^2 - 4x - 1)$$

(3) 求める 2 次関数は

$$y = -2(x - p)^2 + 2p + 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

とおくことができる. さらに,  $(3, 3)$  を通るから

$$3 = -2(3 - p)^2 + 2p + 1 \Leftrightarrow 2 = -2(9 - 6p + p^2) + 2p$$

$$\Leftrightarrow 1 = -(9 - 6p + p^2) + p$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 7p + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (p - 2)(p - 5) = 0$$

よって,  $p = 2, 5$  と分かる. ③に代入して

$$p = 2 \text{ のとき, } y = -2(x - 2)^2 + 5 \quad (\text{または } y = -2x^2 + 8x - 3)$$

$$p = 5 \text{ のとき, } y = -2(x - 5)^2 + 11 \quad (\text{または } y = -2x^2 + 20x - 39)$$

◀ 『 $y = a(x - p)^2 + q$  のグラフ』 (p.88)

◀ つまり, ①は  $x = -1$  のとき  $y = 5$  になると分かるので, 式①に  $(x, y) = (-1, 5)$  を代入した.

◀ 答えは, 平方完成された状態のままでも構わない.

◀ 頂点の  $x$  座標は 2,  $y$  座標は分からないので  $q$  とおいた.

◀ ②に  $(x, y) = (-3, 2)$ ,  $(0, -1)$  をそれぞれ代入し, 整頓した

◀ 答えは, 平方完成された状態のままでも構わない.

◀ 頂点の  $x$  座標を  $p$  とすれば,  $y$  座標は  $2p + 1$  となる.

◀ 右辺の 1 だけ移項すれば, 両辺を 2 で割れる.



2次関数の決定にあたっては、未知の2次関数を

- $y = ax^2 + bx + c$  (一般型)
- $y = a(x - p)^2 + q$  (平方完成型)
- $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$  (因数分解型) ← p.123で学ぶ

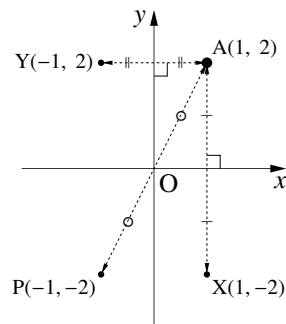
のうち、どの形で表現するかが重要になっている。

### 3. 2次関数の対称移動・平行移動

#### A. 点の対称移動

まず、点  $A(1, 2)$  を対称移動することを考えよう。

- $x$  軸について対称移動したとき  $A(1, 2) \rightarrow X(1, -2)$   
 $x$  座標はそのままにし、 $y$  座標のみ符号を逆転、と同じである。
- $y$  軸について対称移動したとき  $A(1, 2) \rightarrow Y(-1, 2)$   
 $x$  座標のみ符号を逆転、 $y$  座標はそのまま、と同じである。
- 原点について対称移動したとき  $A(1, 2) \rightarrow P(-1, -2)$   
 $x$  座標も  $y$  座標も符号を逆転させることと同じである。



たとえば、 $y$  軸について対称移動しても対称の中心となる  $y$  (座標) はそのままと理解できる。

#### 【例題 66】

1.  $Z(2, -1)$  を  $x$  軸について対称移動した点  $Z_x$ 、 $y$  軸について対称移動した点  $Z_y$ 、原点について対称移動した点  $Z_0$  をそれぞれ求めよ。
2. 以下の点について、 $x$  軸対称な2点の組、 $y$  軸対称な2点の組、原点对称な2点の組をそれぞれすべて答えよ。

$A(4, 1)$ ,  $B(-4, 2)$ ,  $C(4, -1)$ ,  $D(4, -2)$ ,  $E(-4, 1)$

#### 【解答】

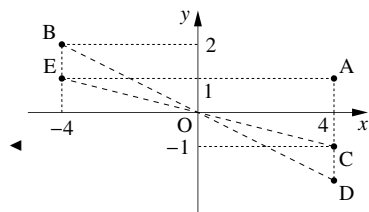
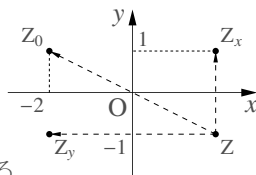
1. 座標平面上での位置関係は右図のようになる。

$Z_x(2, 1)$ ,  $Z_y(-2, -1)$ ,  $Z_0(-2, 1)$

2. 座標平面上での位置関係は右図のようになる。

$x$  軸対称は  $A$  と  $C$ 、 $y$  軸対称は  $A$  と  $E$ 、

原点对称は  $B$  と  $D$ 、 $C$  と  $E$



【練習 67 : 点の対称移動】

次の2点は、 $x$  軸、 $y$  軸、原点のうち、何について対称か、それぞれ答えよ。

- a)  $(-3, 5)$  と  $(3, 5)$                       b)  $(1, 3)$  と  $(-1, -3)$                       c)  $(-2, -3)$  と  $(2, -3)$   
 d)  $(3, 5)$  と  $(3, -5)$                       e)  $(-2, 3)$  と  $(2, -3)$                       f)  $(0, 3)$  と  $(0, -3)$

【解答】 符号に注意すればよい。

- a)  $y$  軸                      b) 原点                      c)  $y$  軸  
 d)  $x$  軸                      e) 原点                      f)  $x$  軸、または原点

◀ 慣れないうちは図を描こう。

B. 文字の置き換えで対称移動を考える

点の対称移動について、以下のことが成り立っていた (p.99).

- $x$  軸について対称移動するには、 $y$  座標のみ符号を逆転させればよい。
- $y$  軸について対称移動するには、 $x$  座標のみ符号を逆転させればよい。
- 原点について対称移動するには、 $x$  座標も  $y$  座標も符号を逆転させればよい。

同じことを、グラフの対称移動にもあてはめることができる。

たとえば、放物線  $y = x^2 + 3x + 2$  の対称移動は次のようになる。

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{( } x \text{ 軸対称移動)}]{y \text{ を } -y \text{ に代える}} -y = x^2 + 3x + 2 \quad (\Leftrightarrow y = -x^2 - 3x - 2)$$

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{( } y \text{ 軸対称移動)}]{x \text{ を } -x \text{ に代える}} y = (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 2 \quad (\Leftrightarrow y = x^2 - 3x + 2)$$

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{( 原点对称移動)}]{x \text{ を } -x \text{ に代えて、} y \text{ を } -y \text{ に代える}} -y = (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 2 \quad (\Leftrightarrow y = -x^2 + 3x - 2)$$

【例題 68】 放物線  $y = 2x^2 - 8x + 9$  を  $C$  とする。

- $C$  を  $x$  軸に関して対称移動した放物線  $C_x$  の方程式は  $\boxed{\text{ア}}$  であり、頂点は  $\boxed{\text{イ}}$  になる。
- $C$  を  $y$  軸に関して対称移動した放物線  $C_y$  の方程式は  $\boxed{\text{ウ}}$  であり、頂点は  $\boxed{\text{エ}}$  になる。
- $C$  を原点に関して対称移動した放物線  $C_o$  の方程式は  $\boxed{\text{オ}}$  であり、頂点は  $\boxed{\text{カ}}$  になる。
- $C$  の頂点は  $\boxed{\text{キ}}$  である。  $C$  と  $C_x$  の頂点を比べると、たしかに  $\boxed{\text{キ}}$  と  $\boxed{\text{イ}}$  が  $x$  軸対称になっているのが分かる。同様に、 $\boxed{\text{キ}}$  と  $\boxed{\text{エ}}$  は  $y$  軸対称、 $\boxed{\text{キ}}$  と  $\boxed{\text{カ}}$  は原点对称であるのが分かる。

【解答】 ア :  $-y = 2x^2 - 8x + 9 \Leftrightarrow y = -2x^2 + 8x - 9$

イ :  $C_x$  の式を平方完成して  $y = -2(x-2)^2 - 1$  を得るので  $(2, -1)$

ウ :  $y = 2(-x)^2 - 8(-x) + 9 \Leftrightarrow y = 2x^2 + 8x + 9$

エ :  $C_y$  の式を平方完成して  $y = 2(x+2)^2 + 1$  を得るので  $(-2, 1)$

オ :  $y = -2(-x)^2 + 8(-x) - 9 \Leftrightarrow y = -2x^2 - 8x - 9$

カ :  $C_o$  の式を平方完成して  $y = -2(x+2)^2 - 1$  を得るので  $(-2, -1)$

キ :  $C$  の式を平方完成して  $y = 2(x-2)^2 + 1$  を得るので  $(2, 1)$

◀  $C$  の式の  $y$  を  $-y$  におきかえた。

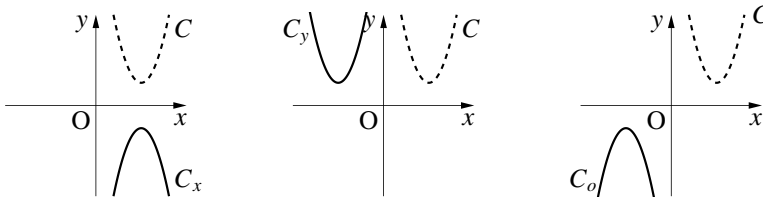
◀  $C$  の式の  $x$  を  $-x$  におきかえた。

◀  $C$  の式の  $x$  を  $-x$  に、 $y$  を  $-y$  におきかえた。

一般に、次のことがどんな関数のグラフでも成り立つ。特に、1次関数や2次関数でも正しい。詳しい証明については、「一般の対称移動について (p.144)」を参照すること。

- $x$  軸について対称移動するには,  $y$  を  $-y$  に代えればよい.
- $y$  軸について対称移動するには,  $x$  を  $-x$  に代えればよい.
- 原点について対称移動するには,  $x$  を  $-x$  に代え,  $y$  を  $-y$  に代えればよい.

前ページの【例題 68】におけるグラフの移動を実際に図示すると, 次のようになる.



### C. 文字の置き換えで平行移動を考える

『 $y = a(x - p)^2$  のグラフ』(p.87) は放物線  $y = ax^2$  を「 $x$  軸方向に  $p$  平行移動」したグラフであり

$$y = ax^2 \xrightarrow{\text{XをX-pに代える}} y = a(x - p)^2$$

と考えられる. 同様に, 「 $y$  軸方向に  $q$  平行移動」することは  $y$  を  $y - q$  におきかえることと同じである. たとえば, 放物線  $y = x^2 + 3x + 2$  を  $x$  軸方向に 4,  $y$  軸方向に  $-1$  移動すれば, 次のようになる.

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{(X軸方向に4移動)}]{\text{XをX-4に代える}} y = (x - 4)^2 + 3(x - 4) + 2 \quad (\Leftrightarrow y = x^2 - 5x + 6)$$

$$\xrightarrow[\text{(Y軸方向に-1移動)}]{\text{YをY+1に代える}} y + 1 = (x - 4)^2 + 3(x - 4) + 2 \quad (\Leftrightarrow y = x^2 - 5x + 5)$$

【例題 69】 放物線  $y = 2x^2 - 8x + 9$  を  $C$  とする.

$C$  を  $x$  軸方向に 1 移動した放物線  $C_1$  の方程式は **ア** であり, さらに,  $C_1$  を  $y$  軸方向に  $-4$  に移動した放物線  $C_2$  の方程式は **イ** である.  $C$  の頂点は **ウ**,  $C_2$  の頂点は **エ** であり, たしかに, **ウ** の  $x$  座標に  $+1$ ,  $y$  座標に  $-4$  すると **エ** になる.

【解答】 ア:  $y = 2(x - 1)^2 - 8(x - 1) + 9 \Leftrightarrow y = 2x^2 - 12x + 19$   
 イ:  $y + 4 = 2x^2 - 12x + 19 \Leftrightarrow y = 2x^2 - 12x + 15$   
 ウ:  $C$  の式を平方完成して  $y = 2(x - 2)^2 + 1$  を得るので **(2, 1)**  
 エ:  $C_2$  の式を平方完成して  $y = 2(x - 3)^2 - 3$  を得るので **(3, -3)**

◀  $C$  の式の  $x$  を  $x - 1$  におきかえた.  
 ▶  $C_1$  の式の  $y$  を  $y - 1$  におきかえた.

- 「 $x$  軸方向に  $p$  平行移動する」には, 方程式の  $x$  を  $x - p$  に代えればよい.
- 「 $y$  軸方向に  $q$  平行移動する」には, 方程式の  $y$  を  $y - q$  に代えればよい.

一般のグラフの平行移動については, 「一般の平行移動について (p.145)」を参照のこと.

【練習 70 : 平行移動・対称移動と 2 次関数の決定】

2 次関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$  のグラフを  $C$  とする.

(1)  $C$  を  $y$  軸について対称移動し,  $y$  軸方向に 2 平行移動したグラフ  $C_1$  の式を求めよ.

(2) (発展) グラフ  $C_2$  を  $x$  軸について対称移動し,  $x$  軸方向に 2 平行移動したら  $C$  と一致した.  $C_2$  の式を求めよ.

【解答】

(1)  $C$  を  $y$  軸対称移動すれば,

$$y = \frac{1}{2}(-x)^2 + 2 \cdot (-x) - 4 = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である. さらに  $y$  軸方向に 2 平行移動させて,  $C_1$  の式を得る.

$$y - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$$

【別解】  $C$  を平方完成すれば  $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 6$  となり,  $C$  の頂点は

$$(-2, -6) \xrightarrow{y \text{ 軸対称移動}} (2, -6) \xrightarrow{y \text{ 軸方向に } 2} (2, -4)$$

と移動するので,  $C_1$  の頂点は  $(2, -4)$  と分かる.  $C$  の式と  $C_1$  の式では  $x^2$  の係数は同じなので放物線  $C_1$  の式は次のようになる.

$$y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 4 \quad \text{または} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$$

(2)  $C$  を  $x$  軸方向に  $-2$  平行移動し,  $x$  軸について対称移動すれば  $C_2$  の式を得る.

$$-y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2(x+2) - 4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 2$$

【別解】 放物線  $C_2$  の頂点の座標を  $(p, q)$  とおく.  $C_2$  の頂点は

$$(p, q) \xrightarrow{x \text{ 軸対称移動}} (p, -q) \xrightarrow{x \text{ 軸方向に } 2} (p+2, -q)$$

と移動する. これが  $C$  の頂点  $(-2, -6)$  と一致するので

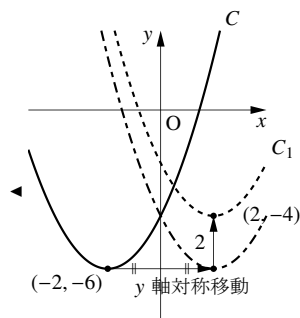
$$p+2 = -2, \quad -q = -6$$

これを解いて,  $p = -4, q = 6$  とわかる.  $C_2$  と  $C$  では, 式の  $x^2$  の係数は正負が逆転して  $-\frac{1}{2}$  になるので  $C_2$  の式は次のようになる.

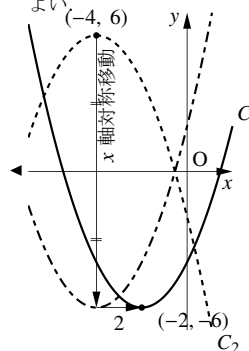
$$y = -\frac{1}{2}(x+4)^2 + 6 \quad \text{または} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 2$$

◀  $x$  を  $-x$  に代えた

◀ 式①の  $y$  を  $y-2$  に代えた



◀ 操作を逆に辿った. 別解に,  $C_2$  の式を  $y = ax^2 + bx + c$  とおいて  $x$  軸移動から  $-y = ax^2 + bx + c$ ,  $x$  軸方向に 2 移動から  $-y = a(x-2)^2 + b(x-2) + c$ , これを展開して  $C$  の式と係数を比べてもよい.



☞ 頂点の移動に着目して, 放物線の移動を考えることもできる. くわしくは「頂点の移動を用いて 2 次関数の移動を考える (p.145)」を参照のこと.

## 4. 2次関数の最大・最小

### A. 2次関数の最大・最小

たとえば、2次関数  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  の最大値・最小値を考えよう。

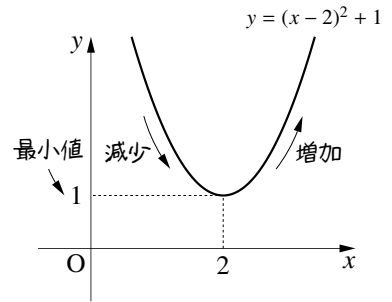
$y = f(x)$  とおけば、 $f(x)$  の最大値・最小値は  $y$  の最大値・最小値に等しい。 $y = f(x)$  のグラフを書けば

$$y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

より右図のようになる。

グラフ上で最も  $y$  座標が小さいのは、 $x = 2$  における  $1$  である。また、 $y$  の値はいくらでも大きくなるので、 $y$  の最大値は存在しない。

こうして、 $f(x)$  は「最小値  $f(2) = 1$ 、最大値なし」とわかる。

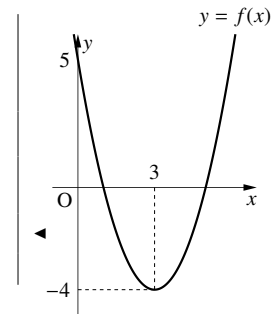


【例題 71】  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  について、 $y = f(x)$  のグラフを書き、最大値・最小値を答えよ。

【解答】  $f(x)$  を平方完成すれば

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 5 \\ &= (x - 3)^2 - 9 + 5 \\ &= (x - 3)^2 - 4 \end{aligned}$$

つまり、 $y = f(x)$  のグラフは右欄外のようになり、最大値はなし、最小値は  $f(3) = -4$  となる。



### B. 定義域が限定された2次関数の最大・最小

定義域をすべての実数にすれば、2次関数には最大値が最小値のどちらかが存在しない。しかし、定義域が限定された場合は、そうとは限らない。

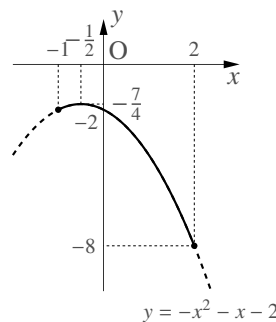
【例題 72】  $f(x) = -x^2 - x - 2$  ( $-1 \leq x \leq 2$ ) について、定義域内での  $y = f(x)$  のグラフを書き、 $f(x)$  の最大値・最小値をそれぞれ求めよ。

【解答】  $f(x)$  を平方完成すると

$$f(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$$

$y = f(x)$  ( $-1 \leq x \leq 2$ ) のグラフは右図の実線部分となるので

$$\begin{aligned} \text{最大値 } f\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{7}{4} \\ \text{最小値 } f(2) &= -8 \end{aligned}$$



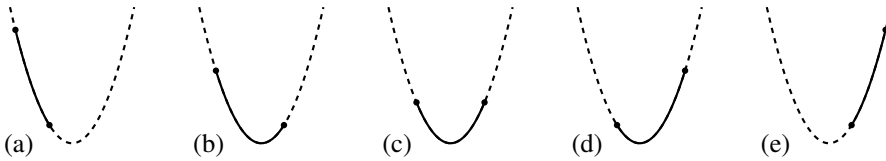
ノートに描くときは、まず点線で描いた後、定義域の範囲内だけ実線へすると、きれいに描きやすい。

