13th-note 数学 I

（2013 年度卒業生まで）

Ver2.741(2012-10-2)

目次

第 2 章　方程式・不等式と関数

第 2 章では，方程式・不等式と関数（のグラフ）の関係について学ぶ.

はじめに 1 次不等式・2 次方程式を学ぶが，後にこれらは，1 次関数・2 次関数のグラフと密接な関係があることが分かる．この関係をつかむことは，高校数学の最も大事なポイントの 1 つになっている.

最終的に，2 次不等式を解くときには，簡単な計算問題であっても，2 次関数を用いて解くことになる.

方程式・不等式からグラフへ，グラフから方程式・不等式へ．自由に行き来するまでに時間がかかるかもしれないが，じっくり考えて理解しよう.

2.1　1次不等式

2 つの数が等しいことは等号(=)を使った等式で表されるように，2 つの数の間の大小は，不等号(> や ≦ など)を使って表される．

1.　不等式の性質

A.　不等号とその読み方

2 つの数の大小関係は，**不等号** (a sign of inequality) を用いて表される．たとえば，「2 より 3 の方が大きい」ことは $2 < 3$ と表される．

	読み方*1	意味
$a < b$	a は b より小さい（a は b 未満である）	
$a \leqq b$	a は b 以下である	$a < b$ または $a = b$
$a > b$	a は b より大きい	
$a \geqq b$	a は b 以上である	$a > b$ または $a = b$

「〜以○」は等号ありの不等号，「〜より○○○」「〜未満」は等号なしの不等号と理解できる．

B.　不等式とは何か

たとえば「ある数 a を 2 倍してから 3 を加えた数は，4 より大きい」ことは

$$2a + 3 > 4 \quad \cdots\cdots ①$$

と不等号を用いて表すことができる．① のように，2 つの式の大小関係を不等号を使って表したものを**不等式** (inequality) という．

等式の場合と同じように，不等号の左側にある式を**左辺** (left side)，右側にある式を**右辺** (right side)，左辺と右辺をあわせて**両辺** (both sides) という．①の左辺は $2a + 3$，右辺は 4 である．

【例題 1】 次の文章を不等式で表せ．また，その左辺，右辺を答えよ．

1. 「a と 3 の和は，b の 2 倍以上」
2. 「x の 2 倍から 3 引いた数は，x の (-2) 倍より小さい」

---

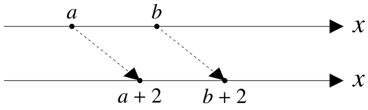
*1 次のような読み方もよく用いられる．
$a < b$:「a 小なり b」，$a \leqq b$:「a 小なりイコール b」，$a > b$:「a 大なり b」，$a \geqq b$:「a 大なりイコール b」

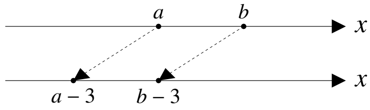
C.　不等式の性質

数直線上の点の移動をイメージしながら，不等式の性質を考えよう．

i) 両辺に同じ数を足す(引く)場合　⇒**不等号の向きは変わらない（ ″ < ″ は ″ < ″ のまま）**

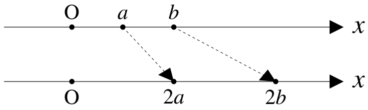
$a < b$ のとき，$a + 2 < b + 2$ である．　　$a < b$ のとき，$a - 3 < b - 3$ である．

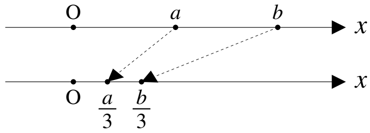




ii) 両辺に正の数を掛ける(割る)場合　⇒**不等号の向きは変わらない（ ″ < ″ は ″ < ″ のまま）**

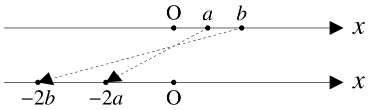
$a < b$ のとき，$2a < 2b$ である．　　$a < b$ のとき，$\dfrac{a}{3} < \dfrac{b}{3}$ である．

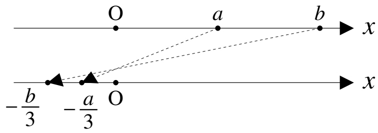




iii) 両辺に負の数を掛ける(割る)場合　⇒**不等号の向きが反対になる（ ″ < ″ は ″ > ″ に変わる）**

$a < b$ のとき，$-2a > -2b$ である．　　$a < b$ のとき，$-\dfrac{a}{3} > -\dfrac{b}{3}$ である．





【例題 2】

1. $a > b$ のとき，次の $\square$ に入る不等号を書け．
   i. $a + 4 \ \square\ b + 4$　　ii. $a - 2 \ \square\ b - 2$　　iii. $a - 3 \ \square\ b - 3$　　iv. $3a \ \square\ 3b$
   v. $2a \ \square\ 2b$　　vi. $-3a \ \square\ -3b$　　vii. $4a \ \square\ 4b$　　viii. $-a \ \square\ -b$
2. i. ～v. のそれぞれについて，$a > b$, $a < b$, $a \geqq b$, $a \leqq b$ のいずれが成り立つか答えよ．
   i. $5a < 5b$　　ii. $-2a < -2b$　　iii. $a - 4 < b - 4$　　iv. $\dfrac{a}{4} \leqq \dfrac{b}{4}$　　v. $-\dfrac{a}{4} \leqq -\dfrac{b}{4}$

不等式の性質

i)　すべての実数 c で　$a < b \iff a + c < b + c$ ，$a - c < b - c$

ii)　$0 < c$ のとき　$a < b \iff ac < bc$ ，$\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

iii)　$c < 0$ のとき　$a < b \iff ac > bc$ ，$\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$　**←逆符号！**

これらの性質により，p.57 で学ぶように，不等式も方程式と同じようにして解くことができる．

【練習 3：不等式の性質】

以下の$\boxed{}$にあてはまる適当な数字を答えよ．

(1) $x+3<5$

$\Leftrightarrow$ $x+3-3<5-\boxed{ア}$

$\Leftrightarrow$ $x<\boxed{イ}$

(2) $2x<8$

$\Leftrightarrow$ $2x\times\dfrac{1}{2}<8\times\boxed{ウ}$

$\Leftrightarrow$ $x<\boxed{エ}$

(3) $-3x\geqq 15$

$\Leftrightarrow$ $-3x\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)\leqq 15\times\boxed{オ}$

$\Leftrightarrow$ $x\leqq\boxed{カ}$

2. 1次不等式とその解法

A. 1次不等式とは何か

左辺，右辺とも（x について）次数が 1 次以下である不等式を，（x についての）**1 次不等式** (linear inequality) という．たとえば，次の式はすべて 1 次不等式である．

$2x+3>5x-3$,　$-x-5\geqq 2x+4$,　$2x-3<7$

（x についての）不等式の**解** (solution) とは，不等式を満たす x の値のことをいう．たとえば，いろいろな x において，不等式

$2x+3>5x-3$ ……… ①

を満たすかどうか調べてみよう．$x=-2$ の時を調べると

（左辺）$=2\times(-2)+3=-1$

（右辺）$=5\times(-2)-3=-13$

となり，左辺の方が大きい．つまり，$x=-2$ は解である．

x	左辺	右辺	
-2	-1	-13	○
-1	1	-8	○
0	3	-3	○
1	5	2	○
2	7	7	×
3	9	12	×
4	11	17	×

このことを繰り返せば，右上の表を作る事ができ，①の解は無数にあることが分かる．

【例題 4】 不等式 $2x-1<x+2$ について，次の問いに答えよ．

1. $x=-2$ のとき，左辺の値，右辺の値をそれぞれ求めよ．また，$x=-2$ は解になるか．
2. $x=3$ のとき，左辺の値，右辺の値をそれぞれ求めよ．また，$x=3$ は解になるか．
3. $x=4$ のとき，左辺の値，右辺の値をそれぞれ求めよ．また，$x=4$ は解になるか．

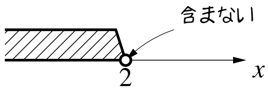
B. 不等式の解法と解の図示

不等式を**解く** (solve) とは「不等式のすべての解を求めること」を意味する．

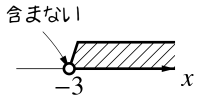
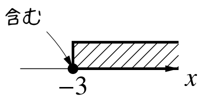
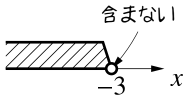
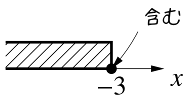
p.55 で学んだ性質から，不等式も，方程式と同じように**移項**（いこう） (transposition) を用いて解くことができる．たとえば，不等式 ① は次のように解くことができる．

$$
\begin{aligned}
& & 2x+3 &> 5x-3 & & \\
&\Leftrightarrow & 2x-5x &> -3-3 & & \leftarrow \text{移項した} \\
&\Leftrightarrow & -3x &> -6 & & \\
&\Leftrightarrow & x &< 2 & & \leftarrow -3\ \text{で割った（符号の向きが逆になる！！）}
\end{aligned}
$$

こうして，「x は 2 より小さければ解になる」ことが求められる．このことは，数直線を用いて右図のように表すことができる．



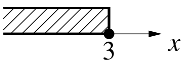
一般に，不等式の解は以下のように図示する．

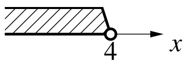
$-3 < x$	$-3 \leqq x$	$x < -3$	$x \leqq -3$
			

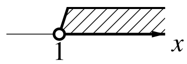
不等号 $<$, $>$ のときは，境目を「白丸」「斜め線」で表す．

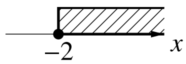
一方，不等号 $\leqq$, $\geqq$ のときは，境目を「黒丸」「垂直線」で表す．

【例題 5】 それぞれの図が表す，不等式の解を答えなさい．

1. 

2. 

3. 

4. 

解の図示は，次で学ぶ「連立不等式」においてきわめて重要になる．

【例題 6】 次の 1 次不等式を解け．また，その解を数直線上に表せ．

1. $x-8<5$　　2. $4x-8>2x$　　3. $5-3x \leqq 7-10x$

【練習 7：1 次不等式】

次の 1 次不等式を解け．また，その解を数直線上に表せ．

(1) $-8x \leqq 32$ (2) $2(x-2) > 3(4-x)+4$ (3) $3 - \dfrac{5x-1}{3} > 2x+1$

【練習 8：不等式の解】

(1) 不等式 $2x-3<7$ において，$x=-3$ は解になるか，$x=5$ は解になるか．

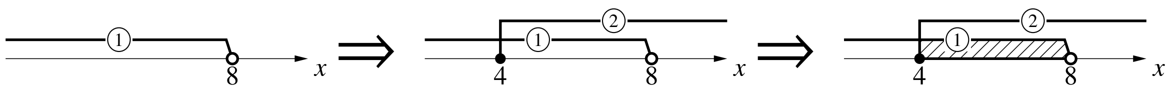
(2) 不等式 $-x-5 \geqq 2x+4$ において，$x=-3$ は解になるか，$x=5$ は解になるか．

C. 連立不等式

連立不等式 (simultaneous inequalities) とは，2 つ以上の満たすべき不等式の集まりを指す．連立不等式を解くとは，全ての不等式を同時に満たす x の範囲を求めることである．

たとえば，連立不等式 $\begin{cases} x-3<5 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x+1 \leqq 4x-3 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ を解こう．

①の解は $x<8$ であり，②の解は $4 \leqq x$ になる．これらをまとめて図示しよう．

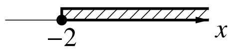


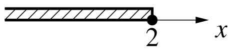
$x<8$ を図示した　　$4 \leqq x$ も書き込んだ　　同時に満たす部分を斜線で図示
（①と②の横線 2 本が重なる部分）

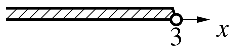
こうして，連立不等式の解は $4 \leqq x < 8$ と分かる．

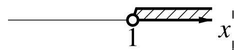
2 つの不等式を同時に満たす範囲がない場合は「解なし」と答える．

【例題 9】 以下の図に $x < 0$ を書き込み，同時に満たす x の範囲を答えなさい．同時に満たす x の範囲がなければ，「解なし」と答えなさい．

1.


2.


3.


4.


【例題 10】 連立不等式 $\begin{cases} 4x-3 < 2x-5 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x+1 \geqq 2x-3 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ を解け．

連立不等式を解くときには必ず，解を数直線上に書き表すこと．

D. 3 つ以上の式による不等式

たとえば，x が不等式 $-2x+6 < x < 4x-3$ ……… ③ を満たすには，$-2x+6 < x$ と $x < 4x-3$ を同時に満たせばよい．つまり，③を解くには連立不等式 $\begin{cases} -2x+6 < x \\ x < 4x-3 \end{cases}$ を解けばよい．

【例題 11】 不等式 $-2x+6 < x < 4x-3$ を解け．

【練習 12：連立不等式】

次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} \dfrac{11}{4}x - \dfrac{3}{2} > 2x - 5 \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6} \leqq -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 0.25x - 0.18 \geqq 0.6 - 0.14x \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6} \leqq -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases}$

E. 発展 1次不等式の応用

【練習 13：1次不等式の応用】

(1) A 地点から 15 km 離れた B 地点まで歩いた．はじめは急ぎ足で毎時 5 km，途中から疲れたので毎時 3 km の速さで歩いた．所要時間が 4 時間以内のとき，急ぎ足で何 km 以上歩いたか求めよ．

(2) 5 % の食塩水 800 g と 8 % の食塩水を何 g か混ぜて，6 % 以上の食塩水を作りたい．8 % の食塩水を何 g 以上混ぜればよいか求めよ．

F. 取り得る範囲を求める

【練習 14：取り得る範囲〜その１〜】

実数 x が $-2 < x < 4$ であるとき，以下の値の取り得る範囲を答えよ．

(1) $x + 3$　(2) $x - 2$　(3) $2x$　(4) $2x - 5$　(5) $-2x$

【発展 15：取り得る範囲〜その２〜】

実数 a は小数第 1 位を四捨五入して 4 になり，実数 b は小数第 1 位を四捨五入して 6 になるという．

1. a, b の取り得る範囲を不等式で答えよ．
2. $3a + b$ の取り得る範囲を不等式で答えよ．
3. $a - b$ の取り得る範囲を不等式で答えよ．

2.2　2 次方程式の基礎

ここでは，2 次方程式の解法の基礎を学ぶ.

A.　2 次方程式とは

（x についての）**2 次方程式** (quadratic equation) とは，$a\ (\fallingdotseq 0)$，b，c を定数として

$ax^2 + bx + c = 0$

という形で表せる方程式のことである．与えられた 2 次方程式を満たす x の値をすべて求めることを「2 次方程式を解く」といい，その x の値をその「2 次方程式の解」とよぶ.

B.　因数分解を利用した解法

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の左辺が因数分解できる場合には，中学までで学んだように，因数分解を用いて解くのが一番よい．たとえば，$2x^2 - x - 3 = 0$ を解くと，次のようになる.

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^{*2}\ 2x - 3 = 0 \quad \text{または} \quad x + 1 = 0 \qquad \therefore x = \frac{3}{2}, -1\ {}^{*3}$$

【例題 16】 2 次方程式 $3x^2 + 2x - 8 = 0$ の左辺は因数分解できて

$\left(x + \boxed{\text{ア}}\right)\left(\boxed{\text{イ}}\,x - \boxed{\text{ウ}}\right) = 0$

と変形できる．ここから $\boxed{\text{エ}} = 0$ または $\boxed{\text{オ}} = 0$ が成り立つ.

この 2 つの 1 次方程式をそれぞれ解いて $x = \boxed{\text{カ}}$，$x = \boxed{\text{キ}}$.

[*2] ここで用いられる性質は，実数 A，B についての積の性質

$AB = 0 \iff A = 0$ または $B = 0 \iff A = 0$ か $B = 0$ の一方でも成り立てばよい（両方でもよい）

である．通常の会話における「または」の意味は，「どちらかが正しく，残りは間違い」の意味であることが多い．しかし，数学における「または」は「少なくともどちらかが正しい（両方とも正しい場合を含む)」の意味で使われる．「または」の扱いについては，数学 A(p.2) において詳しく学ぶ.

[*3] 2 つの解の間にあるカンマ「,」は，「または」の代わりに使われている.

【練習 17：2 次方程式を解く（因数分解の利用）】

次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2 - 2x - 15 = 0$　(2) $x^2 - 8x + 16 = 0$　(3) $12x^2 - 17x + 6 = 0$

(4) $3x^2 + 2x - 3 = -2x + 1$　(5) $\dfrac{1}{9}x^2 + x + 2 = 0$

C. （x の式）^{2} =（定数）の形にする解法

2 次方程式 $x^2 + 4x - 3 = 0$ は，左辺を因数分解できないが，次のように解くことができる.

