13th-note 数学A

（2013 年度卒業生まで）

目次

Ver1.73(2012-7-21)

第3章　確率

3.1　確率の基礎

1.　確率とは何か

中学で学んだように,「さいころを 1 個振って偶数の目が出る確率」は $\frac{1}{2}$ であった．このことを詳しく考えてみよう．

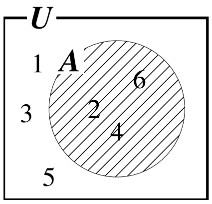
A.　さいころにおける「大数の法則」

たとえば,「いかさまのないさいころを 6 回振れば ⚀ は平均 1 回出る」ことは証明できない[*1]が，これを**大数の法則**（たいすう）(law of large numbers) と呼んで，経験的に正しいと考える．

B.　確率 ― 1 回あたり何回起こるのか

「さいころを 1 個振った」結果，⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ のいずれかが起こる．
これを集合のように書き出し，U で表すと

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}, \quad n(U) = 6$



となる．このうち,「偶数の目が出る」場合を A で表わすと

$A = \{2,\ 4,\ 6\}, \quad n(A) = 3$

となる．大数の法則によって「6 回のうち平均 3 回が，A のどれかになる」

$\iff$ 「1 回あたり $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 回が，A のどれかになる」

となり，この $\frac{1}{2}$ が確率を表わしている．

【例題 1】 上の例において,「出た目が 3 の倍数である」場合を B とする．

- 上のように，B を集合で表わすと，$B =$ ア となり，$n(B) =$ イ である．
- 大数の法則によって，6 回のうち平均 ウ 回，B が起こる．
  言いかえると，1 回あたり エ 回，B は起こる．この エ が，B の確率である．

【解答】 ア : $\{3,\ 6\}$, イ : 2, ウ : 2, エ : $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

[*1] そもそも，完全にいびつのない立方体のさいころを作ることができないうえ，無限回さいころを振ることができない．

C. 試行・事象・同様に確からしい

「さいころを 1 個振る」のように，同じ条件で繰り返すことができる操作などを**試行** (trial) といい，試行して起こる事柄を**事象** (event) という．前ページの例では，「$\boxed{\bullet}$が出る」「偶数の目が出る」などが事象になる．また，すべての事象をまとめて**全事象** (whole event) という．前の例では，U が全事象である[*2]．

前ページの例ではさいころにいかさまがないので，全事象 U はすべて等しい可能性で起こる．このことを，U は**同様に確からしい** (equally likely) という．

【例題 2】 「コイン 1 枚を投げる」試行 X において，表が出る可能性と裏が出る可能性は等しいとする．次の$\boxed{}$に適する数字・言葉を入れなさい．

- 試行 X の全事象は$\boxed{\text{ア}}$通りあり，どの事象も同様に$\boxed{\text{イ}}$．
- $\boxed{\text{ウ}}$の法則から，表が出る事象は，平均して$\boxed{\text{ア}}$回の X につき$\boxed{\text{エ}}$回起こる．つまり，1 回あたり$\boxed{\text{オ}}$回起こる．

【解答】 ア : **2**，イ : 確からしい，ウ : 大数，エ : **1**，オ : $\dfrac{1}{2}$

D. 確率の定義

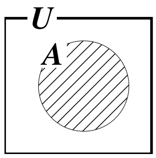
「事象 A の**確率** (probability) 」はしばしば $P(A)$ で表わされ[*3]，次で定義される．

集合と確率

全事象 U が同様に確からしいとき

$$（事象 A の確率）= \frac{事象 A の場合の数}{全事象 U の場合の数} \qquad \left(記号で表わすと，P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}\right)$$

と定義する．$0 \leqq P(A) \leqq 1$ であり，大数の法則を認めると，事象 A の確率は「試行 1 回あたり A は何回起こるか」の値を表す．



E. 試行を無作為に行う

選び方にいっさい意図を加えずランダムに選ぶことを「**無作為に** (randamly, at randam) 選ぶ」ともいう．無作為に選んで起こる結果はすべて同じ可能性で起こり，同様に確からしいと考えてよい．

【例題 3】 「7 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ から無作為に 1 枚選ぶ」試行を X とする．