【練習 73 : 2 次関数の最大・最小～その 1～】

2 次関数  $f(x) = x^2 - 2x - 2$  を、次の定義域において考える。

- (1)  $-2 \leq x \leq 0$       (2)  $-1 \leq x \leq 2$       (3)  $0 \leq x \leq 2$       (4)  $0 \leq x \leq 3$       (5)  $3 \leq x \leq 4$

それぞれについて、(i)  $y = f(x)$  のグラフを描き、(ii) グラフの形を下の (a)-(e) から 1 つ選び、(iii)  $f(x)$  の最大値・最小値をそれぞれ求めよ。



【解答】 平方完成によって  $f(x) = (x-1)^2 - 3$  と

変形できる。そこで  $y = (x-1)^2 - 3$  のグラフを、与えられた定義域内で描いて考える。

(1) 定義域が  $-2 \leq x \leq 0$  の場合

(i)  $y = f(x)$  のグラフは右図の実線部分

(ii) グラフの形は (a)

(iii) 最大値  $f(-2) = 6$

最小値  $f(0) = -2$

(2) 定義域が  $-1 \leq x \leq 2$  の場合

(i)  $y = f(x)$  のグラフは右図の実線部分

(ii) グラフの形は (b)

(iii) 最大値  $f(-1) = 1$

最小値  $f(1) = -3$

(3) 定義域が  $0 \leq x \leq 2$  の場合

(i)  $y = f(x)$  のグラフは右図の実線部分

(ii) グラフの形は (c)

(iii) 最大値  $f(2) = f(0) = -2$

最小値  $f(1) = -3$

(4) 定義域が  $0 \leq x \leq 3$  の場合

(i)  $y = f(x)$  のグラフは右図の実線部分

(ii) グラフの形は (d)

(iii) 最大値  $f(3) = 1$

最小値  $f(1) = -3$

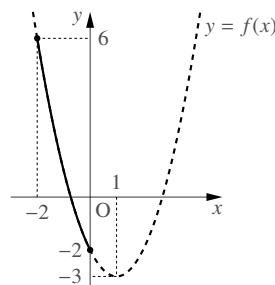
(5) 定義域が  $3 \leq x \leq 4$  の場合

(i)  $y = f(x)$  のグラフは右図の実線部分

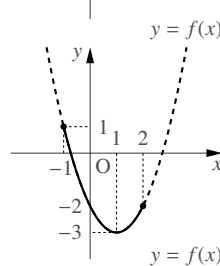
(ii) グラフの形は (e)

(iii) 最大値  $f(4) = 6$

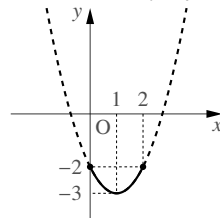
最小値  $f(3) = 1$



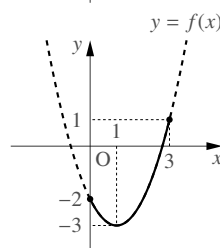
◀ グラフを描くため平方完成した。放物線は下に凸になる。



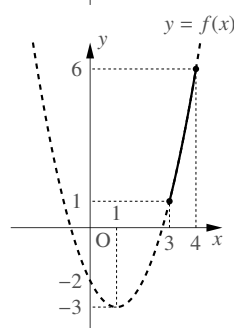
◀ 軸は定義域より右側にあり、 $y$  の値は常に減少している。



◀ 軸は定義域内の右側にある。



◀ 軸は定義域内の真ん中にある。



◀ 軸は定義域内の左側にある。

◀ 軸は定義域より左側にあり、 $y$  の値は常に増加している。

【練習 74 : 2 次関数の最大・最小～その 2～】

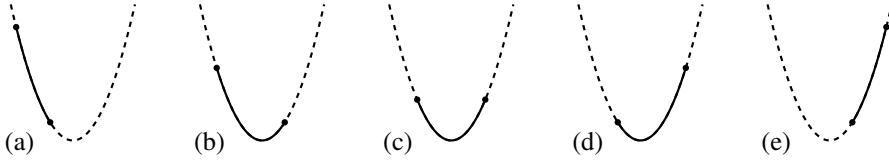
(1)～(3) の 2 次関数は、定義域が  $-1 \leq x \leq 2$  とする。

(1)  $f(x) = x^2 + 4x - 3$

(2)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$

(3)  $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$

それぞれについて、(i)  $y = f(x)$  のグラフを描き、(ii) グラフの形を下の (a)-(e) から 1 つ選び (上に凸なグラフは、上下に反転したものを考えること)、(iii)  $f(x)$  の最大値・最小値をそれぞれ求めよ。



【解答】

(1)  $f(x)$  を平方完成すると

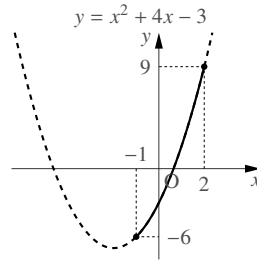
$$f(x) = (x+2)^2 - 7$$

となり、定義域が  $-1 \leq x \leq 2$  の場合

(i)  $y = f(x)$  のグラフは右図の実線部分

(ii) グラフの形は (e)

(iii) 最大値  $f(2) = 9$ 、最小値  $f(-1) = -6$



◀ グラフを描くため平方完成した。放物線は下に凸になる。

◀ 軸は定義域より左側にあり、 $y$  の値は常に増加している。

(2)  $f(x)$  を平方完成すると

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{7}{2}$$

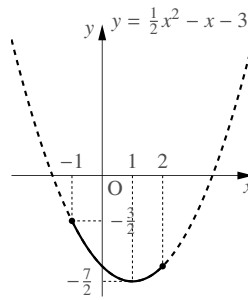
となり、定義域が  $-1 \leq x \leq 2$  の場合

(i)  $y = f(x)$  のグラフは右図の実線部分

(ii) グラフの形は (b)

(iii) 最大値  $f(-1) = -\frac{3}{2}$

$$\text{最小値 } f(1) = -\frac{7}{2}$$



◀ 放物線は下に凸

◀ 軸は定義域内の右側にある。

(3)  $f(x)$  を平方完成すると

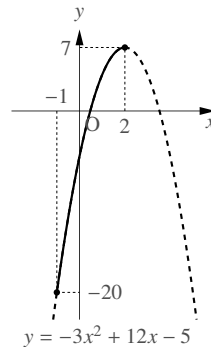
$$f(x) = -3(x-2)^2 + 7$$

となり、定義域が  $-1 \leq x \leq 2$  の場合

(i)  $y = f(x)$  のグラフは右図の実線部分

(ii) グラフの形は (a)

(iii) 最大値  $f(2) = 7$ 、最小値  $f(-1) = -20$

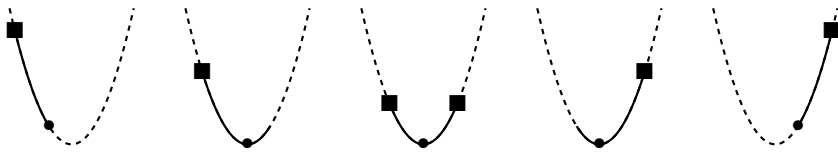


◀ 放物線は上に凸

◀ 軸は定義域内の右端にあり、 $y$  の値は常に増加している。

### C. 文字定数を含む2次関数の最大・最小

定義域が限定された放物線は、最大値・最小値を与えるグラフ上の点に着目すれば、結局次の5種類である(y座標が最大になる点を■, 最小になる点を●で表している).



#### 【練習 75 : 文字定数を含む2次関数の形の判別】

放物線  $C: y = x^2 - 4ax + a^2$  ( $-5 \leq x \leq 5$ ) について以下の間に答えよ.

- (1) この放物線の軸の方程式を,  $a$  を用いて表せ.
- (2)  $a = 2$  のとき,  $y$  が最大・最小となるときの  $x$  の値を, それぞれ求めよ.
- (3)  $a = -1$  のとき,  $y$  が最大・最小となるときの  $x$  の値を, それぞれ求めよ.
- (4)  $C$  の軸が定義域より左側にあるための,  $a$  の範囲を求めよ. また, 定義域内における  $C$  の  $y$  座標の最大値, 最小値を求めよ.
- (5)  $C$  の軸が定義域より右側にあるための,  $a$  の範囲を求めよ. また, 定義域内における  $C$  の  $y$  座標の最大値, 最小値を求めよ.
- (6)  $C$  の軸が定義域の中にあるための,  $a$  の範囲を求めよ.
- (7) (6) のうち, 定義域の左端で  $C$  の  $y$  座標が最大となるような  $a$  の範囲を求め, このときの  $C$  の  $y$  座標の最大値, 最小値を求めよ.

#### 【解答】

- (1)  $y = x^2 - 4ax + a^2$  の右辺を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= (x - 2a)^2 - 4a^2 + a^2 \\ &= (x - 2a)^2 - 3a^2 \end{aligned}$$

となるので, このグラフの軸は  $x = 2a$  である.

- (2) 定義域  $-5 \leq x \leq 5$  の放物線  $C$  は右欄外の図のようになるので, 最大値をとるのは  $x = -5$  のとき.

最小値をとるのは  $x = 4$  のとき.

- (3) 定義域  $-5 \leq x \leq 5$  の放物線  $C$  は右欄外の図のようになるので, 最大値をとるのは  $x = 5$  のとき.

最小値をとるのは  $x = -2$  のとき.

- (4)  $C$  の軸  $x = 2a$  が定義域の左端  $x = -5$  より左にあればよいので

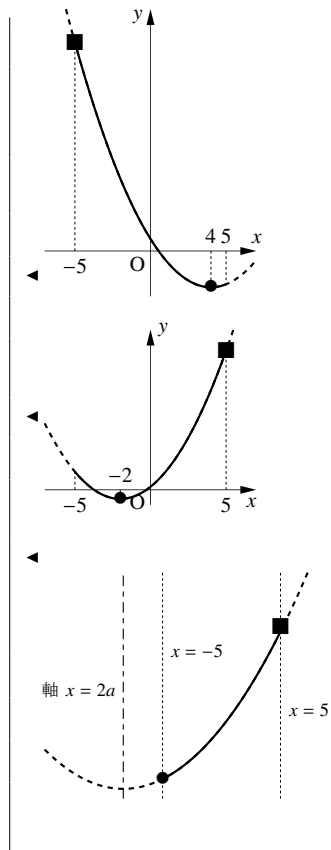
$$2a < -5 \Leftrightarrow a < -\frac{5}{2}$$

$y$  座標が最大となるのは定義域の右端なので

最大値  $a^2 - 20a + 25$  ( $x = 5$  のとき)

$y$  座標が最小となるのは定義域の左端なので

最小値  $a^2 + 20a + 25$  ( $x = -5$  のとき)





(5)  $C$  の軸  $x = 2a$  が定義域の右端  $x = 5$  より右にあればよい.

$$5 < 2a \Leftrightarrow \frac{5}{2} < a$$

$y$  座標が最大となるのは定義域の左端なので

最大値  $a^2 + 20a + 25$  ( $x = -5$  のとき)

$y$  座標が最小となるのは定義域の右端なので

最小値  $a^2 - 20a + 25$  ( $x = 5$  のとき)

(6)  $C$  の軸  $x = 2a$  が定義域の中にあるためには

$$-5 \leq 2a \leq 5 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq a \leq \frac{5}{2}$$

(7) (5) のうち、定義域の左端で  $y$  座標が最大となるには、軸が定義域の右半分に存在すればよい. つまり

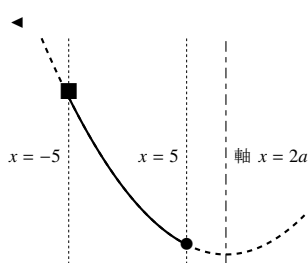
$$0 \leq 2a \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{5}{2}$$

$y$  座標が最大となるのは定義域の左端なので

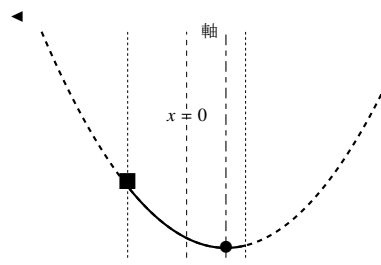
最大値  $a^2 + 20a + 25$  ( $x = -5$  のとき)

$y$  座標が最小となるのは  $C$  の頂点なので

最小値  $-3a^2$  ( $x = 2a$  のとき)



◀ 各辺を 2 で割った.  
『不等式の性質 ii』(p.55) を利用.



上の問題において、 $a = 0$  のときは定義域の両端で最大値をとる.

【練習 76 : 2 次関数の最大・最小 (文字定数を含む場合) ~ その 1 ~】

以下の場合における、2 次関数  $f(x) = x^2 - 2ax$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) の最大値・最小値を求めよ.

(1)  $a \leq -1$

(2)  $1 \leq a$

(3)  $-1 < a < 0$

【解答】  $f(x) = (x-a)^2 - a^2$  と平方完成できるので、 $y = f(x)$  は軸  $x = a$  の放物線になる.

(1) 軸は定義域より左側にあり、右欄外の図のようになるので

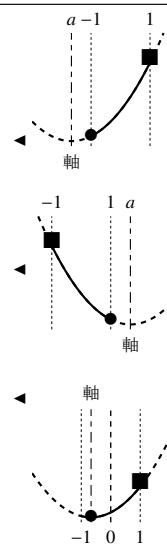
最大値  $f(1) = 1 - 2a$ , 最小値  $f(-1) = 1 + 2a$

(2) 軸は定義域より右側にあり、右欄外の図のようになるので

最大値  $f(-1) = 1 + 2a$ , 最小値  $f(1) = 1 - 2a$

(3) 軸は定義域の左半分にあり、右欄外の図のようになるので

最大値  $f(1) = 1 - 2a$ , 最小値  $f(a) = -a^2$



【発展 77 : 2 次関数の最大・最小 (文字定数を含む場合) ~その2~】

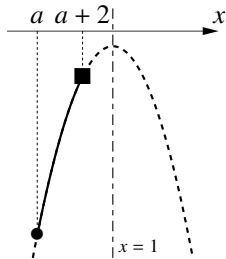
2 次関数  $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$  ( $a \leq x \leq a+2$ ) について, 以下の問いに答えよ.

- ①  $f(x)$  の最大値・最小値を求めよ.      ②  $f(x)$  の最大値が  $-3$  となるときの  $a$  の値を求めよ.

【解答】

①  $f(x) = -2(x^2 - 2x) - 3 = -2\{(x-1)^2 - 1\} - 3 = -2(x-1)^2 - 1$

◀ グラフを書くため平方完成した



i.  $a+2 < 1$  のとき

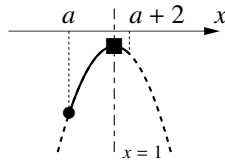
つまり  $a < -1$  のとき

最大値は

$$f(a+2) = -2(a+2-1)^2 - 1 \\ = -2a^2 - 4a - 3$$

最小値は

$$f(a) = -2a^2 + 4a - 3$$



ii.  $a+1 < 1$  かつ

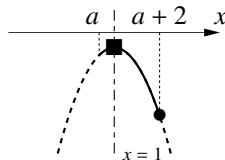
$1 \leq a+2$  のとき

つまり  $-1 \leq a < 0$  のとき

最大値は  $f(1) = -1$

最小値は

$$f(a) = -2a^2 + 4a - 3$$



iv.  $a \leq 1$  かつ

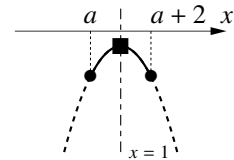
$1 < a+1$  のとき

つまり  $0 < a \leq 1$  のとき

最大値は  $f(1) = -1$

最小値は

$$f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3$$

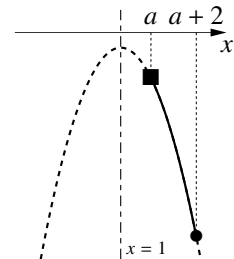


iii.  $a+1 = 1$  のとき

つまり  $a = 0$  のとき

最大値は  $f(1) = -1$

最小値は  $f(0) = f(2) = -3$



v.  $1 < a$  のとき

最大値は

$$f(a) = -2a^2 + 4a - 3$$

最小値は

$$f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3$$

以上をまとめれば次のようになる.

$$\begin{cases} \text{最大値} & \begin{cases} a < -1 \text{ のとき} & f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3 \\ -1 \leq a \leq 1 \text{ のとき} & f(1) = -1 \\ 1 < a \text{ のとき} & f(a) = -2a^2 + 4a - 3 \end{cases} \\ \text{最小値} & \begin{cases} a \leq 0 \text{ のとき} & f(a) = -2a^2 + 4a - 3 \\ 0 < a \text{ のとき} & f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3 \end{cases} \end{cases}$$

( $a$  の場合分けについて, 等号の付け方が違ってても良い. たとえば, 最大値ならば「 $a \leq -1$  のとき」「 $-1 < a < 1$  のとき」「 $1 \leq a$  のとき」と場合分けしてもよい. 最小値なども同様である.)

◀ 以下のように答えてもよい.

$a < -1$  のとき

最大値  $f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3$

最小値  $f(a) = -2a^2 + 4a - 3$

$-1 \leq a < 0$  のとき

最大値  $f(1) = -1$

最小値  $f(a) = -2a^2 + 4a - 3$

$a = 0$  のとき

最大値  $f(1) = -1$ , 最小値  $f(0) = f(2) = -3$

$0 < a \leq 1$  のとき

最大値  $f(1) = -1$

最小値  $f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3$

$1 < a$  のとき

最大値  $f(a) = -2a^2 + 4a - 3$

最小値  $f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3$

② 最大値が  $-3$  となるには

a.  $a < -1$  のとき

$-2a^2 - 4a - 3 = -3$  であればよい. これを解いて  $a = 0, -2$ .

$a < -1$  であるので  $a = -2$  のみ適する.

b.  $-1 \leq a \leq 1$  のとき, 最大値が  $-3$  になることはない.

c.  $a > 1$  のとき

$-2a^2 + 4a - 3 = -3$  であればよい. これを解いて  $a = 0, 2$ .

$1 < a$  であるので  $a = 2$  のみ適する.

以上より, 最大値が  $-3$  になるのは  $a = -2, 2$  のときである.

◀ というのも, 最大値は常に  $-1$  に等しい.

【発展 78 : 2次関数の最大・最小 (文字定数を含む場合) ~その3~】

$a > 0$  とする. 2次関数  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  ( $0 \leq x \leq a$ ) について以下の問に答えよ.

① 最小値を求めよ.

② 最大値を求めよ.

⋮  $a$  の値を  $0$  から増やしていくとき, グラフの最大値・最小値をとる点がいつ変わるのかグラフを描いて考えて, 場合分けをしよう.

【解答】  $y = f(x)$  を平方完成すれば  $y = (x-2)^2 + 1$  となる.

① i)  $0 < a < 2$  のとき

$0 \leq x \leq a$  における  $y = f(x)$  のグラフは右図のようになるので, 最小値は  $f(a) = a^2 - 4a + 5$  となる.

ii)  $2 \leq a$  のとき

$0 \leq x \leq a$  における  $y = f(x)$  のグラフは右図のようになるので, 最小値は  $f(2) = 1$  となる.

