13th-note 数学II

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 II で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π，ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ，ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω

Ver1.52(2012-7-21)

目次

第2章　複素数と高次方程式

小学校では，負の数を扱わないため「3 − 5 は計算できない」と学ぶが，中学校に入ると $3-5=-2$ と学ぶ．これは，「0 より小さい数」を認めたことによる．
同じことを，数学 I までの「計算できない」方程式 $x^2=-1$ について考える．

2.1　複素数の定義

1.　複素数の定義

A.　2 次方程式の「解なし」に意味を与える

数学 I においては「2 乗して負になる数」を扱わないため，次の 3 つはいずれも「解なし」になった．

- 2 次方程式 $x^2+1=0$ を解くと，$x=\pm\sqrt{-1}$ になり「解なし」である．
- 2 次方程式 $x^2-4x+5=0$ を解くと，$x=2\pm\sqrt{-1}$ になり「解なし」である．
- 2 次方程式 $x^2+9=0$ を解くと，$x=\pm\sqrt{-9}$ になり「解なし」である．

しかし「$\pm\sqrt{-1}$」「$2\pm\sqrt{-1}$」「$\pm\sqrt{-9}$」では，同じ「解なし」でも形が異なる．そこで，この「形」に意味を与えよう．そのため「2 乗して −1 になる数」を**虚数単位** (imaginary unit) と呼び，i で表わす[*1]．

B.　負の数の平方根 〜 （2 乗して −9 になる数）= $\pm 3i$

たとえば，i の 3 倍である $3i$，i の −3 倍である $-3i$ を，それぞれ 2 乗してみよう[*2]．

$$(3i)^2 = 3^2\times i^2 = 9\times(-1) = -9$$
$$(-3i)^2 = (-3)^2\times i^2 = 9\times(-1) = -9$$

こうして，$3i$，$-3i$ はどちらも「2 乗して −9 になる数」＝「−9 の**平方根**」とわかる．

【例題 1】 $4i$ の 2 乗，$-2i$ の 2 乗をそれぞれ求めよ．また，−25 の平方根をすべて答えよ．

[*1] $\sqrt{-1}$ とも表わされることもあるし，高校数学以外の分野では j で表わされることもある．
[*2] ここで，3 と i の掛ける順番を変えて計算している．i を含む掛け算の定義については，p.63 を参照（ただし難しい）のこと．

C. 負の数と根号 〜 $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

-5 の平方根である「2 乗して -5 になる数」には，$\sqrt{5}i$，$-\sqrt{5}i$ の 2 つがある．このうち，i の係数が正である $\sqrt{5}i$ を，$\sqrt{-5}$ で表わすことにする．同様にして，$\sqrt{-7} = \sqrt{7}i$，$\sqrt{-9} = 3i$ となる．

以上をまとめて，次のようになる．

負の数の平方根と根号

> 虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ とする．$a > 0$ としたとき，負の実数 $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{a}i$ であり，符号が正のものを $\sqrt{-a}$ で表す．つまり，$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ である．

【例題 2】 次の値を，虚数単位 i を用いて表わせ．根号 $\sqrt{}$ 内はできるだけ簡単にすること．

a. $\sqrt{-10}$　b. $\sqrt{-13}$　c. $\sqrt{-20}$　d. $\sqrt{-27}$　e. $-\sqrt{-8}$　f. $2+\sqrt{-3}$　g. $2-\sqrt{-3}$

D. 実数・虚数・複素数

虚数単位 $\sqrt{-1} = i$ と書けば，$x^2 - 2x + 2 = 0$ の解は $x = 1 \pm i$ になった．

このように，i を含む数を**虚数** (imaginary number) といい，実数と虚数をすべてまとめて**複素数**（ふくそすう） (complex number) という．

複素数は一般に，実数 a, b を用いて $a + bi$ で表わされる．

複素数 $a + bi$ のうち，a の部分を**実部**または**実数部分** (real part)，b を**虚部**または**虚数部分** (imaginary part) [*3]という．

$b \neq 0$ のとき虚数，$b = 0$ のときは実数になる．また，$a = 0$ のときは**純虚数** (pure imaginary number) という．

複素数の一般形は $\underbrace{a}_{\text{実部}}+\underbrace{b}_{\text{虚部}}i$

a＝−1，b＝2の時 $\underbrace{-1}_{\text{実部}}+\underbrace{2}_{\text{虚部}}i$

a＝3，b＝−4の時 $\underbrace{3}_{\text{実部}}\underbrace{-4}_{\text{虚部}}i$

a＝0，b＝3の時は $\underbrace{3}_{\text{虚部}}i$ ←純虚数 （実部は0）

E. 共役な複素数

$2 + 3i$ と $2 - 3i$ のように虚数部分の正負だけが異なる 2 数は，互いに**共役**（きょうやく） (conjugate) であるという．また，複素数 α と共役な複素数は $\overline{\alpha}$ と表わされる．

たとえば，$\alpha = 4 - 2i$ のとき $\overline{\alpha} = 4 + 2i$，$\beta = 3i$ のとき $\overline{\beta} = -3i$ である．実数は共役な値と等しい．

後に見る (p.60) ように，（実数係数多項式の）方程式が虚数解の時，2 つの解は互いに共役である．

[*3] しばしば，$a + bi$ のうち bi を虚部と呼ぶこともある．

【例題 3】 以下の複素数について，問いに答えなさい．

$3+2i,\quad 4-i,\quad -2i,\quad 0,\quad 5i+1,\quad -1,\quad i$

a. 実部が 1 である数を答えなさい．
b. 虚部が 1 である数を答えなさい．
c. 実数をすべて挙げよ．
d. 虚数をすべて挙げよ．
e. 純虚数をすべて挙げよ．
f. すべての数について，共役な複素数を答えなさい．

F. 2 つの複素数が等しいとは

実部も虚部も等しいとき，2 つの複素数は等しいという．

複素数の相等

2 つの複素数 $\alpha = a_1 + b_1 i$，$\beta = a_2 + b_2 i$ が等しいことは，次で定義される．

$\alpha = \beta \iff$「$a_1 = b_1$ かつ $a_2 = b_2$」

【例題 4】 以下の複素数の等式が成り立つとき，実数 a，b，c，d，p，q の値を求めなさい．

1. $a + 3i = 3 + bi$
2. $(c-1) + di = 0$
3. $(p+q-3) + (p-2q)i = 0$

ここまで，2 次方程式の解から始めて複素数を導入した．2 次方程式の虚数解については，詳しくは p.44 を参照のこと．

2.　複素数の四則計算

複素数の計算は，i の文字式と思って計算し，$i^2 = -1$ を代入するだけでよい[*4].

A.　複素数の加法・減法

たとえば，2 つの複素数 $3+4i$, $2-5i$ の加法・減法は次のようになる.

$$(3+4i)+(2-5i) = 3+4i+2-5i = 5-i$$

$$(3+4i)-(2-5i) = 3+4i-2+5i = 1+9i$$

複素数の加法・減法

2 つの複素数 $\alpha = a_1+b_1i$, $\beta = a_2+b_2i$ について，足し算と引き算は次のように計算できる.

$$\alpha+\beta = a_1+b_1i+a_2+b_2i = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

$$\alpha-\beta = a_1+b_1i-a_2-b_2i = (a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$$

【例題 5】 a) $(2+4i)+(3+5i)$,　b) $(-2+i)+(3-i)$,　c) $(-3-i)-(-1-3i)$ を計算しなさい.

B.　複素数の乗法

たとえば，2 つの複素数 $3+4i$, $2-5i$ の乗法は次のようになる.

$$(3+4i)(2-5i) = 6-15i+8i-20i^2$$ ← $i^2 = -1$ を代入できる

$$= 6-15i+8i+20 = 26-7i$$

複素数の乗法

2 つの複素数 $\alpha = a_1+b_1i$, $\beta = a_2+b_2i$ について，掛け算は次のように計算できる.

$$\alpha\beta = (a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i-b_1b_2i^2$$ ←最後の項は，$i^2 = -1$ に注意

$$= (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

【例題 6】 $\alpha = 2+3i$, $\beta = -5+6i$, $\gamma = 6i$ のとき，　1) $\alpha\beta$,　2) $\beta\gamma$,　3) $\gamma\alpha$　の値を計算しなさい.