- 試行 X の全事象は$\boxed{\text{ア}}$通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「奇数を選ぶ」事象は$\boxed{\text{ア}}$通りのうち$\boxed{\text{イ}}$通りあるから，$\boxed{\text{ウ}}$の確率で起こる．
- 「3 の倍数を選ぶ」事象は$\boxed{\text{ア}}$通りのうち$\boxed{\text{エ}}$通りあるから，$\boxed{\text{オ}}$の確率で起こる．

【解答】 ア : **7**，イ : **4**，ウ : $\dfrac{4}{7}$，エ : **2**，オ : $\dfrac{2}{7}$

[*2] ここで，「全事象」と「全事象の集合」がどちらも U で書かれている．このように，事象と，それを表わす集合には同じ文字を用い，特に区別しない．

[*3] P は，"probability"の頭文字を表わす．

高校で学ぶ確率の問題において，断りがない限りは以下のことが仮定されている．

- さいころにいかさまやいびつはなく，どの目も出る可能性は等しい．
- ものを並べる，選ぶ，くじを引くなどは，無作為に行っているとする．
- コインの表と裏の出る確率は等しく，「コインが立つ」などの可能性は考えない．
- 「大数の法則」は正しいと考える．

F. 「場合の数」と確率

確率の計算のために，順列 ${}_nP_r$，階乗 $n!$，組合せ ${}_nC_r$ などを用いることがある．

約分を上手に使おう．たとえば，全事象が $5!$ 通り，事象 A が $4!$ 通りならば

（うまいやり方）

A の確率は $\dfrac{4!}{5!} = \dfrac{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \dfrac{1}{5}$

（計算が大変な例） $5! = 120$，$4! = 24$

なので，確率は $\dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$

【練習 4：「場合の数」と確率〜その１〜】

(1) 「無作為に 6 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ を横一列に並べる」試行を X とする．

- X の全事象は「$\boxed{\text{ア}}$ の階乗」通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「$\boxed{6}$ が右端になる」事象は「$\boxed{\text{イ}}$ の階乗」通りあるから，確率は $\boxed{\text{ウ}}$ になる．
- 「$\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ が隣り合う」事象は「$\boxed{\text{エ}}! \times 2!$」通りあるから，確率は $\boxed{\text{オ}}$ になる．

(2) 試行 X：「出席番号 1 番から 13 番までの 13 人から 3 人を選ぶ」について

- 試行 X の全事象は ${}_{\boxed{\text{カ}}}C_{\boxed{\text{キ}}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「1 番が選ばれる」事象は ${}_{\boxed{\text{ク}}}C_{\boxed{\text{ケ}}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{コ}}$ である．
- 「2 が選ばれない」事象は ${}_{\boxed{\text{サ}}}C_{\boxed{\text{シ}}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ス}}$ である．

【解答】

(1)
- 全事象は $_{(\text{ア})}\underline{\mathbf{6}}$ の階乗．
- $\boxed{6}$ 以外を 1 列に並べ $_{(\text{イ})}\underline{\mathbf{5}}!$ 通り，$\dfrac{5!}{6!} = \dfrac{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{6\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}}_{(\text{ウ})}$
- $\boxed{\text{1,2 の組}}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ の順列で $_{(\text{エ})}\underline{\mathbf{5}}!$ 通り，1,2 の並べ方は 2! 通りあるので $\dfrac{5!\times 2!}{6!} = \dfrac{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times \cancel{2}}{\cancel{6}^{3}\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}_{(\text{オ})}$

(2)
- 全事象は $_{(\text{カ})}\underline{\mathbf{13}}\,C\,\underline{\mathbf{3}}_{(\text{キ})} = \dfrac{13\cdot \cancel{12}^{2}\cdot 11}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}} = 13\cdot 22$
- 1 番以外の 12 人から 2 人を選ぶことになり

$_{(\text{ク})}\underline{\mathbf{12}}\,C\,\underline{\mathbf{2}}_{(\text{ケ})} = \dfrac{\cancel{12}^{6}\cdot 11}{\cancel{2}} = 66$ 通りあり，$\dfrac{\cancel{66}^{3}}{13\cdot \cancel{22}} = \underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{13}}}_{(\text{コ})}$