以上 i), ii) をまとめると

$0 < a < 2$  のとき, 最小値  $f(a) = a^2 - 4a + 5$

$2 \leq a$  のとき, 最小値  $f(2) = 1$

② i)  $0 < a < 4$  のとき

$0 \leq x \leq a$  における  $y = f(x)$  のグラフは右図のようになるので, 最大値は  $f(0) = 5$  となる.

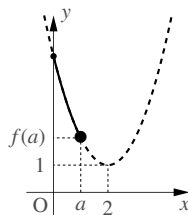
ii)  $4 \leq a$  のとき

$0 \leq x \leq a$  における  $y = f(x)$  のグラフは右図のようになるので, 最大値は  $f(a) = a^2 - 4a + 5$  となる.

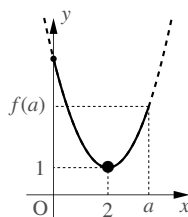
以上 i), ii) をまとめると

$0 < a < 4$  のとき, 最大値  $f(0) = 5$

$4 \leq a$  のとき, 最大値  $f(a) = a^2 - 4a + 5$

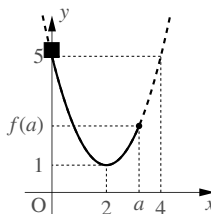


◀ この定義域内では, 関数の値は減少している

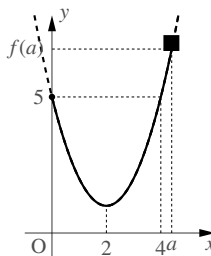


◀ この場合には, 定義域内に軸  $x = 2$  が含まれる

◀ 場合分けは「 $0 < a \leq 2$  のとき」「 $2 < a$  のとき」でもよい.



◀ この場合には, 定義域の両端の  $y$  座標を比べると, 左端の方が大きい.



◀ この場合には, 定義域の両端の  $y$  座標を比べると, 右端の方が大きい.

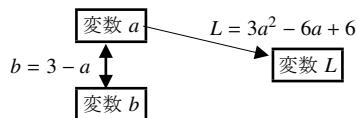
## 5. 2次関数の応用問題

### A. $x$ や $y$ 以外の文字を用いて関数を表現する

$a + b = 3$  のとき、式  $L = 2a^2 + b^2 - 3$  のとる値について考えてみよう。

この  $L$  の値は  $a$  のみによって決まる。実際、 $b = 3 - a$  を  $L$  に代入すれば

$$\begin{aligned} L &= 2a^2 + (3 - a)^2 - 3 = 3a^2 - 6a + 6 \\ &= 3(a - 1)^2 + 3 \quad \leftarrow \text{平方完成した} \end{aligned}$$

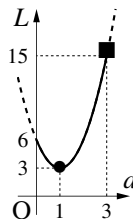


となつて、 $L$  は  $a$  のみで決まることが分かる。そのうえ、平方完成の結果、最大値は無し、最小値は  $a = 1$  のときの  $L = 3$  と分かる。このとき、 $b = 2$  である。

さらに、 $0 \leq a, 0 \leq b$  に限れば、 $b = 3 - a$  を  $0 \leq b$  に代入して

$$0 \leq b \Leftrightarrow 0 \leq 3 - a \Leftrightarrow a \leq 3$$

から、 $0 \leq a \leq 3$  と分かるので、右上のグラフから、 $L$  の最大値は  $a = 3$  のときの  $L = 15$  と分かる。このとき、 $b = 0$  である。



☞  $a = 3 - b$  によって  $a$  を消去して考えても、 $L$  の最大・最小について同じ結果を得る。

【例題 79】 実数  $p, q$  に対して、 $L = p^2 - q^2$  とする。

- $p + 2q = 9$  であるとき、 $L$  の最大値・最小値と、そのときの  $p, q$  の値を求めよ。
1. に加えて  $0 \leq p, 0 \leq q$  であるとき、 $L$  の最大値・最小値と、そのときの  $p, q$  の値を求めよ。

### 【解答】

- $p = 9 - 2q$  を  $L$  に代入して平方完成すれば

$$\begin{aligned} L &= (9 - 2q)^2 - q^2 = 3q^2 - 36q + 81 \\ &= 3(q^2 - 12q) + 81 \\ &= 3\{(q - 6)^2 - 36\} + 81 \\ &= 3(q - 6)^2 - 27 \end{aligned}$$

となる。 $q = 6$  のときに最小値  $-27$  をとる。 $q = 6$  のときは  $p = -3$  なので、 $L$  の最大値はなし、最小値は  $-27$  ( $p = -3, q = 6$ ) である。

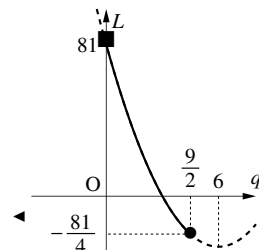
- $p = 9 - 2q$  を  $0 \leq p$  に代入して

$$0 \leq p \Leftrightarrow 0 \leq 9 - 2q \Leftrightarrow q \leq \frac{9}{2}$$

であるので  $0 \leq q \leq \frac{9}{2}$  である。 $L = 3(q - 6)^2 - 27$  ( $0 \leq q \leq \frac{9}{2}$ ) のグラフは右欄外の図のようになるので、 $q = 0$  のとき  $L$  は最大、 $q = \frac{9}{2}$  のとき  $L$  は最小と分かる。よつて、 $p = 9, q = 0$  のとき最大値  $81$ 、 $p = 0, q = \frac{9}{2}$  のとき最小値  $-\frac{81}{4}$  と求められる。

☞  $q = \frac{9-p}{2}$  を代入してもよいが、計算は大変になる。

☞  $p = 9 - 2q$  に  $q = 6$  を代入すれば、 $p = -3$  を得る。



☞  $p = 9 - 2q$  に  $q = 0$  を代入すれば、 $p = 9$  を得る。

☞  $p = 9 - 2q$  に  $q = \frac{9}{2}$  を代入すれば、 $p = 0$  を得る。

## B. 2次関数の最大・最小の応用

2次関数の知識を利用して、身近にある様々な問題を解くことができる。

### 【練習 80 : 2次関数の身近な例への応用】

- (1) 長さ 20 cm の針金を 2 つに切り、それぞれの針金で正方形を作るとき、それらの面積の和の最小値を求めよ。また、そのとき針金は何 cm ずつに切り分けられているか求めよ。
- (2) ある品物の売価が 1 個 120 円するときには、1 日の売上個数は 400 個であり、売価を 1 個につき 1 円値上げするごとに、1 日の売上個数は 2 個ずつ減るといふ。1 日の売上金額を最大にするには、売価をいくりに設定すればよいか求めよ。

### 【解答】

(1) 20 cm の針金を、 $4x$  cm と  $(20 - 4x)$  cm に切り分けたとする。ただし、

$0 < x < 5$  とする。それぞれの針金から作られる正方形の面積は

$$\frac{4x}{4} \times \frac{4x}{4} = x^2, \quad \frac{20-4x}{4} \times \frac{20-4x}{4} = (5-x)^2$$

となる。2 つの正方形の面積の和を  $f(x)$  ( $\text{cm}^2$ ) とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + (5-x)^2 = 2x^2 - 10x + 25 \\ &= 2\left\{x^2 - 5x\right\} + 25 \\ &= 2\left\{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right\} + 25 \\ &= 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} \end{aligned}$$

と変形できるから、 $y = f(x)$  ( $0 < x < 5$ ) のグラフは右欄外の図のようになる。これより最小値は  $f\left(\frac{5}{2}\right)$  と分かるので、面積の和の最小値は  $\frac{25}{2} \text{ cm}^2$  であり、 $4x = 10$  のとき最小値となるから針金は **10 cm ずつ** に切り分けられる。

(2) 売価を 1 個  $x$  円 ( $0 \leq x \leq 320$ ) とすると、120 円より  $(x - 120)$  円値上げしたことになる。その結果、1 日の売上個数は  $2(x - 120)$  個減る。

よって、1 日の売上金額  $f(x)$  は

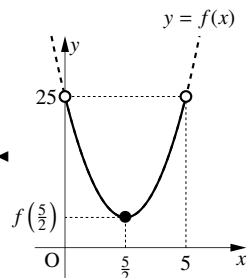
$$\begin{aligned} f(x) &= x\{400 - 2(x - 120)\} = x(640 - 2x) \\ &= -2x^2 + 640x \\ &= -2(x^2 - 320x) \\ &= -2\left\{(x - 160)^2 - 25600\right\} \\ &= -2(x - 160)^2 + 51200 \end{aligned}$$

と変形できるから、 $y = f(x)$  のグラフは  $0 \leq x \leq 320$  で右欄外の図のようになる。これより、 $x = 160$  で最大値をとると分かるので、売価を **160 円** にすればよい。

◀  $x$  cm と  $(20 - x)$  cm に切り分けた、とおいてもよいが、計算はとても大変になる。

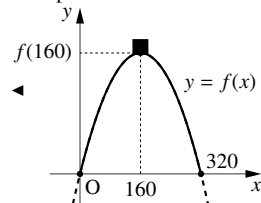
◀  $x$  の値によって「2 つの正方形の面積の和」を決める式を  $f(x)$  とおいている。

◀  $f(x)$  の最小値を求めたいので平方完成する



◀ 値上げすれば売上個数は減る。しかし、売上個数を増やすために値下げすればよいとも限らない。

◀ 【別解】 $f(x) = -2x(x - 320)$  と変形すると、放物線の軸に対する対称性から、 $f(x) = 0$  の 2 解 0, 320 の真ん中  $x = 160$  において、 $f(x)$  が最大値をもつとわかる。詳しくは p.123 を参照のこと。



【練習 81 : 1 つの文字に帰着できる 2 次関数】

$0 \leq x, 0 \leq y, 2x + y = 10$  のとき,  $L = x^2 + y^2 - 3$  の最大値・最小値を求めよ. また, そのときの  $x, y$  を求めよ.

【解答】  $2x + y = 10$  より  $y = 10 - 2x$ . これを  $0 \leq y$  に代入すれば

$$0 \leq y \Leftrightarrow 0 \leq 10 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x \leq 5$$

であるので  $0 \leq x \leq 5$  である.

さらに,  $x^2 + y^2 - 3$  に  $y = 10 - 2x$  を代入すれば

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 3 &= x^2 + (10 - 2x)^2 - 3 \\ &= 5x^2 - 40x + 97 \end{aligned}$$

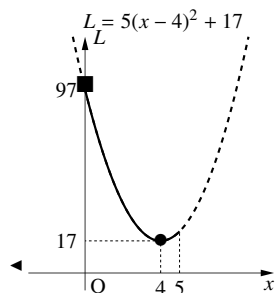
である. これを  $f(x)$  とおいて平方完成すると

$$f(x) = 5(x - 4)^2 + 17$$

そこでグラフ  $L = f(x)$  ( $0 \leq x \leq 5$ ) を描けば, 右欄外のようになり,  $f(x)$  の最大値は  $f(0) = 97$ , 最小値は  $f(4) = 17$  とわかる. よって

$$x = 0, y = 10 \text{ のとき最大値 } 97, x = 4, y = 2 \text{ のとき最小値 } 17$$

◀ 条件式と, 最大・最小を求めたい関数から,  $y$  を消去することが目的.  
 $x$  について解いてもよいが, 分数が出てしまう.



C. 式の一部を置き換える

【(発)展) 82 : 式の一部を文字でおく】

①  $t = x^2 - 2x$  について,  $t$  の値のとりうる範囲を求めよ.

② 関数  $y = (x^2 - 2x)^2 + 4x^2 - 8x + 5$  について,  $y$  の値のとりうる範囲を求めよ.

【解答】

① 平方完成によって

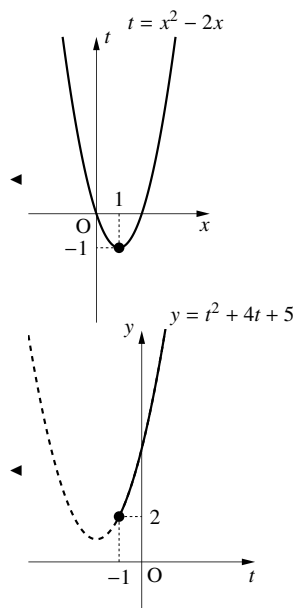
$$t = (x - 1)^2 - 1$$

であるので, 右欄外の図より  $t \geq -1$ .

②  $y$  を  $t$  で表し平方完成すれば

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) + 5 \\ &= t^2 + 4t + 5 \\ &= (t + 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

となる. (1) より  $-1 \leq t$  であるので,  $t$  に対する  $y$  のグラフは右欄外の図のようになる. つまり,  $y \geq 2$ .



【**発展** 83 : 2文字2次式の最大・最小】

$x$  の2次関数  $y = 2x^2 + 4kx + k^2 + 4k - 2$  について、 $y$  の最小値  $m$  を  $k$  を用いて表せ。さらに、 $m$  の最大値とそのときの  $k$  の値を求めよ。

【解答】  $x$  について平方完成すれば

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 + 2kx) + k^2 + 4k - 2 \\ &= 2\{(x+k)^2 - k^2\} + k^2 + 4k - 2 \\ &= 2(x+k)^2 - k^2 + 4k - 2 \end{aligned}$$

であるので、 $y$  の最小値  $m$  は、 $x = -k$  のときの  $m = -k^2 + 4k - 2$  である。さらに

$$m = -(k-2)^2 + 2$$

と変形できるので、 $k = 2$  のとき  $m$  は最大値  $2$  をとる。

【**発展** 84 : 2次関数の利用】

3辺が  $3\text{ cm}$ 、 $4\text{ cm}$ 、 $5\text{ cm}$  の直角三角形の紙から、はさみを使って鋭角を切り落とし、面積が最大の長方形を作るにはどのようにすればよいか。

【解答】 右図のように、 $OA = 4$ 、 $AB = 3$ 、 $OB = 5$  の直角三角形と長方形  $PQRA$  で考える。

$BR = 3x$  とおく ( $0 < x < 1$ ) と、 $QR \parallel OA$  より  $\triangle BRQ \sim \triangle BAO$  であるので

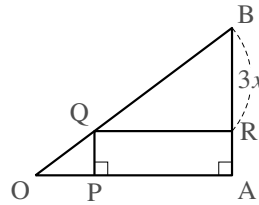
$$BR : RQ = BA : AO \Leftrightarrow 3 : x = 3 : 4$$

から  $QR = 4x$  になる。また、 $AR = 3 - 3x$  になる。

よって、長方形  $PQRA$  の面積  $S$  は

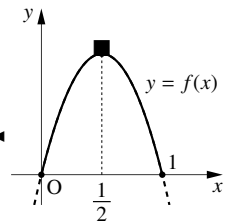
$$\begin{aligned} S &= 4x(3 - 3x) = -12x^2 + 12x \\ &= -12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 \end{aligned}$$

となるから、 $x = \frac{1}{2}$  のとき、面積最大と分かる。このとき、 $BR = \frac{3}{2}$ 、 $QR = 2$  であるから、各辺の midpoint に長方形の頂点に来るように作ればよいと分かる。



◀ この問題では、どこを  $x$  とおいても解くことができる。たとえば  $RA = x$  とおいた場合は、 $QR = x$  と  $\triangle QPO \sim \triangle BAO$  を使うのがよい。

ただし、 $BR = x$  のようにおくと計算が大変になる。

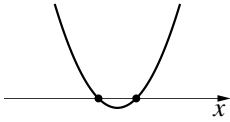


## 6. 放物線と $x$ 軸の位置関係 — 判別式 $D$

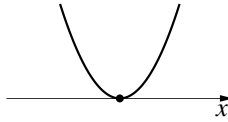
### A. 放物線と $x$ 軸の共有点

放物線と  $x$  軸の共有点は、最大で2個になる。たとえば、下に凸な放物線ならば以下のようなになる。

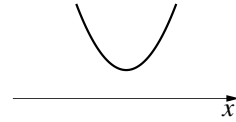
i)  $x$  軸と2つの共有点をもつ



ii)  $x$  軸と1つの共有点をもつ



iii)  $x$  軸と共有点をもたない



放物線が上に凸の場合も、上下が逆になる以外は同様の結果になる。

【例題 85】 次の2次関数のグラフと  $x$  軸の共有点の個数を、それぞれ答えよ。

1.  $y = (x - 1)^2 - 5$

2.  $y = -(x - 3)^2 - 2$

3.  $y = 2x^2 + 8x + 1$

【解答】 グラフを書いて考える。

1. 共有点を2つもつ。

2. 共有点はない。

3. 平方完成すれば  $y = 2(x + 2)^2 - 7$  となり、共有点を2つもつ。

### B. 放物線の判別式 $D$

放物線と  $x$  軸の共有点の個数は、放物線の頂点の  $y$  座標が正であるか、0であるか、負であるかによって決定される。一般の放物線  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) の平方完成は

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

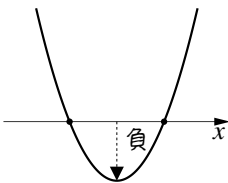
となり、頂点の  $y$  座標は、 $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$  である (p.91)。よって、 $a > 0$  の場合は次のようになる。

$a > 0$  の場合

i)  $b^2 - 4ac > 0$  のとき

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(\text{正})}{(\text{正})}$$

より、頂点の  $y$  座標は負。

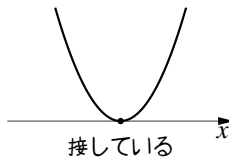


$x$  軸との共有点は2つ

ii)  $b^2 - 4ac = 0$  のとき

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{0}{(\text{正})}$$

より、頂点の  $y$  座標は0。

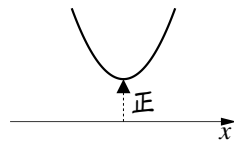


$x$  軸との共有点は1つ  
放物線の頂点が共有点

iii)  $b^2 - 4ac < 0$  のとき

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(\text{負})}{(\text{正})}$$

より、頂点の  $y$  座標は正。



$x$  軸との共有点はない

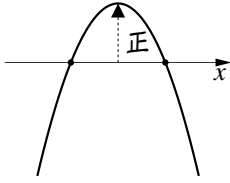


【例題 86】  $a < 0$  とする. 以下の  に「正」「負」「0」「1」「2」のいずれかを入れよ.

i)  $b^2 - 4ac > 0$  のとき

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

より, 頂点の  $y$  座標は .

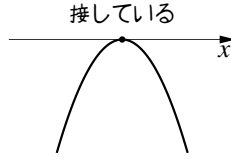


$x$  軸との共有点は  個

ii)  $b^2 - 4ac = 0$  のとき

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

より, 頂点の  $y$  座標は .

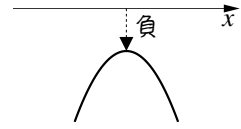


$x$  軸との共有点は  個

iii)  $b^2 - 4ac < 0$  のとき

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

より, 頂点の  $y$  座標は .