C. 複素数の乗法と展開の公式

展開の公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$，$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ などは，次のように応用できる．

$$\begin{aligned}(3+2i)^2 &= 9 + 2\cdot 3\cdot 2i - 4 \\ &= 5 + 12i\end{aligned}$$

←$(2i)^2 = -4$に注意→

$$\begin{aligned}(5+2i)(5-2i) &= 25 - (-4) \\ &= 29\end{aligned}$$

【例題 7】 $\alpha = 2+3i$，$\beta = 5-6i$，$\gamma = 5+6i$ のとき，1) α^2，2) β^2，3) $\beta\gamma$ の値を計算しなさい．

【例題 8】 $\alpha = 3+4i$ とする．このとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha-\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ をそれぞれ計算せよ．

【練習 9：共役な 2 数の和・差・積】

p, q を実数とし，$\alpha = p + qi$ とする．以下の $\boxed{}$ に **p, q を用いた式**を入れ，**（　）には「実数」「虚数」「純虚数」「正の数」「負の数」**のうち最もふさわしい言葉を入れよ．

(1) $\alpha+\overline{\alpha}$ を計算すると $\boxed{\text{ア}}$ になり，必ず（　イ　）である．

(2) $\alpha-\overline{\alpha}$ を計算すると $\boxed{\text{ウ}}$ になり，$q \neq 0$ であれば，必ず（　エ　）である．

(3) $\alpha\overline{\alpha}$ を計算すると $\boxed{\text{オ}}$ になり，$\alpha \neq 0$ であれば必ず（　カ　）である．

D.　複素数の除法

たとえば，$(2+3i) \div i = \dfrac{2+3i}{i}$，$(3+4i) \div (2-5i) = \dfrac{3+4i}{2-5i}$ であるが，**分母の有理化**によって，分母を実数にすることができる．

$$\frac{2+3i}{i} = \frac{(2+3i)i}{i \times i} = \frac{2i-3}{-1} = -2i+3$$ ←分母と分子に i を掛けた

$$\frac{3+4i}{2-5i} = \frac{(3+4i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}$$ ←分母と分子に $2+5i$ を掛けた（$2+5i$ は，分母 $2-5i$ と共役な数）

$$= \frac{6+15i+8i-20}{2^2-(5i)^2} = \frac{-14+23i}{4-(-25)} = \frac{-14+23i}{29}$$

複素数の除法

2 つの複素数 $\alpha = a_1 + b_1 i$，$\beta = a_2 + b_2 i$ について，割り算は次のように計算できる．

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$ ←分母と共役な $a_2 - b_2 i$ を，分母と分子の両方に掛けた

$$= \frac{a_1a_2 - a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2}{a_2^2 - (b_2i)^2} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

【例題 10】　次の計算をしなさい．

1. $\dfrac{1}{i}$　　2. $\dfrac{1}{2+3i}$　　3. $\dfrac{5-6i}{2+3i}$　　4. $\dfrac{5+6i}{5-6i}$

【練習 11：複素数の計算～その１～】

次の式を計算しなさい．

(1) $(1+i)^2+(1-i)^2$　(2) $(1+i)(1+2i)(1+3i)$　(3) $\dfrac{2-3i}{3+i}+\dfrac{3-i}{2-i}$　(4) $\dfrac{1}{1+3i}+\dfrac{1}{1-3i}$

E.　負の数の根号を含む計算

たとえば，$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$ のような計算をするときは，必ず i を含む値に直してから計算する．

$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$

なぜなら，$a<0,\ b<0$ のときは $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab},\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ が成り立つとは限らないからである[*5]．

【例題 12】 a) $\sqrt{-12}\times\sqrt{-3}$,　b) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$,　c) $\dfrac{\sqrt{-6}\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}$ をできるだけ簡単な値にしなさい．

【練習 13：複素数の計算～その２～】

根号の中に虚数を書くことは普通はしない[*6]．しかし，2 乗して虚数になる数は必ず存在する．

(1) $(a+bi)^2=2i$ を満たす実数 $a,\ b$ の値を求め，2 乗して $2i$ になる複素数 z を答えよ．

(2) 発展　$z^2=2+2\sqrt{3}i$ を満たす複素数 z を求めよ．

---

*5 たとえば，次のような計算は間違いである．$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}\neq\sqrt{(-2)\times(-3)}=\sqrt{6}$

*6 たとえば，$\sqrt{i}$ のような書き方はしない．

1.　2次方程式の解の公式と判別式

A.　2次方程式の「虚数解」

たとえば，$x^2 = -4$ のような 2 次方程式も，$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$ という虚数解をもつ．

【例題 14】 2 次方程式　a) $x^2 = -2$,　　b) $x^2 = -9$,　　c) $(x+1)^2 = -5$　を解きなさい．

B.　2次方程式の解の公式

複素数の範囲で考えると，2 次方程式は必ず解をもつ．

2次方程式の解の公式

a, b, c が実数ならば，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ で求められる[*7]．

（証明）
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \left(\text{ただし，} b^2 - 4ac < 0 \text{ の場合は虚数になる}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

【例題 15】 2 次方程式　a) $x^2 + 3x + 4 = 0$,　　b) $2x^2 + 6x + 5 = 0$,　　c) $x^2 - 4x = -5$　を解きなさい．

*7 2 次方程式の解が一つの式でまとめられることは，歴史的には画期的なことである．虚数解どころか，負の解すら認められていなかった 1000 年ほど前のインドでは，2 次方程式は何種類にも分類され，論じられていた．

C.　2 次方程式の判別式

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ において，$b^2 - 4ac$ は**判別式** (discriminant) と呼ばれ D で表わす．
$D = b^2 - 4ac$ の符号によって，解は次のように分類できる．

$D > 0 \Leftrightarrow$ 実数解 2 個，　$D = 0 \Leftrightarrow$ **重解** (multiple solution)（実数解），　$D < 0 \Leftrightarrow$ 虚数解 2 個

b が偶数の場合，2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は $\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$ を用いて分類できる．

【例題 16】 次の 2 次方程式について，実数解が何個，虚数解が何個あるか，それぞれ答えなさい．

1. $x^2 - 5x + 2 = 0$　　2. $x^2 - 4x + 4 = 0$　　3. $x^2 - 3x + 8 = 0$

【練習 17：2 次方程式の解の分類】

(1) 実数 a の値によって，2 次方程式 $x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 2a + 4 = 0$ の解を分類しなさい．

(2) 2 次方程式 $4x^2 + 2(k - 1)x - k + 4 = 0$ が実数解を持つための，実数 k の条件を求めよ．

2. 虚数を含む因数分解

数学 I(p.134) でも学んだ，2 次式の因数分解について考えよう．

i) 因数分解を利用

$x^2-3x-18=0$

$(x-6)(x+3)=0$ ←左辺の因数分解→

$x=6,-3$ ←方程式の解→

ii) 解の公式を利用（実数解）

$x^2-5x-3=0$

？？？

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ ←解の公式で求めた→

iii) 解の公式を利用（虚数解）

$x^2-5x+7=0$

？？？

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$

i) の因数分解の形から，ii), iii) は右下のように因数分解できると予想できる．

i) $x^2-3x-18$

$=(x-\underbrace{\ 6\ }_{\text{解の1つ}})(x-\underbrace{(-3)}_{\text{もう1つの解}})$

ii) x^2-5x-3

$=\left(x-\underbrace{\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}}_{\text{解の1つ}}\right)\left(x-\underbrace{\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}}_{\text{もう1つの解}}\right)$

iii) x^2-5x+7

$=\left(x-\underbrace{\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}}_{\text{解の1つ}}\right)\left(x-\underbrace{\dfrac{5-\sqrt{3}i}{2}}_{\text{もう1つの解}}\right)$

これらは実際に正しく[*8]，一般に，次の事実が成り立つ．

2 次式の因数分解（虚数も含む）

2 次式 ax^2+bx+c について，$ax^2+bx+c=0$ の解を α,β としたとき，次の因数分解ができる．

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ←x^2 の係数を合わせていることに注意[*9]

この事実を厳密な形で証明するのは難しい．詳しくは p.65 を参照のこと．

【例題 18】 x^2-5x+7，x^2+2x-5，$2x^2-4x+3$ を因数分解せよ．（因数には虚数を含んでよい）

[*8] たとえば iii) について，展開して確かめてみると

$$\left(x-\frac{5+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{3}i}{2}\right)=x^2-\left(\frac{5+\sqrt{3}i}{2}+\frac{5-\sqrt{3}i}{2}\right)x+\left(\frac{5+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$=x^2-\frac{5\cancel{+\sqrt{3}i}+5\cancel{-\sqrt{3}i}}{2}x+\frac{25-(-3)}{4}=x^2-5x+7$$