◀ 1 番の他に，あと 2 人選ぶ

- 2 番以外の 12 人から 3 人を選べばよいので

$_{(\text{サ})}\underline{\mathbf{12}}\,C\,\underline{\mathbf{3}}_{(\text{シ})} = \dfrac{\cancel{12}^{2}\cdot 11\cdot 10}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}} = 22\cdot 10$ 通りあり，$\dfrac{\cancel{22}\cdot 10}{13\cdot \cancel{22}} = \underline{\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{13}}}_{(\text{ス})}$

上のように，${}_{13}C_3 = 13\cdot 22$ のようにしておくと，約分などが簡単にできる．

【練習 5 :「場合の数」と確率〜その２〜】

両親と子供 4 人が円形のテーブルに座る．

(1) 両親が向かい合う確率を求めよ．　　(2) 両親が隣り合う確率を求めよ．

【解答】　全事象は，6 人の円順列なので 5! 通りである．

(1) 父親を固定すると，母親の場所は決まり，子供の並び方は 4! 通りある．よって $\dfrac{4!}{5!} = \dfrac{\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \mathbf{\dfrac{1}{5}}$

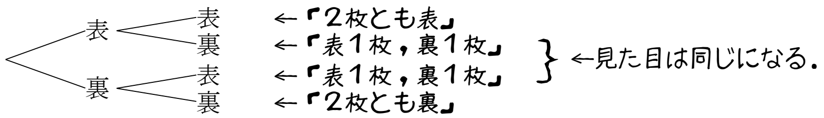
(2) 父親を固定すると，母親の場所は両隣の 2 通り，子供の並び方は 4! 通りある．よって $\dfrac{2\times4!}{5!} = \dfrac{2\times\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \mathbf{\dfrac{2}{5}}$

2.　同様に確からしい

全事象として含まれる事象一つ一つを，**根元事象** (fundamental event) と言う．根元事象はすべて，同様に確からしいように選ばれないといけない．

A.　「同様に確からしい」全事象

同じ大きさ・形のコイン 2 枚を振ったときの全事象は，次の 4 通りである．



全事象を 3 通り（「表 2 枚」「表 1 枚，裏 1 枚」「裏 2 枚」）としてはいけない．「表 1 枚，裏 1 枚」は，「表 2 枚」や「裏 2 枚」と可能性が違う．

【例題 6】

1. 3 枚のコインを振る試行を考える．
   - 全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる．
   - 3 枚とも表になる事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{イ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．
   - 表が 2 枚となる事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{エ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．
2. 試行 X :「同じ大きさの赤 4 個，青 3 個，白 2 個の玉を含む袋から，無作為に 1 個選ぶ」，
   事象 R :「赤い玉を選ぶ」，B :「青い玉を選ぶ」とする．
   - 試行 X の全事象は $\boxed{\text{カ}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる．
   - 事象 R は $\boxed{\text{カ}}$ 通りのうち $\boxed{\text{キ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ク}}$ である．
   - 事象 B は $\boxed{\text{カ}}$ 通りのうち $\boxed{\text{ケ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{コ}}$ である．

【解答】

1. ア : $2^3 = \mathbf{8}$，イ : **1**，ウ : $\mathbf{\dfrac{1}{8}}$，エ : **3**，オ : $\mathbf{\dfrac{3}{8}}$
2. カ : **9**，キ : **4**，ク : $\mathbf{\dfrac{4}{9}}$，ケ : **3**，コ : $\dfrac{3}{9} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

◀ 全事象を「赤を選ぶ」「青を選ぶ」「白を選ぶ」の 3 通りとしてはいけない．これでは，全事象が同様に確からしくない．

B. さいころ 2 個を振るときの「同様に確からしい」全事象

さいころ 2 個を振るときの全事象は，36 通りとして考えないといけない．つまり，⚃⚂と⚂⚃は区別して考える．下に見るように，区別しないと全事象が同様に確からしくならない．

⚀から⚅まであるさいころ 2 個を振るとき，⚂，⚃が出る確率

・1 回目と 2 回目を区別した場合

1回目＼2回目	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
⚁	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
⚂	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
⚃	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
⚄	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
⚅	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全事象は $6^2 = 36$ 通り．⚂，⚃が一つずつになるのは 2 通りだから，確率は $\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