$x$  軸との共有点は  個

【解答】

- i) ア: 正, イ: 負, ウ: 正, エ: 2      ii) オ: 0, カ: 負, キ: 0, ク: 1  
 iii) ケ: 負, コ: 負, サ: 負, シ: 0

放物線の判別式  $D$

放物線  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  と  $x$  軸の共有点の個数は, 判別式  $D = b^2 - 4ac$  を用いて判別できる.

i)  $D > 0$  のとき

放物線  $y = f(x)$  は  $x$  軸と「2つの共有点をもつ」

ii)  $D = 0$  のとき

放物線  $y = f(x)$  は  $x$  軸と「1つの共有点をもち」, 「 $x$  軸と接する (contact)」.

ただ 1 つの共有点  $(-\frac{b}{2a}, 0)$  は接点 (point of contact) とよばれ, 放物線の頂点に一致する.

iii)  $D < 0$  のとき

放物線  $y = f(x)$  は  $x$  軸と「共有点をもたない」



「 $x$  軸との共有点の個数を判別する」2 次関数の判別式  $D$  と, 「実数解の個数を判別する」2 次方程式の判別式  $D$  (p.67) の関係については p.117 で学ぶ.

【例題 87】 以下の  に適当な数値を入れよ.

- 放物線  $y = 2x^2 + 5x - 1$  は, 判別式  $D$  の値が  なので,  $x$  軸との共有点は  個である.
- 放物線  $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$  は, 判別式  $D$  の値が  なので,  $x$  軸との共有点は  個である.
- 放物線  $y = \frac{2}{3}x^2 + 3x + 5$  は, 判別式  $D$  の値が  なので,  $x$  軸との共有点は  個である.

【解答】

- (1) ア:  $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 33$ , イ: 2      (2) ウ:  $D = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 0$ , イ: 1  
 (3) ア:  $D = 3^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = -\frac{13}{3}$ , イ: 0

【練習 88：放物線と  $x$  軸との共有点の個数の判別】

2 次関数  $y = x^2 - (k-1)x + \frac{1}{4}k^2 + k + 1$  のグラフ  $C$  について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $k = -4$  のとき、放物線  $C$  と  $x$  軸との共有点の個数はいくつあるか。
- (2)  $k = 2$  のとき、放物線  $C$  と  $x$  軸との共有点の個数はいくつあるか。
- (3)  $C$  と  $x$  軸との共有点の個数が 2 個、1 個、0 個であるための、定数  $k$  の条件をそれぞれ答えよ。

【解答】

(1)  $k = -4$  のとき、 $C: y = x^2 + 5x + 1$  であるので

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$$

であるので、共有点は **2 個** 存在する。

(2)  $k = 2$  のとき、 $C: y = x^2 - x + 4$  であるので

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$$

であるので、共有点は**存在しない**

(3)  $y = x^2 - (k-1)x + \frac{1}{4}k^2 + k + 1$  の判別式を  $D$  とすると

$$\begin{aligned} D &= (k-1)^2 - 4\left(\frac{1}{4}k^2 + k + 1\right) \\ &= k^2 - 2k + 1 - k^2 - 4k - 4 = -6k - 3 \end{aligned}$$

i) 共有点が 2 個、つまり、 $D > 0$  のとき

$$-6k - 3 > 0 \text{ を解いて } k < -\frac{1}{2}$$

ii) 共有点が 1 個、つまり、 $D = 0$  のとき

$$-6k - 3 = 0 \text{ を解いて } k = -\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

iii) 共有点が 0 個、つまり、 $D < 0$  のとき

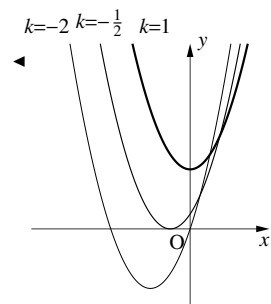
$$-6k - 3 < 0 \text{ を解いて } k > -\frac{1}{2}$$

以上 i)~iii) より、共有点の個数は次のようになる。

$$k < -\frac{1}{2} \text{ のとき } \quad \mathbf{2 \text{ 個}} \quad k = -\frac{1}{2} \text{ のとき } \quad \mathbf{1 \text{ 個}}$$

$$k > -\frac{1}{2} \text{ のとき } \quad \mathbf{0 \text{ 個}}$$

◀ このとき、グラフと  $x$  軸は接している。



1. 2次方程式の判別式  $D$  と2次関数の判別式  $D$  を同一視する

A. 放物線と  $x$  軸の共有点

2次関数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  において、判別式  $D = b^2 - 4ac$  が0以上であれば、放物線  $y = f(x)$  が  $x$  軸と共有点をもつ (p.115). このとき、「共有点の  $x$  座標」を求めてみよう.

【暗記 89 : 2次関数と  $x$  軸の共有点の座標~その1~】

以下の  にあてはまる数値・式・言葉を答えよ.

1. 2次関数  $y = x^2 - x - 2$  のグラフにおいて、 $y$  座標が0になる点を求めるには、2次方程式

= 0

を解けばよい. その結果、 $A(\text{イ}, 0)$ ,  $B(\text{ウ}, 0)$  と分かる.

2. 2次関数  $y = x^2 - 2x - 4$  のグラフと  軸の共有点を求めるには、2次方程式

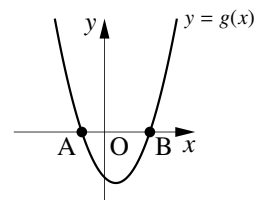
$x^2 - 2x - 4 = 0$

を解けばよい. その結果、 $(\text{オ}, \text{カ})$ ,  $(\text{キ}, \text{ク})$  と分かる.

3. 2次関数  $y = x^2 - 2x + 4$  のグラフにおいて  $y$  座標が0になる点を求めるには

= 0 ..... ①

という2次方程式を解けばよい. この2次方程式の判別式  $D$  を計算すると0より  ため、①は解を持たない. つまり、2次関数  $y = x^2 - 2x + 4$  のグラフは  $y$  座標が0になることはない.



【解答】

1. ア:  $x^2 - x - 2$ , イ:  $-1$ , ウ:  $2$   
 2. エ:  $x$ , (オ, カ) =  $(1 - \sqrt{5}, 0)$ , (キ, ク) =  $(1 + \sqrt{5}, 0)$   
 3. ケ:  $x^2 - 2x + 4$   
 コ:  $\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \cdot 4 < 0$  より、0より小さい

◀  $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$   
 ▶  $x^2 - 2x - 4 = 0$  を解の公式で解いた.

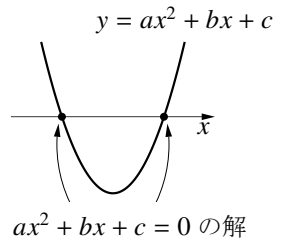
放物線と  $x$  軸との共有点

判別式  $D$  が0以上である2次関数

$y = ax^2 + bx + c$

のグラフと  $x$  軸 ( $y = 0$ ) との共有点の  $x$  座標は、次の2次方程式の解である.

$ax^2 + bx + c = 0$



【練習 90 : 放物線と  $x$  軸との共有点を調べる】

次の放物線と  $x$  軸との共有点があるならば、その共有点の座標を求めよ。

(1)  $y = x^2 - x - 1$

(2)  $y = -4x^2 + 4x - 1$

(3)  $y = x^2 - x + 1$

【解答】

(1) 2 次方程式  $x^2 - x - 1 = 0$  を解けば

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

であるので、このグラフと  $x$  軸の共有点の座標は

$$\left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0 \right), \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 0 \right) \text{ となる.}$$

(2) 2 次方程式  $-4x^2 + 4x - 1 = 0$  を解けば

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0$$

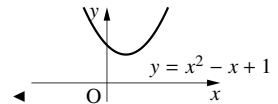
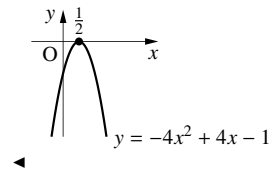
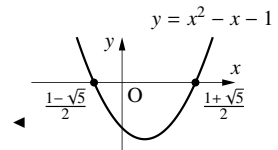
より、 $x = \frac{1}{2}$  なので、 $\left( \frac{1}{2}, 0 \right)$  が共有点である。

(3) 2 次方程式  $x^2 - x + 1 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$$

なので、 $x$  軸と共有点をもたない。

◀ 『解の公式』 (p.65)



【練習 91 :  $x$  軸と接するための条件】

放物線  $y = 4x^2 + 2(k - 1)x - k + 4$  が  $x$  軸と接するよう定数  $k$  の値を定めよ。また、そのときの接点を求めよ。

【解答】 2 次関数  $y = 4x^2 + 2(k - 1)x - k + 4$  の判別式  $D = 0$  であればよい。

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - 4(-k + 4)$$

$$= k^2 - 2k + 1 + 4k - 16$$

$$= k^2 + 2k - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k + 5)(k - 3) = 0 \quad \therefore k = -5, 3$$

$k = -5$  のとき

$$y = 4x^2 + 2(k - 1)x - k + 4 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

より、接点は  $\left( \frac{3}{2}, 0 \right)$  である。

$k = 3$  のとき

$$y = 4x^2 + 2(k - 1)x - k + 4 = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

より、接点は  $\left( -\frac{1}{2}, 0 \right)$  である。

◀ 『判別式  $D$  と放物線の関係』 (p.115)

◀ または  $D = 4k^2 + 8k - 60$

## B. 2次方程式の解をグラフで表す

p.117の「放物線とx軸との共有点」を逆に考えれば、次のことがわかる。

2次方程式の解をグラフに表す

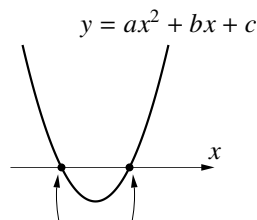
判別式  $D$  が 0 以上である 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解は、2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

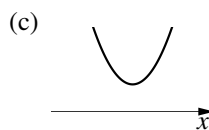
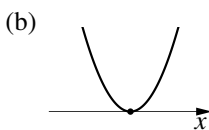
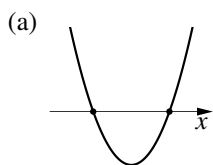
のグラフと  $x$  軸との「共有点の  $x$  座標」に表れる。



$ax^2 + bx + c = 0$  の解

### 【暗記 92 : 2 次方程式の解をグラフで表す】

次の空欄に適切な数字または文字を入れよ。



1. 2 次方程式  $x^2 - 4x - 5 = 0$  の解は

2 次関数 ア

..... ①

と  $x$  軸との「共有点の  $x$  座標」に一致し、イ、ウ である。

また、2 次関数①のグラフは、上の (a), (b), (c) のうち、エ に一番近い。

2. 2 次方程式  $9x^2 - 6x + 1 = 0$  の解は

2 次関数 オ

..... ②

と  $x$  軸との「共有点の  $x$  座標」に一致し、カ である。

また、2 次関数②のグラフは、上の (a), (b), (c) のうち、キ に一番近い。

3. 2 次方程式  $x^2 - 4x + 5 = 0$  の解は

2 次関数 ク

..... ③

と  $x$  軸との「共有点の  $x$  座標」に一致するが、これは存在しない。

2 次関数③のグラフは、上の (a), (b), (c) のうち、ケ に一番近い。

### 【解答】

1. ア:  $y = x^2 - 4x - 5$ , イ:  $-1$ , ウ:  $5$ , エ: (a)

2. オ:  $y = 9x^2 - 6x + 1$ , カ:  $\frac{1}{3}$ , キ: (b)

3. ク:  $y = x^2 - 4x + 5$ , ケ: (c)

◀ イ, ウは  $x^2 - 4x - 5 = 0$  の 2

解 ◀ カは  $9x^2 - 6x + 1 = 0$  の解

◀  $x^2 - 4x + 5 = 0$  は  $\frac{D}{4} = -1 < 0$

であり、解を持たない。

### C. 判別式 $D$

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  においても、2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  においても、判別式  $D$  は同一の式

$$D = b^2 - 4ac$$

で定義され、以下のことが成り立つ。

「2次方程式の解」と「放物線と  $x$  軸との共有点の  $x$  座標」の対応

$a \neq 0$  である2次式  $ax^2 + bx + c$  に対し

- 放物線  $y = ax^2 + bx + c$  と  $x$  軸の共有点の個数
- 方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解の個数

は一致し、判別式  $D = b^2 - 4ac$  に対して

$D > 0$  ならば2個、 $D = 0$  ならば1個\*13、 $D < 0$  ならば0個

である。また、 $D \geq 0$  ならば次も一致する。

- 放物線  $y = ax^2 + bx + c$  と  $x$  軸との共有点の  $x$  座標
- 方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解の値

判別式 $D$ の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ ( $a > 0$ のとき)			
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ ( $a < 0$ のとき)			
$ax^2 + bx + c = 0$ の解	2解 $\alpha, \beta$	重解 $\alpha$	なし

【例題 93】 以下の  に当てはまる語句・式・値を答えよ。

- 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の判別式  $D$  は  を判別する式である。
- 放物線  $y = ax^2 + bx + c$  の判別式  $D$  は  を判別する式である。
- これら2つの判別式は一致する。なぜなら、 を判別するには、 $y = ax^2 + bx + c$  の  に  を代入して得られる方程式  を解くからである。

【解答】 ア：(2次方程式の) 解の個数、イ：放物線と  $x$  軸の共有点の個数 (または、位置関係)

ウ： $y$ 、エ： $0$ 、オ： $ax^2 + bx + c = 0$

\*13 ここでは重解を「1個」と数えている。一般的には、重複度を込めて「2個」と数えることが多い。

§2.6 で学ぶ 2 次不等式において、前ページの内容は必要不可欠になる。

## 2. 2 次方程式・2 次関数の応用

### A. 放物線と直線・放物線の共有点

放物線と直線・放物線の共有点についても、p.78 のときと同じことが成り立つ。つまり、グラフの共有点の座標と連立方程式の解は一致する。

連立方程式の解が無い場合は、グラフの共有点も無い。解の個数も、解の数値も、「グラフの共有点の座標と連立方程式の解は一致する」。

たとえば、放物線  $y = x^2 - 4x + 5$  と直線  $y = 2x - 3$  の共有点の座標  $(x, y)$  は

$$y = x^2 - 4x + 5 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = 2x - 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を同時に満たす  $(x, y)$  と等しい。つまり、連立方程式①、②を解けばよい。①を式②の左辺に代入して解けば

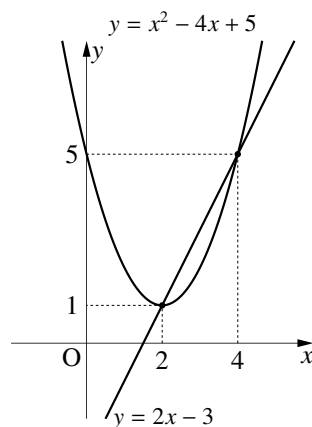
$$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \therefore x = 2, 4$$

となる。そこで、②に代入して  $y$  を求めれば

$$x = 2 \text{ のとき } y = 1, \quad x = 4 \text{ のとき } \textcircled{2} \text{ より } y = 5$$

であるので、共有点の座標は  $(2, 1)$ 、 $(4, 5)$  とわかる。



**【例題 94】** 放物線  $C: y = x^2 - 2x + 3$  と直線  $L: y = -x + 5$  との共有点を求め、 $C$  と  $L$  のグラフを描け。

**【解答】**  $C$  と  $L$  の共有点の座標は、連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ y = -x + 5 & \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

の解に一致する。②の左辺に①を代入して解けば

$$x^2 - 2x + 3 = -x + 5$$

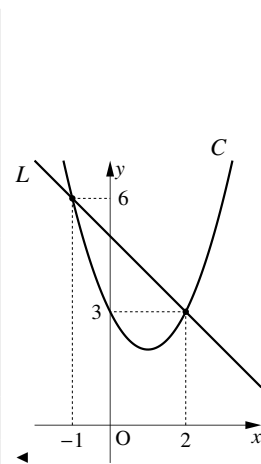
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad \therefore x = 2, -1$$

となる。②に代入して  $y$  を求めれば

$$x = -1 \text{ のとき } y = 6, \quad x = 2 \text{ のとき } y = 3$$

であるので、共有点の座標は  $(-1, 6)$ 、 $(2, 3)$ 。

グラフは、右欄外のようなになる。



【練習 95：放物線と直線・放物線の共有点】

放物線  $C: y = x^2 - 2x + 3$  について

- (1) 放物線  $C_1: y = -x^2 - x + 6$  との共有点を求め、 $C$  と  $C_1$  のグラフを描け。  
 (2) 直線  $L: y = -2x - k$  との共有点が 1 つであるように、 $k$  の値を定めよ。  
 また、そのときの  $C$  と  $L$  のグラフを描け。

【解答】

(1)  $C$  と  $C_1$  の共有点の座標は、連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 & \dots\dots\dots ① \\ y = -x^2 - x + 6 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

の解に一致する。②の左辺に①を代入して解けば

$$x^2 - 2x + 3 = -x^2 - x + 6$$

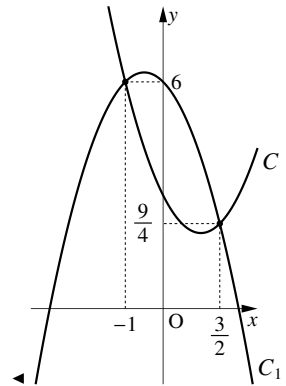
$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{2}, -1$$

となる。②に代入し  $y$  を求めれば

$$x = \frac{3}{2} \text{ のとき } y = \frac{9}{4}, \quad x = -1 \text{ のとき } y = 6$$

であるので、共有点の座標は  $(-1, 6)$ ,  $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ 。

グラフは、右欄外のようになる。



(2) 2 つのグラフの共有点が 1 つであるには、連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 & \dots\dots\dots ③ \\ y = -2x - k & \dots\dots\dots ④ \end{cases}$$

の解が重解であればよい。④の左辺に③を代入して

$$x^2 - 2x + 3 = -2x - k$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 + k = 0 \quad \dots\dots\dots ⑤$$

となる。⑤の判別式を  $D$  が 0 となればよいので、

$$\frac{D}{4} = 0^2 - 1 \cdot (3 + k) = 0 \quad \therefore k = -3$$

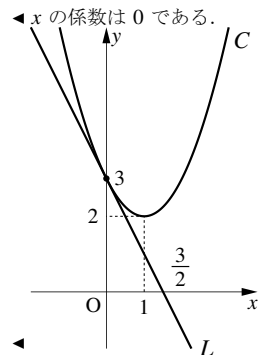
④に代入して、直線  $L$  を表す式は  $y = -2x + 3$  となる。

$C$  と  $L$  の共有点は、再び連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

を解いて  $(x, y) = (0, 3)$ 。

つまり、グラフは右欄外のようになる。

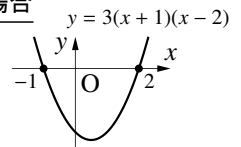


放物線と直線・放物線の共有点が 1 点のときも、その 2 つのグラフは「接している」といい、その共有点をやはり「接点」という。たとえば、(2) において、直線  $L$  と放物線  $C$  は接していて、その接点は  $(0, 3)$  である。



**B. 2次関数・因数分解型  $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$  の決定～ $x$ 軸との共有点が与えられた場合**

たとえば、2次関数  $y = 3(x + 1)(x - 2)$  と  $x$  軸の共有点を考えよう。これは2次方程式  $3(x + 1)(x - 2) = 0$  の2解であり、ただちに  $x = -1, 2$  を得て、右図のようなグラフを描くことができる。