$x^2 + 4x = 3$　←定数項を右辺に移項

$x^2 + 4x + 4 = 3 + 4$　←両辺に 4 を足すと

$(x + 2)^2 = 7$　←左辺を 2 乗の形にできる

$x + 2 = \pm\sqrt{7}$　←つまり，$x + 2 = \sqrt{7}$ または $x + 2 = -\sqrt{7}$

$x = -2 \pm \sqrt{7}$　←つまり，$x = -2 + \sqrt{7}$ または $x = -2 - \sqrt{7}$

【例題 18】 上と同じようにして $x^2 + 6x - 13 = 0$ を解こう. $\boxed{}$ には

$x^2 + 6x = \boxed{ア}$　←定数項を右辺に移項

$x^2 + 6x + \boxed{イ} = \boxed{ア} + \boxed{イ}$　←両辺に $\boxed{イ}$ を足す

$(x + \boxed{ウ})^2 = \boxed{エ}$　←左辺が 2 乗の形になった

$x + \boxed{ウ} = \pm\sqrt{\boxed{エ}}$

$x = \boxed{オ} \pm \sqrt{\boxed{エ}}$

これは，x の解が $\boxed{カ}$，$\boxed{キ}$ の 2 つあることを意味している.

D. 2 次方程式の解の公式

x^2 の係数が 1 でなくても，次のようにして (x の式$)^2$ = (定数) の形にして解くことができる．

具体的な 2 次方程式		一般の 2 次方程式
$3x^2+2x-8=0$		$ax^2+bx+c=0$
$3x^2+2x=8$	← 定数項を移項 →	$ax^2+bx=-c$
$x^2+\frac{2}{3}x=\frac{8}{3}$	← x^2 の係数を 1 にする →	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
$x^2+\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$	← x の係数の半分の 2 乗を両辺に足す →	$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$	← $(x+○)^2$ を作る →	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$
$x+\frac{1}{3}=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$	← 平方根を求める（ただし，b^2-4ac の値は 0 以上とする） →	$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ……… ①
$x=-\frac{1}{3}+\frac{5}{3},\ -\frac{1}{3}-\frac{5}{3}$	← x について解く →	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x=\frac{4}{3},-2$		$\left(\text{つまり},\ x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

①より下の変形は，右辺にある「b^2-4ac」の値が 0 以上でないといけない．

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となる．この式を 2 次方程式の**解の公式** (formula of solution) という．ただし，この解は $b^2-4ac \geqq 0$ のときに限る．
$b^2-4ac<0$ のときは $\sqrt{b^2-4ac}$ が意味をもたず，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は存在しない．

【例題 19】

1. 2 次方程式 $2x^2+3x-4=0$ を解こう．解の公式に $a=\boxed{\text{ア}}$, $b=\boxed{\text{イ}}$, $c=\boxed{\text{ウ}}$ を代入して，
$x=\dfrac{\boxed{\text{エ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となり，これが解である．
2. 2 次方程式 $x^2-4x+2=0$ を解こう．解の公式に $a=\boxed{\text{キ}}$, $b=\boxed{\text{ク}}$, $c=\boxed{\text{ケ}}$ を代入して，
$x=\dfrac{\boxed{\text{コ}}\pm\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ となる．これを約分して，解 $x=\boxed{\text{セ}}$ を得る．

【練習 20：2 次方程式を解く（解の公式の利用）】

次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2+7x+2=0$　(2) $x^2+8x-3=0$　(3) $x^2-x-3=0$

(4) $x^2-4x+5=0$　(5) $4x^2+6x+1=0$　(6) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}=0$

解の公式は暗記して，正確に使いこなせるようにしよう．

また，$\sqrt{}$ の中が負になったとき（$b^2-4ac<0$ のとき）は，「解なし」と答えればよい．

E. 2 次方程式の解と因数分解

2 次方程式の 2 つの解法を見比べてみよう．

i) 因数分解を利用した解法

$$x^2-3x-18=0$$

$$(x-6)(x+3)=0$$

←左辺の因数分解→

$$x=6,\ -3$$

←方程式の解→

ii) 解の公式を用いた解法

$$x^2-5x-3=0$$

？？？

$$x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$$

←『解の公式』で求めた

i), ii) を見比べて，x^2-5x-3 の因数分解を得る．

$$x^2-3x-18=(x-\underbrace{6}_{\text{解の 1 つ}})(x-\underbrace{(-3)}_{\text{もう 1 つの解}})$$

$$x^2-5x-3=\left(x-\underbrace{\frac{5+\sqrt{37}}{2}}_{\text{解の 1 つ}}\right)\left(x-\underbrace{\frac{5-\sqrt{37}}{2}}_{\text{もう 1 つの解}}\right)$$

実際，$\left(x-\frac{5+\sqrt{37}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)$ を展開すれば，この因数分解が正しいと分かる．

【例題 21】 $x^2 - 3x + 1$ を実数の範囲で因数分解しなさい（因数には無理数が含まれてもよい）.

F. 2 次方程式の解の個数〜判別式 D

解の公式の根号 $\sqrt{\quad}$ 内の $b^2 - 4ac$ を，2 次方程式の**判別式** (discriminant) といい，D で表す.

2 次方程式の判別式と解の個数

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の個数を調べるには判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号を調べればよい.

i) $D = b^2 - 4ac > 0$ のとき，解は 2 つ存在する.

ii) $D = b^2 - 4ac = 0$ のとき，解は 1 つ存在する.
このただ 1 つの解は**重解** (multiple solution) とよばれる.

iii) $D = b^2 - 4ac < 0$ のとき，解は存在しない.

$D = 0$ のとき，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b+\sqrt{0}}{2a}$，$\dfrac{-b-\sqrt{0}}{2a}$ であり，どちらも $x = -\dfrac{b}{2a}$ に等しくなり，解が重なってしまう．これが，重解の語源である*4.

【例題 22】 2 次方程式 $x^2 - (k-1)x + \dfrac{1}{4}k^2 + k + 1 = 0$ について，以下の問いに答えよ.

1. $k = 2$ のとき，解はいくつあるか.
2. $k = -4$ のとき，解はいくつあるか.
3. 判別式 D を k の式で表せ.
4. 解が 2 個存在するための k の範囲を求めよ.

*4 厳密な数学の定義によれば，本来は**重根** (multiple root) とよぶべきである．しかし，高校数学においては「重解」という言葉が慣用的に用いられている．13th-note 数学 I も現状に従うこととする.

【練習 23：2 次方程式の解と因数分解】

以下の 2 次式を，実数の範囲で因数分解せよ．

(1) x^2+7x-4　(2) x^2-2x-5　(3) $2x^2-4x+1$

【練習 24：2 次方程式の解の個数の判別】

2 次方程式 $x^2+(2a-1)x+a^2-2a+4=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 判別式 D を a の式で表せ．　(2) 解が存在しないための a の条件を求めよ．

G.　x の係数が偶数の場合

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ において b が偶数の場合を考えよう．$b = 2b'$ とおいて，$ax^2 + 2b'x + c = 0$ に解の公式を用いると，次のようになる．

具体的な 2 次方程式

$x^2 + 8x + 3 = 0$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2}\\
&= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 12}}{2}\\
&= \frac{-8 \pm 2\sqrt{13}}{2}\\
&= -4 \pm \sqrt{13} \quad \leftarrow \text{2で約分}
\end{aligned}
$$

一般の 2 次方程式

$ax^2 + 2b'x + c = 0$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a}\\
&= \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a}\\
&= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}\\
&= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \quad \leftarrow \text{2で約分}
\end{aligned}
$$

こうして，必ず計算の最後に 2 で約分する必要があるとわかる．そのため，b が偶数の場合には，解の公式を別に用意して，この手間をはじめから回避することができる．

x の係数が偶数の場合の解の公式・判別式

$D \geqq 0$ のとき，2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$ である（$D < 0$ のときは解なし）．また，解の個数は，$\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$ の符号を調べればよい．

$\dfrac{D}{4}$ による解の判別は慣れると大変使いやすい．一方，$x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$ は使いにくいと感じる人もいる．そのような人は，通常の解の公式で代用すればよい．

【例題 25】 2 次方程式 $x^2 - 6x + 4 = 0$ を解け．

【例題 26】 **エ**，**ケ**には「ある」「ない」のいずれかを答えなさい．

1. $x^2 + 14x + 4 = 0$ の判別式を D とする．$\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$ に，$b' = \boxed{\text{ア}}$，$a = 1$，$c = \boxed{\text{イ}}$ を代入して，$\dfrac{D}{4} = \boxed{\text{ウ}}$ と分かる．よって，この 2 次方程式の解は$\boxed{\text{エ}}$.
2. $3x^2 - 16x + 12 = 0$ の判別式を D とする．$\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$ に，$b' = \boxed{\text{オ}}$，$a = \boxed{\text{カ}}$，$c = \boxed{\text{キ}}$ を代入して，$\dfrac{D}{4} = \boxed{\text{ク}}$ と分かる．よって，この 2 次方程式は解を$\boxed{\text{ケ}}$.

【練習 27：2 次方程式の解の個数の判別（x の係数が偶数の場合）】

$3x^2-2(m+1)x+\dfrac{1}{3}m^2+m=0$ の解の個数は，定数 m の値によってどのように変わるか調べよ．

【㊎㊏ 28：2 次方程式を解く（係数に根号を含む場合）】

次の 2 次方程式を解け．

① $\sqrt{2}x^2-4x-\sqrt{2}=0$

② $2\left(2-\sqrt{3}\right)x^2+2\left(1-\sqrt{3}\right)x+1=0$

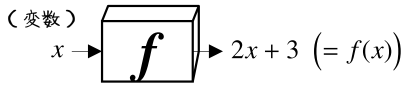
1.　関数とは

A.　関数とは何か

「実数 x を決めればただ 1 つの実数が決まる式」を（x の）**関数** (function) といい，$f(x)$，$g(x)$ のように表す*5．また，このときの x を**変数** (variable) という．

たとえば，$3\ \mathrm{m}^3$ の水が入っている水槽へ，毎分 $2\ \mathrm{m}^3$ の割合で水を入れることを考える．水を x 分間入れた後の，水槽の中の水の量は $2x+3\ (\mathrm{m}^3)$ である．

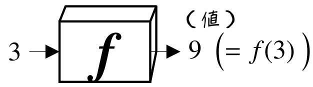
つまり，「水槽の中の水の量 (m^3)」は x によって決まるので，それを $f(x)$ とおけば



時間 (x) から水の量を決める規則

$$f(x) = 2x+3 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

と書くことができる．①の変数 x に，$x=3$ を代入すれば



$x=3$ を $f(x)$ に代入して 9 を得る

$$f(3) = 2\cdot 3+3 = 9$$

となって，3 秒後の水の量は $9\ \mathrm{m}^3$ と分かる．

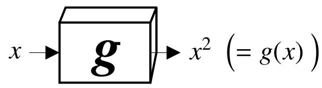
ここで，$f(3)$ は関数 $f(x)$ に $x=3$ を代入して得られる**値** (value) と言う．

次のページで学ぶように，中学で学んだ関数の定義は，高校における関数の特別な場合になる．

【例題 29】　1 辺 x cm の正方形において「（x によって決まる）正方形の面積 (cm^2)」を $g(x)$ とすれば

$$g(x) = x^2$$

となる．この $g(x)$ について $g(4)$ を求めなさい．
また，その値は，どんな図形の面積を計算した結果になるか．



正方形の 1 辺の長さ (x) から面積を決める規則

【例題 30】　ある関数 $h(x)$ が $h(x) = 2x^2-3x+3$ で表されるとき，$h(1)$，$h(-2)$ の値を求めよ．

*5 $p(x)$，$a(x)$ などでもよいが，関数 (function) の頭文字である f からアルファベット順に，g，h などであることが多い．また，大文字の F，G なども使われる．

【練習 31：関数を表す】

次の関数を求めよ．また，それぞれ，変数を表す文字を答えよ．

(1) 縦が 4，横が x の長方形の面積 $a(x)$

(2) 6 m^3 の水が入っている水槽へ，毎分 3 m^3 の割合で水を入れたときの，w 分後の水の量 $b(w)$ m^3

【練習 32：関数の値】

$f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 2x^2 - 3x + 3$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(2)$, $f(5)$, $g(2)$, $g(5)$ を求めよ，また，「$x = 2t$ のときの $f(x)$ の値」である $f(2t)$ を t の式で表せ．

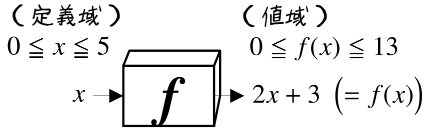
(2) $h(a)$, $h(2t)$ の値を求めよ（a, t を用いてよい）．

B. 関数の定義域・値域・最大値・最小値

中学で学んだ関数と同じように，定義域，値域，最大値，最小値を考えることができる．

たとえば，p.71 の関数 $f(x)$ の例において，水槽の容積が $13\mathrm{m}^3$ であったならば，$f(x) = 2x + 3$ の**定義域**（ていぎいき） (domain) は $0 \leqq x \leqq 5$ である．というのも，$5 < x$ では水槽から水があふれてしまうし，$x < 0$ は意味では意味をもたない．

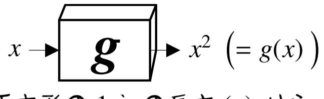
また，$f(x)$ の**値域**（ちいき） (range) は $0 \leqq f(x) \leqq 13$，**最小値** (minimum value) は $f(0) = 0$，**最大値** (maximum value) は $f(5) = 13$ である．



時間 (x) から水の量を決める規則

【例題 33】 1 辺 x cm の正方形において，「(x によって決まる) 正方形の面積 (cm^2)」を表す関数 $g(x) = x^2$ について，以下の問いに答えよ．

1. $x = 2$ は定義域に含まれるか．$x = -1$, $x = 0$ はどうか．
2. 定義域を $1 \leqq x < 5$ としたとき，$g(x)$ の値域を求めよ．最小値・最大値があれば求めよ．



正方形の 1 辺の長さ (x) から面積を決める規則

C.　y を与える x の関数 — $y = f(x)$

中学において「関数」と呼んでいた $y = 2x + 3$ のような式も，「y を与える x の関数」として，単に関数とよぶことができる．このような「y を与える x の関数」は，一般的に $y = f(x)$ などと表される[*6]．

もう少し概念を広げれば，関数とは「変数を決めると，ただ 1 つの実数値が決まる規則」のことである．何かを入力すれば，何か実数値を出力するもの，それを「関数」とみなしてよい．

D.　文字定数

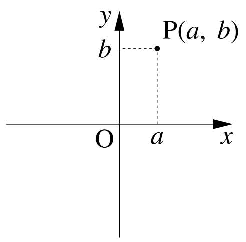
関数を表す式において，変数でない数値・文字を**定数** (constant) という．特に，変数でない文字を文字定数ということもある．

【例題 34】　関数 $f(x) = ax^3 + x^2 + bx + 2$ について，以下の問いに答えよ．

1. $f(x)$ に含まれる文字定数をすべて答えよ．
2. $a \fallingdotseq 0$ のとき，$f(x)$ は何次式か．
3. $a = 0$ のとき，$f(x)$ は何次式か．
4. $a = b = 0$ であるとき，$f(x)$ は何次式か．

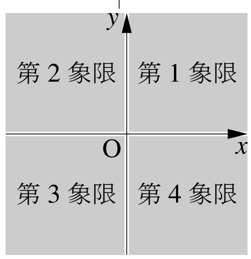
2.　グラフによる関数の図示

A.　座標平面



関数を図示するには，中学までと同じように，**座標平面** (coordinate plane) を用いる．これは，平面に 2 本の直交する数直線（**座標軸** (coordinate axes) という）で定められた平面である[*7]．

座標平面は，座標軸によって次の 4 つの部分に分けられ，時計回りに



$x > 0$，$y > 0$ の部分：**第 1 象限**（しょうげん） (first quadrant)
$x < 0$，$y > 0$ の部分：**第 2 象限** (second quadrant)
$x < 0$，$y < 0$ の部分：**第 3 象限** (third quadrant)
$x > 0$，$y < 0$ の部分：**第 4 象限** (fourth quadrant)

とよばれる．ただし，座標軸はどの象限にも含めない．

【例題 35】　$(-2,\ 2)$ は第 $\boxed{ア}$ 象限，$(1, -2)$ は第 $\boxed{イ}$ 象限，$(-2, -3)$ は第 $\boxed{ウ}$ 象限である．

[*6] 2 つ以上の変数をもつ関数については，数学 II で詳しく学ぶ．
[*7] 右の図の場合は，特に xy（座標）平面といい，横の座標軸を x 軸，縦の座標軸を y 軸という．この x, y は他の文字でもよい．