・1 回目と 2 回目を区別しない場合

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1, 1					
⚁	1, 2	2, 2				
⚂	1, 3	2, 3	3, 3			
⚃	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
⚄	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
⚅	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

根元事象が同様に確からしく**ない**．

（例えば，⚂⚃の可能性と⚀⚀の可能性は異なる）

【例題 7】

1. 2 個の大きさの違うさいころを振って，和が 5 になる確率を求めよ．
2. 2 個の同じさいころを振って，積が 12 になる確率を求めよ．

【解答】

1. 目の和は次のようになる．

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

よって，$\dfrac{4}{36} = \mathbf{\dfrac{1}{9}}$

2. 目の積は次のようになる．

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	4	6	8	10	12
⚂	3	6	9	12	15	18
⚃	4	8	12	16	20	24
⚄	5	10	15	20	25	30
⚅	6	12	18	24	30	36

よって，$\dfrac{4}{36} = \mathbf{\dfrac{1}{9}}$

さいころ 2 個の確率については，必ず，上のような 6 × 6 の表を書いて考えよう．

【練習 8：3 個のさいころを振る】

同じ大きさの 3 個のさいころを振るとき，次の確率に答えよ．

(1) 3 個の目の和が 18 になる確率　　(2) 3 個とも同じ目になる確率

【解答】 全事象は $6^3 = 216$ 通りある．

1. 和が 18 になるのは，(6 , 6 , 6) の 1 通りであるから，$\mathbf{\dfrac{1}{216}}$
2. (1, 1, 1) から (6 , 6 , 6) までの 6 通りがあるので，$\dfrac{6}{216} = \mathbf{\dfrac{1}{36}}$

C. 順列・組合せと「同様に確からしい」全事象

(I) 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から **1 枚選び元に戻す**．この操作を **2 回繰り返した**とき，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ を選ぶ 1 枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

1 枚目＼2 枚目	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
$\boxed{2}$	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全事象は $6^2 = 36$ 通り．$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が 1 枚ずつになるのは 2 通りだから，確率は $\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$	1, 1					
$\boxed{2}$	1, 2	2, 2				
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3	3, 3			
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

根元事象が同様に確からしくない．

（例えば，$\boxed{1}\boxed{2}$ の可能性と $\boxed{1}\boxed{1}$ の可能性は異なる）

(II) 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から **2 枚を選ぶ**とき，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ を選ぶ 1 枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

1 枚目＼2 枚目	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$		2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
$\boxed{2}$	1, 2		3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3		4, 3	5, 3	6, 3
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4		5, 4	6, 4
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5		6, 5
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	

全事象は $6 \times 5 = 30$ 通り（$= {}_6P_2$）

$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が 1 枚ずつになるのは 2 通り（$= {}_2P_2$）

だから，確率は $\dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$						
$\boxed{2}$	1, 2					
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3				
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4			
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5		
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	

全事象は ${}_6C_2 = 15$ 通り

$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が 1 枚ずつになるのは 1 通り（$= {}_2C_2$）

だから，確率は $\dfrac{1}{15}$

【例題 9】 箱の中に 9 個のボールがあり，ボールにはそれぞれ，1 から 9 まで書かれている．

1. ボール 1 個を選んで番号を記録し，ボールを元に戻すとき，次の確率を求めよ．
   (a) 3 と 4 を 1 回ずつ記録した　　(b) 2 回とも 3 を記録した
2. ボールを 2 個選ぶとき，次の確率を求めよ．
   (a) 3 と 4 を 1 個ずつ選んだ　　(b) 2 個とも 3 を選んだ

【解答】

1. 全事象は $9 \times 9 = 81$ 通りある．
   (a) 3, 4 の場合と，4, 3 の場合があるので，$\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{81}}$
   (b) 3, 3 の 1 通りしかないので $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{81}}$
2. (a) （順列で全事象を考えた場合）全事象は $9 \times 8 = 72$ 通りある．
   3, 4 の場合と，4, 3 の場合があるので，$\dfrac{2}{72} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$
   （組合せで全事象を考えた場合）全事象は ${}_9C_2 = 36$ 通りある．3, 4 の 1 通りであるので，$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$
   (b) 3, 3 になることはないので，確率は **0**