[*9] $ax^2+bx+c=0$ と $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ は 2 解が等しいので $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)$ となる．この両辺を a 倍すればよい．

3.　2次方程式の解と係数の関係

A.　解と係数の関係とは

方程式の解と，係数の間には重要な関係がある．たとえば

$x^2-7x+10=0$　←「足して−7，掛けて+10になる2数」を探す
$\Leftrightarrow$ $(x-2)(x-5)=0$　←それは−2と−5
$\Leftrightarrow$ $x=2,\ 5$　←結果，解は「足して−(−7)，掛けて+10になる2数」になっている

となるから，2次方程式の場合は次の関係が成り立ち，**解と係数の関係** (Viète's Formula) と言われる．

解と係数の関係（2次方程式の場合）

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2解を α,β とするとき，$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ が成り立つ．
特に，$a=1$ のときは，x の係数 $b=-(\alpha+\beta)$，定数項 $c=\alpha\beta$ を満たす．

α,β は実数解でも虚数解でも，上の関係は成立する．

（証明）α,β は2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2解なので，恒等式 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ が成り立つ．この右辺を展開して

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\{x^2+(-\alpha-\beta)x+\alpha\beta\} \\ &= ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta \end{aligned}$$

x の係数から $b=-a(\alpha+\beta)\Leftrightarrow -\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta$，定数項から $c=a\alpha\beta\Leftrightarrow\dfrac{c}{a}=\alpha\beta$ が示される．■

【例題 19】 $x^2-4x+2=0$ の2解を α,β とすると，解と係数の関係から $\alpha+\beta=\boxed{\text{ア}}$，$\alpha\beta=\boxed{\text{イ}}$ であり，$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ から，$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{ウ}}$ と分かる．また，$(\alpha-\beta)^2=\boxed{\text{エ}}$ である．さらに，$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\boxed{\text{オ}})$ と因数分解できるから $\alpha^3+\beta^3=\boxed{\text{カ}}$ になる．

【練習 20：解と係数の関係（2 次方程式）】

(1) 2 次方程式 $x^2+5x+5=0$ の 2 解を α, β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ の値を求めよ．

(2) 2 次方程式 $2x^2+6x+3=0$ の 2 解を α, β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ．

B. 2 解から 2 次方程式を作る

たとえば，$x=2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ を解に持つ，x^2 の係数が 1 である 2 次方程式は，解と係数の関係から

$$x\text{ の係数は } -\left(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}\right)=-4,\qquad \text{定数項は } \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=1$$

となるので，$x^2-4x+1=0$ である．

【例題 21】

1. $x=1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$ を 2 解にもつ，x^2 の係数が 1 の 2 次方程式を求めよ．
2. $3x^2+4x+2=0$ の 2 解を α, β とする．$(\alpha+1)+(\beta+1)=$ $\boxed{\text{ア}}$, $(\alpha+1)(\beta+1)=$ $\boxed{\text{イ}}$ であるから，$\alpha+1$, $\beta+1$ を 2 解にもち，係数がすべて整数の 2 次方程式は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

【練習 22：2 解から 2 次方程式を作る】

$2x^2-3x+5=0$ の 2 解を α, β とするとき，以下のものを 1 つ求めよ．

(1) $\alpha^2\beta,\ \alpha\beta^2$ を 2 解とする 2 次方程式　　　(2) $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta}$ を 2 解とする 2 次方程式

4.　2 次方程式の解の配置

A.　解の正負を決める条件

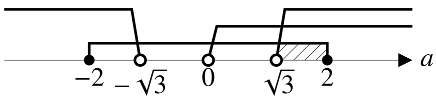
2 次方程式 $x^2-ax+(a^2-3)=0$ が正の解だけをもつような a の条件を，『解と係数の関係 (p.47)』を用いて求めてみよう．

この問題は，数学 I(p.134) でも学んだように，2 次関数を用いて解くこともできる．

$x^2-ax+(a^2-3)=0$ の解を α, β としたとき $\alpha>0, \beta>0$ となる a の条件を求めればよいが，これは

$$\begin{cases}\alpha>0\\ \beta>0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta>0\\ \alpha\beta>0\\ D\geqq 0 \leftarrow \alpha，\beta\text{は実数解なので}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=a>0\\ \alpha\beta=a^2-3>0\\ D=a^2-4(a^2-3)\geqq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\ a<-\sqrt{3},\quad \sqrt{3}<a\\ -2\leqq a\leqq 2\end{cases}$$

と分かる．これらを数直線上に表わせば右のようになるので，3 式の共通範囲である $\sqrt{3}<a\leqq 2$ が求める条件になる．



【例題 23】　以下の（　）に「<」「≦」「>」「≧」のいずれかを，□ に a の式・条件を入れなさい．

$x^2-2(a-1)x+3a+1=0$ が 2 つの異なる負の解をもつ必要十分条件は，2 解 α, β について $\alpha+\beta$（ ア ）0, $\alpha\beta$（ イ ）0, D（ ウ ）0 である．ここで，$\alpha+\beta=$ $\boxed{\text{エ}}$, $\alpha\beta=$ $\boxed{\text{オ}}$ であるから，これらを連立して解くと $\boxed{\text{カ}}$ と求められる．

B. 解の範囲を決める条件

2 次方程式 $x^2 - ax + (a+3) = 0$ の解が，異なる 2 つの解をもち，どちらも 2 より大きくなるような a の条件を，『解と係数の関係 (p.47)』を用いて求めてみよう．

$x^2 - ax + (a+3) = 0$ の解 α, β について，$\alpha > 2, \beta > 2$ が成り立てばよく，次のように考える[*10]．

$$\begin{cases} \alpha > 2 \\ \beta > 2 \\ \alpha \neq \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - 2 > 0 \\ \beta - 2 > 0 \\ D > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha-2)+(\beta-2) > 0 \cdots\cdots\cdots ① \\ (\alpha-2)(\beta-2) > 0 \cdots\cdots\cdots ② \\ D = a^2 - 4(a+3) > 0 \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

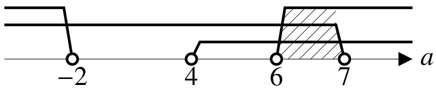
←α−2もβ−2も正であることは
「足しても掛けても正」と同値
←α≠βなので2つの異なる実数解

解と係数の関係から $\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 3$ であるから

① $\Leftrightarrow \alpha + \beta > 4 \Leftrightarrow a > 4$

② $\Leftrightarrow \alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 4 > 0$
$\Leftrightarrow (a+3) - 2a + 4 > 0 \Leftrightarrow 7 > a$

③ $\Leftrightarrow a^2 - 4a - 12 > 0$
$\Leftrightarrow (a-6)(a+2) > 0 \Leftrightarrow a < -2,\ 6 < a$



これらを数直線上に表わせば上のようになるので，3 式の共通範囲である $6 < a < 7$ が求める条件になる．

【練習 24：2 次方程式の解の配置〜その１〜】

2 次方程式 $4x^2 + ax + 3 = 0$ が，1 より小さい 2 つの異なる解をもつとき，a の範囲を求めよ．

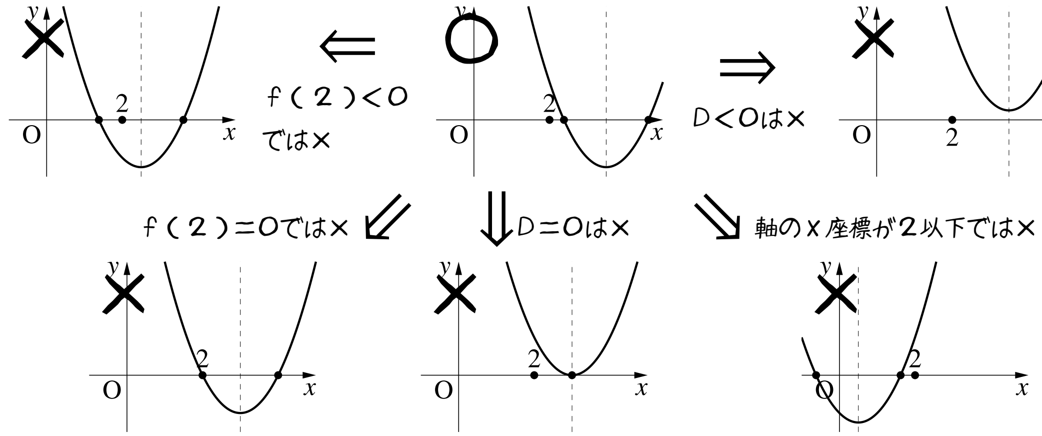
ここまで学んだ「解と係数の関係」を用いた方法と，次で学ぶ「2 次関数」を用いた方法には，一長一短がある．問題によっては「解と係数の関係」であれば簡単に解くことができ，いくつかの問題は「2 次関数」を用いないと解くことが困難である．詳しくは p.66 を参照のこと．