**【例題 96】** 次の2次関数と  $x$  軸の共有点を求めよ。

1.  $y = (x + 2)(x - 3)$

2.  $y = 2(x - 1)(x + 3)$

3.  $y = -3(x - 4)(x + 1)$

**【解答】**

1. 共有点の座標は  $(-2, 0)$ ,  $(3, 0)$  である。
2. 共有点の座標は  $(-3, 0)$ ,  $(1, 0)$  である。
3. 共有点の座標は  $(4, 0)$ ,  $(-1, 0)$  である。

- ◀  $(x + 2)(x - 3) = 0$  を解いた
- ◀  $2(x - 1)(x + 3) = 0$  を解いた
- ◀  $-3(x - 4)(x + 1) = 0$  を解いた

上の事実を逆に応用して、『2次関数の決定』(p.94) をすることができる。

**【例題 97】** 放物線  $C$  と  $x$  軸との共有点の  $x$  座標が 1, 3 であったならば、 $C$  の方程式は

$$y = a(x - \boxed{\text{ア}})(x - \boxed{\text{イ}})$$

と書ける。もし、 $C$  が  $(2, -2)$  を通るならば、 $C$  の方程式は  $\boxed{\text{ウ}}$  である。

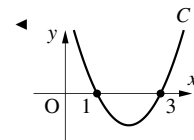
**【解答】** ア：1, イ：3 (ア, イは順不同)

ウ：式  $y = a(x - 1)(x - 3)$  に  $(x, y) = (2, -2)$  を代入して

$$-2 = a(2 - 1)(2 - 3) \Leftrightarrow -2 = -a$$

つまり、 $a = 2$  となるので、 $C$  の方程式は

$$y = 2(x - 1)(x - 3) \Leftrightarrow y = 2x^2 - 8x + 6 \text{ となる。}$$



- ◀ 因数分解型については展開した方がよい。

**【練習 98：2次関数の決定 ( $x$  軸との共有点の座標が与えられた場合)】**

$x$  軸と  $(-1, 0)$ ,  $(2, 0)$  で交わり、点  $(1, 2)$  を通る放物線の方程式を求めよ。

**【解答】** 求める方程式は  $y = a(x + 1)(x - 2)$  とおける。これは  $(1, 2)$  を通るので

$$2 = a(1 + 1)(1 - 2) \Leftrightarrow 2 = -2a$$

を得る。これより、 $a = -1$  となるので、求める2次関数は

$$y = -(x + 1)(x - 2) \Leftrightarrow y = -x^2 + x + 2 \text{ となる。}$$

- ◀ 放物線と  $x$  軸の共有点の  $x$  座標が  $-1, 2$

## 2.6 2次不等式と2次関数

この節では、2次式で表された不等式「2次不等式」について学ぶ。p.79で学んだように、1次不等式は1次関数と1次方程式と深い関係があった。  
2次不等式の場合は、むしろ、2次関数と2次方程式を用いて解くことになる。

### 1. 2次不等式の解法の基礎

2次式を含む不等式を**2次不等式** (quadratic inequality) といい、不等式を満たす  $x$  の値の範囲をその不等式の解、解を求めることを不等式を解くという。たとえば、2次不等式

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす  $x$  の値について考えてみると、 $x = 2, 3$  は $\textcircled{1}$ を満たすので解であり、 $x = 0, 5$  は解ではない。

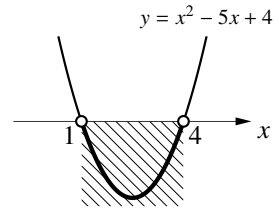
#### A. 2次不等式の解法の基本

2次不等式を解くには、次のように考えるのが最もよい。

「2次不等式  $x^2 - 5x + 4 < 0$  を解け」

↔  $y = x^2 - 5x + 4$  とおいたとき、 $y < 0$  であるような  $x$  の範囲を求めよ

↔ 「2次関数  $y = x^2 - 5x + 4$  のグラフにおいて、  
y 座標が 0 より小さいときの x 座標の範囲を求めよ」



こうして、2次不等式を解くことを、2次関数と2次方程式の問題として考えることができる。 $\textcircled{1}$ の場合

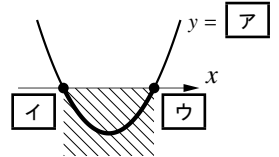
$$x^2 - 5x + 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x-1)(x-4)}_{y \text{ とおく}} < 0 \leftarrow \text{因数分解した}$$

であるので、この左辺を  $y$  とおいた、2次関数  $y = (x-1)(x-4)$  のグラフを描けば右上図のようになる。 $y < 0$  となる  $x$  の範囲は  $1 < x < 4$  であるので、 $\textcircled{1}$ の解は  $1 < x < 4$  となる。

**【例題 99】** 2次不等式  $x^2 - 6x + 8 \leq 0$  を解こう。

1. 左辺を因数分解すると  $\boxed{\text{ア}} \leq 0$  となるので、 $y = \boxed{\text{ア}}$  のグラフは右欄外のようになる。

2.  $y \leq 0$  となる  $x$  の範囲が解なので、 $\boxed{\text{エ}}$  が解になる。



**【解答】**

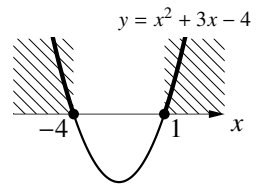
1. ア： $(x-2)(x-4)$ ， イ：2， ウ：4      2. エ： $2 \leq x \leq 4$

⋮ 2次不等式を解くためには、2次関数の頂点を求める必要がない。x軸との共有点の座標さえ求めれば十分である。

2次不等式  $x^2 + 3x - 4 \geq 0$  の場合は

$$x^2 + 3x - 4 \geq 0$$

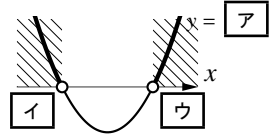
$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+4)(x-1)}_{y \text{ とおく}} \geq 0 \quad \leftarrow \text{因数分解した}$$



であるので、この左辺を  $y$  とおいた、2次関数  $y = (x+4)(x-1)$  のグラフを描けば右上図のようになる。  
 $y \geq 0$  となる  $x$  の範囲は  $x \leq -4, 1 \leq x$  であるので、 $x^2 + 3x - 4 \geq 0$  の解は  $x \leq -4, 1 \leq x$  となる。

**【例題 100】** 2次不等式  $x^2 - x - 6 > 0$  を解こう。

1. 左辺を因数分解すると  $\square{\text{ア}} > 0$  となるので、 $y = \square{\text{ア}}$  のグラフは右欄外のようになる。
2.  $y > 0$  となる  $x$  の範囲が解なので、 $\square{\text{エ}}$  が解になる。



**【解答】**

1. ア :  $(x+2)(x-3)$ , イ :  $-2$ , ウ :  $3$
2. エ :  $x < -2, 3 < x$

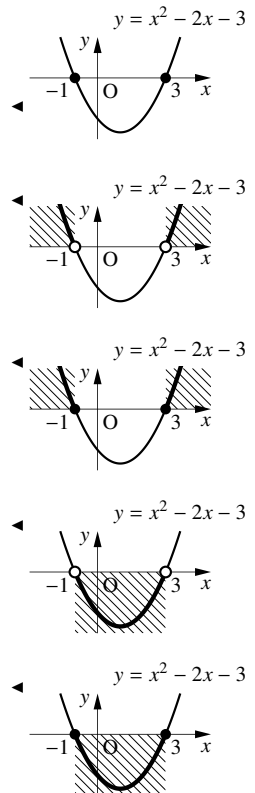
**【例題 101】**

1. 2次関数  $y = x^2 - 2x - 3$  のグラフと  $x$  軸との共有点があれば求めよ。
2. 次の2次不等式を解け。

i)  $x^2 - 2x - 3 > 0$       ii)  $x^2 - 2x - 3 \geq 0$       iii)  $x^2 - 2x - 3 < 0$       iv)  $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

**【解答】**

1. 2次方程式  $x^2 - 2x - 3 = 0$  を解けば  $x = -1, 3$  となるので、共有点の座標は  $(-1, 0), (3, 0)$  になる。
2. i)  $\underbrace{x^2 - 2x - 3}_{y \text{ の値}} > 0$  となるのは右欄外の図の斜線部分であるので  
 $x < -1, 3 < x$   
 が2次不等式  $x^2 - 2x - 3 > 0$  の解となる。
- ii)  $\underbrace{x^2 - 2x - 3}_{y \text{ の値}} \geq 0$  となるのは右欄外の図の斜線部分であるので  
 $x \leq -1, 3 \leq x$   
 が2次不等式  $x^2 - 2x - 3 \geq 0$  の解となる。
- iii)  $\underbrace{x^2 - 2x - 3}_{y \text{ の値}} < 0$  となるのは右欄外の図の斜線部分であるので  
 $-1 < x < 3$   
 が2次不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  の解となる。
- iv)  $\underbrace{x^2 - 2x - 3}_{y \text{ の値}} \leq 0$  となるのは右欄外の図の斜線部分であるので  
 $-1 \leq x \leq 3$   
 が2次不等式  $x^2 - 2x - 3 \leq 0$  の解となる。



【練習 102 : 2 次不等式~その 1~】

次の 2 次不等式を解け。

- (1)  $(x-3)(x+2) \leq 0$     (2)  $x^2 - 6x + 8 < 0$     (3)  $x^2 + 3x + 2 \geq 0$     (4)  $2x^2 + 3x - 2 > 0$   
 (5)  $x^2 - 16 < 0$     (6)  $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$     (7)  $-2x^2 + 3x - 1 < 0$     (8)  $1 - x^2 > 0$

【解答】

(1) 右欄外の図より、 $-2 \leq x \leq 3$  が解となる。

(2)  $x^2 - 6x + 8 < 0$  の左辺を因数分解して

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-4) < 0$$

となる。右欄外の図より、 $2 < x < 4$  が解となる。

(3)  $x^2 + 3x + 2 \geq 0$  の左辺を因数分解して

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2) \geq 0$$

となる。右欄外の図より、 $x \leq -2, -1 \leq x$  が解となる。

(4)  $2x^2 + 3x - 2 > 0$  の左辺を因数分解して

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+2) > 0$$

となる。右欄外の図より、 $x < -2, \frac{1}{2} < x$  が解となる。

(5)  $x^2 - 16 < 0$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-4) < 0$$

から、 $-4 < x < 4$  が解となる。

(6)  $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

となる。右欄外の図より、 $-4 \leq x \leq 2$  が解となる。

(7)  $-2x^2 + 3x - 1 < 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x-1) > 0$$

から、 $x < \frac{1}{2}, 1 < x$  が解となる。

(8)  $1 - x^2 > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0$$

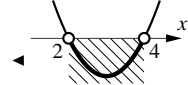
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1) \leq 0$$

となる。右欄外の図より、 $-1 < x < 1$  が解となる。

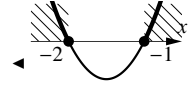
$$y = (x-3)(x+2)$$



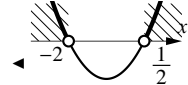
$$y = (x-2)(x-4)$$



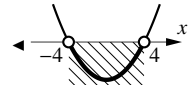
$$y = (x+1)(x+2)$$



$$y = (2x-1)(x+2)$$



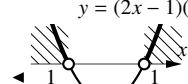
$$y = (x+4)(x-4)$$



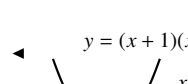
◀ 両辺を  $-1$  倍した。不等号が逆になることに注意!  
 $y = -(x+4)(x-2)$



◀ 両辺を  $-1$  倍した。不等号が逆になることに注意!  
 $y = -(2x-1)(x-1)$



◀ 両辺を  $-1$  倍した。不等号が逆になることに注意!  
 $y = -(x+1)(x-1)$



…  $x^2$  の係数が負の場合は両辺を  $(-1)$  倍して、 $x^2$  の係数を正にすれば、下に凸なグラフだけを考えればよい。

## B. 解の公式が必要な 2 次不等式

2 次式を有理数の範囲で因数分解できないときは、解の公式を用いよう (p.65).

### 【例題 103】

- 2 次関数  $y = x^2 - 2x - 1$  のグラフと  $x$  軸との共有点の座標を求めなさい.
- 2 次不等式  $x^2 - 2x - 1 < 0$  を解け.

### 【解答】

1. 2 次方程式  $x^2 - 2x - 1 = 0$  の解を解いて

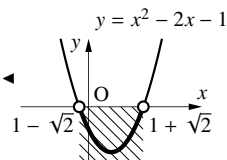
$$x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

なので、共有点は  $(1 - \sqrt{2}, 0)$ 、 $(1 + \sqrt{2}, 0)$  となる.

2.  $y = x^2 - 2x - 1$  のグラフは右欄外の図のようになり、 $y < 0$  は斜線部分である. よって、求める解は  $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$  である.

◀ 『解の公式』を用いて、

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4}}{2} \text{ でもよい.}$$



### 【練習 104 : 2 次不等式～その 2～】

次の 2 次不等式を解け.

(1)  $x^2 - x - 5 \leq 0$

(2)  $x^2 - 4x + 1 < 0$

(3)  $2x^2 - 3x - 4 \geq 0$

(4)  $x^2 - 13 > 0$

### 【解答】

- (1)  $x^2 - x - 5 = 0$  を解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 20}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

右欄外の図より、 $\frac{1 - \sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$  が解となる.

- (2)  $x^2 - 4x + 1 = 0$  を解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

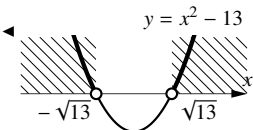
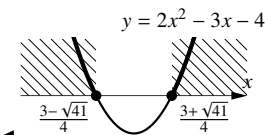
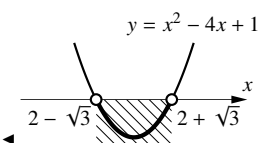
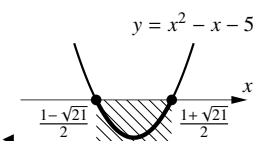
右欄外の図より、 $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$  が解となる.

- (3)  $2x^2 - 3x - 4 = 0$  を解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

右欄外の図より、 $x \leq \frac{3 - \sqrt{41}}{4}$ 、 $\frac{3 + \sqrt{41}}{4} \leq x$  が解となる.

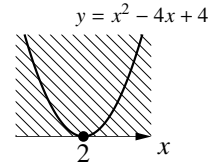
- (4)  $x^2 - 13 = 0$  を解くと  $x = \pm \sqrt{13}$  なので、 $x < -\sqrt{13}$ 、 $\sqrt{13} < x$  が解となる.



C. 判別式  $D = 0$  の場合の 2 次不等式

2 次不等式  $x^2 - 4x + 4 \geq 0$  の場合は

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-2)^2}_{y \text{ とおく}} \geq 0 \leftarrow \text{因数分解した}$$



であるので、この左辺を  $y$  とおいた、2 次関数  $y = (x-2)^2$  のグラフを描けば右上図のようになる。 $y \geq 0$  となる  $x$  の範囲はすべての実数であるので、 $x^2 - 4x + 4 \geq 0$  の解は「すべての実数」となる。

【例題 105】

- 1. 2 次関数  $y = 4x^2 - 4x + 1$  のグラフと  $x$  軸との共有点があれば求めよ。
- 2. 次の 2 次不等式を解け。
  - i)  $4x^2 - 4x + 1 > 0$
  - ii)  $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$
  - iii)  $4x^2 - 4x + 1 < 0$
  - iv)  $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

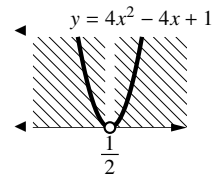
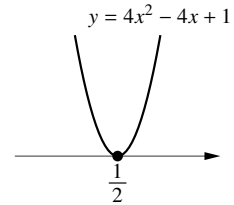
【解答】

1. 2 次方程式  $4x^2 - 4x + 1 = 0$  を解けば

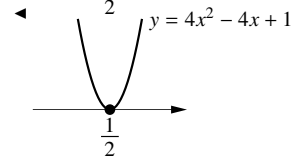
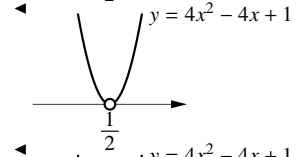
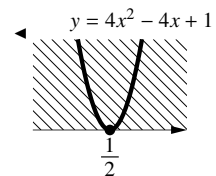
$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

となるので、共有点の座標は  $(\frac{1}{2}, 0)$  である(接点)。

- 2. i) 右欄外のように図を描けば、 $\underbrace{4x^2 - 4x + 1}_{y \text{ の値}} > 0$  となるのは斜線部分である。  
よって、2 次不等式  $4x^2 - 4x + 1 > 0$  の解は  $x < \frac{1}{2}$  ,  $\frac{1}{2} < x$  である。
- ii) 右欄外のように図を描けば、 $\underbrace{4x^2 - 4x + 1}_{y \text{ の値}} \geq 0$  となるのは斜線部分である。  
よって、2 次不等式  $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$  の解はすべての実数である。
- iii) 右欄外のように図を描けば、 $\underbrace{4x^2 - 4x + 1}_{y \text{ の値}} < 0$  となる  $x$  は存在しないとわかる。  
よって、2 次不等式  $4x^2 - 4x + 1 < 0$  の解は解なしである。
- iv) 右欄外のように図を描けば、 $\underbrace{4x^2 - 4x + 1}_{y \text{ の値}} \leq 0$  となるのは  $x = \frac{1}{2}$  のときのみとわかる。  
よって、2 次不等式  $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$  の解は  $x = \frac{1}{2}$  である。

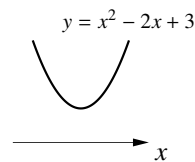


◀ 「 $x$  は  $\frac{1}{2}$  以外のすべての実数」という答え方でもよい



### D. 判別式 $D < 0$ の場合の 2 次不等式

2 次不等式  $x^2 - 2x + 3 < 0$  の場合、左辺を因数分解できない。そこで、 $x^2 - 2x + 3 = 0$  を解の公式を用いて解くと、 $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = 1 \pm \sqrt{-2}$  となる。



つまり、 $x^2 - 2x + 3 < 0$  の左辺を  $y$  とおいた、2 次関数  $y = x^2 - 2x + 3$  のグラフは右上図のようになる。 $y < 0$  となる  $x$  の範囲はないので、 $x^2 - 2x + 3 < 0$  の解は「解なし」となる。

逆に、2 次不等式  $x^2 - 2x + 3 > 0$  の解は「すべての実数」となる。必ず、グラフを描いて考える癖をつけよう。

#### 【例題 106】

1. 2 次関数  $y = x^2 - 4x + 5$  のグラフと  $x$  軸との共有点があれば求めよ。

2. 次の 2 次不等式を解け。

- i)  $x^2 - 4x + 5 > 0$       ii)  $x^2 - 4x + 5 \geq 0$       iii)  $x^2 - 4x + 5 < 0$       iv)  $x^2 - 4x + 5 \leq 0$

#### 【解答】

1. 2 次方程式  $x^2 - 4x + 5 = 0$  を解けばよい。しかし、この 2 次方程式の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot 5 < 0$$