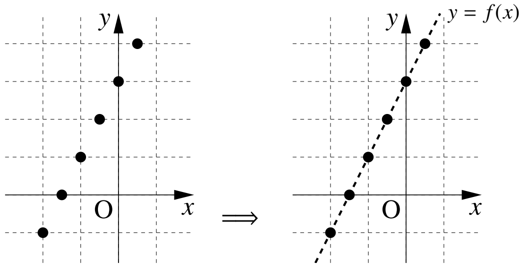
B. 関数のグラフ

「変数の値」と「関数の値」の対応は，中学校で学んだやり方で，座標平面上に表すことができる．たとえば，関数 $f(x)=2x+3$ について考えよう．

まず，$f(-2)=-1$，$f(-1)=0$ などの値を計算して，左下のような表ができる．

x	$\cdots$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$

$\Longrightarrow$



それぞれを座標平面上に点でとっていくと，変数 x の値は無数にあるので最終的に直線となる．この直線を関数 $y=f(x)$ の**グラフ** (graph) という．

一般には，関数 $f(x)$ について，$(x,\ f(x))$ を座標とする点全体の作る座標平面上の図形を「関数 $y=f(x)$ の**グラフ** (graph)」という．

【例題 36】 以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．ただし，$f(x)=2x+3$ とする．

1. 点 A$(1, \boxed{ア})$，B$(-3, \boxed{イ})$，C$\left(\dfrac{2}{3}, \boxed{ウ}\right)$ は $y=f(x)$ のグラフ上にある．
2. 点 D$(\boxed{エ}, 7)$，E$(\boxed{オ}, 6)$，F$\left(\boxed{カ}, \dfrac{1}{3}\right)$ は $y=f(x)$ のグラフ上にある．
3. 1. と 2. で求めた点のうち，第 2 象限にある点を答えよ．

【例題 37】 以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．ただし，$g(x)=x^2$ とする．

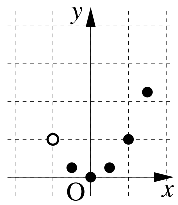
1. 点 $(2, \boxed{ア})$，$(-3, \boxed{イ})$，$\left(\dfrac{2}{3}, \boxed{ウ}\right)$ は，$y=g(x)$ のグラフ上にある．
2. $y=g(x)$ のグラフ上にある y 座標が 3 の点は，$(\boxed{エ}, 3)$，$(\boxed{オ}, 3)$ である．

C. グラフと最大値・最小値

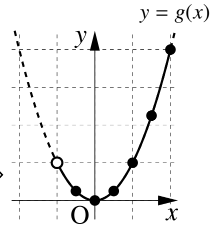
関数 $g(x) = x^2$ を定義域 $-1 < x \leqq 2$ において考えると，一番右のようなグラフ $y = g(x)$ $(-1 < x \leqq 2)$ を得る．

x	(-1)	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	(1)	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

$\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$



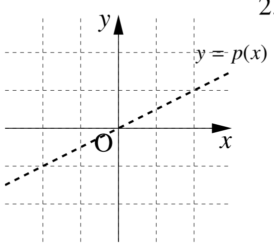
つまり，放物線の一部がグラフとなる．定義域から外れた部分は，右図のように点線で書く．$x = -1$ のように定義域の境目にあるが，定義域に含まれない点は，白丸で表す．

$x = -1$ は定義域に含まれないが，$x = -0.9, -0.99, -0.999, \cdots$ はすべて定義域に含まれるので，グラフは必ず白丸とつなぐ．

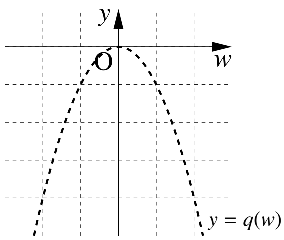
グラフの実数部分のうち，y 座標が一番小さい点は $(0,\ 0)$ であり，y 座標が一番大きい点は $(2,\ 4)$ である．ここから，関数 $g(x)$ の最小値が $g(0) = 0$ であり，最大値が $g(2) = 4$ であると分かる．

【例題 38】 関数 $p(x) = \frac{1}{2}x,\ q(w) = -w^2$ について，以下の問いに答えよ．

1. 右のグラフに関数 $y = p(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$ を書き込み，最大値・最小値があれば答えなさい．



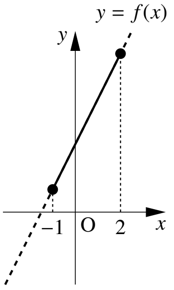
2. 右のグラフに関数 $y = q(w)$ $(-2 < w \leqq 1)$ を書き込み，最大値・最小値があれば答えなさい．



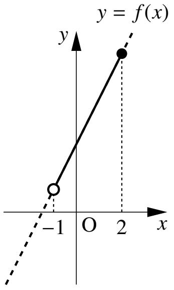
【練習 39：定義域，最大値，最小値，値域】

$f(x) = 2x + 3$，$g(x) = x^2$ とする．以下のグラフについて，それぞれ，定義域，最大値，最小値，値域を答えよ．最大値・最小値がない場合は「なし」でよい．

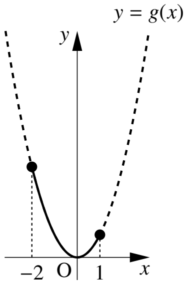
(1)



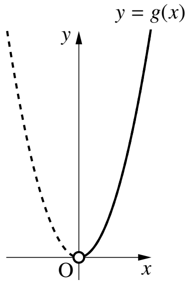
(2)



(3)



(4)



3. 方程式・不等式の解と関数のグラフ

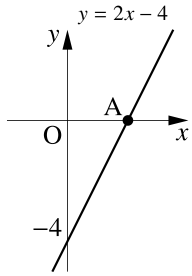
A. 1 次方程式の解・1 次関数のグラフ

たとえば，1 次関数 $y = 2x + 1$ が $y = 0$ となるときの x の値は 1 次方程式 $2x + 1 = 0$ を解けばよい．

このように，1 次関数の $y = 0$ となるときの値を求めるときに，1 次方程式を解く必要があり，その逆も成り立つ．

【暗記 40：1 次方程式と 1 次関数】

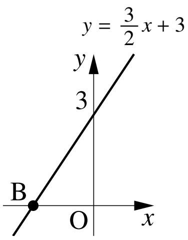
以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．



1. 1 次関数 $y = 2x - 4$ のグラフ上のうち y 座標が $\boxed{ア}$ になる点 A を求めるには，1 次方程式

   $\boxed{イ} = 0$

   を解けばよい．その結果，A($\boxed{ウ}$, 0) と分かる．



2. 1 次関数 $y = \dfrac{3}{2}x + 3$ と $\boxed{エ}$ 軸の交点 B を求めるには

   $\dfrac{3}{2}x + 3 = 0$

   という 1 次方程式の解を求めればよい．その結果，B($\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$) と分かる．

3. 次のいずれの場合も，1 次方程式 $3x - 9 = 0$ を解けばよい．
   - 関数 $\boxed{キ}$ と $\boxed{ク}$ 軸の交点を求める．
   - 関数 $\boxed{キ}$ の y 座標が $\boxed{ケ}$ になるときの x 座標を求める．

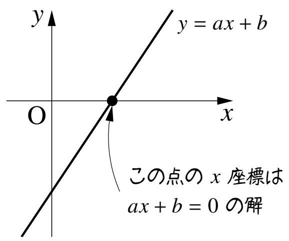
以上のことは，次のようにまとめられる．

1 次関数のグラフと 1 次方程式の解

$ax + b$ という 1 次式に対して

- $ax + b$ $= 0$ を解く
- $y =$ $ax + b$ のグラフと x 軸の交点（の x 座標）を求める
- $y =$ $ax + b$ のグラフ上の y 座標が 0 になる点（の x 座標）を求める

はいずれも同じである．



B. 連立方程式の解・1 次関数のグラフ

【暗記 41：連立方程式と 1 次関数】

以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．

1. 2 つの 1 次関数 $y=2x+1$ と $y=-3x+3$ の交点 A の座標は

   連立方程式 $\boxed{ア}$

   を解いて求めることができ，A($\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$) である．

2. 連立方程式 $\begin{cases} y=3x+4 \\ -2x+4=y \end{cases}$ の解は，2 つの 1 次関数 $\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$ の交点に一致し，$(x,\ y)=(\boxed{カ}, \boxed{キ})$ である．

2 つの 1 次関数のグラフの共有点と連立方程式

2 つの 1 次関数

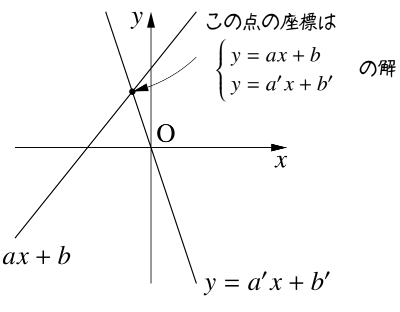
$y=ax+b$

$y=a'x+b'$

のグラフの共有点の (x 座標, y 座標) は，連立方程式

$$\begin{cases} y=ax+b \\ y=a'x+b' \end{cases}$$

の解 $(x,\ y)$ に一致する．



1 次方程式 $ax+b=0$ は，連立方程式 $\begin{cases} y=0 \\ y=ax+b \end{cases}$ の解に一致する．このことから，『1 次方程式の解・1 次関数のグラフ』の内容は，『連立方程式の解・1 次関数のグラフ』の特別な場合と考えることもできる．

C. 1 次不等式と 1 次関数の関係

【暗記 42：1 次不等式と 1 次関数】

$\boxed{}$ に適当な数値・文字を答えよ．$\boxed{ウ}$, $\boxed{ク}$ には <, ≦, >, ≧ の中から答えよ．

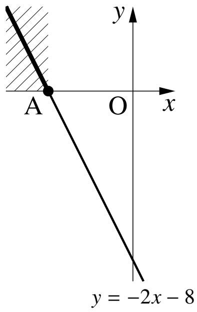
1. 右の直線 $y = -2x - 8$ について，A の座標は

   1 次方程式 $\boxed{ア} = 0$

   を解いて，A($\boxed{イ}$, 0) と求められる．
   また，グラフの太線部分である $y \boxed{ウ} 0$ の範囲は

   1 次不等式 $\boxed{エ}$

   を解いて $\boxed{オ}$ と求められ，これは右上のグラフとも一致する．



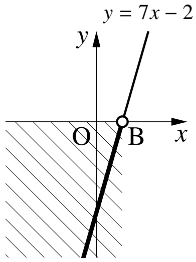
2. 右の直線 $y = 7x - 2$ について，B の座標は

   1 次方程式 $\boxed{カ} = 0$

   を解いて，B($\boxed{キ}$, 0) である．
   また，グラフの太線部分である $y \boxed{ク} 0$ の範囲は

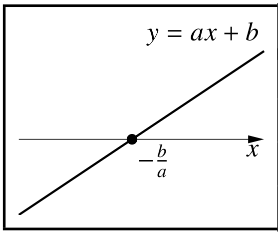
   1 次不等式 $\boxed{ケ}$

   を解いて $\boxed{コ}$ と求められ，これは右上のグラフとも一致する．



1 次不等式の解

$a > 0$ の場合の，1 次不等式と 1 次関数の解の関係はつぎのようにまとめることができる．



$ax + b = 0$ の解	$x = -\frac{b}{a}$
$ax + b > 0$ の解	$\boldsymbol{x > -\frac{b}{a}}$
$ax + b \geqq 0$ の解	$\boldsymbol{x \geqq -\frac{b}{a}}$
$ax + b < 0$ の解	$\boldsymbol{x < -\frac{b}{a}}$
$ax + b \leqq 0$ の解	$\boldsymbol{x \leqq -\frac{b}{a}}$

上の表は覚えなくてよい．1 次不等式と 1 次関数の対応を確認できればよい．

4.　絶対値を含む 1 次関数・方程式・不等式

A.　絶対値と方程式・不等式の関係

『絶対値』（第 1 章）でも学んだように，実数 x の絶対値 $|x|$ は，数直線上での原点と実数 x に対応する点との距離を表すので，次のことがいえる．

絶対値と方程式・不等式の関係

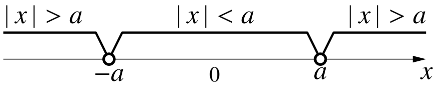
絶対値を含む x の方程式，不等式に関して

$|x| = a \iff x = \pm a$

$|x| < a \iff -a < x < a$

$|x| > a \iff x < -a$ または $a < x$

ただし，$a > 0$ とする[*8]．



【練習 43：絶対値を含む 1 次方程式・1 次不等式】

次の方程式・不等式を解け．

(1) $|x-1| = 3$　　(2) $|3x-2| = 6$　　(3) $|x+1| > 4$　　(4) $|5x-2| \leqq 4$

[*8] 実数の絶対値は 0 以上の値なので，$a = 0$ や $a < 0$ の場合を考える必要性は低い．たとえば，不等式 $|x| < -2$ の解は「解なし」，不等式 $|x| > 0$ の解は「0 以外のすべての実数」である．

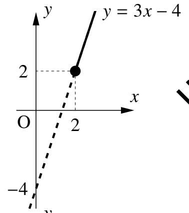
B. 場合に分けて絶対値を外す

前ページの関係が使えない場合は，場合に分けて絶対値を外す必要がある．

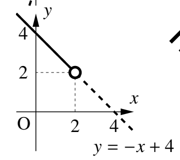
たとえば，関数 $y = x + |2x-4|$ のグラフは，次のように場合に分けて描く．

$y = x + |2x-4|$ の絶対値を場合に分けて外す

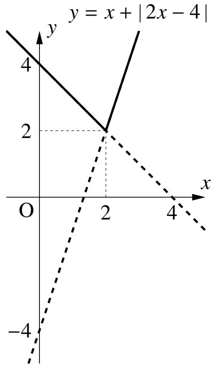
$\Rightarrow$ $2 \leqq x$ のとき，
$|2x-4| = 2x-4$ であるので
$$\begin{aligned} y &= x + |2x-4| \\ &= x + (2x-4) = 3x-4 \end{aligned}$$



$\Rightarrow$ $x < 2$ のとき，
$|2x-4| = -(2x-4)$ であるので
$$\begin{aligned} y &= x + |2x-4| \\ &= x - (2x-4) = -x+4 \end{aligned}$$



$\Rightarrow$



【練習 44：絶対値を含む 1 次関数】

次の式で与えられた関数のグラフを描け．

(1) $y = 2x + |x-1|$　　(2) $y = |x-4|$

(2) のグラフは，直線 $y = x-4$ のうち $y < 0$ の部分を，$y > 0$ になるよう x 軸に対して対称移動したグラフになっている．

【㊕㊖ **45**：絶対値を含む **1** 次方程式】

次の方程式を解け.

① $|x+1| = 2x$　② $|3x-4| = x+8$　③ $|2x-2| = x-4$

【㊒㊜ 46：絶対値を含む 1 次不等式】

次の不等式を解け．

① $|x+6| > 3x$ ② $|2x-1| \leqq x+2$

2.4　2次関数とそのグラフ

2 次関数のグラフは,「頂点」「軸（に対する対称性)」という大きな特徴を持ち，2 次方程式，2 次不等式を解くときの重要な道具ともなる．

1.　2次関数のグラフ

A.　2 次関数の定義

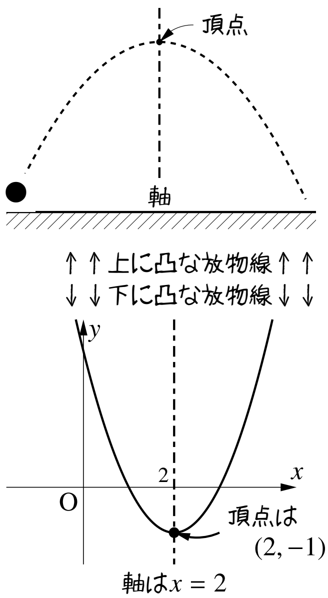
関数 $f(x)$ が x の 2 次式で表されるとき，つまり，$a\ (\neq 0)$, b, c を定数として

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

の形で表されるとき，$f(x)$ は x の **2 次関数** (quadratic function) であるという．

2 次関数の値を y とおいた式 $y = ax^2 + bx + c$ も, (y を与える）x の 2 次関数という．

B.　2 次関数のグラフの基本



後で見るように，2 次関数のグラフは必ず**放物線**（ほうぶつせん） (parabola) になる[*9].