[*10] 「$\alpha > 2, \beta > 2$」と「$\alpha + \beta > 2 + 2 = 4,\ \alpha\beta > 2 \times 2 = 4$」は必要十分条件ではない．たとえば，$\alpha = 8, \beta = 1$ のとき，$\alpha + \beta > 4,\ \alpha\beta > 4$ は満たすが，$\alpha > 2, \beta > 2$ は満たさない．

C.　2 次関数による解法

ここまで取り上げた「2 次方程式の解の配置」について，数学 I で学んだ 2 次関数のやり方 (p.134) を復習しよう．

2 次方程式 $x^2 - ax + (a^2 - 3) = 0$ が，異なる 2 つの解をもち，どちらも 2 より大きくなるような a の条件は，「$y = f(x) = x^2 - ax + (a^2 - 3)$ と x 軸が，$2 < x$ の範囲の 2 点で交わる条件」と一致するので，2 次関数を用いて解くこともできた．つまり，次のようにグラフを描いて，満たすべき条件を考える．

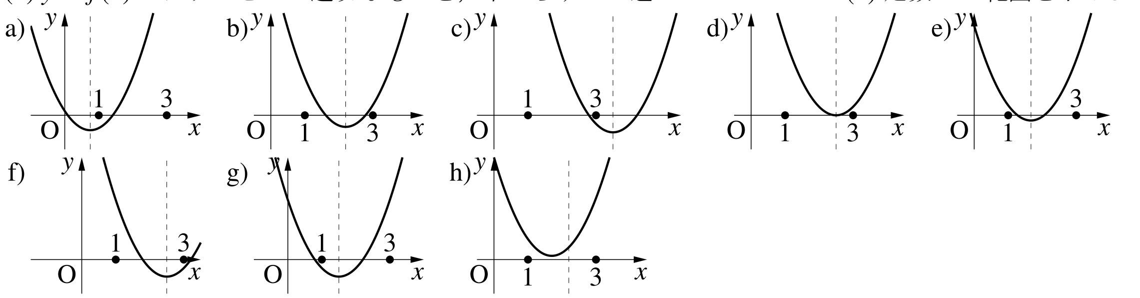


結果，$D > 0$,（軸の x 座標）> 2, $f(2) > 0$ を満たせばよいと分かる．これらの不等式を解いて共通部分を求めれば，$6 < a < 7$ が求める条件であると分かる．

【練習 25：2 次方程式の解の配置〜その２〜】

2 次方程式 $f(x) = x^2 - 2ax + 3 = 0$ の 2 解 α, β が $1 < \alpha < \beta < 3$ を満たす．

(1) $y = f(x)$ のグラフとして適切なものを，下からすべて選べ．　(2) 定数 a の範囲を求めよ．



【練習 26：2 次方程式の解の配置〜その３〜】

2 次方程式 $x^2 + 2kx + k + 12 = 0$ が，以下の条件を満たすときの k の条件を求めよ．

(1) 2 つの異なる正の解を持つ

(2) 実数解を持ち，実数解が全て 1 以上である

【発展 27：2 次方程式の解の配置〜その４〜】

$4x^2 - 3ax + 2a - 1 = 0$ の 2 解 α, β について，$-1 < \alpha < 0 < \beta < 1$ であるような条件を求めよ．

1.　組立除法

1 次式で割る多項式の割り算 (p.1)，たとえば $(x^3-3x^2-10x+20)\div(x-2)$ は**組立除法**で計算できる．

(I) 組立除法

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & & 2 & -2 & -24 \\ \hline
 & 1 & -1 & -12 & \boxed{-4}
\end{array}
$$

(II) 係数だけを書くやり方 (p.4)

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & -1 & -12 & \\ \hline
1\ -2\ \big) & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & 1 & -2 & & \\ \hline
 & & -1 & -10 & \\
 & & -1 & 2 & \\ \hline
 & & & -12 & 20 \\
 & & & -12 & 24 \\ \hline
 & & & & -4
\end{array}
$$

(III) 普通のやり方 (p.1)

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -x & -12 & \\ \hline
x-2\ \big) & x^3 & -3x^2 & -10x & +20 \\
 & x^3 & -2x^2 & & \\ \hline
 & & -x^2 & -10x & \\
 & & -x^2 & +2x & \\ \hline
 & & & -12x & +20 \\
 & & & -12x & +24 \\ \hline
 & & & & -4
\end{array}
$$

組立除法のやり方

$$
\begin{array}{c|rrrr}
\boxed{2} & 1 & -3 & -10 & 20 \\ \hline
\end{array}
$$

←多項式の係数を書き並べる．

一番左は，$x-2=0$ を満たす $x=\boxed{2}$ を書く．

⇓

順に，$\times\boxed{2}$ を掛けた結果を右上に書き，縦の2つを足して下に書く．

$$
\begin{array}{c|rrrr}
\boxed{2} & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & \downarrow\text{下へ下ろす} & & & \\ \hline
 & 1 & & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|rrrr}
\boxed{2} & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & \times\boxed{2}\nearrow & 2\downarrow\text{足す} & & \\ \hline
 & 1 & -1 & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|rrrr}
\boxed{2} & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & & 2 \ \times\boxed{2}\nearrow & -2\downarrow\text{足す} & \\ \hline
 & 1 & -1 & -12 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|rrrr}
\boxed{2} & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & & 2 & -2\ \times\boxed{2}\nearrow & -24\downarrow\text{足す} \\ \hline
 & 1 & -1 & -12 & \boxed{-4}
\end{array}
$$

商 x^2-x-12，余り -4

組立除法の仕組みについては，p.66 を参考のこと．

a が分数であっても，組立除法を用いることができる．たとえば，$F(x)=3x^3+2x^2-4x+2$ のとき，$F(x)\div\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$ は右のようになり

$$
\begin{array}{c|rrrr}
\frac{1}{3} & 3 & 2 & -4 & 2 \\
 & & 1 & 1 & -1 \\ \hline
 & 3 & 3 & -3 & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
3x^3+2x^2-4x+1 &= \left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+3x-3)+1 \\
&= \left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot 3(x^2+x-1)+1=(3x-1)(x^2+x-1)+1
\end{aligned}
$$

【例題 28】　次の割り算を組立除法で行い，商と余りを答えなさい．

1. $(x^3+3x^2-2x+1)\div(x-2)$
2. $(x^3-x^2+1)\div(x-3)$
3. $(4x^3+6x^2-1)\div(2x+1)$

2.　因数定理

A.　因数定理とは

「剰余の定理 (p.14)」において，余りが 0 になる場合を**因数定理** (factor theorem) という．

因数定理

1. 「$F(x)$ が $x-a$ で割り切れる」 $\Longleftrightarrow$ 「$F(a)=0$」
2. 「$F(x)$ が $ax-b$ で割り切れる」 $\Longleftrightarrow$ 「$F\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$」

（証明）1. は 2. の特別な場合なので，2. のみを示せばよい．
$f(x)$ を $ax-b$ で割った余りは $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$ になった（p.14）ので，「$F(x)$ が $ax-b$ で割り切れる」 $\Longleftrightarrow$ 「$F(x)$ を $ax-b$ で割った余りは 0」 $\Longleftrightarrow$ 「$F\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$」となって示された． ■

B.　高次式の因数分解

3 次式，4 次式などの因数分解には，因数定理を用いることが多い．

たとえば，$F(x)=x^3-3x^2-10x+24$ を考える．これは，$F(2)=0$ なので $F(x)\div(x-2)$ は割り切れる．実際，割り算をすれば右のようになって $F(x)=(x-2)(x^2-x-12)$ と分かる．さらに因数分解して，$F(x)=(x-2)(x+3)(x-4)$ とわかる．

2	1	−3	−10	24
		2	−2	−24
	1	−1	−12	0

【例題 29】　次の割り算は割り切れるか．割り切れるならば，有理数の範囲で因数分解せよ．

1. $(x^3-2x^2-5x+6)\div(x-1)$　　2. $(x^3-2x^2-5x+7)\div(x-1)$　　3. $(x^3-2x^2-7x+8)\div(x-1)$

C. $F(a)=0$ となる a の探し方

たとえば，$F(x)=x^3+2x^2-2x+3$ の因数分解を考えるとき，$F(2)=0$ になることはありえない．なぜなら，$F(x)=x^3+2x^2-2x+3=(x-2)Q(x)$ と割り切れれば，（$F(x)$ の定数項）$=3=(-2)\times$（$Q(x)$ の定数項）から $Q(x)$ の定数項が $\dfrac{3}{2}$ と整数でなくなってしまう[*11].