より、解を持たない。つまり、共有点は存在しない。

2. i) 右欄外のように図を描けば、 $x^2 - 4x + 5 > 0$  となるのは斜線部分である。

よって、2 次不等式  $x^2 - 4x + 5 > 0$  の解はすべての実数である。

ii) 右欄外のように図を描けば、 $x^2 - 4x + 5 \geq 0$  になるのは斜線部分である。

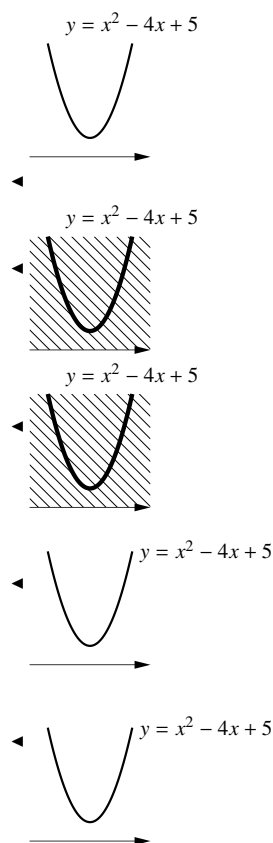
よって、2 次不等式  $x^2 - 4x + 5 \geq 0$  の解はすべての実数である。

iii) 右欄外のように図を描けば、 $x^2 - 4x + 5 < 0$  となる  $x$  は存在しないとわかる。

よって、2 次不等式  $x^2 - 4x + 5 < 0$  の解は解なしである。

iv) 右欄外のように図を描けば、 $x^2 - 4x + 5 \leq 0$  となる  $x$  は存在しないとわかる。

よって、2 次不等式  $x^2 - 4x + 5 \leq 0$  の解は解なしである。



不等式  $x^2 - 2x + 3 < 0$  が解なしであることは、 $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$  と変形して、 $(x - 1)^2$  が非負であることから理解できる。

## E. 2次不等式の解法のまとめ

結局、2次不等式を解くには、次の手順を踏めばよい。

- 片方の辺を0にし、他方の $x^2$ の係数を正にする。
- 2次式を因数分解する。整数の範囲で因数分解できない場合は解の公式を用いる (p.66)。ただし、解を持たない場合もある (判別式  $D < 0$  の場合)。
- 簡単なグラフを書き、適する範囲を答える。

### 2次不等式の解

$a > 0$  の場合の、2次不等式の解はつぎのようにまとめることができる。

	$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ	$ax^2 + bx + c = 0$ の解	$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$ax^2 + bx + c \geq 0$ の解	$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$ax^2 + bx + c \leq 0$ の解
$D > 0$						
		2解 $\alpha, \beta$	$x < \alpha, \beta < x$	$x \leq \alpha, \beta \leq x$	$\alpha < x < \beta$	$\alpha \leq x \leq \beta$
$D = 0$						
		重解 $\alpha$	$\alpha$ 以外の実数	すべての実数	なし	$x = \alpha$
$D < 0$						
		解なし	すべての実数	すべての実数	なし	なし

… この結果を暗記する必要はない。結果を確認できればよい。

### 【練習 107 : 2次不等式~その3~】

次の2次不等式を解け。

- (1)  $x^2 - 2x - 1 < 0$       (2)  $-2x^2 - x - 6 \geq 0$       (3)  $x^2 - 2x + 1 \geq 0$       (4)  $x^2 < 8$   
 (5)  $x^2 \geq 2x$       (6)  $-2x^2 - 4 > 0$       (7)  $\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{3} \geq 0$       (8)  $x^2 - x - 6 \geq 2x - 4$   
 (9)  $-x^2 - x - 9 < x - 3$       (10)  $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{3} \geq \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 1$

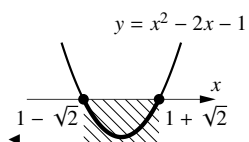
### 【解答】

(1)  $x^2 - 2x - 1 = 0$  を解けば

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

であるので、 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$  が解である。

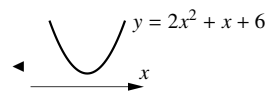
(2) 式全体に  $-1$  を掛けて、(与式)  $\Leftrightarrow 2x^2 + x + 6 \leq 0$  となる。



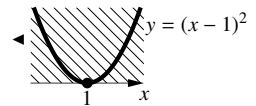
◀  $x^2$  の係数は正にした方がよい



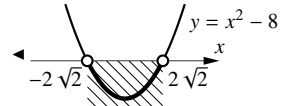
$y = 2x^2 + x + 6$  は判別式  $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 < 0$  なので、グラフは右欄外の図のようになる。グラフの  $y$  座標が  $0$  以下になることはないの、解なし。



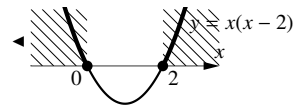
(3) (与式)  $\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$  であり、右欄外の図より、すべての実数が解と分かる。



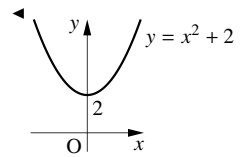
(4) (与式)  $\Leftrightarrow x^2 - 8 < 0$  である。 $x^2 - 8 = 0$  の解は  $x = \pm 2\sqrt{2}$  であるので、右欄外の図より、 $-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$  が解と分かる。



(5) (与式)  $\Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0$  である。  
右欄外の図より、 $x \leq 0, 2 \leq x$  が解と分かる。



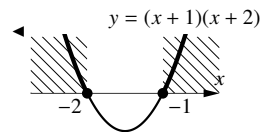
(6) (与式)  $\Leftrightarrow x^2 + 2 < 0$  であり、 $y = x^2 + 2$  のグラフは右欄外の図のようになる。グラフの  $y$  座標が負になることはないの、解なし。



(7) 両辺を 3 倍して整理すると

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x+2) \geq 0 \end{aligned}$$

よって、 $x \leq -2, -1 \leq x$  が解と分かる。



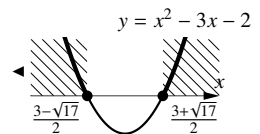
(8) 移項して整理すると、(与式)  $\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 \geq 0$ 。

$x^2 - 3x - 2 = 0$  を解けば

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

であるので、 $x \leq \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \leq x$  が解である。

◀ 『解の公式』(p.65)

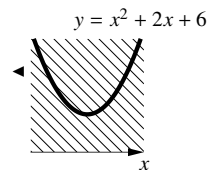


(9) 移項して整理すると

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &\Leftrightarrow -x^2 - 2x - 6 < 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 6 > 0 \end{aligned}$$

$y = x^2 + 2x + 6$  の判別式  $D$  について  $\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \cdot 6 < 0$  であるので、グラフは右欄外の図のようになる。つまり、解はすべての実数。

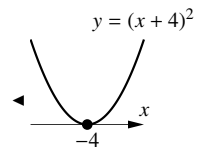
◀  $x^2$  の係数は正にした方がよい



(10) 両辺を 6 倍して整理すると

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 10 \geq 4x^2 + 2x + 6 \\ &\Leftrightarrow 0 \geq x^2 + 8x + 16 \\ &\Leftrightarrow 0 \geq (x+4)^2 \end{aligned}$$

$y = (x+4)^2$  のグラフを描くと右欄外の図のようになる。よって、この不等式の解は  $x = -4$ 。



## F. 連立 2 次不等式

連立 2 次不等式を解くときも、連立 1 次不等式 (p.58) の場合と同じように、数直線を必ず描こう。

### 【練習 108 : 連立 2 次不等式】

次の不等式を解け。

$$(1) \begin{cases} x^2 - 5x - 14 \geq 0 & \dots\dots ① \\ 2x^2 - 11x - 40 < 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 25 - 9x^2 > 0 & \dots\dots ③ \\ 3x^2 + 4x - 6 < 0 & \dots\dots ④ \end{cases}$$

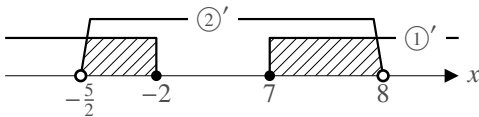
### 【解答】

$$(1) \quad ① \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)(x-7) \geq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq -2, 7 \leq x \quad \dots\dots ①'$$

$$② \Leftrightarrow 2x^2 - 11x - 40 < 0 \\ \Leftrightarrow (2x+5)(x-8) < 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < 8 \quad \dots\dots ②'$$

以上 ①', ②' を共通して満たす  $x$  は

$$-\frac{5}{2} < x \leq -2, 7 \leq x < 8$$



$$(2) \quad ③ \Leftrightarrow 9x^2 - 25 < 0 \\ \Leftrightarrow (3x+5)(3x-5) < 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{5}{3} < x < \frac{5}{3} \quad \dots\dots ③'$$

④を解くため、 $3x^2 + 4x - 6 = 0$  を解けば

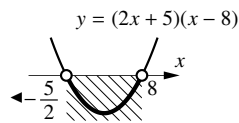
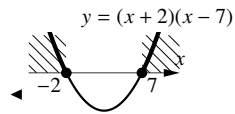
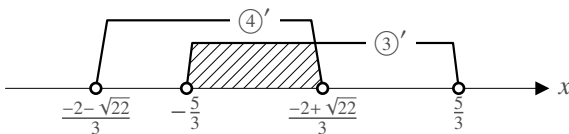
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 3 \cdot (-6)}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{3}$$

であるので、右欄外の図より④の解は

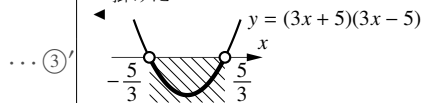
$$\frac{-2 - \sqrt{22}}{3} < x < \frac{-2 + \sqrt{22}}{3}$$

となる。以上 ③', ④' を共通して満たす  $x$  は

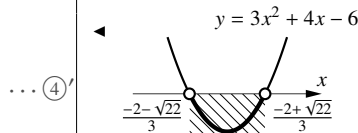
$$-\frac{5}{3} < x < \frac{-2 + \sqrt{22}}{3}$$



◀  $x^2$  の係数が正になるように両辺に  $-1$  を掛けた



◀ 『 $x$  の係数が偶数の場合の解の公式』(p.69)



◀  $4 < \sqrt{22} < 5$  より

$$-2 + \sqrt{22} = 2 \dots \text{なので}$$

$$\frac{-2 + \sqrt{22}}{3} = 0 \dots$$

$$-2 - \sqrt{22} = -6 \dots \text{なので}$$

$$\frac{-2 - \sqrt{22}}{3} = -2 \dots$$

## 2. 2次関数・2次方程式・2次不等式の応用問題

### A. 範囲に注意すべき2次関数の最大・最小

【練習 109 : 範囲に注意すべき2次関数の最大・最小】

$x^2 + y^2 = 1$  のとき、 $L = x + y^2 - 1$  の最大値・最小値、そのときの  $x, y$  を求めよ。

⋮  $x^2 + y^2$  を含む条件式があるときは、 $0 \leq x^2, 0 \leq y^2$  に注意しよう。

【解答】 まず、 $x^2 + y^2 = 1$  を変形して

$$y^2 = 1 - x^2 \quad \dots\dots\dots ①$$

①を  $L = x + y^2 - 1$  に代入し、平方完成すると

$$\begin{aligned} L &= x + (1 - x^2) - 1 \\ &= -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

一方、①において、 $y^2 \geq 0$  でないといけないので

$$\begin{aligned} y^2 = 1 - x^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) &\leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

である。つまり

$$L = f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad \dots\dots\dots ②$$

において、 $L$  の最大値・最小値を求めればよい。そこで、②のグラフを描けば、右欄外の図のようになる。

図から、最大値は  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$  であり、 $x = \frac{1}{2}$  を①に代入して  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  となる。

また、最小値は  $f(-1) = -2$  であり、 $x = -1$  を①に代入して  $y = 0$  となる。まとめると

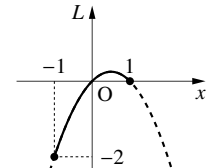
$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ のとき最大値 } \frac{1}{4}$$

$$(x, y) = (-1, 0) \text{ のとき最小値 } -2$$

◀  $L = x + y^2 - 1$  から  $y$  を消去することが目的

◀ 最大・最小を求めたいので平方完成する

◀ 条件に2乗などがあるときは、このように、範囲に注意しないとけない。

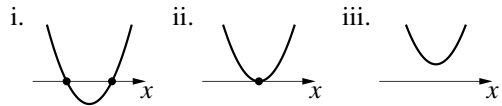


$$L = f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

## B. 2次不等式の解からグラフを考える

【例題 110】 2次不等式  $x^2 - kx + 1 > 0$  の解が「すべての実数」であったという。

1. 左辺を  $y$  とおいた 2 次関数  $y = x^2 - kx + 1$  のグラフは、右のうちどれになるか。
2. 条件を満たす  $k$  の範囲を答えよ。



【解答】

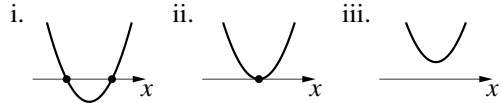
1.  $x$  がどんな値でも  $y > 0$  になるので、iii. のグラフになる。
2.  $y = x^2 - kx + 1$  の判別式  $D$  が負であるよう、 $k$  について解けば

$$D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \Leftrightarrow (k-2)(k+2) < 0$$

よって、 $-2 < k < 2$  が解と分かる。

【例題 111】 2次不等式  $x^2 + ax + b < 0$  の解が  $-2 < x < 1$  であったという。

1. 左辺を  $y$  とおいた 2 次関数  $y = x^2 + ax + b$  のグラフの概形は、右のうちどれになりうるか。
2.  $a, b$  の値を答えよ。



【解答】

1.  $x$  がいったん  $y < 0$  となるので、i. のグラフになる。
2. 不等式の解が  $-2 < x < 1$  なので i. のグラフは  $x = -2, 1$  で交わり、方程式は  $y = k(x+2)(x-1) = k(x^2 + x - 2)$  とおける。  
これが  $y = x^2 + ax + b$  と一致するので、まず、 $k = 1$  である。さらに、 $x^2 + x - 2$  と  $x^2 + ax + b$  を比べて、 $a = 1, b = -2$  と分かる。

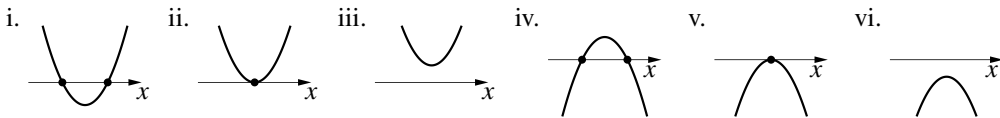
◀ 『2次関数の決定・因数分解型』(p.123)

◀  $x^2$  の係数を比べた

【練習 112 : 2次不等式の解からグラフを考える】

2次不等式  $ax^2 - 2x + a > 0$  の解が「解なし」であったという。

- (1) 左辺を  $y$  とおいた 2 次関数  $y = ax^2 - 2x + a$  のグラフは、下のうちどれになりうるか。



- (2) 条件を満たす  $a$  の範囲を答えよ。

【解答】

- (1)  $x$  がどんな値でも  $y > 0$  にならないので、v, vi. のグラフになる。
- (2) まず、グラフが上に凸なので  $a < 0$  でないといけない。

$y = ax^2 - 2x + a$  の判別式  $D$  が負であるよう、 $a$  について解けば

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot a \cdot a < 0 \Leftrightarrow 4 - 4a^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-1) > 0 \quad \therefore a < -1, 1 < a$$

これと  $a < 0$  をあわせて、 $a < -1$  が解と分かる。

◀  $x^2$  の係数が負

【練習 113 : 2 次不等式の解】

$2x^2 + kx + 3 > 0$  がすべての実数で成り立つような  $k$  の範囲を求めよ.

【解答】  $y = 2x^2 + kx + 3$  のグラフが  $y > 0$  の範囲にあればよいので判別式  $D < 0$  であればよい.

$$D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = k^2 - 24 < 0, \text{ これを解いて } -2\sqrt{6} < k < 2\sqrt{6} \text{ になる.}$$

【練習 114 : 放物線と  $x$  軸の大小関係】

放物線  $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$  のグラフについて、以下の問いに答えよ.

- (1) このグラフが  $x$  軸と共有点をもつように  $a$  の範囲を定めよ.
- (2) このグラフが  $x$  軸よりも下にあり、かつ  $x$  軸と共有点をもたないように  $a$  の範囲を定めよ.
- (3) 2 次不等式  $ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5 < 0$  の解が存在しないとき、 $a$  の範囲を定めよ.

【解答】

(1)  $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$  の判別式  $D$  が 0 以上であればよいので、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{-(a+1)\}^2 - a \cdot (2a+5) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -a^2 - 3a + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 3a - 1 \leq 0 \end{aligned} \quad \text{..... ①}$$

となるような  $a$  の範囲を求めればよい.  $a^2 + 3a - 1 = 0$  を解けば

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

より、 $y = a^2 + 3a - 1$  と  $a$  軸は右欄外の図のように交わる. つまり、①

の解は  $\frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \leq a \leq \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$  である.

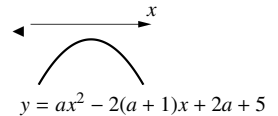
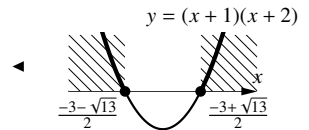
(2) 右欄外のような図にならなければならない. そのため

- i.  $a < 0$  でないといけない
  - ii.  $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$  の判別式  $D$  が負でないといけない
- ii. は、 $\frac{D}{4} = -a^2 - 3a + 1 < 0$  からので  $a < \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ ,  $\frac{-3 + \sqrt{13}}{2} < a$ .
- i., ii. の条件を共通して満たす  $a$  は、 $a < \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ .

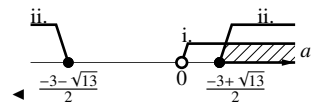
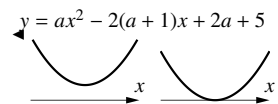
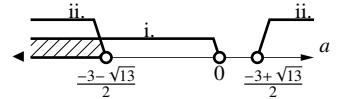
(3) 左辺を  $y$  とおいた 2 次関数  $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$  のグラフが、右欄外のようなにならなければならない. そのため

- i.  $a > 0$  でないといけない
  - ii.  $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$  の判別式  $D$  が負か 0 でないといけない
- (2) の ii. より、 $a \leq \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ ,  $\frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \leq a$  である.
- i., ii. の条件を共通して満たす  $a$  は、 $\frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \leq a$ .

◀  $a$  についての 2 次方程式を解く.