◀1 個目に選ぶボールは 9 通り，2 個目に選ぶボールは 8 通りある，のように考えるとよい．

全事象についての注意

全事象をつくる根元事象は，一つの決め方に定まるとは限らないが，次に注意する必要がある．

- 根元事象がすべて同様に確からしくなるよう，考えなければならない．
- 根元事象を「順列」で考えたならば以後も「順列」で考え，根元事象を「組合せ」で考えたならば以後も「組合せ」で考えないといけない．

【練習 10：同様に確からしい】

a, a, a, b, b, c, c の 7 つの文字を一列に並べる．以下の確率を求めなさい．

(1) b が両端になる確率　　(2) 2 つの c が隣り合う確率

【解答】　すべての並び方は $\dfrac{7!}{3!2!2!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3\cdot2}}{\cancel{3\cdot2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}=210$ 通り．

(1) 両端以外に a, a, a, c, c を並べる $\dfrac{5!}{3!2!}=10$ 通りなので $\dfrac{10}{210}=\mathbf{\dfrac{1}{21}}$.

(2) a, a, a, b, b, cc の 6 つを並べて $\dfrac{6!}{3!2!}=60$ 通りなので $\dfrac{60}{210}=\mathbf{\dfrac{2}{7}}$.

（別解）$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ の異なる 7 つを並べて 7! 通り

(1) 両端は b_1, b_2 の並び替えで 2! 通り，他は 5! 通りなので $\dfrac{5!2!}{7!}=\mathbf{\dfrac{1}{21}}$.

(2) c を 1 つにまとめて 6! 通り，c の順序で 2! 通りなので $\dfrac{6!2!}{7!}=\mathbf{\dfrac{2}{7}}$.

【発展 11：確率の発展問題〜その１〜】

赤，青，黄のカードが 5 枚ずつあり，それぞれ，1 から 5 の数字が 1 つずつ書かれている．この 15 枚の中から 3 枚を任意に選ぶとき，以下の確率を求めよ．

① 3 枚とも同じ色になる　　② 3 枚の色がすべて異なる

③ 3 枚の数字がすべて異なる　　④ 3 枚の数字も色もすべて異なる

【解答】　すべての選び方は ${}_{15}C_3=5\cdot7\cdot13$ 通りある．

① どの色を選ぶかで 3 通り，どの数字を選ぶかで ${}_5C_3=10$ 通りあるので，
$\dfrac{3\cdot\cancel{10}^{2}}{\cancel{5}\cdot7\cdot13}=\mathbf{\dfrac{6}{91}}$.

② 色の選び方は 1 通り，数字はそれぞれ 5 通りずつあるので，
$\dfrac{\cancel{5}\cdot5\cdot5}{\cancel{5}\cdot7\cdot13}=\mathbf{\dfrac{25}{91}}$.

③ 数字の選び方は ${}_5C_3=10$ 通り，それぞれの数字がどの色であったかで 3 通りずつあるので，$\dfrac{\cancel{10}^{2}\cdot3^3}{\cancel{5}\cdot7\cdot13}=\mathbf{\dfrac{54}{91}}$.

④ 色の選び方は 1 通り，赤の数字が 5 通り，青の数字が 4 通り，黄の数字が 3 通りあるので，$\dfrac{\cancel{5}\cdot4\cdot3}{\cancel{5}\cdot7\cdot13}=\mathbf{\dfrac{12}{91}}$.