放物線は必ず対称軸をもつ．この対称軸のことを単に**軸** (axis) といい，この軸と放物線の交点のことを**頂点** (vertex) という．

また，放物線の頂点が上にあれば「上に凸（とつ） (convex) 」な放物線といい，頂点が下にあれば「下に凸」な放物線という．

C.　直線 $x = a$

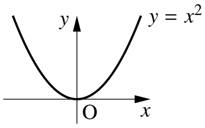
右の放物線の軸は，図中の直線 - - -　である．この直線は

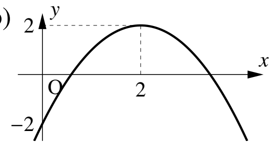
「x 座標が 2 である点を全て集めてできる直線」

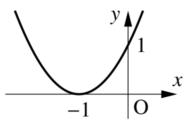
に一致するので,「直線 $x = 2$」とよばれる．

数学 I で学ぶ放物線の軸は，必ず「直線 $x = a$」の形をしている．

【例題 47】 3 つの放物線 (a)-(c) について，以下の問いに答えよ．

(a)


(b)


(c)


1. 上に凸なグラフ，下に凸なグラフをそれぞれすべて選びなさい．
2. 頂点の座標，軸の方程式をそれぞれ答えなさい．

[*9] 放物線とは，空中に物を放り投げたときにできる軌跡（きせき）（物の通った跡）のことである．野球のホームランの打球や，サッカーのゴールキック，バレーボールのトスなど，ボールはいずれも放物線を描く．そのため，物理において投げられた物体の通り道について学ぶとき，2 次関数が用いられる．

この確認問題の (a) のグラフを「放物線 $y = x^2$」と言うことがある．
このように「2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ」のことを「放物線 $y = ax^2 + bx + c$」と言うこともある．このときの $y = ax^2 + bx + c$ は，**放物線の方程式** (equation of parabola) といわれる．

【例題 48】 y 軸上の点は，x 座標が $\boxed{\text{ア}}$ となるので，y 軸は「直線 $\boxed{\text{イ}}$」とも言われる．

D. $y = ax^2$ のグラフ

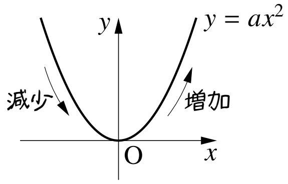
2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において $b = c = 0$ の場合，つまり $y = ax^2$ のグラフは，中学校で学んだように次のような特徴がある．

$y = ax^2$ のグラフの特徴

I) 軸は直線 $x = 0$（y 軸），頂点は原点 $(0,\ 0)$ の放物線になる．

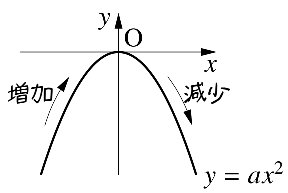
II) i) **$a > 0$ のとき**

- $y \geqq 0$ の範囲にある．
- 放物線は「下に凸」である．
- x の増加に対し $\begin{cases} x < 0 \text{ では } y \text{ は減少する} \\ x > 0 \text{ では } y \text{ は増加する} \end{cases}$



ii) **$a < 0$ のとき**

- $y \leqq 0$ の範囲にある．
- 放物線は「上に凸」である．
- x の増加に対し $\begin{cases} x < 0 \text{ では } y \text{ は増加する} \\ x > 0 \text{ では } y \text{ は減少する} \end{cases}$

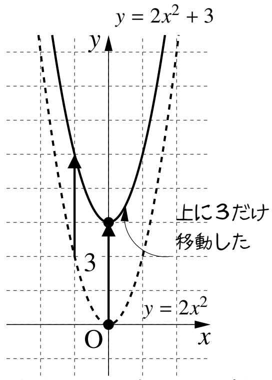


【例題 49】 3 つの放物線 (a)-(c) について，以下の問いに答えよ．

(a) 放物線 $y = x^2$　　(b) 放物線 $y = -3x^2$　　(c) 放物線 $y = 2x^2$

1. 上に凸なグラフ，下に凸なグラフをそれぞれすべて選びなさい．
2. $x > 0$ で y が増加するグラフをすべて求めなさい．
3. それぞれ，グラフ上における x 座標が 1 である点の座標を答えなさい．

E. $y = ax^2 + c$ のグラフ



例として，次の 2 つの 2 次関数の関係を考えてみよう．

$y = 2x^2$ ，$y = 2x^2 + 3$

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	18	8	2	0	2	8	18	$\cdots$
$2x^2+3$	$\cdots$	21	11	5	3	5	11	21	$\cdots$

3 を足す

上の表から，$y = 2x^2 + 3$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを y 軸方向に $+3$ 平行移動した放物線とわかる[*10]．

この平行移動によって，放物線の軸が y 軸から変わることはない．しかし，頂点は移動し，原点より y 軸方向に 3 大きい点 $(0, 3)$ であることがわかる．

【例題 50】 $\boxed{}$ に適当な数・式を答え，放物線 $\boxed{ウ}$，$\boxed{キ}$，$y = 2x^2 - 4$ のグラフを書け．

1. 頂点 $(0, 0)$ の放物線 $y = -x^2$
   $\Downarrow$ y 軸方向に $+3$ 平行移動
   頂点 $(\boxed{ア}, \boxed{イ})$ の放物線 $\boxed{ウ}$
   これは $\left(1, \boxed{エ}\right)$ を通る
2. 頂点 $(0, 0)$ の放物線 $y = 3x^2$
   $\Downarrow$ y 軸方向に $+5$ 平行移動
   頂点 $(\boxed{オ}, \boxed{カ})$ の放物線 $\boxed{キ}$
   これは $\left(1, \boxed{ク}\right)$ を通る
3. 頂点 $(0, 0)$ の放物線 $y = 2x^2$
   $\Downarrow$ y 軸方向に $\boxed{ケ}$ 平行移動
   頂点 $(\boxed{コ}, \boxed{サ})$ の放物線 $y = 2x^2 - 4$
   これは $\left(1, \boxed{シ}\right)$ を通る

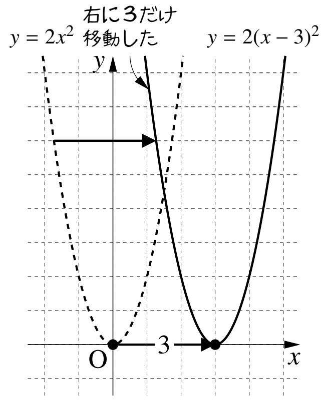
高校数学においてグラフを描くときは，方眼紙を用いず，概形を示すだけのことが多い．
放物線の場合，頂点と，他の 1 点を書き入れれば十分である．

$y = ax^2 + c$ のグラフ

$y = ax^2 + c$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを
「y 軸方向に c だけ平行移動」
した放物線である．このとき，軸は y 軸（直線 $x = 0$），頂点は $(0, c)$ となる．

[*10] このことは，式の形からも理解できる．同じ x の値を代入しても，$y = 2x^2 + 3$ の y の値の方が，$y = 2x^2$ の y の値より 3 だけ大きく計算されるからである．

F. $y = a(x-p)^2$ のグラフ



例として，次の 2 つの 2 次関数の関係を考えてみよう．

$y = 2x^2$ ， $y = 2(x-3)^2$

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	18	32	50	$\cdots$
$2(x-3)^2$	$\cdots$	50	32	18	8	2	0	2	8	$\cdots$

上の表から，$y = 2(x-3)^2$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に $+3$ 平行移動した放物線とわかる[*11]．

この平行移動によって，軸は x 軸方向に 3 移動し，直線 $x = 3$ に重なる．また，頂点も移動し，原点より x 軸方向に 3 大きい点 $(3,\ 0)$ であることがわかる．

【例題 51】 $\boxed{}$ に適当な数・式を答え，放物線 $\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$，$y = -2(x-4)^2$ のグラフを書け．

1. 頂点 $(0,\ 0)$，軸 $x = 0$ の放物線 $y = 2x^2$
   $\Downarrow$ x 軸方向に $+3$ 平行移動
   頂点 $(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$，軸 $\boxed{\text{ウ}}$ の放物線 $\boxed{\text{エ}}$
   これは $\left(0,\ \boxed{\text{オ}}\right)$ を通る
2. 頂点 $(0,\ 0)$，軸 $x = 0$ の放物線 $y = -3x^2$
   $\Downarrow$ x 軸方向に -2 平行移動
   頂点 $(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}})$，軸 $\boxed{\text{ク}}$ の放物線 $\boxed{\text{ケ}}$
   これは $\left(0,\ \boxed{\text{コ}}\right)$ を通る
3. 頂点 $(0,\ 0)$，軸 $x = 0$ の放物線 $y = -2x^2$
   $\Downarrow$ x 軸方向に $\boxed{\text{サ}}$ 平行移動
   頂点 $(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}})$，軸 $\boxed{\text{セ}}$ の放物線 $y = -2(x-4)^2$
   これは $\left(0,\ \boxed{\text{ソ}}\right)$ を通る

$y = a(x-p)^2$ のグラフ

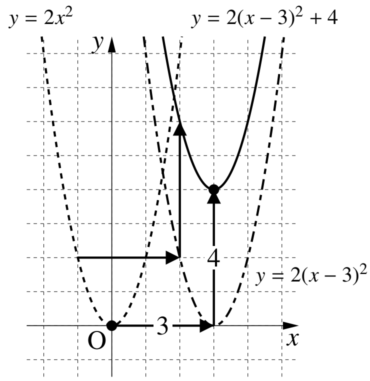
$y = a(x-p)^2$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを

「x 軸方向に p だけ平行移動」

した放物線である．このとき，軸は直線 $x = p$，頂点は $(p,\ 0)$ となる．

[*11] このことは，式の形からも理解できる．$y = 2(x-3)^2$ の y の値と $y = 2x^2$ の y の値を一致させるには，$2(x-3)^2$ の x には，$2x^2$ の x より 3 大きい値を代入しなければならない．

G.　$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ



たとえば，$y = 2(x-3)^2 + 4$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを次のように移動させればよい.

$$y = 2x^2 \xrightarrow[\text{3平行移動}]{x\text{軸方向に}} y = 2(x-3)^2$$

$$\xrightarrow[\text{4平行移動}]{y\text{軸方向に}} y = 2(x-3)^2 + 4$$

この平行移動によって，頂点は，原点より x 軸方向に 3 大きく y 軸方向に 4 大きい点 (3, 4) に移動する．軸は直線 $x = 3$ になる.

【例題 52】 $\boxed{}$ に適当な数・式を答え，放物線 $\boxed{ク}$, $\boxed{チ}$, $\boxed{ニ}$ のグラフを書け.

1. 放物線 $y = 2x^2$

$\Downarrow$ x 軸方向に +1 平行移動

頂点 ($\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$)，軸 $\boxed{ウ}$ の放物線 $\boxed{エ}$

$\Downarrow$ y 軸方向に +3 平行移動

頂点 ($\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$)，軸 $\boxed{キ}$ の放物線 $\boxed{ク}$

これは $\left(0, \boxed{ケ}\right)$ を通る

2. 放物線 $y = -x^2$

$\Downarrow$ x 軸方向に −4 平行移動

頂点 ($\boxed{コ}$, $\boxed{サ}$)，軸 $\boxed{シ}$ の放物線 $\boxed{ス}$

$\Downarrow$ y 軸方向に +7 平行移動

頂点 ($\boxed{セ}$, $\boxed{ソ}$)，軸 $\boxed{タ}$ の放物線 $\boxed{チ}$

これは $\left(0, \boxed{ツ}\right)$ を通る

3. 放物線 $y = 3x^2$

$\Downarrow$ x 軸方向に $\boxed{テ}$ 平行移動，y 軸方向に $\boxed{ト}$ 平行移動

頂点 $(1, -5)$，軸 $\boxed{ナ}$ の放物線 $\boxed{ニ}$

これは $\left(0, \boxed{ヌ}\right)$ を通る

$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

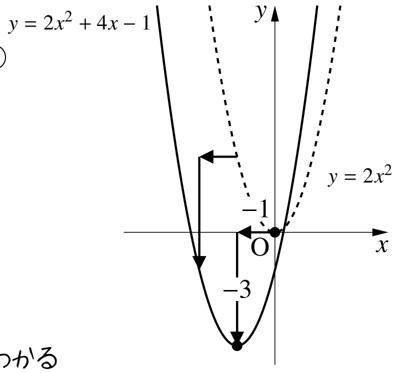
$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを

「x 軸方向に p だけ平行移動し，y 軸方向に q だけ平行移動」

した放物線である．このとき，軸は直線 $x = p$，頂点は (p, q) となる.

H. 平方完成

2 次式 $ax^2 + bx + c$ を $a(x-p)^2 + q$ の形に変形することを，**平方完成** (completing square) という[*12]．たとえば，



$$y = 2x^2 + 4x - 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフを描くには，次のような平方完成が必要となる．

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x - 1 \\ &= 2\left\{x^2 + 2x\right\} - 1 && \leftarrow x^2 \text{ の係数でくくる} \\ &= 2\left\{(x+1)^2 - 1\right\} - 1 && \leftarrow \text{平方の形にする（平方完成）} \\ &= 2(x+1)^2 - 2 - 1 && \leftarrow \{\quad\}\text{をはずす} \\ &= 2(x+1)^2 - 3 && \leftarrow \text{定数項を整理する，これで頂点の座標がわかる} \end{aligned}$$

①のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 平行移動した放物線になるとわかる．

平方完成の変形のうち，平方を作る変形を取り出すと，以下のようになる．

$$x^2 \quad + \quad \bigcirc\, x$$

↓ 半分

$$= \left(\quad x \quad + \quad \frac{\bigcirc}{2} \quad \right)^2 - \left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2$$

↑ここの 2 乗を引く

【例題 53】 以下の 2 次式を平方完成しなさい．

1. $x^2 + 6x$　2. $x^2 - 4x$　3. $x^2 - 8x + 5$　4. $2x^2 - 4x$　5. $2x^2 + 4x + 3$　6. $-3x^2 - 6x + 1$

[*12] 変形によって，$(x-p)^2$ という平方（2 乗）を作ることから，この名称が付いている．これはたいへん重要な式変形であり，実際，2 次方程式の解の公式も，平方完成の考え方で導かれている．

【練習 54：平方完成】

以下の 2 次式を（x について）平方完成しなさい.

(1) $x^2 - 6x$ (2) $x^2 + 4x$ (3) $x^2 - 3x$ (4) $x^2 - 6x + 3$ (5) $x^2 - 3x + 1$ (6) $2x^2 - 8x$

(7) $-2x^2 - 4x$ (8) $2x^2 + 8x + 1$ (9) $-3x^2 + 9x + 2$ (10) $\frac{1}{2}x^2 + 2x$ (11) $-\frac{1}{3}x^2 - 4x + 3$

(12) $-\frac{3}{2}x^2 - 5x + 1$ (13) $x^2 - 2ax$ (14) $2x^2 + 4ax + a^2$

I.　$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

次のようにして，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが必ず放物線になることが分かる.

$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

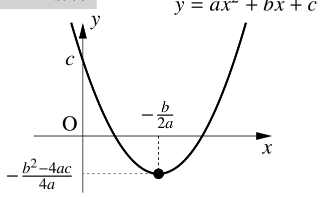
$$\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x\right\} + c && \leftarrow x^2 \text{ の係数でくくる} \\
&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c && \leftarrow \text{平方完成} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c && \leftarrow \{\quad\}\text{をはずす} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} && \leftarrow \text{定数項を整理する}
\end{aligned}$$

と平方完成して，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは

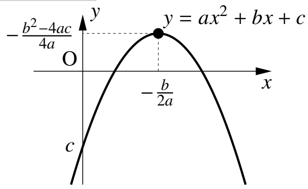
- 軸は直線 $x = -\dfrac{b}{2a}$，頂点は $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

の放物線となる．また，y 軸との交点は $(0,\ c)$ である.

$a > 0$ の場合



$a < 0$ の場合



上の結果を暗記する必要はない．2 次関数のグラフを考えるときは毎回，平方完成をしよう．また，2 次関数のグラフには，放物線の開き具合を決めるため，y 軸との交点を必ず書きこむ（軸が直線 $x = 0$ であった場合は，適当な 1 点を書き込む）.

【例題 55】　2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5$，$g(x) = -2x^2 - 4x + 1$ について，以下の問いに答えなさい.

1. $f(x)$, $g(x)$ を平方完成しなさい.
2. $y = f(x)$ の頂点の座標，軸の方程式を求め，グラフを書きなさい（y 軸との交点を書き込むこと）.
3. $y = g(x)$ の頂点の座標，軸の方程式を答え，グラフを書きなさい（y 軸との交点を書き込むこと）.

【練習 56：放物線を描く】

次の放物線の頂点の座標と軸の方程式を答え，グラフを描け．

(1) $y = x^2 - 2x + 3$　(2) $y = -3x^2 + 6x$　(3) $y = 2x^2 + 8x + 5$

(4) $y = -2x^2 - 6x - \dfrac{5}{2}$　(5) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 2$

【練習 57：2 次関数の平行移動】

放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを平行移動し，頂点が $(-2, -6)$ となったグラフを C とする．

(1) 放物線 C の方程式を求めよ．

(2) C を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 平行移動したグラフを C_1 とする．C_1 の頂点の座標と，C_1 の方程式を求めよ．

(3) C を平行移動した結果，頂点が $(-3, 2)$ にあるグラフを C_2 とする．C_2 の式を求めよ．このとき，C をどのように平行移動して C_2 になっただろうか．

2.　2次関数の決定

A.　準備1～方程式への代入

たとえば，関数 $y = x^2 + bx$ のグラフが $(2,\ 1)$ を通るならば，$y = x^2 + bx$ に $(x,\ y) = (2,\ 1)$ を代入した等式は成り立つ．つまり

$$1 = \cdot 2^2 + b \cdot 2 \iff 1 = 4 + 2b$$

より $b = -\dfrac{3}{2}$ と分かる．一般に，関数 $y = f(x)$ のグラフが $(p,\ q)$ を通るなら $q = f(p)$ が成り立つ (p.74).