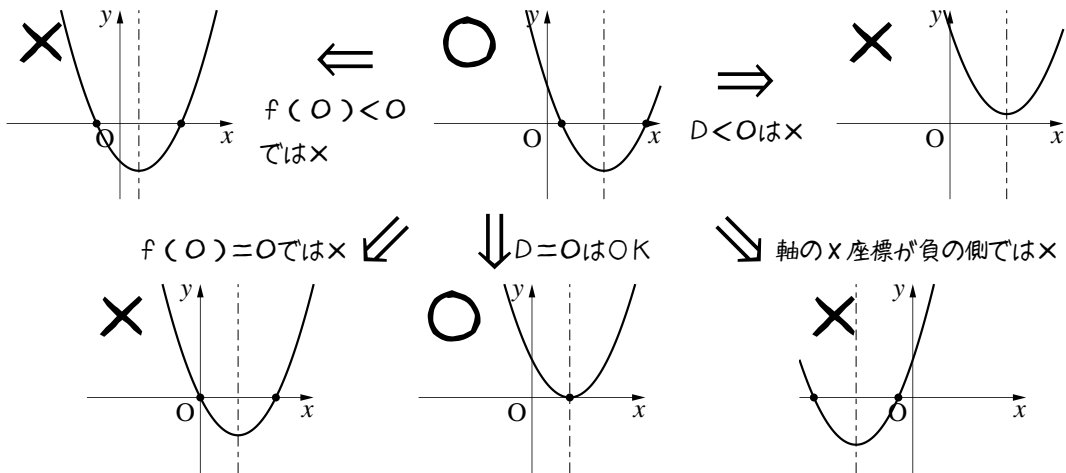
◀ (1) の結果を利用した



### C. 2次方程式の解の配置

2次方程式  $x^2 - ax + (a^2 - 3) = 0$  が正の解だけをもつような  $a$  の条件を考えよう。

これは、 $y = f(x) = x^2 - ax + (a^2 - 3)$  と  $x$  軸が、正の部分で交わる条件に一致する。そのようなグラフを描いてみよう。



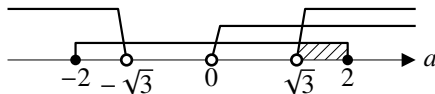
結果的に、次の条件をすべて同時に満たせばよい。

$$D \geq 0, (\text{軸の } x \text{ 座標}) > 0, f(0) > 0$$

それらをそれぞれ解こう。  $f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a^2 - 3$  から、軸の方程式は  $x = \frac{a}{2}$  であるから

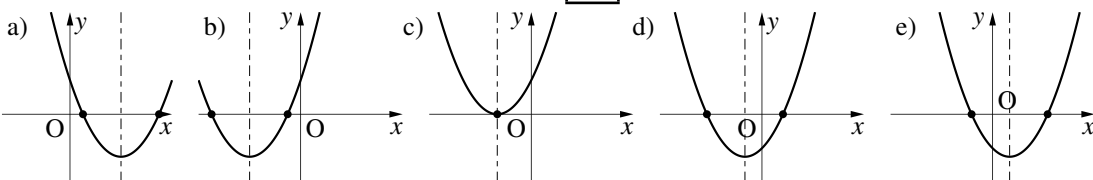
$$\begin{cases} D \geq 0 \\ (\text{軸の } x \text{ 座標}) > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geq 0 \\ \frac{a}{2} > 0 \\ f(0) = a^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 \leq 0 \\ a > 0 \\ (a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq a \leq 2 \\ 0 < a \\ a < -\sqrt{3}, \sqrt{3} < a \end{cases}$$

と分かる。これらを数直線上に表わせば右のようになるので、 $\sqrt{3} < a \leq 2$  が求める条件であると分かる。



…… 上のように、2次方程式  $f(x) = 0$  の解の配置を調べる問題では、「判別式  $D$ 」「軸の  $x$  座標」「 $f(a)$  ( $x = a$  を境に解の適・不適が定まる)」の3点を必ず調べよう。ただし、後で見るように、このうち1つまたは2つが不要になることもある。

**【例題 115】**  $f(x) = x^2 + 2ax + a + 2 = 0$  が負の解だけをもつ (..... ①) ような  $a$  の条件を求めるため、( ) には「<」「 $\leq$ 」「>」「 $\geq$ 」のいずれかを、 には記号・条件を入れなさい。



①を満たすときの  $f(x) = 0$  のグラフとして、適しているものを上からすべて選ぶと  ア になる。

よって、①を満たすには  $D$  (イ) 0, (軸の方程式) (ウ) 0,  $f(0)$  (エ) 0 が成り立てばよい。

これらをすべて計算し連立して解けば、 オ が求める条件と分かる。

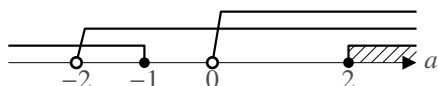
【解答】 ①を満たすには、 $y = f(x)$  と  $x$  軸の交点が負のみであればよいので  
 (ア) **b), c)**になる. よって、①を満たすには  $(イ) \underline{D \geq 0}$ ,  $(ウ) \underline{(\text{軸の } x \text{ 座標}) < 0}$ ,  
 (エ)  $\underline{f(0) > 0}$  が成り立てばよい.

$$\frac{D}{4} = a^2 - (a+2) \geq 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-2) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -1, 2 \leq a$$

$f(x) = (x+a)^2 - a^2 + a + 2$  から、(軸の  $x$  座標)  $= -a < 0 \Leftrightarrow 0 < a$

$$f(0) = a + 2 > 0 \Leftrightarrow a > -2$$

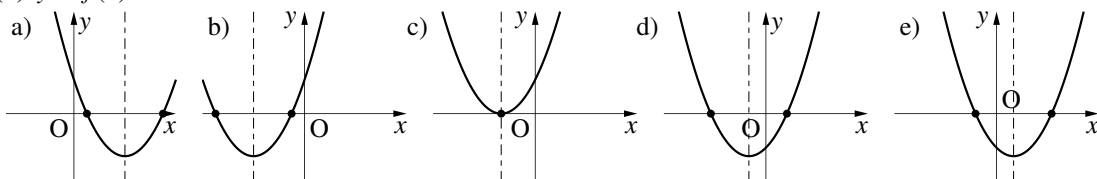
これらを以下のように連立して、 $2 \leq a$  と分かる.



【練習 116 : 2 次方程式の解の配置～その 1～】

$f(x) = 2x^2 + 3ax + a - 3 = 0$  が正の解と負の解を 1 つずつ持つとき、以下の問いに答えよ.

(1)  $y = f(x)$  のグラフとして適切なものをすべて選べ.



(2) 条件を満たすような  $a$  の範囲を求めよ.

【解答】

(1) グラフと  $x$  軸が、正の部分と負の部分で 1 回ずつ交わっている、**d), e)**.

(2)  $f(0) < 0$  であれば、 $y = f(x)$  は  $x$  軸の正の部分、負の部分の両方で交わる  
 ので、 $f(0) = a - 3 < 0 \Leftrightarrow a < 3$

◀ d), e) どちらも適することから、軸は正負どちらもよいと分かる.

また、 $f(0) < 0$  が成り立つならば、必ず  $D < 0$  なので、 $D < 0$  は解く必要がない.

【練習 117 : 2 次方程式の解の配置～その 2～】

$x^2 - 4cx + c^2 + 4c = 0$  が、2 よりも大きな、2 つの異なる解をもつような  $c$  の条件を求めよ.

【解答】  $f(x) = x^2 - 4cx + c^2 + 4c$  とおくと、 $D > 0$ , (軸の  $x$  座標)  $> 2$ ,  $f(2) > 0$  を満たせばよい.

$$\frac{D}{4} = (2c)^2 - (c^2 + 4c) > 0 \Leftrightarrow 3c^2 - 4c > 0$$

$$\Leftrightarrow 3c\left(c - \frac{4}{3}\right) > 0 \quad \therefore c < 0, \frac{4}{3} < c$$

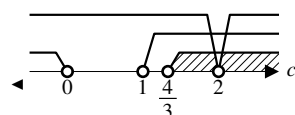
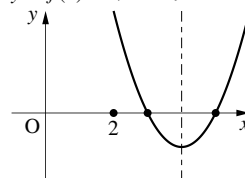
$$(\text{軸の } x \text{ 座標}) = 2c > 2 \Leftrightarrow 1 < c$$

$$f(2) = 4 - 8c + c^2 + 4c > 0 \Leftrightarrow c^2 - 4c + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow (c-2)^2 > 0 \quad \therefore c < 2, 2 < c$$

以上を連立すると右欄外の図のようになるので、 $\frac{4}{3} < c < 2, 2 < c$ .

◀  $y = f(x)$  が下のようなになる.



D. 放物線と他のグラフの大小関係を調べる

【練習 118 : 2 次関数と直線・放物線の大小関係】

2 次関数  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  について、以下の問いに答えなさい。

- (1) 放物線  $y = f(x)$  と直線  $y = ax - 1$  とが共有点をもつための  $a$  の範囲を求めよ。  
 (2) (発) (展)  $g(x) = bx^2 - x + 2$  とする。  $f(x) > g(x)$  が常に成立するための定数  $b$  の範囲を求めよ。

【解答】

(1) 連立方程式  $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 & \dots\dots\dots ① \\ y = ax - 1 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$

が解をもつときの  $a$  の範囲を求めればよい。①と②から  $y$  を消去して

$$ax - 1 = x^2 - 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (a+2)x + 4 = 0 \quad \dots\dots\dots ③$$

方程式③が解をもつには、③の判別式  $D$  が  $D \geq 0$  でないといけない。  $D \geq 0$  となる  $a$  の範囲を求めると

$$D = (a+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+6)(a-2) \geq 0$$

つまり、  $a \leq -6$ 、  $2 \leq a$  であれば共有点をもつ。

- (2)  $f(x) > g(x)$  が常に成立する  
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 > bx^2 - x + 2$  がすべての  $x$  で成立する  
 $\Leftrightarrow 0 > (b-1)x^2 + x - 1$  がすべての  $x$  で成立する

よって、  $h(x) = (b-1)x^2 + x - 1$  としたとき、

$y = h(x)$  のグラフにおいて  $y$  座標が常に負となればよい。  $\dots\dots\dots ④$

1.  $b-1=0$  のとき、つまり、  $b=1$  のとき

$h(x) = x-1$  となり、直線  $y = h(x)$  のグラフは ④ となることはない。よって不適。

2.  $b-1 \neq 0$  のとき、つまり、  $b \neq 1$  のとき

$y = h(x)$  のグラフは放物線となる。④であるためには、グラフは右欄外のようにならないといけない。つまり

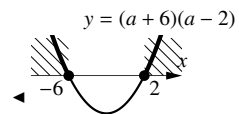
- i.  $b-1 < 0$  でないといけない。  
 ii.  $y = h(x) = (b-1)x^2 + x - 1$  の判別式  $D$  が負  
 ii. について、  $D$  を計算して解くと

$$D < 0 \Leftrightarrow 1^2 - 4 \cdot (b-1) \cdot (-1) < 0$$

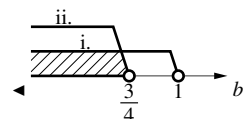
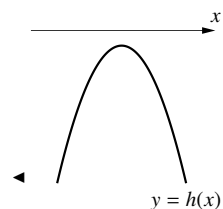
$$\Leftrightarrow 4b < 3 \quad \therefore b < \frac{3}{4}$$

これと i. を連立して、  $b < \frac{3}{4}$  であればよいとわかる。

◀ ①の  $y$  に②を代入した



◀ 移項した





### 3. 絶対値を含む2次関数・方程式・不等式

場合に分けて絶対値を外して (p.81 参照), 考えていこう.

#### 【練習 119 : 絶対値を含む 2 次関数】

次の式で与えられた関数のグラフを描け.

(1)  $y = 2x - |x^2 - 4|$

(2)  $y = |x^2 - 4x - 6|$

#### 【解答】

(1) i)  $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \leq -2, 2 \leq x$$

のとき,  $|x^2 - 4| = x^2 - 4$  なので

$$\begin{aligned} y &= 2x - (x^2 - 4) \\ &= -x^2 + 2x + 4 \\ &= -(x-1)^2 + 5 \end{aligned}$$

ii)  $x^2 - 4 < 0$ , つまり  $-2 < x < 2$  のとき,  $|x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$  であるので

$$\begin{aligned} y &= 2x + (x^2 - 4) \\ &= x^2 + 2x - 4 \\ &= (x+1)^2 - 5 \end{aligned}$$

以上 i), ii) より, グラフは右欄外の図のようになる.

(2) i)  $x^2 - 4x - 6 \geq 0$ , つまり  $x \leq 2 - \sqrt{10}$ ,  $2 + \sqrt{10} \leq x$  のとき,  $|x^2 - 4x - 6| = x^2 - 4x - 6$  なので

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x - 6 \\ &= (x-2)^2 - 10 \end{aligned}$$

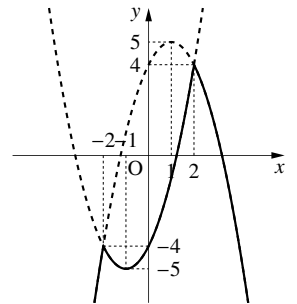
ii)  $x^2 - 4x - 6 < 0$ , つまり  $2 - \sqrt{10} < x < 2 + \sqrt{10}$  のとき,  $|x^2 - 4x - 6| = -(x^2 - 4x - 6)$  なので

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 - 4x - 6) \\ &= -(x-2)^2 + 10 \end{aligned}$$

以上 i), ii) より, グラフは右欄外の図のようになる.

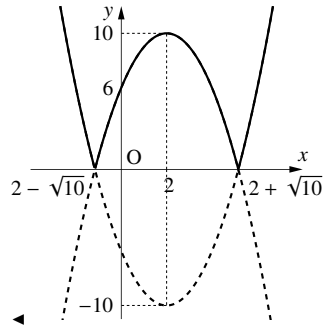


この問の (2) のグラフは,  $y = x^2 - 4x - 6$  のグラフのうち  $x$  軸より下にある部分を  $x$  軸について上側へ折り返したものになっている. これは, 右辺の関数全体に絶対値がついている式の形からも理解できる.



◀  $y = 2x - |x^2 - 4|$

◀ 方程式  $x^2 - 4x - 6 = 0$  の解を利用した  $y = |x^2 - 4x - 6|$



【練習 120 : 絶対値を含む 2 次方程式】

次の方程式を解け.

(1)  $|x^2 - 2x - 8| = 6x + 1$

(2)  $|x^2 - 4x + 3| = 2 - x$

【解答】

(1) i)  $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ , つまり

$\Leftrightarrow (x+2)(x-4) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -2, 4 \leq x$  のとき

.....①

(与式)  $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 6x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \quad \therefore x = -1, 9$

①の範囲で考えているので,  $x = 9$

ii)  $x^2 - 2x - 8 < 0$ , つまり  $-2 < x < 4$  ..... ② のとき

(与式)  $\Leftrightarrow -(x^2 - 2x - 8) = 6x + 1$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 6x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 7 = 0 \quad \therefore x = -2 \pm \sqrt{11}$

②の範囲で考えているので,  $x = -2 + \sqrt{11}$

以上 i), ii) より, 求める解は  $x = -2 + \sqrt{11}, 9$

(2) i)  $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ , つまり

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 1, 3 \leq x$  のとき

.....③

(与式)  $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 2 - x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

③の範囲で考えているので,  $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

ii)  $x^2 - 4x + 3 < 0$ , つまり  $1 < x < 3$  ..... ④ のとき

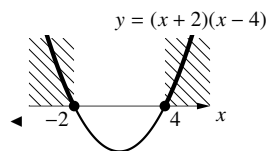
(与式)  $\Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 3) = 2 - x$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \quad \therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

④の範囲で考えているので,  $x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

以上 i), ii) より, 求める解は

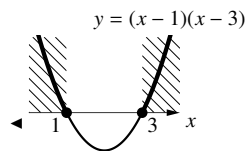
$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$



◀ i) の  $x$  の範囲以外

◀ 『 $x$  の係数が偶数の場合の解の公式』(p.69)

◀  $3 < \sqrt{11} < 4$  より  
 $-2 + \sqrt{11} = 1. \dots$



◀ 『解の公式』(p.65)

◀  $\sqrt{5} = 2.2360679 \dots$

◀ i) の  $x$  の範囲以外

◀ 『解の公式』(p.65)

【発展】 121: 絶対値を含む2次不等式

次の不等式を解け.

①  $3x^2 + |x^2 - 9| < 16x$

②  $|x^2 - 8x - 3| - 2x - 8 > 0$

【解答】

① i)  $x^2 - 9 \geq 0$ , つまり

$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -3, 3 \leq x$

のとき, 与えられた不等式は

$3x^2 + x^2 - 9 < 16x$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 16x - 9 < 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(2x-9) < 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$

これと, ①を合わせて,  $3 \leq x < \frac{9}{2}$

ii)  $x^2 - 9 < 0$ , つまり  $-3 < x < 3$  …… ② のとき

(与式)  $\Leftrightarrow 3x^2 - (x^2 - 9) < 16x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 9 < 0$

$\Leftrightarrow \frac{8 - \sqrt{46}}{2} < x < \frac{8 + \sqrt{46}}{2}$

これと, ②を合わせて,  $\frac{8 - \sqrt{46}}{2} < x < 3$

以上 i), ii) より求める解は  $\frac{8 - \sqrt{46}}{2} < x < \frac{9}{2}$

② i)  $x^2 - 8x - 3 \geq 0$ , つまり

$\Leftrightarrow x \leq 4 - \sqrt{19}, 4 + \sqrt{19} \leq x$  のとき

(与式)  $\Leftrightarrow x^2 - 8x - 3 - 2x - 8 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 11 > 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-11) > 0 \quad \therefore x < -1, 11 < x$

これと, ③を合わせて,  $x < -1, 11 < x$

ii)  $x^2 - 8x - 3 < 0$ , つまり  $4 - \sqrt{19} < x < 4 + \sqrt{19}$  …… ④ のとき

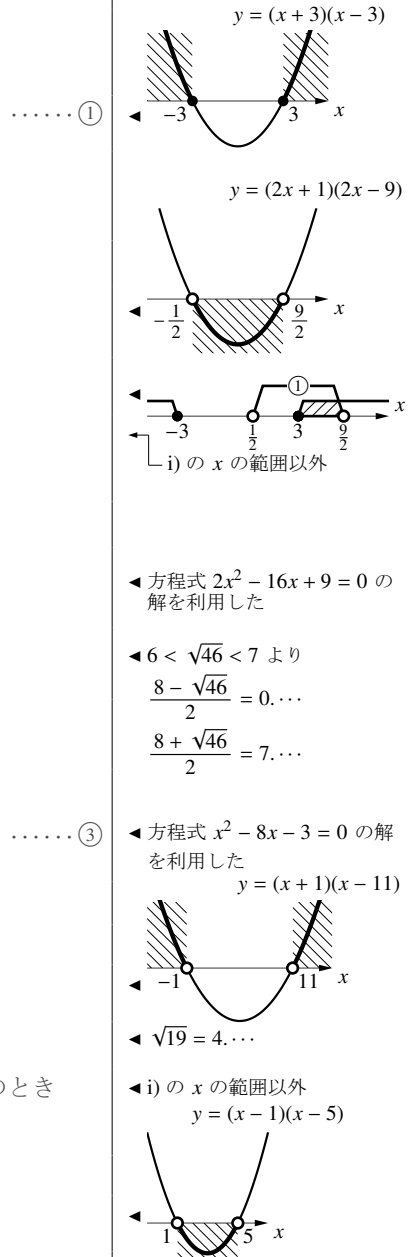
(与式)  $\Leftrightarrow -(x^2 - 8x - 3) - 2x - 8 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-5) < 0 \quad \therefore 1 < x < 5$

これと, ④を合わせて,  $1 < x < 5$

以上 i), ii) より求める解は  $x < -1, 1 < x < 5, 11 < x$ .