上の場合，$F(a)=0$ となる a は，定数項 $+3$ の約数 ±1，±3 の中から探せば良い．

一般に，次のことが成り立つ．

$F(a)=0$ となる a の探し方

係数がすべて整数の多項式 $F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ を考える．

$F(a)=0$ となる有理数 a は

1. まず，$F(x)$ の定数項 a_0 の約数の中から探す（負数もあり得る）．
   $F(x)$ の最高次の係数 $a_n=1$ のとき，この中になければ $F(a)=0$ となる有理数 a は存在しない．
2. 次に，$a=\pm\dfrac{a_0\text{ の約数}}{a_n\text{ の約数}}$ から探す．
   これで見つからなければ，$F(a)=0$ となる有理数 a は存在しない．

この事実を厳密に証明するのは難しい．p.67 を参照のこと．

【例題 30】 次の式を有理数の範囲で因数分解しなさい．

1. x^3-2x^2-2x-3
2. x^3-4x^2-4x-5
3. $2x^3+3x^2-4x+1$

[*11] 割り切れたとき，商が必ず整数であることは経験的に明らかだろう．ただし，厳密な証明は難しい (p.67).

3.　高次方程式とその解法

「高次方程式」とは，3 次方程式，4 次方程式，…のように，2 次より次数の高い方程式のことを表わす.

A.　2 次方程式とみなせる場合

4 次方程式であっても，x^2, x^4 しかない場合は，2 次方程式のように解ける．たとえば，$x^4 - x^2 - 12 = 0$ は，$x^2 = X$ とおくと，$X^2 - X - 12 = (X-4)(X+3)$ であるから

$$x^4 - x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x^2+3) = 0$$

$x^2 + 3 = 0$ を解くと $x = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$ なので $x = \pm 2,\ \pm\sqrt{3}i$

B.　因数分解の公式を用いる場合

高次方程式は，数学 I の因数分解の公式 (p.31-) を用いて解ける場合がある．たとえば，3 次方程式 $x^3 = 27$ は次のように解ける.

$x^3 = 27 \Leftrightarrow x^3 - 27 = 0$　　←右辺が0になるよう移項した

$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+9) = 0$　　←左辺が因数分解できる

$\Leftrightarrow x = 3,\ \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$　　←$x^2+3x+9=0$は解の公式で解いた

【例題 31】　次の方程式を解きなさい.

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$　　2. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$　　3. $x^3 = 8$　　4. $x^4 = 16$　　5. $x^6 + 2x^3 = -1$

C. 因数定理を用いた解法

前ページの方法をどちらも使えない場合は，因数定理を用いて解く．

たとえば，$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ を解こう．$F(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ とおくと，$F(2) = 0$ から $F(x) \div (x-2)$ は割り切れる．右のように割り算をして因数分解を進めると

2	1	−3	−10	24
		2	−2	−24
	1	−1	−12	0

（与式）$\Leftrightarrow F(x) = (x-2)(x^2 - x - 12) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+3)(x-4) = 0 \quad \therefore \quad x = 2, -3, 4$

【例題 32】 次の方程式を解け．

1. $x^3 - x^2 + 4x + 6 = 0$
2. $x^3 - 4x - 3 = 0$
3. $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$

D. 高次方程式における「重解」

上の例題の 3. のように，3 次方程式の解が $x = 1, 1, \dfrac{1}{2}$ となり，結果的には $x = 1, \dfrac{1}{2}$ が解となることがある．このように，重なった 2 つの解を重解という[*12]． 3 次以上の方程式では，3 つ以上の解が重なることもある．一般に，n 個の解が重なっているとき，それを n 重解という[*12]．

E. 代数学の基本定理

虚数解を含め，重解を「2 つの解が重なっている」と考えれば 2 次方程式には「解がちょうど 2 つある」．同じことが n 次方程式にも成り立ち，以下のことが分かっている．

代数学の基本定理

n 次方程式 $F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ の解は，実数・虚数合わせてちょうど n 個ある．

この定理の証明は高校数学を大きく超える．事実だけを知っていれば良い．

[*12] 厳密な数学の定義によれば，本来は**重根** (multiple root)，***n* 重根** (n multiple root) とよぶべきである．しかし，高校数学においては「重解」という言葉が慣用的に用いられている．13th-note 数学 II も慣例に従うこととする．

【練習 33：高次方程式～その１～】
次の方程式を解きなさい．
(1) $x^4 = 1$　(2) $x^3 + x + 10 = 0$　(3) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$　(4) $x^3 - 3x - 2 = 0$

【発展 34：高次方程式～その２～】
① 次の方程式を解きなさい．　(a) $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) + 6 = 0$
(b) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 3$　(c) $2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = 0$
② a を実数とする．3 次方程式 $x^3 + (2a - 1)x^2 + 4x - 2a - 4 = 0$ について，次の条件を求めよ．
(a) 虚数解を持つ　(b) 異なる 3 つの実数解を持つ

4.　高次方程式についての重要な例題

A.　3 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式に『解と係数の関係 (p.47)』があったように，3 次以上の方程式においても『解と係数の関係』を考えることができる．

解と係数の関係（3 次方程式の場合）

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の 3 解を α, β, γ とするとき，次が成り立つ．

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

特に，$a = 1$ のときは，x^2 の係数 $b = -(\alpha + \beta + \gamma)$，$x$ の係数 $c = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$，定数項 $c = -\alpha\beta\gamma$ が成り立つ．

…… α, β, γ は実数解でも虚数解でも，上の関係は成立する．

【練習 35：3 次方程式の解と係数の関係〜その１〜】

3 次方程式 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ は 3, 1 を 2 解に持つという．

(1) この 3 次方程式の他の解を求めよ．

(2) a, b の値を求めよ．

【練習 36：3 次方程式の解と係数の関係〜その２〜】

3 次方程式 $x^3 - 2x^2 + 2x - 5 = 0$ の 3 解を α, β, γ とする．

(1) $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ の値を求めよ．

(2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ の値を求めよ．

(3) 暗記　恒等式 $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ を示せ．

(4) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ の値を求めよ．

(5) $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$ の値を求めよ．

【発展 37：3 次方程式の解と係数の関係〜その３〜】

3 次方程式 $2x^3-4x^2+3x-5=0$ の 3 解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，以下の値を計算しなさい．

① $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　② $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　③ $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$

B. 虚数解をもつ高次方程式について

たとえば，$x=2+i$ は $x^2-4x+5=0$ の解であるが，$2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である．

このことは，2 次方程式に限らず，高次方程式でも成り立つ．ただし，方程式の係数はすべて実数でなければならない．

虚数解の共役

次数が n，係数がすべて実数である方程式 $F(x)=a_nx^n+a_{m-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ が虚数解 $\alpha=p+qi$ をもつとき，その共役な複素数 $\overline{\alpha}=p-qi$ も方程式 $F(x)=0$ の解になる．