【例題 58】　以下の問いに答えなさい．

1. 放物線 $y = -x^2 + bx + 3$ が $(-1, -3)$ を通るとき，b の値を求めよ．
2. 放物線 $y = 2(x - p)^2 + 3$ が $(1,\ 5)$ を通るとき，p の値を求めよ．

B.　準備2～連立3元1次方程式を解く

一般に，未知の文字を3つ含む，3つの(1次)連立方程式のことを連立3元1次方程式という．これを解くには，消去する文字を決め，代入法・加減法によって消去すればよい．

【例題 59】　連立3元1次方程式 $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x + y - z = 4 & \cdots\cdots\cdots ② \\ x - 2y + 3z = -1 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$ を解こう．

①－② によって，$\boxed{\text{ア}}$ を消去した式 $\boxed{\text{イ}}$ を得る．

$2\times$①＋③ によって，$\boxed{\text{ウ}}$ を消去した式 $\boxed{\text{エ}}$ を得る．

イ と **エ** を連立して，$(x,\ z) = \left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ を得て，最後に②から $y = \boxed{\text{キ}}$ を得る．

「連立3元1次方程式を解く」とは，上の問題でいえば「式①，②，③を全て同時に満たす $(x,\ y,\ z)$ の組を見つける」ということになる．

C.　一般型 $y = ax^2 + bx + c$ の決定〜軸や頂点について何もわかっていない場合

グラフが通る 3 点を与えるだけでも，2 次関数はただ 1 つに決まる．この場合は，求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ の形でおいて考える．

【例題 60】 (1. 5), (−1, 1), (−2, 2) を通る 2 次関数を求めてみよう．

1. 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく．これが
   (1, 5) を通るので等式 $\boxed{ア}$ を満たし，
   (−1, 1) を通るので等式 $\boxed{イ}$ を満たし，
   (−2, 2) を通るので等式 $\boxed{ウ}$ を満たす．
2. $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$ の 3 元一次連立方程式を解いて，$(a, b, c) = \left(\boxed{エ}, \boxed{オ}, \boxed{カ}\right)$ を得るので，求める 2 次関数は $\boxed{キ}$ と分かる．

【練習 61：軸や頂点について何もわかっていない場合】

グラフが 3 点 A(1, 6), B(−2, −9), C(4, 3) を通るような 2 次関数を求めよ.

【練習 62：連立 3 元 1 次方程式】

連立 3 元 1 次方程式 $\begin{cases} 3x+2y-2z=7 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x+3y=-5 & \cdots\cdots\cdots ② \\ -3x+z=-7 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$ を解け.

D.　平方完成型 $y = a(x-p)^2 + q$ の決定〜軸や頂点について条件が与えられた場合

頂点とグラフが通る 1 点，もしくは，軸とグラフが通る 2 点がわかれば，2 次関数はただ 1 つに決まる．p.88 の『$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ』で学んだことを用いて考えよう．

【例題 63】　次の 4 つの 2 次関数について，問いに答えなさい．

a) $y = a(x-p)^2 + 2$　　b) $y = a(x-3)^2 + q$　　c) $y = 3(x-2)^2 + q$　　d) $y = a(x-2)^2 + 3$

1. 上の 2 次関数のうち，a，p，q の値に関係なく頂点が $(2,\ 3)$ であるものを選べ．また，そのグラフが $(1,\ 2)$ を通るとき，2 次関数を決定せよ．
2. 上の 2 次関数のうち，軸が $x = 3$ であるものを選べ．また，そのグラフが $(1,\ 4)$, $(-1, -2)$ を通るとき，2 次関数を決定せよ．

上の問題で，a) は「頂点の y 座標が 2 であるグラフ」，c) は「軸が $x = 2$ であり，$y = 3x^2$ を平行移動してできたグラフ」ということができる．

【例題 64】　2 点 $(0,\ 0)$, $(3,\ 6)$ を通り，軸が $x = 1$ である放物線の方程式を求めよ．

【練習 65：頂点や軸について条件が与えられた場合】

グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が $(1, -3)$ で，点 $(-1,\ 5)$ を通る．

(2) 軸が直線 $x = -2$ で，2 点 $(-3,\ 2)$，$(0, -1)$ を通る．

(3) 発展　放物線 $y = -2x^2$ を平行移動した結果，直線 $y = 2x + 1$ 上に頂点があり，$(3,\ 3)$ を通る．

2 次関数の決定にあたっては，未知の 2 次関数を

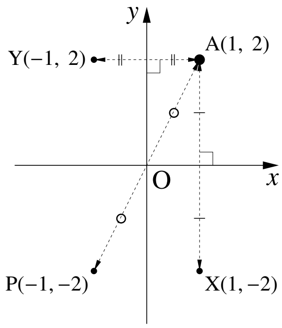
- $y = ax^2 + bx + c$（一般型）
- $y = a(x-p)^2 + q$（平方完成型）
- $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$（因数分解型）← p.123 で学ぶ

のうち，どの形で表現するかが重要になっている．

3. 2次関数の対称移動・平行移動

A. 点の対称移動

まず，点 A(1, 2) を対称移動することを考えよう．



- x 軸について対称移動したとき　A(1, 2) → X(1, −2)
  x 座標はそのままにし，y 座標のみ符号を逆転，と同じである．
- y 軸について対称移動したとき　A(1, 2) → Y(−1, 2)
  x 座標のみ符号を逆転，y 座標はそのまま，と同じである．
- 原点につして対称移動したとき　A(1, 2) → P(−1, −2)
  x 座標も y 座標も符号を逆転させることと同じである．

たとえば，y 軸について対称移動しても対称の中心となる y (座標) はそのままと理解できる．

【例題 66】

1. Z(2, −1) を x 軸について対称移動した点 Z_x，y 軸について対称移動した点 Z_y，原点について対称移動した点 Z_0 をそれぞれ求めよ．
2. 以下の点について，x 軸対称な 2 点の組，y 軸対称な 2 点の組，原点対称な 2 点の組をそれぞれすべて答えよ．
   A(4, 1),　B(−4, 2),　C(4, −1),　D(4, −2),　E(−4, 1)

【練習 67：点の対称移動】

次の 2 点は，x 軸，y 軸，原点のうち，何について対称か，それぞれ答えよ．

a) $(-3,\ 5)$ と $(3, 5)$　　b) $(1,\ 3)$ と $(-1, -3)$　　c) $(-2, -3)$ と $(2, -3)$

d) $(3,\ 5)$ と $(3, -5)$　　e) $(-2,\ 3)$ と $(2, -3)$　　f) $(0,\ 3)$ と $(0, -3)$

B.　文字の置き換えで対称移動を考える

点の対称移動について，以下のことが成り立っていた（p.99）．

- x 軸について対称移動するには，y 座標のみ符号を逆転させればよい．
- y 軸について対称移動するには，x 座標のみ符号を逆転させればよい．
- 原点につして対称移動するには，x 座標も y 座標も符号を逆転させればよい．

同じことを，グラフの対称移動にもあてはめることができる．
たとえば，放物線 $y = x^2 + 3x + 2$ の対称移動は次のようになる．

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{（ x 軸対称移動 ）}]{\text{y を − y に代える}} -y = x^2 + 3x + 2 \qquad \left(\Leftrightarrow\ y = -x^2 - 3x - 2\right)$$

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{（ y 軸対称移動 ）}]{\text{x を − x に代える}} y = (-x)^2 + 3\cdot(-x) + 2 \qquad \left(\Leftrightarrow\ y = x^2 - 3x + 2\right)$$

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{（ 原点対称移動 ）}]{\text{x を − x に代えて，y を − y に代える}} -y = (-x)^2 + 3\cdot(-x) + 2 \qquad \left(\Leftrightarrow\ y = -x^2 + 3x - 2\right)$$

【例題 68】　放物線 $y = 2x^2 - 8x + 9$ を C とする．

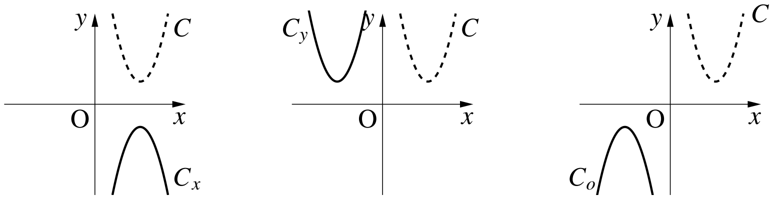
- C を x 軸に関して対称移動した放物線 C_x の方程式は $\boxed{\text{ア}}$ であり，頂点は $\boxed{\text{イ}}$ になる．
- C を y 軸に関して対称移動した放物線 C_y の方程式は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，頂点は $\boxed{\text{エ}}$ になる．
- C を原点に関して対称移動した放物線 C_o の方程式は $\boxed{\text{オ}}$ であり，頂点は $\boxed{\text{カ}}$ になる．
- C の頂点は $\boxed{\text{キ}}$ である．C と C_x の頂点を比べると，たしかに $\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ が x 軸対称になっているのが分かる．同様に，$\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ は y 軸対称，$\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ は原点対称であるのが分かる．

一般に，次のことがどんな関数のグラフでも成り立つ．特に，1 次関数や 2 次関数でも正しい．詳しい証明については，「一般の対称移動について (p.144)」を参照すること．

グラフの対称移動

- x 軸について対称移動するには，y を $-y$ に代えればよい．
- y 軸について対称移動するには，x を $-x$ に代えればよい．
- 原点について対称移動するには，x を $-x$ に代え，y を $-y$ に代えればよい．

前ページの**【例題 68】** におけるグラフの移動を実際に図示すると，次のようになる．



C. 文字の置き換えで平行移動を考える

『$y = a(x - p)^2$ のグラフ』(p.87) は放物線 $y = ax^2$ を「x 軸方向に p 平行移動」したグラフであり

$$y = ax^2 \xrightarrow{x\text{を}x-p\text{に代える}} y = a(x - p)^2$$

と考えられる．同様に，「y 軸方向に q 平行移動」することは y を $y - q$ におきかえることと同じである．

たとえば，放物線 $y = x^2 + 3x + 2$ を x 軸方向に 4，y 軸方向に -1 移動すれば，次のようになる．

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[(x\text{軸方向に}4\text{移動})]{x\text{を}x-4\text{に代える}} y = (x - 4)^2 + 3(x - 4) + 2 \quad \left(\Leftrightarrow\ y = x^2 - 5x + 6\right)$$

$$\xrightarrow[(y\text{軸方向に}-1\text{移動})]{y\text{を}y+1\text{に代える}} y + 1 = (x - 4)^2 + 3(x - 4) + 2 \quad \left(\Leftrightarrow\ y = x^2 - 5x + 5\right)$$

【例題 69】 放物線 $y = 2x^2 - 8x + 9$ を C とする．
C を x 軸方向に 1 移動した放物線 C_1 の方程式は $\boxed{\text{ア}}$ であり，さらに，C_1 を y 軸方向に -4 に移動した放物線 C_2 の方程式は $\boxed{\text{イ}}$ である．C の頂点は $\boxed{\text{ウ}}$，C_2 の頂点は $\boxed{\text{エ}}$ であり，たしかに，$\boxed{\text{ウ}}$ の x 座標に $+1$，y 座標に -4 すると $\boxed{\text{エ}}$ になる．

グラフの平行移動と方程式

- 「x 軸方向に p 平行移動する」には，方程式の x を $x - p$ に代えればよい．
- 「y 軸方向に q 平行移動する」には，方程式の y を $y - q$ に代えればよい．

一般のグラフの平行移動については，「一般の平行移動について (p.145)」を参照のこと．

【練習 70：平行移動・対称移動と 2 次関数の決定】

2 次関数 $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 4$ のグラフを C とする．

(1) C を y 軸について対称移動し，y 軸方向に 2 平行移動したグラフ C_1 の式を求めよ．

(2) 発展 グラフ C_2 を x 軸について対称移動し，x 軸方向に 2 平行移動したら C と一致した．C_2 の式を求めよ．

頂点の移動に着目して，放物線の移動を考えることもできる．くわしくは「頂点の移動を用いて 2 次関数の移動を考える (p.145)」を参照のこと．

4.　2次関数の最大・最小

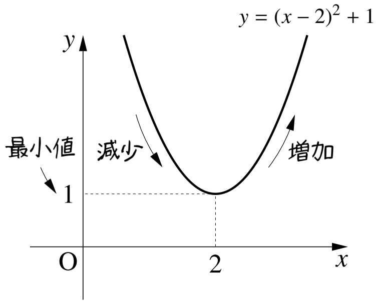
A.　2次関数の最大・最小

たとえば，2次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ の最大値・最小値を考えよう．

$y = f(x)$ とおけば，$f(x)$ の最大値・最小値は y の最大値・最小値に等しい．$y = f(x)$ のグラフを書けば

$$y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

より右図のようになる．



グラフ上で最も y 座標が小さいのは，$x = 2$ における1である．また，y の値はいくらでも大きくなるので，y の最大値は存在しない．

こうして，$f(x)$ は「最小値 $f(2) = 1$，最大値なし」とわかる．

【例題 71】　$f(x) = x^2 - 6x + 5$ について，$y = f(x)$ のグラフを書き，最大値・最小値を答えよ．

B.　定義域が限定された2次関数の最大・最小

定義域をすべての実数にすれば，2次関数には最大値が最小値のどちらかが存在しない．しかし，定義域が限定された場合は，そうとは限らない．

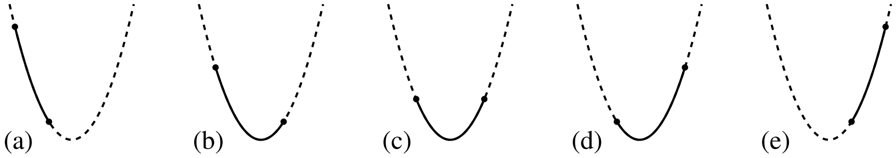
【例題 72】　$f(x) = -x^2 - x - 2$（$-1 \leqq x \leqq 2$）について，定義域内での $y = f(x)$ のグラフを書き，$f(x)$ の最大値・最小値をそれぞれ求めよ．

【練習 73：2 次関数の最大・最小〜その１〜】

2 次関数 $f(x)=x^2-2x-2$ を，次の定義域において考える．

(1) $-2 \leqq x \leqq 0$　(2) $-1 \leqq x \leqq 2$　(3) $0 \leqq x \leqq 2$　(4) $0 \leqq x \leqq 3$　(5) $3 \leqq x \leqq 4$

それぞれについて，(i) $y=f(x)$ のグラフを描き，(ii) グラフの形を下の (a)-(e) から 1 つ選び，(iii) $f(x)$ の最大値・最小値をそれぞれ求めよ．

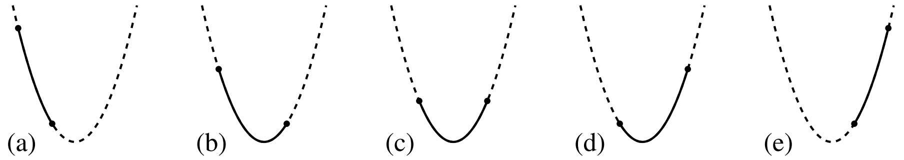


【練習 74：2 次関数の最大・最小〜その２〜】

(1)〜(3) の 2 次関数は，定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ とする．

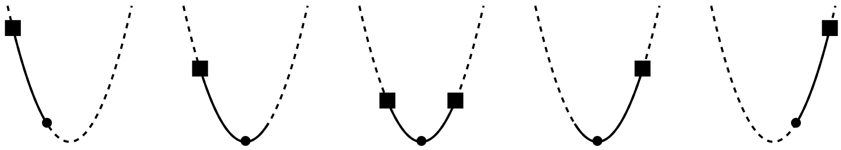
(1) $f(x) = x^2 + 4x - 3$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 3$　　(3) $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$

それぞれについて，(i) $y = f(x)$ のグラフを描き，(ii) グラフの形を下の (a)-(e) から 1 つ選び（上に凸なグラフは，上下に反転したものを考えること），(iii) $f(x)$ の最大値・最小値をそれぞれ求めよ．



C. 文字定数を含む 2 次関数の最大・最小

定義域が限定された放物線は，最大値・最小値を与えるグラフ上の点に着目すれば，結局次の 5 種類である（y 座標が最大になる点を■，最小になる点を ● で表している）.