【発展 122 : 絶対値記号を複数含む式】

- ① 関数  $y = |2x - 4| + |x - 5|$  のグラフを書け.
- ② 方程式  $|x - 3| + |x - 5| = 3$  を解け.
- ③ 不等式  $|x^2 - 4x + 3| + |x - 2| < x$  を解け.



表などで場合分けを整理して、解答を作ろう。複雑な場合分けをしてもミスをしないうためには、暗算に頼りすぎず、適度にメモを残しながら解くことが大事である。

【解答】

① まず、場合分けについて考える。

$$2x - 4 \geq 0 \text{ を解くと } x \geq 2, \quad x - 5 \geq 0 \text{ を解くと } x \geq 5$$

よって、右欄外の表のようになる。

i)  $x \leq 2$  のとき

$$\begin{aligned} y &= -(2x - 4) - (x - 5) \\ &= -3x + 9 \end{aligned}$$

ii)  $2 < x < 5$  のとき

$$\begin{aligned} y &= (2x - 4) - (x - 5) \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

iii)  $5 \leq x$  のとき

$$\begin{aligned} y &= (2x - 4) + (x - 5) \\ &= 3x - 9 \end{aligned}$$

以上 i), ii), iii) より、グラフは右欄外の図のようになる。

② まず、場合分けについて考える。

$$x - 3 \geq 0 \text{ を解くと } x \geq 3, \quad x - 5 \geq 0 \text{ を解くと } x \geq 5$$

よって、右欄外の表のようになる。

i)  $x \leq 3$  …… ① のとき

$$\begin{aligned} -(x - 3) - (x - 5) &= 3 \\ \Leftrightarrow -x + 3 - x + 5 &= 3 \\ \Leftrightarrow -2x &= -5 \quad \therefore x = \frac{5}{2} \quad \text{これは①に適する。} \end{aligned}$$

ii)  $3 < x < 5$  …… ② のとき

$$\begin{aligned} (x - 3) - (x - 5) &= 3 \\ \Leftrightarrow x - 3 - x + 5 &= 3 \\ \Leftrightarrow 2 &= 3 \end{aligned}$$

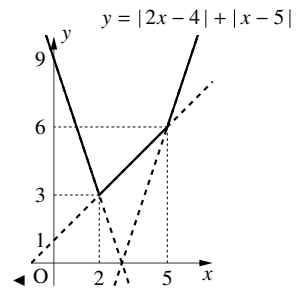
$x$  がいくつでも、この等式を満たすことはありえない。よって、この場合には解は無い。

iii)  $5 \leq x$  …… ③ のとき

$$(x - 3) + (x - 5) = 3$$

◀ 0 になる場合は省略している。

$x$	$\sim 2$	$2 \sim 5$	$5 \sim$
$2x - 4$	-	+	+
$x - 5$	-	-	+



◀ 0 になる場合は省略している。

$x$	$\sim 3$	$3 \sim 5$	$5 \sim$
$x - 3$	-	+	+
$x - 5$	-	-	+

$$\Leftrightarrow x - 3 + x - 5 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2x = 11 \quad \therefore x = \frac{11}{2} \quad \text{これは③に適する.}$$

以上 i), ii), iii) より, 求める解は  $x = \frac{5}{2}, \frac{11}{2}$

③ まず, 場合分けについて考える.

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \text{ を解くと, } x \leq 1, 3 \leq x$$

$$x - 2 \geq 0 \text{ を解くと, } x \geq 2$$

よって, 右欄外の表のようになる.

i)  $x \leq 1 \dots\dots\dots$  ④ のとき

$$(x^2 - 4x + 3) - (x - 2) < x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) < 0 \quad \therefore 1 < x < 5$$

これと, ④を合わせて, この場合は解が無い.

ii)  $1 < x \leq 2 \dots\dots\dots$  ⑤ のとき

$$-(x^2 - 4x + 3) - (x - 2) < x$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 > 0 \quad \therefore x < 1, 1 < x$$

これと, ⑤を合わせて,  $1 < x \leq 2$

iii)  $2 < x \leq 3 \dots\dots\dots$  ⑥ のとき

$$-(x^2 - 4x + 3) + (x - 2) < x$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 > 0$$

$x^2 - 4x + 5$  の判別式を  $D$  すると,  $\frac{D}{4} = 2^2 - 5 < 0$  であり, グラフを考えると, 解はすべての実数.

これと, ⑥を合わせて,  $2 < x \leq 3$

iv)  $3 < x \dots\dots\dots$  ⑦ のとき

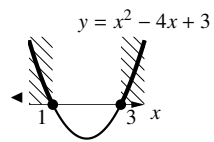
$$(x^2 - 4x + 3) + (x - 2) < x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$$

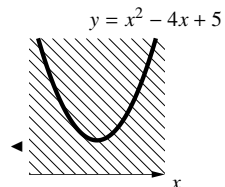
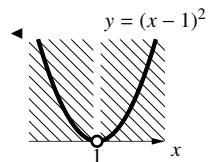
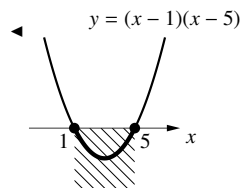
これと, ⑦を合わせて,  $3 < x < 2 + \sqrt{3}$

以上 i), ii), iii), iv) より, 求める解は  $1 < x < 2 + \sqrt{3}$



◀ 0 になる場合は省略している.

$x$	$\sim 1$	$1 \sim 2$	$2 \sim 3$	$3 \sim$
$x^2 - 4x + 3$	+	-	-	+
$x - 2$	-	-	+	+



◀ 方程式  $x^2 - 4x + 1 = 0$  の解を利用した

### 1. 一般のグラフの移動について

ここで示される内容は、数学Ⅱ以降で学ぶ関数についても成立するが、特に、 $f(x)$ が1次関数、2次関数であっても成立する。

#### A. 一般の対称移動について

関数  $y = f(x)$  のグラフ  $C$  を、 $x$  軸に関して対称に移動したグラフ  $C_x$  を表す関数について考える。 $C$  上の点を  $P(x, v)$  を、 $x$  軸に関して対称に移動して  $C_x$  上の点  $Q(x, y)$  に移動したとしよう。このとき

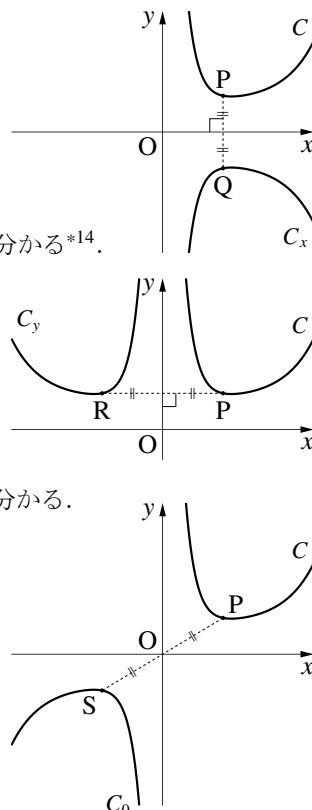
- i. 「 $P$  はグラフ  $y = f(x)$  上にある」 $\iff v = f(x)$
  - ii. 「 $P$  と  $Q$  は  $x$  軸対称」 $\iff v = -y$
- ii. を i. に代入して、 $-y = f(x)$  となり、 $Q(x, y)$  がグラフ  $-y = f(x)$  上にあると分かる<sup>\*14</sup>。

また、関数  $y = f(x)$  のグラフ  $C$  を、 $y$  軸に関して対称に移動したグラフ  $C_y$  を表す関数について考える。 $C$  上の点を  $P(u, y)$  を、 $y$  軸に関して対称に移動して  $C_y$  上の点  $R(x, y)$  に移動したとしよう。このとき

- i. 「 $P$  はグラフ  $y = f(x)$  上にある」 $\iff y = f(u)$
  - ii. 「 $P$  と  $R$  は  $y$  軸対称」 $\iff u = -x$
- ii. を i. に代入して、 $y = f(-x)$  となり、 $R(x, y)$  がグラフ  $y = f(-x)$  上にあると分かる。

最後に、関数  $y = f(x)$  のグラフ  $C$  を、原点に関して対称に移動したグラフ  $C_0$  を表す関数について考える。 $C$  上の点を  $P(u, v)$  を、原点に関して対称に移動して  $C_0$  上の点  $S(x, y)$  に移動したとしよう。このとき

- i. 「 $P$  はグラフ  $y = f(x)$  上にある」 $\iff v = f(u)$
  - ii. 「 $P$  と  $S$  は原点対称」 $\iff u = -x, v = -y$
- ii. を i. に代入して、 $-y = f(-x)$  となり、 $S(x, y)$  がグラフ  $-y = f(-x)$  上にあると分かる。



関数  $y = f(x)$  の対称移動

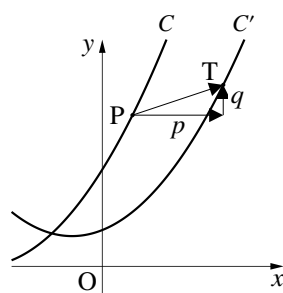
関数  $y = f(x)$  のグラフを、 $x$  軸に関して、 $y$  軸に関して、原点に関して対称移動したグラフを表す関数は、それぞれ次のようになる。

$-y = f(x)$	$x$ 軸に関する対称移動	$\leftarrow y$ を $-y$ に代えた
$y = f(-x)$	$y$ 軸に関する対称移動	$\leftarrow x$ を $-x$ に代えた
$-y = f(-x)$	原点に関する対称移動	$\leftarrow x$ を $-x$ に、 $y$ を $-y$ に代えた

<sup>\*14</sup> 厳密には、 $-y = f(x)$  を満たす任意の点  $Q$  をとり、その対称移動した点が  $C$  上にあることを示さないといけないが、ここでは省略した。 $C_y, C_0$  についても同様である。詳しくは、数学Ⅱの「軌跡」で学ぶ。

## B. 一般の平行移動について

関数  $y = f(x)$  のグラフ  $C$  を、 $x$  軸方向に  $p$ 、 $y$  軸方向に  $q$  平行移動したグラフ  $C'$  を表す関数について考える。  $C$  上の点を  $P(u, v)$  を、 $x$  軸方向に  $p$ 、 $y$  軸方向に  $q$  平行移動して  $C'$  上の点  $T(x, y)$  に移動したとしよう。このとき



- i. 「 $P$  はグラフ  $y = f(x)$  上にある」  $\iff v = f(u)$
- ii. 「 $P$  を  $x$  軸方向に  $p$ 、 $y$  軸方向に  $q$  平行移動して  $T$  になる」  
 $\iff x = u + p, y = v + q \iff u = x - p, v = y - q$
- ii. を i. に代入して、 $S(x, y)$  がグラフ  $y - q = f(x - p)$  上にあると分かる。

関数  $y = f(x)$  の平行移動

関数  $y = f(x)$  のグラフを、 $x$  軸方向に  $p$ 、 $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動したグラフを表す関数は

$$y - q = f(x - p) \quad \leftarrow x \text{ を } x - p \text{ に, } y \text{ を } y - q \text{ に代えた}$$

で表される。

## 2. 頂点の移動を用いて2次関数の移動を考える

2次関数の移動については、頂点の移動を用いて考えることもできる。ただし、 $x^2$  の係数には気をつけることになる。

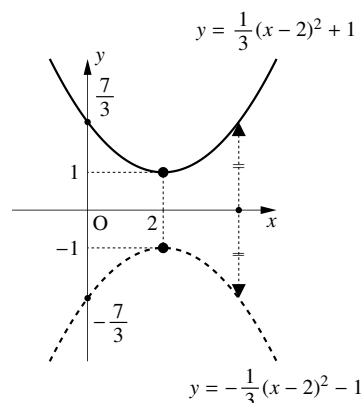
### A. 頂点の移動から2次関数の対称移動を考える ( $x$ 軸)

まず、 $x$  軸についての対称移動を考えよう。

たとえば、2次関数  $y = \frac{1}{3}(x - 2)^2 + 1$  のグラフを  $x$  軸について対称移動すると、頂点は

$$(2, 1) \xrightarrow{\text{x軸対称移動}} (2, -1)$$

と移動し、さらに  $x^2$  の係数の符号が反対になる。つまり、点線 ----- のグラフの式は、 $y = -\frac{1}{3}(x - 2)^2 - 1$  と分かる。

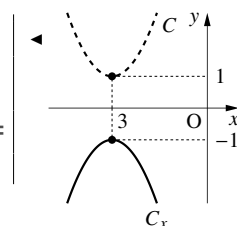


**【例題 123】** 放物線  $C: y = (x + 3)^2 + 1$  を  $x$  軸について対称移動してできる放物線  $C_x$  の方程式、頂点の座標、軸の方程式を求めよ。

**【解答】** 右欄外の図のグラフを書けば、

$$C \text{ の頂点 } (-3, 1) \xrightarrow{\text{x軸対称移動}} C_x \text{ の頂点 } (-3, -1)$$

と移動し、 $x^2$  の係数は 1 から  $-1$  になる。よって、 $C_x$  の方程式は  $y = -(x + 3)^2 - 1$ 、軸は  $x = -3$  である。



## B. 頂点の移動から2次関数の対称移動を考える (y軸, 原点)

次に, x軸についての対称移動を考えよう.

たとえば, 2次関数  $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 1$  のグラフを y 軸について対称移動すると, 頂点は

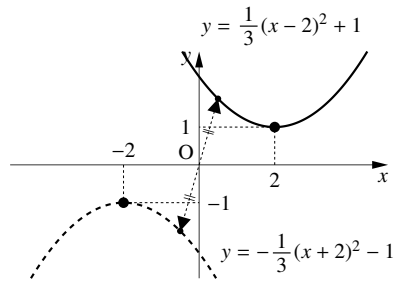
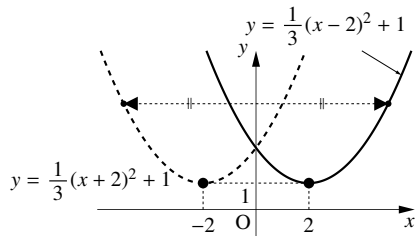
$$(2, 1) \xrightarrow{y \text{ 軸対称移動}} (-2, 1)$$

と移動する.  $x^2$  の係数は変化しない. つまり, 点線 ..... のグラフの式は,  $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 + 1$  と分かる.

最後に, 2次関数  $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 1$  のグラフを原点について対称移動すると, 頂点は

$$(2, 1) \xrightarrow{\text{原点対称移動}} (-2, -1)$$

と移動し, さらに  $x^2$  の係数の符号が反対になる. つまり, 点線 ..... のグラフの式は,  $y = -\frac{1}{3}(x+2)^2 - 1$  と分かる.



**【例題 124】** 放物線  $C: y = (x+3)^2 + 1$  について, 以下の問いに答えよ.

- 放物線  $C$  を y 軸について対称移動した放物線  $C_y$  の方程式, 頂点の座標, 軸の方程式を求めよ.
- 放物線  $C$  を原点について対称移動した放物線  $C_0$  の方程式, 頂点の座標, 軸の方程式を求めよ.

**【解答】**

- 右欄外の図のグラフを書けば,

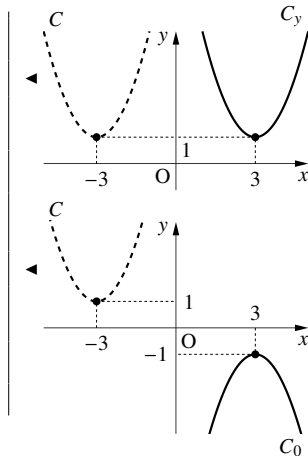
$$C \text{ の頂点 } (-3, 1) \xrightarrow{y \text{ 軸対称移動}} C_y \text{ の頂点 } (3, 1)$$

と移動し,  $x^2$  の係数は変わらない. よって,  $C_y$  の方程式は  $y = (x-3)^2 - 1$ , 軸は  $x = 3$  である.

- 右欄外の図のグラフを書けば,

$$C \text{ の頂点 } (-3, 1) \xrightarrow{\text{原点対称移動}} C_0 \text{ の頂点 } (3, -1)$$

と移動し,  $x^2$  の係数は 1 から  $-1$  になる. よって,  $C_0$  の方程式は  $y = -(x-3)^2 - 1$ , 軸は  $x = 3$  である.





# 索引

- の値
  - 関数, 71
- 1 次不等式, 56
- 因数, 29
- 因数分解, 29
- $n$  次式, 14
- 解
  - 1 次不等式の—, 56
  - 2 次不等式の—, 124
  - 2 次方程式の—, 63
- 外心, 180
- 外接円, 180
- 解の公式, 65
- 開平法, 49
- 角点, 163
- 関数, 71
- 既約分数, 3
- 共通因数, 29
- グラフ, 74
- 係数, 11
- 項, 13
- 降べきの順, 14
- コサイン, 149
- 最小値
  - 関数の, 72
- 最大値
  - 関数の, 72
- サイン, 149
- 座標軸, 73
- 座標平面, 73
- 三角比, 150
- 軸, 84
- 指数, 12
- 次数
  - 多項式の—, 14
  - 単項式の—, 11
- 指数法則, 12
- 始線, 163
- 自然数, 1
- 実数, 5
- 斜辺, 147
- 重解, 67
- 重根, 67
- 循環小数, 4
- 象限, 73
- 小数, 4
- 昇べきの順, 14
- 数直線, 2
- 正角錐, 203
- 正弦定理, 180
- 整式, 13
- 整数, 2
- 正多角錐, 203
- 正多面体, 201
- 接する, 115, 122
- 接点, 115, 122
- 相似, 194
- 相似比, 194
- 対辺, 147
- 多項式, 13
- たすきがけ, 34
- 単位円, 163
- 単項式, 11
- タンジェント, 148
- 値域, 72
- 稠密性, 4
- 頂点, 84
- 直角三角錐, 198
- 定義域, 72
- 定数, 73
- 定数項, 13
- 底辺, 147
- 展開, 16
- 動径, 163
- 同類項, 13
- 解く
  - 1 次不等式を—, 57
  - 2 次不等式を—, 124
  - 2 次方程式を—, 63
  - 連立 3 元 1 次方程式を—, 94
  - 連立不等式を—, 58
- 凸, 84
- 内接円, 189
- 2 次関数, 84
- 2 次不等式, 124
- 2 次方程式, 63
- 2 重根号, 33
- 背理法, 6
- 繁分数, 151
- 判別式
  - 2 次式の—, 120
  - 2 次方程式の—, 67
- 比, 3
- 複 2 次式, 41
- 複分数, 151
- 不等号, 54
- 不等式, 54
  - の移項, 57
  - の右辺, 54
  - の左辺, 54
  - の両辺, 54
- 平方, 12
- 平方完成, 89
- 変数, 71
- 方程式
  - 放物線の—, 85
- 放物線, 84
- 無限小数, 4
- 無理数, 5
- 約分, 3
- 有限小数, 4
- 有理化, 19
- 有理数, 3
- 余弦定理, 175
  - 第 1—, 208
  - 第 2—, 175
- 立方, 12
- 累乗, 12
- 連続性, 5
- 連立 3 元 1 次方程式, 94, 96
- 連立不等式, 58