◀（別解）カードの順列で考えると全事象は $15\cdot14\cdot13$ 通りあり

① $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot3}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^{7}\cdot13}=\mathbf{\dfrac{6}{91}}$

(2 枚目は 1 枚目と同じ色
以下，3 枚目の条件は省略)

② $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{10}^{5}\cdot5}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^{7}\cdot13}=\mathbf{\dfrac{25}{91}}$

(2 枚目は 1 枚目と違う色)

③ $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{12}^{6}\cdot9}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^{7}\cdot13}=\mathbf{\dfrac{54}{91}}$

(2 枚目は 1 枚目と違う数)

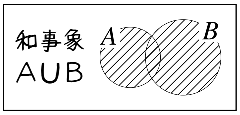
④ $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{8}^{4}\cdot3}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^{7}\cdot13}=\mathbf{\dfrac{12}{91}}$

(2 枚目は 1 枚目と数も色も違う)

3.2　確率と集合

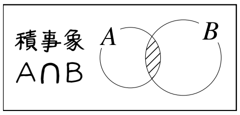
1.　和事象・積事象・排反

A.　和事象とは



事象 A, B があるとき,「A または B が起きる」という事象を**和事象** (sum event) といい, $A \overset{\text{または}}{\cup} B$ で表す. ∪ は集合における「または」と同じ記号である.

B.　積事象とは



また,「A も B も起こる」という事象を**積事象** (product event) といい[*4], $A \overset{\text{かつ}}{\cap} B$ で表す. ∩ は集合における「かつ」と同じ記号である.

【例題 12】　ジョーカーを除いた 52 枚のトランプから 1 枚を選ぶ. 選んだカードが赤（ハートかダイヤ）である事象を R, 絵札である事象を P, ハートの 1 桁である事象を N_1 とする. また, すべての場合の集合を U とする. つまり, $n(U) = 52$ である.

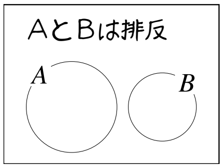
1. A :「R と P の積事象」, B :「R と N_1 の和事象」, C :「P と N_1 の和事象」に一致するものを
   ① $R \cap P$　② $R \cup P$　③ $R \cap N_1$　④ $R \cup N_1$　⑤ $P \cap N_1$　⑥ $P \cup N_1$　から選びなさい.
2. 場合の数 $n(R)$, $n(P)$, $n(N_1)$ をそれぞれ答えなさい.
3. 確率 $P(R)$, $P(P)$, $P(N_1)$ をそれぞれ答えなさい.

【解答】

1. 積事象は ∩ だから A は①, 和事象は ∪ だから B は④, C は⑥
2. ハート・ダイヤは合計 26 枚あるので $\boldsymbol{n(R) = 26}$,
   絵札は $3 \times 4 = 12$ 枚あるので $\boldsymbol{n(P) = 12}$,
   ハートの 1 桁は 9 枚あるので $\boldsymbol{n(N_1) = 9}$.
3. $n(U) = 52$ より, $P(R) = \dfrac{26}{52} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$, $P(P) = \dfrac{12}{52} = \boldsymbol{\dfrac{3}{13}}$, $P(N_1) = \boldsymbol{\dfrac{9}{52}}$.

◀ たとえば, $P(R) = \dfrac{n(R)}{n(U)}$ である.

C.　排反とは



2 つの事象 A, B が同時に起こらないとき, A, B は（互いに）**排反**（はいはん） (exclusive) であるという. A, B が排反であることは, 積事象 $A \cap B$ が空集合であることと一致し, ベン図は右図のようになる. その結果, 和事象 $A \cup B$ は次で計算できる.

確率の加法定理

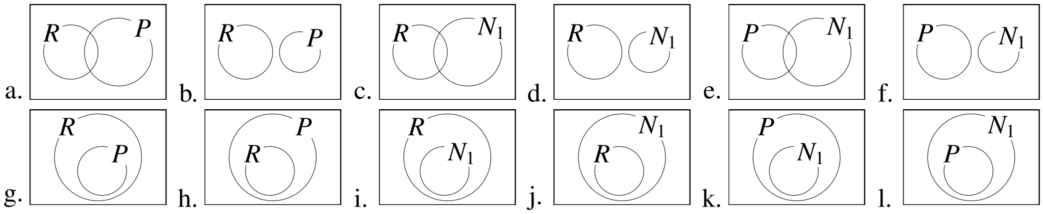
2 つの事象 A, B が排反であれば, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ なので, 次の**確率の加法定理**が成り立つ.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

[*4] なぜ「積事象」と呼ぶのかは, 次節で学ぶ.