【練習 75：文字定数を含む 2 次関数の形の判別】

放物線 $C : y = x^2 - 4ax + a^2 \ (-5 \leqq x \leqq 5)$ について以下の問に答えよ.

(1) この放物線の軸の方程式を，a を用いて表せ.

(2) $a = 2$ のとき，y が最大・最小となるときの x の値を，それぞれ求めよ.

(3) $a = -1$ のとき，y が最大・最小となるときの x の値を，それぞれ求めよ.

(4) C の軸が定義域より左側にあるための，a の範囲を求めよ．また，定義域内における C の y 座標の最大値，最小値を求めよ.

(5) C の軸が定義域より右側にあるための，a の範囲を求めよ．また，定義域内における C の y 座標の最大値，最小値を求めよ.

(6) C の軸が定義域の中にあるための，a の範囲を求めよ.

(7) (6) のうち，定義域の左端で C の y 座標が最大となるような a の範囲を求め，このときの C の y 座標の最大値，最小値を求めよ.

…上の問題において，$a = 0$ のときは定義域の両端で最大値をとる．

【練習 76：2 次関数の最大・最小（文字定数を含む場合）～その１～】

以下の場合における，2 次関数 $f(x) = x^2 - 2ax \ (-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値・最小値を求めよ．

(1) $a \leqq -1$　　(2) $1 \leqq a$　　(3) $-1 < a < 0$

【発展 77：2 次関数の最大・最小（文字定数を含む場合）～その２～】

2 次関数 $f(x) = -2x^2 + 4x - 3 \ (a \leqq x \leqq a+2)$ について，以下の問いに答えよ．

① $f(x)$ の最大値・最小値を求めよ． ② $f(x)$ の最大値が -3 となるときの a の値を求めよ．

【発展 78：2 次関数の最大・最小（文字定数を含む場合）〜その 3〜】

$a > 0$ とする．2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5 \ (0 \leqq x \leqq a)$ について以下の問に答えよ．

① 最小値を求めよ． ② 最大値を求めよ．

$\cdots$ a の値を 0 から増やしていくとき，グラフの最大値・最小値をとる点がいつ変わるのかグラフを描いて考えて，場合分けをしよう．

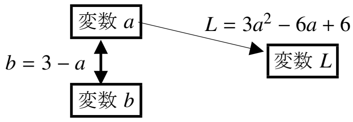
5. 2次関数の応用問題

A. x や y 以外の文字を用いて関数を表現する

$a+b=3$ のとき，式 $L=2a^2+b^2-3$ のとる値について考えてみよう．

この L の値は a のみによって決まる．実際，$b=3-a$ を L に代入すれば

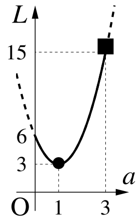
$$L=2a^2+(3-a)^2-3=3a^2-6a+6$$
$$=3(a-1)^2+3 \quad \leftarrow 平方完成した$$



となって，L は a のみで決まることが分かる．そのうえ，平方完成の結果，最大値は無し，最小値は $a=1$ のときの $L=3$ と分かる．このとき，$b=2$ である．

さらに，$0 \leqq a,\ 0 \leqq b$ に限れば，$b=3-a$ を $0 \leqq b$ に代入して

$$0 \leqq b \iff 0 \leqq 3-a \iff a \leqq 3$$



から，$0 \leqq a \leqq 3$ と分かるので，右上のグラフから，L の最大値は $a=3$ のときの $L=15$ と分かる．このとき，$b=0$ である．

$a=3-b$ によって a を消去して考えても，L の最大・最小について同じ結果を得る．

【例題 79】 実数 $p,\ q$ に対して，$L=p^2-q^2$ とする．

1. $p+2q=9$ であるとき，L の最大値・最小値と，そのときの $p,\ q$ の値を求めよ．
2. 1. に加えて $0 \leqq p,\ 0 \leqq q$ であるとき，L の最大値・最小値と，そのときの $p,\ q$ の値を求めよ．

B. 2 次関数の最大・最小の応用

2 次関数の知識を利用して，身近にある様々な問題を解くことができる．

【練習 80：2 次関数の身近な例への応用】

(1) 長さ 20 cm の針金を 2 つに切り，それぞれの針金で正方形を作るとき，それらの面積の和の最小値を求めよ．また，そのとき針金は何 cm ずつに切り分けられているか求めよ．

(2) ある品物の売価が 1 個 120 円のときには，1 日の売上個数は 400 個であり，売価を 1 個につき 1 円値上げするごとに，1 日の売上個数は 2 個ずつ減るという．1 日の売上金額を最大にするには，売価をいくらに設定すればよいか求めよ．

【練習 81：1 つの文字に帰着できる 2 次関数】

$0 \leqq x$，$0 \leqq y$，$2x + y = 10$ のとき，$L = x^2 + y^2 - 3$ の最大値・最小値を求めよ．また，そのときの x，y を求めよ．

C. 式の一部を置き換える

【発展 82：式の一部を文字でおく】

① $t = x^2 - 2x$ について，t の値のとりうる範囲を求めよ．

② 関数 $y = (x^2 - 2x)^2 + 4x^2 - 8x + 5$ について，y の値のとりうる範囲を求めよ．

【発展 83：2 文字 2 次式の最大・最小】

x の 2 次関数 $y = 2x^2 + 4kx + k^2 + 4k - 2$ について，y の最小値 m を k を用いて表せ．さらに，m の最大値とそのときの k の値を求めよ．

【発展 84：2 次関数の利用】

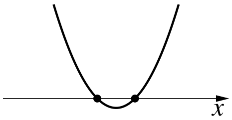
3 辺が 3 cm，4 cm，5 cm の直角三角形の紙から，はさみを使って鋭角を切り落とし，面積が最大の長方形を作るにはどのようにすればよいか.

6. 放物線と x 軸の位置関係 — 判別式 D

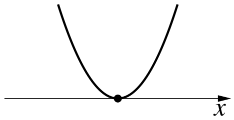
A. 放物線と x 軸の共有点

放物線と x 軸の共有点は，最大で 2 個になる．たとえば，下に凸な放物線ならば以下のようになる．

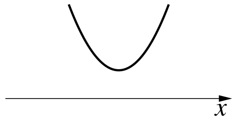
i) **x 軸と 2 つの共有点をもつ**



ii) **x 軸と 1 つの共有点をもつ**



iii) **x 軸と共有点をもたない**



放物線が上に凸の場合も，上下が逆になる以外は同様の結果になる．

【例題 85】 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を，それぞれ答えよ．

1. $y = (x-1)^2 - 5$
2. $y = -(x-3)^2 - 2$
3. $y = 2x^2 + 8x + 1$

B. 放物線の判別式 D

放物線と x 軸の共有点の個数は，放物線の頂点の y 座標が正であるか，0 であるか，負であるかによって決定される．一般の放物線 $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ の平方完成は

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

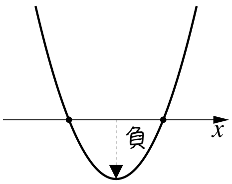
となり，頂点の y 座標は．$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ である（p.91）．よって，$a > 0$ の場合は次のようになる．

$a > 0$ の場合

i) **$b^2 - 4ac > 0$ のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(正)}{(正)}$$

より，頂点の y 座標は負．

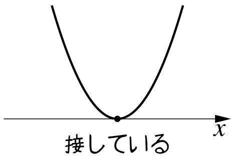


x 軸との共有点は 2 つ

ii) **$b^2 - 4ac = 0$ のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{0}{(正)}$$

より，頂点の y 座標は 0.

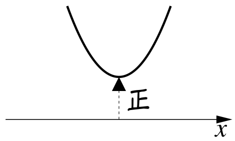


x 軸との共有点は 1 つ
放物線の頂点が共有点

iii) **$b^2 - 4ac < 0$ のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(負)}{(正)}$$

より，頂点の y 座標は正.



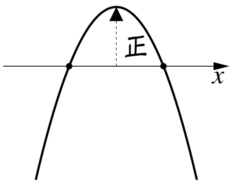
x 軸との共有点はない

【例題 86】 $\boldsymbol{a < 0}$ とする．以下の $\boxed{}$ に「正」「負」「0」「1」「2」のいずれかを入れよ．

i) $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$ **のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

より，頂点の y 座標は $\boxed{\text{ウ}}$．

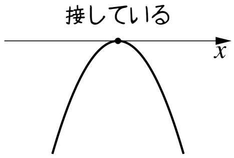


x 軸との共有点は $\boxed{\text{エ}}$ 個

ii) $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$ **のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

より，頂点の y 座標は $\boxed{\text{キ}}$．

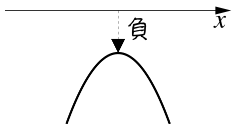


x 軸との共有点は $\boxed{\text{ク}}$ 個

iii) $\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$ **のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

より，頂点の y 座標は $\boxed{\text{サ}}$．



x 軸との共有点は $\boxed{\text{シ}}$ 個

放物線の判別式 D

放物線 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ と x 軸の共有点の個数は，判別式 $D = b^2 - 4ac$ を用いて判別できる．

i) $\boldsymbol{D > 0}$ **のとき**

放物線 $y = f(x)$ は x 軸と「2 つの共有点をもつ」

ii) $\boldsymbol{D = 0}$ **のとき**

放物線 $y = f(x)$ は x 軸と「1 つの共有点をもち」，「x 軸と**接する** (contact)」．

ただ 1 つの共有点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ 0\right)$ は**接点** (point of contact) とよばれ，放物線の頂点に一致する．

iii) $\boldsymbol{D < 0}$ **のとき**

放物線 $y = f(x)$ は x 軸と「共有点をもたない」

「x 軸との共有点の個数を判別する」2 次関数の判別式 D と，「実数解の個数を判別する」2 次方程式の判別式 D（p.67）の関係については p.117 で学ぶ．

【例題 87】 以下の $\boxed{}$ に適当な数値を入れよ．

1. 放物線 $y = 2x^2 + 5x - 1$ は，判別式 D の値が $\boxed{\text{ア}}$ なので，x 軸との共有点は $\boxed{\text{イ}}$ 個である．
2. 放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 8$ は，判別式 D の値が $\boxed{\text{ウ}}$ なので，x 軸との共有点は $\boxed{\text{エ}}$ 個である．
3. 放物線 $y = \dfrac{2}{3}x^2 + 3x + 5$ は，判別式 D の値が $\boxed{\text{オ}}$ なので，x 軸との共有点は $\boxed{\text{カ}}$ 個である．

【練習 88：放物線と x 軸との共有点の個数の判別】

2 次関数 $y = x^2 - (k-1)x + \frac{1}{4}k^2 + k + 1$ のグラフ C について，以下の問いに答えよ．

(1) $k = -4$ のとき，放物線 C と x 軸との共有点の個数はいくつあるか.

(2) $k = 2$ のとき，放物線 C と x 軸との共有点の個数はいくつあるか.

(3) C と x 軸との共有点の個数が 2 個，1 個，0 個であるための，定数 k の条件をそれぞれ答えよ．

2.5　2次方程式と2次関数

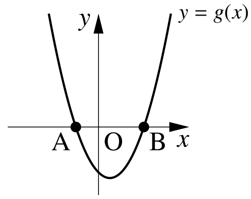
1.　2次方程式の判別式 D と2次関数の判別式 D を同一視する

A.　放物線と x 軸の共有点

2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ において，判別式 $D=b^2-4ac$ が0以上であれば，放物線 $y=f(x)$ が x 軸と共有点をもつ (p.115)．このとき，「共有点の x 座標」を求めてみよう．

【暗記 89：2次関数と x 軸の共有点の座標〜その1〜】

以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値・式・言葉を答えよ．



1. 2次関数 $y=x^2-x-2$ のグラフにおいて，y 座標が0になる点を求めるには，2次方程式

   $\boxed{ア}=0$

   を解けばよい．その結果，A($\boxed{イ}$, 0)，B($\boxed{ウ}$, 0) と分かる．
2. 2次関数 $y=x^2-2x-4$ のグラフと $\boxed{エ}$ 軸の共有点を求めるには，2次方程式

   $x^2-2x-4=0$

   を解けばよい．その結果，($\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$)，($\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$) と分かる．
3. 2次関数 $y=x^2-2x+4$ のグラフにおいて y 座標が0になる点を求めるには

   $\boxed{ケ}=0$ ……………………… ①

   という2次方程式を解けばよい．この2次方程式の判別式 D を計算すると0より $\boxed{コ}$ ため，①は解を持たない．つまり，2次関数 $y=x^2-2x+4$ のグラフは y 座標が0になることはない．

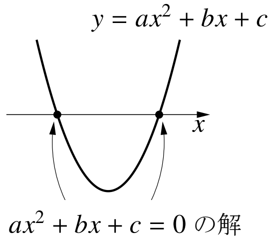
放物線と x 軸との共有点

判別式 D が0以上である2次関数

$y=ax^2+bx+c$

のグラフと x 軸 ($y=0$) との共有点の x 座標は，次の2次方程式の解である．

$ax^2+bx+c=0$



【練習 90：放物線と x 軸との共有点を調べる】

次の放物線と x 軸との共有点があるならば，その共有点の座標を求めよ．

(1) $y = x^2 - x - 1$　(2) $y = -4x^2 + 4x - 1$　(3) $y = x^2 - x + 1$

【練習 91：x 軸と接するための条件】

放物線 $y = 4x^2 + 2(k-1)x - k + 4$ が x 軸と接するよう定数 k の値を定めよ．また，そのときの接点を求めよ．

B. 2 次方程式の解をグラフで表す

p.117 の「放物線と x 軸との共有点」を逆に考えれば，次のことがわかる．

2 次方程式の解をグラフに表す

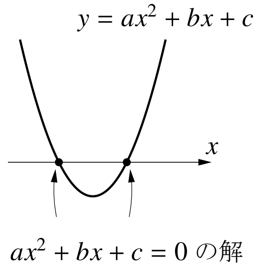
判別式 D が 0 以上である 2 次方程式

$$ax^2+bx+c = 0$$

の解は，2 次関数

$$y = ax^2+bx+c$$

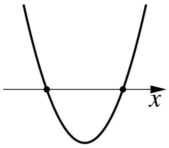
のグラフと x 軸との「共有点の x 座標」に表れる．



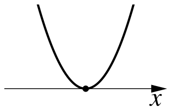
【暗記 92：2 次方程式の解をグラフで表す】

次の空欄に適当な数字または文字を入れよ．

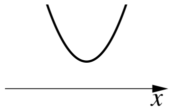
(a)



(b)



(c)



1. 2 次方程式 $x^2-4x-5=0$ の解は

 2 次関数 $\boxed{\text{ア}}$ ……………………… ①

 と x 軸との「共有点の x 座標」に一致し，$\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ である．

 また，2 次関数①のグラフは，上の (a), (b), (c) のうち，$\boxed{\text{エ}}$ に一番近い．

2. 2 次方程式 $9x^2-6x+1=0$ の解は

 2 次関数 $\boxed{\text{オ}}$ ……………………… ②

 と x 軸との「共有点の x 座標」に一致し，$\boxed{\text{カ}}$ である．

 また，2 次関数②のグラフは，上の (a), (b), (c) のうち，$\boxed{\text{キ}}$ に一番近い．

3. 2 次方程式 $x^2-4x+5=0$ の解は

 2 次関数 $\boxed{\text{ク}}$ ……………………… ③

 と x 軸との「共有点の x 座標」に一致するが，これは存在しない．

 2 次関数③のグラフは，上の (a), (b), (c) のうち，$\boxed{\text{ケ}}$ に一番近い．

C. 判別式 D

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ においても，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ においても，判別式 D は同一の式

$$D=b^2-4ac$$

で定義され，以下のことが成り立つ．

「2 次方程式の解」と「放物線と x 軸との共有点の x 座標」の対応

$a \neq 0$ である 2 次式 ax^2+bx+c に対し

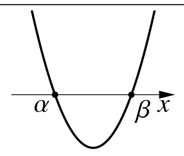
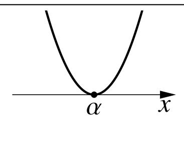
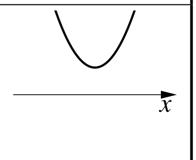
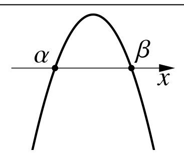
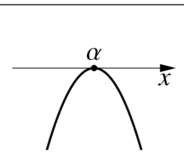
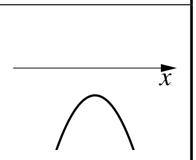
- 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸の共有点の個数
- 方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の個数

は一致し，判別式 $D=b^2-4ac$ に対して

$D>0$ ならば 2 個，$D=0$ ならば 1 個[*13]，$D<0$ ならば 0 個

である．また，$D \geqq 0$ ならば次も一致する．

- 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との共有点の x 座標
- 方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の値