（証明）$F(\alpha)=0$ であるとき，$F(\overline{\alpha})=0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
F(\overline{\alpha}) &= a_n(\overline{\alpha})^n+a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1}+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0\\
&= a_n\overline{\alpha^n}+a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}}+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0 &&\leftarrow \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\text{ から，}\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha}^n)\text{ など}\\
&= \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}+\overline{a_0} &&\leftarrow \text{係数は実数なので } a_k=\overline{a_k}\\
&= \overline{a_nx^n+a_{m-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0} &&\leftarrow \overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta},\ \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\\
&= \overline{F(\alpha)}=0
\end{aligned}$$

【練習 38：虚数解を持つ高次方程式】

(1) $1+2i$ を解にもち，係数が実数である 2 次方程式を一つ求めなさい．

(2) 3 次方程式 $x^3-ax^2+bx-22=0$ は $x=3+\sqrt{2}i$ を解に持つ．実数 $a,\ b$ の値と他の解を求めよ．

C. 1の3乗根 ω

3乗して1になる数のうち，1でない数を**1の3乗根**という．$x^3=1$ を解けば

$$x^3-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

となるから，1の3乗根は $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ と $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ である．

1の3乗根 ω

1の3乗根は，しばしば ω（オメガ）で表わされ，次の等式を満たす．

$\omega^2=-\omega-1$，$\omega^3=1$

この等式は，$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ であっても $\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ であっても，正しい．

（証明）ω は2次方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから $\omega^2+\omega+1=0$ を満たす．これを移項して，$\omega^2=-\omega-1$ を得る．また，ω は3次方程式 $x^3=1$ の解でもあるから，$\omega^3=1$ を満たす．

【練習 39：1の3乗根〜その１〜】

1の3乗根 ω について，以下の値を求めよ．

(1) $\omega^4+\omega^5$　　(2) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6$　　(3) $\omega^{20}+\omega^{10}$

【発展 40：1の3乗根〜その２〜】

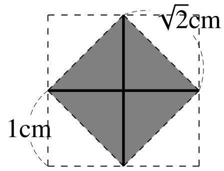
1の3乗根 ω について，以下の値を求めよ．

① $\omega^{100}+\omega^{50}$　　② $\omega^{999}+\omega^{998}+\cdots+\omega$　　③ 自然数 n について，$\omega^{3n}+\omega^{2n}+\omega^n$

2.4　第２章の補足

1.　発展　複素数への拡張について

A.　複素数への拡張の特殊性

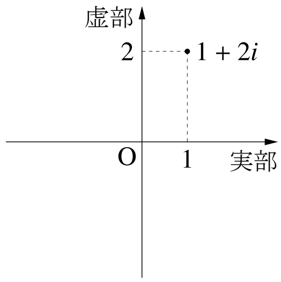


数学 I で学んだ (p.1-6) ように，「数える」ことで生まれた自然数から「数」は拡張され，最終的には「数直線上に表すことのできる」数の全てを実数と呼んだ．

この実数の「定義」は数学的には曖昧ではある[*13]が，直感的には分かりやすい．無理数 $\sqrt{2}$ も，右のように長さとして存在するから認めざるをえない．

しかし，「2 乗して -1 になる数」は数直線上のどこにも当てはまらない．そのため，虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を数として認めるには，これまでの数の拡張と異なった考え方を持たなければならない[*14]．

B.　複素数の見方〜その１・複素数平面〜



複素数を導入する 1 つの考え方は，数直線そのものを拡張することである．

つまり「数直線」ではなく「数平面」を考える．この「数平面」は**複素数平面** (complex number plane) と言われ，右のようになる[*15]．

この考え方は，変数が複素数である関数を考える[*16]時など，数学の基本的な道具として用いられる．

C.　複素数の見方〜その２・文字式として〜

たとえば，$\sqrt{2} = t$ とする．このとき，有理数と $\sqrt{2}$ の加減乗除による計算は「文字 t を含む式全体」とも考えられる．この式においては，「t^2 はすべて 2 に置き換えると決める」という決まり事がある．

同じように「文字 i を含む文字式全体」として複素数を定義してもよい．この場合は，「i^2 はすべて -1 に置き換えると決める」という決まり事がある．

D.　$1+i$ という数について

とはいえ，次のような疑問を持つ人がいるかもしれない．

> 「長さ 1」と「長さ $\sqrt{3}$」を合わせた「長さ $1+\sqrt{3}$」が存在するから，$1+\sqrt{3}$ という数は分かる．しかし，「長さ i」は数直線上にないのだから，$1+i$ という数は何なのか？そもそも，1 足す i はできるのか？

たとえば，方程式 $(x-1)^2 = -1$ を解くとき，最後の「両辺に 1 を足す操作」ができるのかが問題になる．

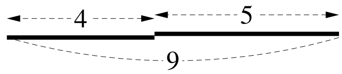
$(x-1)^2 = -1 \iff x-1 = i,\ -i$　←２乗して−１になる数が " i "

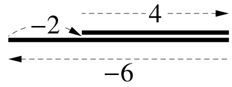
$\iff x = 1+i,\ 1-i$　←両辺に１を『足す』？

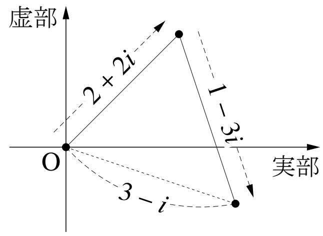
そのためには，記号 + とは何であるか，詳しく見る必要がある．

[*13] 「数直線上に表わす」が不明瞭である．この意味をどのように明瞭にするかは高校数学の内容を超えるが，数学 III で少し扱う．
[*14] 虚数が発見された当時は「想像上の」数でしかなかった．そのため，今でも，虚数のことを英語では imaginary number と言う．
[*15] 他に，複素平面 (complex plane) と言われたり，考案者の名をとって Gauss 平面 (Gaussian plane) とも言われる．
[*16] 当然ながら高校では扱われない．

E. 複素数における + の意味〜その１・複素数平面の場合〜







複素数平面の場合は，数直線の拡張として + の意味を考えられる．

まず，$4+5$ の場合は数直線を用いると，右上のように，長さを付け加えることで考えられる．

負の数を足す場合も数直線を用いて，たとえば $4+(-6)$ は右のように考えられる．つまり，数に「右向き（正の場合)」「左向き（負の場合)」を考えればよい．

複素数になった場合は，右下のようになる．つまり，数の向きは 360° いずれの方向も向きうる．これは，数学 B で学ぶ「平面のベクトル」の足し算と同じやり方である．

F. 複素数における + の意味〜その２・文字式として見た場合〜

そもそも，+ は次の性質を持っている．

(1) $a+(b+c)=(a+b)+c$（結合法則）
(2) $a+b=b+a$　　（交換法則）
(3) $a+0=a$　　　（足しても値を変えない 0 がある）
(4) $a+x=0$ には必ず解があって $x=-a$（どんな数にも，足して 0 になる数がある）

ここで発想を逆にする．足し算である + が上の 4 つの性質を持つのではなく，逆に，「+ が上の 4 つの性質を持つから，+ は足し算と呼んでもよい」と考える[*17]．

さて，「実数 $a,\ b$ に対して，$x-a=bi$ を満たす x を $a+bi$ と書いて良いか？」という点を考えよう[*18]．そこでひとまずは，$x-a=bi$ を満たす x を $a\oplus bi$ と書くことにする．

今，$a_1\oplus b_1 i,\ a_2\oplus b_2 i$ の「足し算」を次で定義しよう．

$$(a_1\oplus b_1 i)+(a_2\oplus b_2 i)=(a_1+a_2)\oplus(b_1+b_2)i$$

この「足し算」は，(1) 結合法則も (2) 交換法則も成り立つ．さらに，$0\oplus 0i$ を足しても値を変えないから (3) も成り立ち，(4) の性質も明らかである．だから，この「足し算」に記号 + を用いてもよい．

すると，$a\oplus bi=(a\oplus 0i)+(0\oplus bi)$ ········ ① が成り立っている．$a\oplus 0i$ とは実数 a のことであり，$0\oplus bi$ とは「2 乗して $-b^2$ になる数」として純虚数 bi の事である．

だから，①は $a\oplus bi=a+bi$ と書き換えられて，記号 ⊕ の代わりに + を用いても構わないと分かる．

G. 複素数における×の意味

×の場合は，(1) 結合法則，(2) 交換法則，(3)「$a\times 1=a$（掛けても値を変えない 1 がある)」(4)「$a\neq 0$ ならば $a\times x=1$ には必ず解がある」の 4 つの性質を持てば，×は掛け算と呼べると考える[*19]．

a が純虚数または実数の場合は，$a\times(bi)=(ab)i,\ (ai)\times(bi)=-ab$ と定義して，比較的容易に確かめられる．a が任意の複素数としても，計算は大変になるが正しいことを確認できる．