【例題 13】　前ページの【例題 12】の試行について考える．

1. 以下の中から，正しいベン図を **3 つ**答えなさい．



2. R, P, N_1 の中から，互いに排反な 2 つの事象を答えなさい．
3. 確率 $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ をそれぞれ答えなさい．

【解答】

1. R, P については a. が正しく，$R \supset N_1$ から i. が正しく，
   $P \cap N_1 = \emptyset$ から f. が正しい．よって，答えは **a, f, i.**
2. 共通部分がない，**P と N_1 が排反**である．
3. A は「絵札のハート・ダイヤ」の 6 枚なので，$P(A) = \dfrac{6}{52} = \mathbf{\dfrac{3}{26}}$,
   ベン図 i. から $B = R$ と分かるので，$P(B) = P(R) = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$,
   $P(C) = P(P) + P(N_1) = \dfrac{3}{13} + \dfrac{9}{52} = \mathbf{\dfrac{21}{52}}$.

◀ 一般に，$R \supset N$ ならば，
$R \cup N = R$, $R \cap N = N$ である．

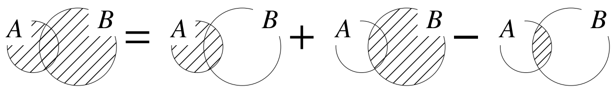
D.　排反でない和事象の確率

排反でない和事象の確率

A と B が排反でないとき，和事象 $A \cup B$ の確率は

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

で計算できる．



【例題 14】　A，B，C，$\cdots$，I の 9 人から，3 人を選ぶ．

1. A が選ばれる確率を求めよ．
2. B が選ばれる確率を求めよ．
3. A も B も選ばれる確率を求めよ．
4. A または B が選ばれる確率を求めよ．

【解答】　全事象は，${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 12 \cdot 7$ 通りある．

1. A 以外の 8 人から 2 人選ぶことができ，$\dfrac{{}_8\mathrm{C}_2}{12 \cdot 7} = \dfrac{\cancel{4} \cdot \cancel{7}}{\cancel{12}^3 \cdot \cancel{7}} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$
2. 1. と同様にして，$\dfrac{{}_8\mathrm{C}_2}{12 \cdot 7} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$.
3. A，B 以外の 7 人から 1 人選ぶことができ，$\dfrac{{}_7\mathrm{C}_1}{12 \cdot 7} = \dfrac{\cancel{7}}{12 \cdot \cancel{7}} = \mathbf{\dfrac{1}{12}}$
4. 1.，2.，3. から，$\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{4 + 4 - 1}{12} = \mathbf{\dfrac{7}{12}}$

2.　余事象

A.　余事象とは何か

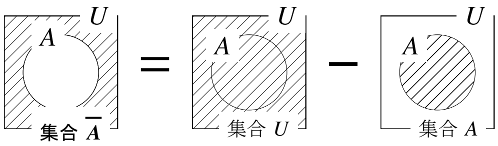
事象 A に対して，A が起こらない事象を A の**余事象** (complementary event) といい，$\overline{A}$ で表す.

余事象の確率

A の余事象 $\overline{A}$ について，$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$ から

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

が成り立つと分かる.



【例題 15】 2 個のさいころを振るとき

- 2 個の出た目が同じになる確率は $\boxed{ア}$ である.
- 2 個の出た目が異なる目になる事象は，同じになる事象の $\boxed{イ}$ なので，出た目が異なる確率は $1 - \boxed{ア} = \boxed{ウ}$ である.

【解答】 ア : 全事象は 6^2 通り，同じ目が出るのは 6 通りなので，$\dfrac{6}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

イ : 余事象，　ウ : $1 - \dfrac{1}{6} = \mathbf{\dfrac{5}{6}}$

B.　「少なくとも 1 つ」の確率

たとえば，10 本の中に 3 本の当りが入っているくじがある．ここから 3 本を引いて，「少なくとも 1 本当たる確率」を考えよう．この試行では，次のいずれかが起こる.

- 3 本とも当たる
- 2 本だけ当たる
- 1 本だけ当たる
- 1 本も当たらない

これらすべてが『少なくとも 1 本当たる確率』

「少なくとも 1 本当たる」とは，「1 本も当たらない」の余事象と分かる.

「1 本も当たらない」確率は $\dfrac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \dfrac{7}{12}$ であるから，求める確率は $1 - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5}{12}$ と分かる[*5].