判別式 D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフ（$a>0$ のとき）			
$y=ax^2+bx+c$ のグラフ（$a<0$ のとき）			
$ax^2+bx+c=0$ の解	2 解 $\alpha,\ \beta$	重解 α	なし

【例題 93】 以下の $\boxed{}$ に当てはまる語句・式・値を答えよ．

- 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 D は $\boxed{ア}$ を判別する式である．
- 放物線 $y=ax^2+bx+c$ の判別式 D は $\boxed{イ}$ を判別する式である．
- これら 2 つの判別式は一致する．なぜなら，$\boxed{イ}$ を判別するには，$y=ax^2+bx+c$ の $\boxed{ウ}$ に $\boxed{エ}$ を代入して得られる方程式 $\boxed{オ}$ を解くからである．

[*13] ここでは重解を「1 個」と数えている．一般的には，重複度を込めて「2 個」と数えることが多い．

§2.6 で学ぶ 2 次不等式において，前ページの内容は必要不可欠になる．

2.　2 次方程式・2 次関数の応用

A.　放物線と直線・放物線の共有点

放物線と直線・放物線の共有点についても，p.78 のときと同じことが成り立つ．

つまり，グラフの共有点の座標と連立方程式の解は一致する．

連立方程式の解が無い場合は，グラフの共有点も無い．解の個数も，解の数値も，「グラフの共有点の座標と連立方程式の解は一致する」．

たとえば，放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ と直線 $y = 2x - 3$ の共有点の座標 (x, y) は

$y = x^2 - 4x + 5$ ········ ①

$y = 2x - 3$ ········ ②

を同時に満たす (x, y) と等しい．つまり，連立方程式①，②を解けばよい．①を式②の左辺に代入して解けば

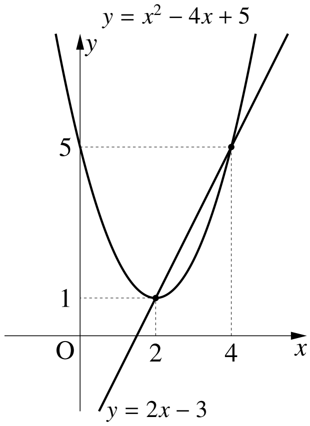
$$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 - 6x + 8 = 0 \qquad \therefore\ x = 2,\ 4$$

となる．そこで，②に代入して y を求めれば

$x = 2$ のとき $y = 1$，$x = 4$ のとき②より $y = 5$

であるので，共有点の座標は $(2,\ 1)$，$(4,\ 5)$ とわかる．



【例題 94】 放物線 C: $y = x^2 - 2x + 3$ と直線 L: $y = -x + 5$ との共有点を求め，C と L のグラフを描け．

【練習 95：放物線と直線・放物線の共有点】

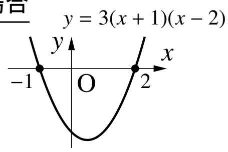
放物線 C： $y = x^2 - 2x + 3$ について

(1) 放物線 C_1： $y = -x^2 - x + 6$ との共有点を求め，C と C_1 のグラフを描け．

(2) 直線 L： $y = -2x - k$ との共有点が 1 つであるように，k の値を定めよ．
また，そのときの C と L のグラフを描け．

…… 放物線と直線・放物線の共有点が 1 点のときも，その 2 つのグラフは「接している」といい，その共有点をやはり「接点」という．たとえば，(2) において，直線 L と放物線 C は接していて，その接点は (0, 3) である．

B. 2 次関数・因数分解型 $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ の決定〜x 軸との共有点が与えられた場合



たとえば，2 次関数 $y = 3(x+1)(x-2)$ と x 軸の共有点を考えよう．これは 2 次方程式 $3(x+1)(x-2) = 0$ の 2 解であり，ただちに $x = -1,\ 2$ を得て，右図のようなグラフを描くことができる．

【例題 96】 次の 2 次関数と x 軸の共有点を求めよ．

1. $y = (x+2)(x-3)$
2. $y = 2(x-1)(x+3)$
3. $y = -3(x-4)(x+1)$

上の事実を逆に応用して，『2 次関数の決定』(p.94) をすることができる．

【例題 97】 放物線 C と x 軸との共有点の x 座標が 1，3 であったならば，C の方程式は

$y = a(x - \boxed{\text{ア}})(x - \boxed{\text{イ}})$

と書ける．もし，C が $(2, -2)$ を通るならば，C の方程式は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

【練習 98：2 次関数の決定（x 軸との共有点の座標が与えられた場合）】

x 軸と $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，点 $(1,\ 2)$ を通る放物線の方程式を求めよ．

2.6　2次不等式と2次関数

この節では，2 次式で表された不等式「2 次不等式」について学ぶ．p.79 で学んだように，1 次不等式は 1 次関数と 1 次方程式と深い関係があった．

2 次不等式の場合は，むしろ，2 次関数と 2 次方程式を用いて解くことになる．

1.　2次不等式の解法の基礎

2 次式を含む不等式を **2 次不等式** (quadratic inequality) といい，不等式を満たす x の値の範囲をその不等式の解，解を求めることを不等式を解くという．たとえば，2 次不等式

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす x の値について考えてみると，$x = 2,\ 3$ は①を満たすので解であり，$x = 0,\ 5$ は解ではない．

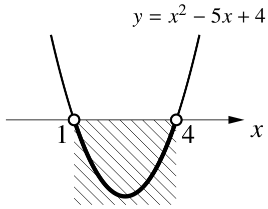
A.　2次不等式の解法の基本

2 次不等式を解くには，次のように考えるのが最もよい．

「2 次不等式 $x^2 - 5x + 4 < 0$ を解け」

$\leftrightarrow$　$y = x^2 - 5x + 4$ とおいたとき，$y < 0$ であるような x の範囲を求めよ

$\leftrightarrow$　「2 次関数 $y = x^2 - 5x + 4$ のグラフにおいて，
y 座標が 0 より小さいときの x 座標の範囲を求めよ」



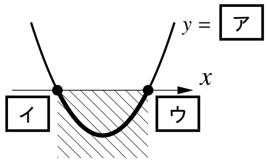
こうして，2 次不等式を解くことを，2 次関数と 2 次方程式の問題として考えることができる．①の場合

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x-1)(x-4)}_{y\text{とおく}} < 0 \text{←因数分解した}$$

であるので，この左辺を y とおいた，2 次関数 $y = (x-1)(x-4)$ のグラフを描けば右上図のようになる．
$y < 0$ となる x の範囲は $1 < x < 4$ であるので，①の解は $\mathbf{1 < x < 4}$ となる．

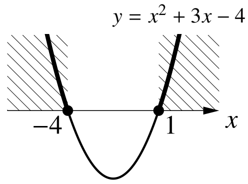
【例題 99】　2 次不等式 $x^2 - 6x + 8 \leqq 0$ を解こう．

1. 左辺を因数分解すると $\boxed{\text{ア}}$ $\leqq 0$ となるので，$y =$ $\boxed{\text{ア}}$ のグラフは右欄外のようになる．
2. $y \leqq 0$ となる x の範囲が解なので，$\boxed{\text{エ}}$ が解になる．



2 次不等式を解くためには，2 次関数の頂点を求める必要がない．x 軸との共有点の座標さえ求めれば十分である．

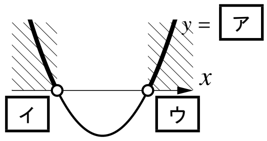
2 次不等式 $x^2+3x-4 \geqq 0$ の場合は



$$\begin{aligned} & x^2+3x-4 \geqq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \underbrace{(x+4)(x-1)}_{y\text{とおく}} \geqq 0 \end{aligned}$$ ←因数分解した

であるので，この左辺を y とおいた，2 次関数 $y=(x+4)(x-1)$ のグラフを描けば右上図のようになる．$y \geqq 0$ となる x の範囲は $x \leqq -4,\ 1 \leqq x$ であるので，$x^2+3x-4 \geqq 0$ の解は $\boldsymbol{x \leqq -4,\ 1 \leqq x}$ となる．

【例題 100】 2 次不等式 $x^2-x-6>0$ を解こう．



1. 左辺を因数分解すると $\boxed{\text{ア}}$ >0 となるので，$y=$ $\boxed{\text{ア}}$ のグラフは右欄外のようになる．
2. $y>0$ となる x の範囲が解なので，$\boxed{\text{エ}}$ が解になる．

【例題 101】

1. 2 次関数 $y=x^2-2x-3$ のグラフと x 軸との共有点があれば求めよ．
2. 次の 2 次不等式を解け．

   i) $x^2-2x-3>0$　ii) $x^2-2x-3 \geqq 0$　iii) $x^2-2x-3<0$　iv) $x^2-2x-3 \leqq 0$

【練習 102：2 次不等式〜その１〜】

次の 2 次不等式を解け.

(1) $(x-3)(x+2) \leqq 0$　(2) $x^2-6x+8<0$　(3) $x^2+3x+2 \geqq 0$　(4) $2x^2+3x-2>0$

(5) $x^2-16<0$　(6) $-x^2-2x+8 \geqq 0$　(7) $-2x^2+3x-1<0$　(8) $1-x^2>0$

x^2 の係数が負の場合は両辺を (-1) 倍して，x^2 の係数を正にすれば，下に凸なグラフだけを考えればよい，

B. 解の公式が必要な 2 次不等式

2 次式を有理数の範囲で因数分解できないときは，解の公式を用いればよい (p.65).

【例題 103】

1. 2 次関数 $y = x^2 - 2x - 1$ のグラフと x 軸との共有点の座標を求めなさい.
2. 2 次不等式 $x^2 - 2x - 1 < 0$ を解け.

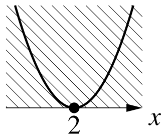
【練習 104：2 次不等式〜その２〜】

次の 2 次不等式を解け.

(1) $x^2 - x - 5 \leqq 0$ (2) $x^2 - 4x + 1 < 0$ (3) $2x^2 - 3x - 4 \geqq 0$ (4) $x^2 - 13 > 0$

C.　判別式 $D=0$ の場合の 2 次不等式

2 次不等式 $x^2-4x+4 \geqq 0$ の場合は



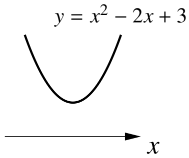
$$x^2-4x+4 \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x-2)^2}_{y\text{とおく}} \geqq 0 \leftarrow \text{因数分解した}$$

であるので，この左辺を y とおいた，2 次関数 $y=(x-2)^2$ のグラフを描けば右上図のようになる．$y \geqq 0$ となる x の範囲はすべての実数であるので，$x^2-4x+4 \geqq 0$ の解は「すべての実数」となる．

【例題 105】

1. 2 次関数 $y=4x^2-4x+1$ のグラフと x 軸との共有点があれば求めよ．
2. 次の 2 次不等式を解け．
   i) $4x^2-4x+1>0$　　ii) $4x^2-4x+1 \geqq 0$　　iii) $4x^2-4x+1<0$　　iv) $4x^2-4x+1 \leqq 0$

D.　判別式 $D < 0$ の場合の 2 次不等式



2 次不等式 $x^2-2x+3 < 0$ の場合, 左辺を因数分解できない．そこで, $x^2-2x+3 = 0$ を解の公式を用いて解くと，$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 3}}{2} = 1 \pm \sqrt{-2}$ となる．

つまり，$x^2 - 2x + 3 < 0$ の左辺を y とおいた，2 次関数 $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフは右上図のようになる．$y < 0$ となる x の範囲はないので，$x^2 - 2x + 3 < 0$ の解は「解なし」となる．

逆に，2 次不等式 $x^2 - 2x + 3 > 0$ の解は「すべての実数」となる．必ず，グラフを描いて考える癖をつけよう．

【例題 106】

1. 2 次関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフと x 軸との共有点があれば求めよ．
2. 次の 2 次不等式を解け．
   i) $x^2 - 4x + 5 > 0$　　ii) $x^2 - 4x + 5 \geqq 0$　　iii) $x^2 - 4x + 5 < 0$　　iv) $x^2 - 4x + 5 \leqq 0$

不等式 $x^2 - 2x + 3 < 0$ が解なしであることは，$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$ と変形して，$(x - 1)^2$ が非負であることからも理解できる．

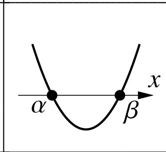
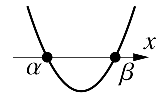
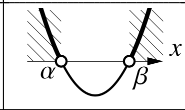
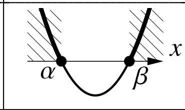
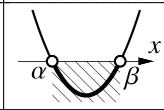
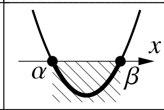
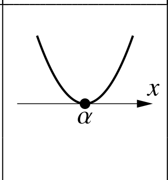
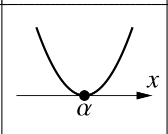
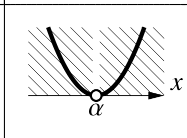
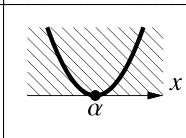
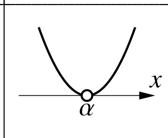
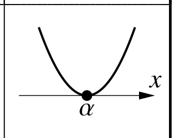
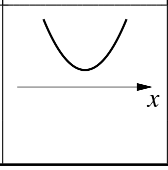
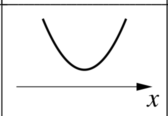
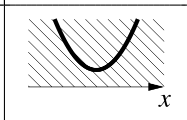
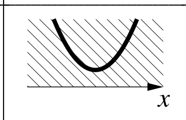
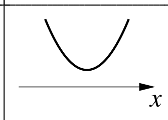
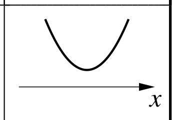
E. 2次不等式の解法のまとめ

結局，2次不等式を解くには，次の手順を踏めばよい．

- 片方の辺を0にし，他方の x^2 の係数を正にする．
- 2次式を因数分解する．整数の範囲で因数分解できない場合は解の公式を用いる (p.66)．ただし，解を持たない場合もある（判別式 $D < 0$ の場合）．
- 簡単なグラフを書き，適する範囲を答える．

2次不等式の解

$a > 0$ の場合の，2次不等式の解はつぎのようにまとめることができる．

	$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ	$ax^2 + bx + c = 0$ の解	$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$ax^2 + bx + c \geqq 0$ の解	$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$ax^2 + bx + c \leqq 0$ の解
$D > 0$						
		2解 $\alpha,\ \beta$	$x < \alpha,\ \beta < x$	$x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x$	$\alpha < x < \beta$	$\alpha \leqq x \leqq \beta$
$D = 0$						
		重解 α	**α 以外の実数**	**すべての実数**	**なし**	$x = \alpha$
$D < 0$						
		解なし	**すべての実数**	**すべての実数**	**なし**	**なし**

（…）この結果を暗記する必要はない．結果を確認できればよい．

【練習 107：2次不等式〜その３〜】

次の2次不等式を解け．

(1) $x^2 - 2x - 1 < 0$　(2) $-2x^2 - x - 6 \geqq 0$　(3) $x^2 - 2x + 1 \geqq 0$　(4) $x^2 < 8$

(5) $x^2 \geqq 2x$　(6) $-2x^2 - 4 > 0$　(7) $\dfrac{1}{3}x^2 + x + \dfrac{2}{3} \geqq 0$　(8) $x^2 - x - 6 \geqq 2x - 4$

(9) $-x^2 - x - 9 < x - 3$　(10) $\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{5}{3} \geqq \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x + 1$

F. 連立 2 次不等式

連立 2 次不等式を解くときも，連立 1 次不等式（p.58）の場合と同じように，数直線を必ず描こう．

【練習 108：連立 2 次不等式】

次の不等式を解け．

(1) $\begin{cases} x^2 - 5x - 14 \geqq 0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x^2 - 11x - 40 < 0 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 25 - 9x^2 > 0 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ 3x^2 + 4x - 6 < 0 & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$

2.　2次関数・2次方程式・2次不等式の応用問題

A.　範囲に注意すべき2次関数の最大・最小

【練習 109：範囲に注意すべき2次関数の最大・最小】

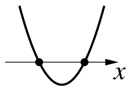
$x^2+y^2=1$ のとき，$L=x+y^2-1$ の最大値・最小値，そのときの x，y を求めよ．

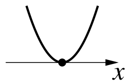
x^2+y^2 を含む条件式があるときは，$0 \leqq x^2$，$0 \leqq y^2$ に注意しよう．

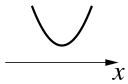
B. 2 次不等式の解からグラフを考える

【例題 110】 2 次不等式 $x^2 - kx + 1 > 0$ の解が「すべての実数」であったという．

1. 左辺を y とおいた 2 次関数 $y = x^2 - kx + 1$ のグラフは，右のうちどれになるか．
2. 条件を満たす k の範囲を答えよ．

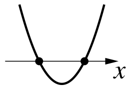
i. 