---

*17 このように，物事を性質から定義し直すとき，それらの性質を「公理」という．この考え方は，(多少乱暴な類似ではあるが）友達を遠くから探すとき「背が高くて帽子をかぶり黒い服を着ているから○○さんのはずだ」と判断をすることに似ている．

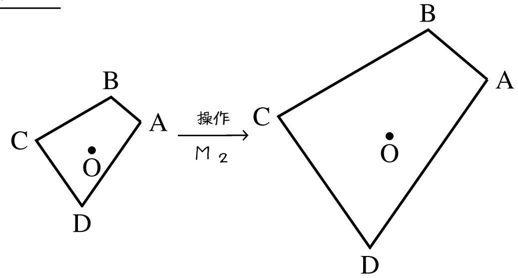
*18 実際には，bi と $-bi$ の関係なども厳密に考える必要があるが，以下では簡略化している．それでも，以下は高度な話になっているので読み飛ばして構わない．

*19 大学で学ぶ高度な数学では，この 4 つとは限らない．

H.　虚数単位 i の具体的なモデル〜複素数の見方・その３〜

まず，$\sqrt{2}$ に新しい見方を導入しよう．

ある点 O を中心に「図形を 2 倍に拡大する」という操作を M_2 と定義する．操作 M_2 は，右図のような操作になる．

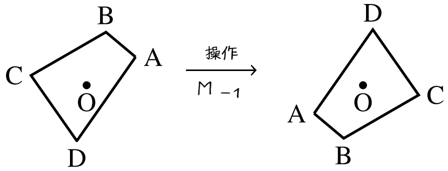


ここで，次のような操作 Q を考える．

操作 Q を 2 回繰り返す操作は M_2 に一致する．

この操作 Q は「図形を $\sqrt{2}$ 倍に拡大する」という操作に一致する．こうして，$\sqrt{2}$ という数を 1 つの操作として捉えることができる．

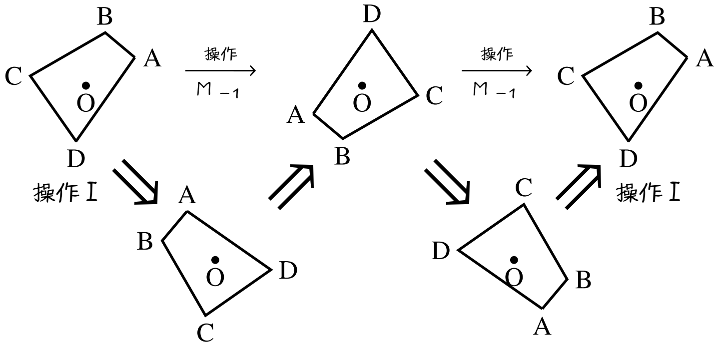
次に，ある点 O を中心に「図形を −1 倍する」という操作に M_{-1} という名前を付けよう．右図のように，操作 M_1 は点 O に対して対称移動することになり，結果として 180° の回転操作になる．



ここで，次のような操作 I を考える．

操作 I を 2 回繰り返す操作は M_{-1} に一致する．

「D を 90° 回転させる」操作は 2 回行うと，「D を 180° 回転させる」操作になる．つまり，操作 I に対応する操作として「D を 90° 回転させる」が対応していると考えてよい．



実質的には，−1 を「2 回繰り返せば元に戻る」操作と，虚数単位 i を「4 回繰り返せば元に戻る」操作と対応させられる．

同じように，複素数 $1 + i$ と対応させた操作も考える事ができる[*20]．

I.　複素数の利用

今では，複素数は様々な場面で用いられ，「想像上の」数と呼ぶことはふさわしくない．

まず，数学の面から言えば，虚数を数として認めることにより，代数学の基本定理「n 次方程式は n 個の解をもつ」（p.57）がある．もちろん，解が実数であるか虚数であるかは調べる必要があるし，n 個のうち 2 つが同じ値になるかもしれない．しかし，直感的にも分かりやすいきれいな事実である．

残念ながら高校数学の範囲を大きく超えるため，ここで詳細を取り上げることはできないが，物理でも，電磁波や原子・分子の様子を扱うときには，複素数が用いられる．

[*20] 新課程の数学 III でより詳しく学ぶ「複素数平面」を必要とする．

2. 発展 因数分解 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の証明について

A. 何が難しいのか

「$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できるとき，$ax^2+bx+c=0$ の 2 解は $f(\alpha)=f(\beta)=0$ から $x=\alpha,\beta$ である」という事実は簡単である．しかし，この逆である，次の命題が難しい．

2 次式の因数分解

2 次式 ax^2+bx+c について，$ax^2+bx+c=0$ の解が α,β となるとき，次の因数分解ができる．

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ←x^2 の係数を合わせていることに注意

B. α,β が実数の場合

（証明）ax^2+bx+c を $x-\alpha$ で割った商を $u(x)$，余りを d とする．商と余りはただ 1 つに定まり (①)

$$ax^2+bx+c=(x-\alpha)u(x)+d$$

となるが，両辺に α を代入して $0=d$ を得る．よって，ax^2+bx+c は $x-\alpha$ で割り切れる．同じようにして $x-\beta$ でも割り切れるから，ax^2+bx+c は $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割り切れる．x^2 の係数は一致しないといけないので (②)，恒等式 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ を得る．

C. α,β が複素数の場合

α,β が複素数の時も上の証明は有効である．

しかし，上の証明で用いた①，②は，係数が実数のときしか示されていない（①は p.30，②は p.31）．

①の証明（p.30）には「係数は複素数でもよい」と一言書き添えても証明は有効であり，解決される．

しかし，②の証明については 2 点，高校数学の範囲では説明どころか定義もできない内容が残る．それは②の証明の以下の記述（p.31）である．

「ここで，関数 $g(x)$ は多項式であるから連続関数であり，$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$ を満たす．$c\neq 0$ ならば $g(c)=0$ であるから，$g(0)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$ となる．」

係数も変数も複素数である $g(x)$ の「連続関数」「$\lim_{x\to 0} g(x)$」については高校数学の範囲を大きく超える．そのため，残念ながらここで論じられない[*21]が，実数の場合と同じように正しいことが証明されている．

D. n 次式の因数分解

同様の定理は，自然に 3 次以上の式へも拡張できる．

n 次式の因数分解

n 次式 $F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ について，以下の条件は同値である．

- $F(x)=0$ の解が $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ である．
- $F(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ と因数分解ができる．

[*21] 「複素数平面」「複素数を含む式の極限の厳密な定義」「関数の連続の厳密な定義」について詳しく論じる必要がある．

3. 発展 組立除法の仕組み

割り算 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x-u)(p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1x + p_0) + A$ について，式を変形すると

$$\Leftrightarrow a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (p_{n-1}x^n + \cdots + p_1x^2 + p_0x) - (up_{n-1}x^{n-1} + \cdots + up_1x + up_0) + A$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ & a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \\ & \quad +up_{n-1}x^{n-1} + \cdots + up_1x + up_0 = (p_{n-1}x^n + \cdots + p_1x^2 + p_0x) + A\end{aligned}$$

となる．最後の等式を右下の表のように表わし，係数だけ書き出そう．

今，u, a_n, $a_{n-1}, \cdots$, a_0 が与えられたときに，p_{n-1}, $\cdots$, p_1, p_0, A が与えられればよいが，右の表はそれが可能である．

そして，右下の係数だけ書かれた表を書いて，p_{n-1}, $\cdots$, p_1, p_0, A を求める割り算の方法を組立除法と呼んでいる．

$$\begin{array}{rrrr|l} a_nx^n & +a_{n-1}x^{n-1} + \cdots & +a_1x & +a_0 & \\ & +up_{n-1}x^{n-1} + \cdots & +up_1x & +up_0 & \downarrow \text{足す} \\ \hline = p_{n-1}x^n & +p_{n-2}x^{n-1} + \cdots & +p_0x & \multicolumn{1}{|l}{+A} & \end{array}$$

x の累乗を省略 $\Downarrow$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} u & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ & & up_{n-1} & \cdots & up_1 & up_0 & \downarrow \text{足す} \\ \hline & a_n & a_{n-1}+up_{n-1} & \cdots & a_1+up_1 & \multicolumn{1}{|c}{a_0+up_0} & \\ & =p_{n-1} & =p_{n-2} & \cdots & =p_0 & \multicolumn{1}{|c}{=A} & \end{array}$$