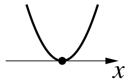
ii. 

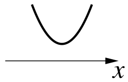
iii. 

【例題 111】 2 次不等式 $x^2 + ax + b < 0$ の解が $-2 < x < 1$ であったという．

1. 左辺を y とおいた 2 次関数 $y = x^2 + ax + b$ のグラフの概形は，右のうちどれになりうるか．
2. a, b の値を答えよ．

i. 

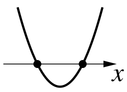
ii. 

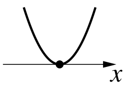
iii. 

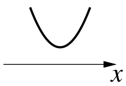
【練習 112：2 次不等式の解からグラフを考える】

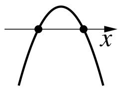
2 次不等式 $ax^2 - 2x + a > 0$ の解が「解なし」であったという．

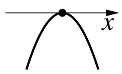
(1) 左辺を y とおいた 2 次関数 $y = ax^2 - 2x + a$ のグラフは，下のうちどれになりうるか．

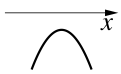
i. 

ii. 

iii. 

iv. 

v. 

vi. 

(2) 条件を満たす a の範囲を答えよ．

【練習 113：2 次不等式の解】

$2x^2 + kx + 3 > 0$ がすべての実数で成り立つような k の範囲を求めよ．

【練習 114：放物線と x 軸の大小関係】

放物線 $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$ のグラフについて，以下の問いに答えよ．

(1) このグラフが x 軸と共有点をもつように a の範囲を定めよ．

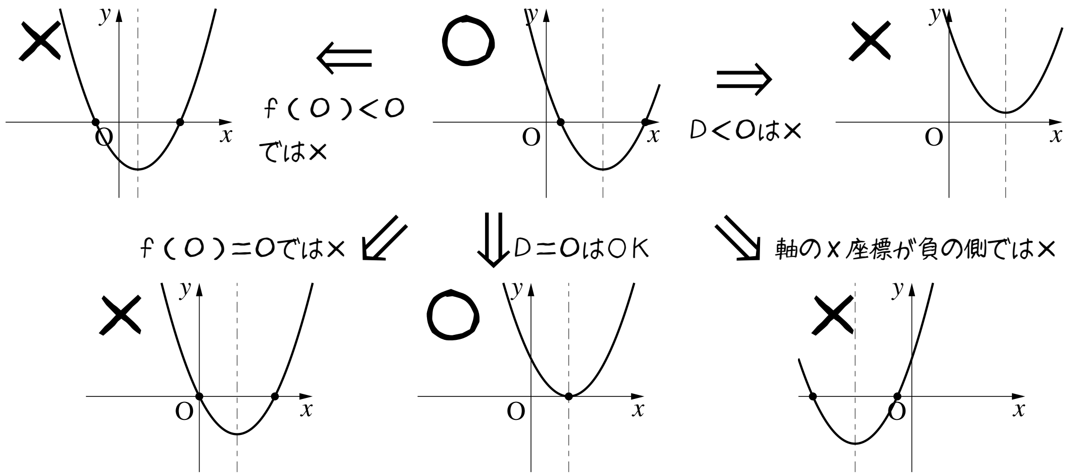
(2) このグラフが x 軸よりも下にあり，かつ x 軸と共有点をもたないように a の範囲を定めよ．

(3) 2 次不等式 $ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5 < 0$ の解が存在しないとき，a の範囲を定めよ．

C.　2 次方程式の解の配置

2 次方程式 $x^2 - ax + (a^2 - 3) = 0$ が正の解だけをもつような a の条件を考えよう．

これは，$y = f(x) = x^2 - ax + (a^2 - 3)$ と x 軸が，正の部分で交わる条件に一致する．そのようなグラフを描いてみよう．



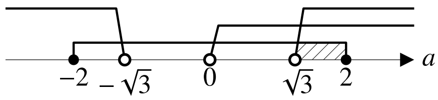
結果的に，次の条件をすべて同時に満たせばよい．

$D \geqq 0$,（軸の x 座標）> 0, $f(0) > 0$

それらをそれぞれ解こう．$f(x) = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + a^2 - 3$ から，軸の方程式は $x = \dfrac{a}{2}$ であるから

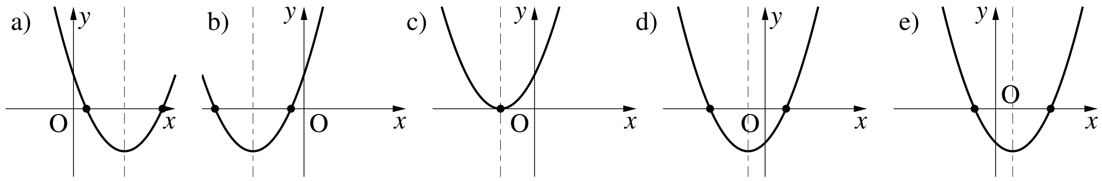
$$\begin{cases} D \geqq 0 \\ (\text{軸の } x \text{ 座標}) > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geqq 0 \\ \dfrac{a}{2} > 0 \\ f(0) = a^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 \leqq 0 \\ a > 0 \\ (a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqq a \leqq 2 \\ 0 < a \\ a < -\sqrt{3},\ \sqrt{3} < a \end{cases}$$

と分かる．これらを数直線上に表わせば右のようになるので，$\sqrt{3} < a \leqq 2$ が求める条件であると分かる．



上のように，2 次方程式 $f(x) = 0$ の解の配置を調べる問題では，「判別式 D」「軸の x 座標」「$f(a)$（$x = a$ を境に解の適・不適が定まる）」の 3 点を必ず調べよう．ただし，後で見るように，このうち 1 つまたは 2 つが不要になることもある．

【例題 115】　$f(x) = x^2 + 2ax + a + 2 = 0$ が負の解だけをもつ（ ……… ①）ような a の条件を求めるため，（　）には「<」「≦」「>」「≧」のいずれかを，$\boxed{}$ には記号・条件を入れなさい．



①を満たすときの $f(x) = 0$ のグラフとして，適しているものを上からすべて選ぶと $\boxed{\text{ア}}$ になる．

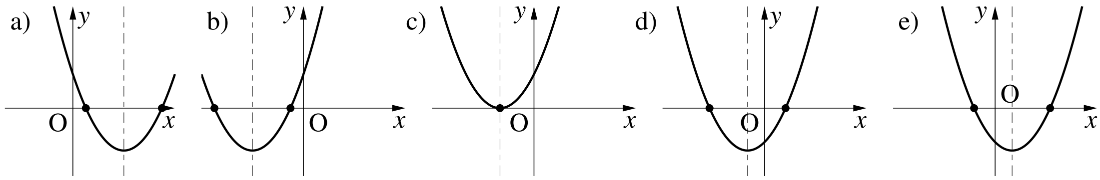
よって，①を満たすには D（ **イ** ）0,（軸の方程式）（ **ウ** ）0, $f(0)$（ **エ** ）0 が成り立てばよい．

これらをすべて計算し連立して解けば，$\boxed{\text{オ}}$ が求める条件と分かる．

【練習 116：2 次方程式の解の配置〜その１〜】

$f(x) = 2x^2 + 3ax + a - 3 = 0$ が正の解と負の解を 1 つずつ持つとき，以下の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフとして適切なものをすべて選べ.



(2) 条件を満たすような a の範囲を求めよ.

【練習 117：2 次方程式の解の配置〜その２〜】

$x^2 - 4cx + c^2 + 4c = 0$ が，2 よりも大きな，2 つの異なる解をもつような c の条件を求めよ.

D.　放物線と他のグラフの大小関係を調べる

【練習 118：2 次関数と直線・放物線の大小関係】

2 次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax - 1$ とが共有点をもつための a の範囲を求めよ．

(2) 発展　$g(x) = bx^2 - x + 2$ とする．$f(x) > g(x)$ が常に成立するための定数 b の範囲を求めよ．

3. 絶対値を含む2次関数・方程式・不等式

場合に分けて絶対値を外して (p.81 参照)，考えていこう.

【練習 119：絶対値を含む 2 次関数】

次の式で与えられた関数のグラフを描け.

(1) $y = 2x - |x^2 - 4|$　　(2) $y = |x^2 - 4x - 6|$

この問の (2) のグラフは，$y = x^2 - 4x - 6$ のグラフのうち x 軸より下にある部分を x 軸について上側へ折り返したものになっている．これは，右辺の関数全体に絶対値がついている式の形からも理解できる.

【練習 120：絶対値を含む 2 次方程式】

次の方程式を解け.

(1) $\left|x^2-2x-8\right|=6x+1$　　(2) $\left|x^2-4x+3\right|=2-x$

【㊥㊦ 121：絶対値を含む 2 次不等式】

次の不等式を解け．

① $3x^2 + |x^2 - 9| < 16x$　　② $|x^2 - 8x - 3| - 2x - 8 > 0$

【発展 122：絶対値記号を複数含む式】

① 関数 $y = |2x-4| + |x-5|$ のグラフを書け．

② 方程式 $|x-3| + |x-5| = 3$ を解け．

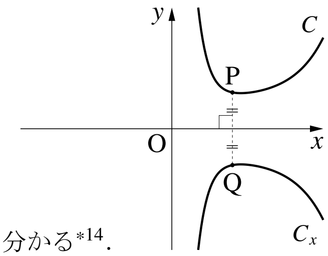
③ 不等式 $|x^2-4x+3| + |x-2| < x$ を解け．

表などで場合分けを整頓して，解答を作ろう．複雑な場合分けをしてもミスをしないためには，暗算に頼りすぎず，適度にメモを残しながら解くことが大事である．

1.　一般のグラフの移動について

ここで示される内容は，数学 II 以降で学ぶ関数についても成立するが，特に，$f(x)$ が 1 次関数，2 次関数であっても成立する．

A.　一般の対称移動について

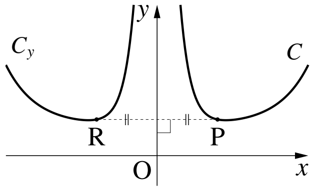


関数 $y=f(x)$ のグラフ C を，x 軸に関して対称に移動したグラフ C_x を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ v)$ を，x 軸に関して対称に移動して C_x 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y=f(x)$ 上にある」 $\iff$ $v=f(x)$

ii. 「P と Q は x 軸対称」 $\iff$ $v=-y$

ii. を i. に代入して，$-y=f(x)$ となり，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ がグラフ $-y=f(x)$ 上にあると分かる*14.

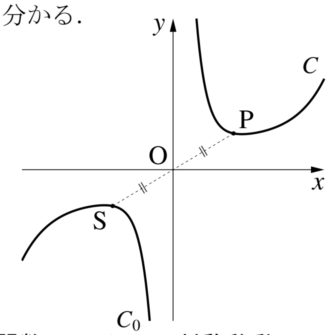


また，関数 $y=f(x)$ のグラフ C を，y 軸に関して対称に移動したグラフ C_y を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(u,\ y)$ を，y 軸に関して対称に移動して C_y 上の点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y=f(x)$ 上にある」 $\iff$ $y=f(u)$

ii. 「P と R は y 軸対称」 $\iff$ $u=-x$

ii. を i. に代入して，$y=f(-x)$ となり，$\mathrm{R}(x,\ y)$ がグラフ $y=f(-x)$ 上にあると分かる．



最後に，関数 $y=f(x)$ のグラフ C を，原点に関して対称に移動したグラフ C_0 を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(u,\ v)$ を，原点に関して対称に移動して C_0 上の点 $\mathrm{S}(x,\ y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y=f(x)$ 上にある」 $\iff$ $v=f(u)$

ii. 「P と S は原点対称」 $\iff$ $u=-x,\ v=-y$

ii. を i. に代入して，$-y=f(-x)$ となり，$\mathrm{S}(x,\ y)$ がグラフ $-y=f(-x)$ 上にあると分かる．

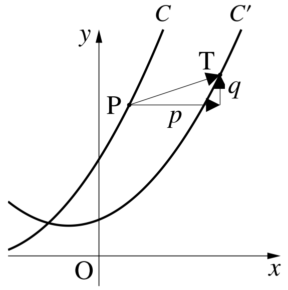
関数 $y=f(x)$ の対称移動

関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸に関して，y 軸に関して，原点に関して対称移動したグラフを表す関数は，それぞれ次のようになる．

$-y=f(x)$	x 軸に関する対称移動	←y を $-y$ に代えた
$y=f(-x)$	y 軸に関する対称移動	←x を $-x$ に代えた
$-y=f(-x)$	原点に関する対称移動	←x を $-x$ に，y を $-y$ に代えた

*14 厳密には，$-y=f(x)$ を満たす任意の点 Q をとり，その対称移動した点が C 上にあることを示さないといけないが，ここでは省略した．C_y, C_0 についても同様である．詳しくは，数学 II の「軌跡」で学ぶ．

B.　一般の平行移動について



関数 $y = f(x)$ のグラフ C を，x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動したグラフ C' を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(u,\ v)$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動して C' 上の点 $\mathrm{T}(x,\ y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y = f(x)$ 上にある」 $\iff$ $v = f(u)$

ii. 「P を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動して T になる」

$\iff$ $x = u + p,\ y = v + q$ $\iff$ $u = x - p,\ v = y - q$

ii. を i. に代入して，$\mathrm{S}(x,\ y)$ がグラフ $y - q = f(x - p)$ 上にあると分かる．

関数 $y = f(x)$ の平行移動

関数 $y = f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフを表す関数は

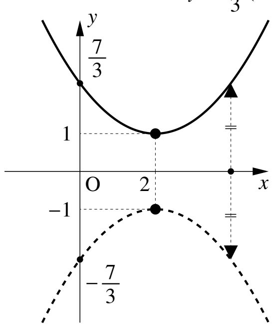
$y - q = f(x - p)$　　← x を x − p に，y を y − q に代えた

で表される．

2.　頂点の移動を用いて 2 次関数の移動を考える

2 次関数の移動については，頂点の移動を用いて考えることもできる．ただし，x^2 の係数には気をつけることになる．

A.　頂点の移動から 2 次関数の対称移動を考える（x 軸）



まず，x 軸についての対称移動を考えよう．

たとえば，2 次関数 $y = \dfrac{1}{3}(x - 2)^2 + 1$ のグラフを x 軸について対称移動すると，頂点は

$$(2,\ 1) \xrightarrow{\text{x 軸対称移動}} (2,\ -1)$$

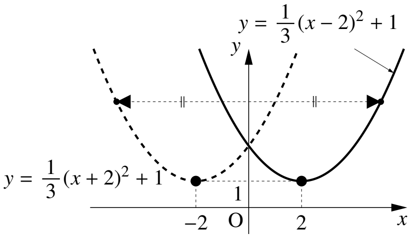
と移動し，さらに x^2 の係数の符号が反対になる．つまり，点線 ------ のグラフの式は，$y = -\dfrac{1}{3}(x - 2)^2 - 1$ と分かる．

【例題 123】 放物線 C : $y = (x + 3)^2 + 1$ を x 軸について対称移動してできる放物線 C_x の方程式，頂点の座標，軸の方程式を求めよ．

B.　頂点の移動から 2 次関数の対称移動を考える（y 軸，原点）

次に，x 軸についての対称移動を考えよう．

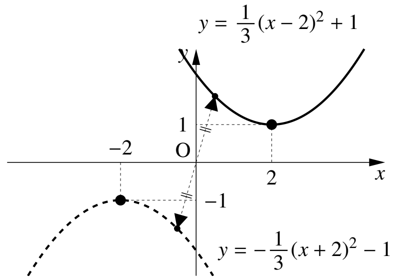
たとえば，2 次関数 $y=\dfrac{1}{3}(x-2)^2+1$ のグラフを y 軸について対称移動すると，頂点は



$$(2,1)\xrightarrow{y\ \text{軸対称移動}}(-2,1)$$

と移動する．x^2 の係数は変化しない．つまり，点線 ‥‥‥ のグラフの式は，$y=\dfrac{1}{3}(x+2)^2+1$ と分かる．

最後に，2 次関数 $y=\dfrac{1}{3}(x-2)^2+1$ のグラフを原点について対称移動すると，頂点は



$$(2,\ 1)\xrightarrow{\text{原点対称移動}}(-2,-1)$$

と移動し，さらに x^2 の係数の符号が反対になる．つまり，点線 ‥‥‥ のグラフの式は，$y=-\dfrac{1}{3}(x+2)^2-1$ と分かる．

【例題 124】 放物線 C： $y=(x+3)^2+1$ について，以下の問いに答えよ．

1. 放物線 C を y 軸について対称移動した放物線 C_y の方程式，頂点の座標，軸の方程式を求めよ．
2. 放物線 C を原点について対称移動した放物線 C_0 の方程式，頂点の座標，軸の方程式を求めよ．

索引