4. 「2 次方程式の解の配置」の問題に対する 2 解法の比較

A. 「解と係数の関係」を用いた解法の利点と欠点

「2 次関数」を用いる解法より，条件を考えやすい．条件「$\alpha > 1, \beta > 1$」を「$\alpha - 1 > 0, \beta - 1 > 0$」と読み替える部分は技巧的ではあるが，難しい変形ではないので，一度理解して忘れなければ難しくはない．

欠点は，「解と係数の関係」を用いては解くことが困難な問題が存在することにある．一例として，【練習 C.】(p.51) が挙げられる．これを解くには，次の条件を解く必要がある．

$D > 0$

$1 < \alpha < 3,\ 1 < \beta < 3$ から $2 < \alpha + \beta < 6$

$0 < \alpha - 1,\ 0 < \beta - 1$ から $(\alpha-1)(\beta-1) > 0$

$\alpha - 3 < 0, \beta - 3 < 0$ から $(\alpha-3)(\beta-3) > 0$

【発展 C.】(p.52) のように，α, β の満たす不等式が長くなると，さらに条件が煩雑になる．

また，この解法では，判別式 D の条件を忘れないよう，注意することが必要である．

B. 「2 次関数」を用いた解法の利点と欠点

この「2 次関数」を用いた解法は，3 つの条件「判別式」「軸の方程式の条件」「解の適・不適を分ける x 座標における関数の値」だけを考えればよい．しかし，グラフと方程式の対応を完璧に理解しないとこの解法を身につけることはできない．それが，この解法の欠点である．

逆に言えば，このやり方からグラフと方程式の対応を考える力は鍛えられる．しかし，何よりの利点は，「2 次関数」を用いた解法ならすべての「2 次方程式の解の配置」の問題を解ける点にある．

5. 発展 「$F(a)=0$ となる a の探し方」についての証明

A. 「$F(a)=0$ となる a の探し方」の根拠となる定理

p.55 に書かれた探し方は，次の定理によって有効である．

整数係数の方程式 $F(a)=0$ の有理数解 a

係数がすべて整数の多項式 $F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ について，$F(a)=0$ となる有理数 a が存在するならば，$a=\pm\dfrac{a_0\text{ の約数}}{a_n\text{ の約数}}$ を必ず満たす．

（証明）$F(a)=0$ となる有理数 a を，$a=\dfrac{m}{l}$（m は整数，l は自然数，$|m|$ と l は互いに素）と既約分数で表す．$F(a)=F\left(\dfrac{m}{l}\right)=0$ から，因数定理より $F(x)$ は $lx-m$ で割り切れる．その結果を

$$F(x)=(lx-m)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0) \qquad \cdots\cdots ①$$

で表わす．n 個の値 b_{n-1}，$\cdots$，b_1，b_0 が有理数であることは明らか[*22]．ここで，①の右辺を展開し

x^n の係数を比較して $a_n=lb_{n-1}$ $\cdots\cdots$ ②，定数項を比較して $a_0=-mb_0$ $\cdots\cdots$ ③

を得る．次ページで示すように，b_{n-1}，b_0 はどちらも整数でなるから，②から l が a_n の約数，③から m が a_0 の約数であることが分かり，$a=\dfrac{m}{l}=\pm\dfrac{a_0\text{ の約数}}{a_n\text{ の約数}}$ が示された．

B. 整数係数の多項式の因数分解

上で用いた次の命題を証明しよう．直感的には明らかな事実だが，厳密に証明するのは難しい．

整数係数の多項式が整数係数の 1 次式で割り切れるとき

l, m を互いに素とし，係数がすべて整数の多項式 $F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ が，$lx-m$ で割り切れたとする．このとき，商の多項式は係数がすべて整数になる．

（証明）$F(x)\div(lx-m)$ が割り切れた結果を

$$F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=(lx-m)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0) \qquad \cdots\cdots ④$$

とし，n 個の有理数 b_{n-1}，$\cdots$，b_1，b_0 を既約分数で表したときの分母の最小公倍数[*23]を u とする．

$u=1$ を背理法で示す．そうすれば，n 個の有理数 b_{n-1}，$\cdots$，b_1，b_0 の分母はすべて 1，つまり整数であったことが示されたことになる．

$b_i=\dfrac{c_i}{u}$ とする．u は分母の最小公倍数なので，整数 c_{n-1}，$\cdots$，c_1，c_0 の最大公約数は 1 $\cdots\cdots$ ⑤ になり[*24]，④ は次のように変形できる．

$$④ \iff uF(x)=(lx-m)(c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0) \qquad \cdots\cdots ⑥$$

---

*22 厳密に示すのであれば，背理法を用いる．b_i が無理数であるような i の最小値を z とし，x^z の係数比較をすれば b_z が有理数と等しくなり，矛盾する．

*23 ここでいう「最小公倍数」とは，「共通する正の倍数の最小のもの」を意味する．

*24 ここでいう「最大公約数」とは，「共通する正の約数の最大のもの」を意味する．

$u \neq 1$ と仮定する ……… ⑦ と，u は素数の約数をもつ．その 1 つを p とし，l, m を p で割った商を q_l，q_m，余りを r_l, r_m とする．l, m は互いに素であったから，r_l, r_m のどちらかは 0 でない ……… ⑧．
また，c_{n-1}，$\cdots$，c_1, c_0 を p で割った商を Q_{n-1}，$\cdots$，Q_1, Q_0，余りを R_{n-1}，$\cdots$，R_1, R_0 とする．すると

$$⑥ \Leftrightarrow uF(x) = \{(q_l x - q_m)p + (r_l x - r_m)\}\{(Q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + Q_1 x + Q_0)p + (R_{n-1}x^{n-1} + \cdots + R_1 x + R_0)\}$$

$$\Leftrightarrow uF(x) = pA(x) + (r_l x - r_m)(R_{n-1}x^{n-1} + \cdots + R_1 x + R_0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

ただし，$A(x)$ は係数がすべて整数の多項式[*25]である．
ここで⑤から，R_{n-1}，$\cdots$，R_1, R_0 のどれかは 0 でないから，⑨の右辺の多項式 $R_{n-1}x^{n-1} + \cdots + R_1 x + R_0$ は 0 でない．この式の次数を k とすると，⑧から $(r_l x - r_m)(R_k x^k + \cdots + R_1 x + R_0)$ の次数は k または $k+1$ になり，最高次の係数は $r_m R_k$ または $r_l R_k$ になる．しかし，$r_m R_k$ であっても $r_l R_k$ であっても，p で割った（0 でない）余り同士の掛け算であるから，これは p で割り切れない．p は u の約数であったから，⑨の右辺の k 次または $k+1$ 次の係数が p の倍数でないと分かるが，左辺は係数がすべて p の倍数である．
よって，⑦の矛盾が導かれ，b_{n-1}，$\cdots$，b_1, b_0 がすべて整数と示された．

一般に，次の**ガウスの補題** (Gauss' lemma) が成り立ち，上の方法を応用すれば証明できる．

ガウスの補題

整数係数の多項式 $F(x)$ が，有理数係数の多項式 $G_0(x)$, $H_0(x)$ を用いて $F(x) = G_0(x)H_0(x)$ と因数分解できるなら，実際には整数係数の多項式 $G(x)$, $H(x)$ によって $F(x) = G(x)H(x)$ と因数分解できる．また，$G(x)$, $H(x)$ は $G_0(x)$, $H_0(x)$ の定数倍であるようにとれる．

この定理の証明は，合同式[*26]という考え方を用いると，だいぶ見通しがよくなる．

[*25] 具体的に $A(x)$ を表せば，次のようになる．
$A(x) = (q_l x - q_m)(Q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + Q_1 x + Q_0)p + (q_l x - q_m)(R_{n-1}x^{n-1} + \cdots + R_1 x + R_0) + (r_l x - r_m)(Q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + Q_1 x + Q_0)$

[*26] 合同式の考え方は，高校生向けの参考書のいくつかで取り上げられており，13th-note 数学 A（新課程）でも取り上げられる．