【例題 16】 3 枚のコインを振るとき，「少なくとも 1 枚表になる」事象は，「$\boxed{ア}$」の余事象になる.「$\boxed{ア}$」の確率は $\boxed{イ}$ であるから，「少なくとも 1 枚表になる」確率は $\boxed{ウ}$ である.

【解答】 ア :全てが裏になる（表が 0 枚である）

イ : 全事象は $2^3 = 8$ 通りなので，$\mathbf{\dfrac{1}{8}}$，　ウ : $1 - \dfrac{1}{8} = \mathbf{\dfrac{7}{8}}$

*5 別解として，「3 本とも当たる」「2 本だけ当たる」「1 本だけ当たる」確率をすべて足し合わせても求められるが，答えを出すまでの計算がとても多くなる.

【練習 17：余事象】

(1) 5 個の赤，4 個の白が入った袋から 3 個を選ぶとき，少なくとも 1 個赤が含まれる確率を求めよ．

(2) 5 人の子供がいる家族に，男の子も女の子もいる確率はいくらか．ただし，男の子も女の子も同じ確率で生まれるものとする[*6]．

【解答】

(1) 「すべて白になる」の余事象なので

$$1 - \frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = 1 - \frac{4}{\frac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}} = 1 - \frac{\cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4} \cdot 7} = 1 - \frac{1}{21} = \mathbf{\frac{20}{21}}$$

(2) 全事象は $2^5 = 32$ 通り，すべて男の子である確率は $\frac{1}{32}$，すべて女の子である確率は $\frac{1}{32}$，余事象を考えて，$1 - 2 \times \frac{1}{32} = \mathbf{\frac{15}{16}}$.

【発展 18：余事象・加法定理】

1 枚の 100 円玉が 1 枚，4 枚の 10 円玉，5 枚の 1 円玉，合計 10 枚の中から無作為に 3 枚を選ぶ．
「100 円玉が 1 枚含まれる」事象を A，「10 円玉が 2 枚以上含まれる」事象を B とする．

1. 事象 C「合計金額が 100 円以下」，事象 D「合計金額が 20 円以上」に一致するものを ① $\overline{A}$ ② $\overline{B}$ ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ からそれぞれ選びなさい．
2. 確率 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$，$P(D)$ を求めなさい．

【解答】

1. 事象 C は①，事象 D は④
2. 全事象は ${}_{10}C_3 = 120$ 通り．

$P(A)$ 100 円玉 1 枚と，100 円玉以外の 9 枚から 2 枚を選んだ場合になるから $P(A) = \frac{{}_9C_2}{120} = \frac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{120}^{10}} = \mathbf{\frac{3}{10}}$

$P(B)$ 「10 円玉が 2 枚」の確率は $\frac{{}_4C_2 \cdot {}_6C_1}{120} = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{6}^3}{\cancel{120}\,\cancel{20}^{10}} = \frac{3}{10}$，「10 円玉が 3 枚」の確率は $\frac{{}_4C_3}{120} = \frac{1}{30}$ である．

10 円玉「2 枚」「3 枚」は排反なので $\frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{10}{30} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

$P(C)$ $= P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{10} = \mathbf{\frac{7}{10}}$

$P(D)$ $= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ であり，$A \cap B$ は「100 円玉 1 枚と 10 円玉 2 枚」の確率 $\frac{{}_1C_1 \cdot {}_4C_2}{120} = \frac{1}{20}$ であるから

$$P(D) = \frac{3}{10} + \frac{1}{3} - \frac{1}{20} = \frac{18 + 20 - 3}{60} = \frac{35}{60} = \mathbf{\frac{7}{12}}$$

[*6] 数学の問題では，このように書いていなくても，同じ確率で生まれると仮定することが多い．しかし，実際にそうであるかどうかは，諸説ある．

C.　確率についての「ド・モルガンの法則」

「ド・モルガンの法則」$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ は，確率においても用いられることがある．

確率についての「ド・モルガンの法則」

どんな事象 A，B に関しても，次の**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) が成り立つ．

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right), \qquad P\left(\overline{A \cap B}\right) = P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$$

【例題 19】　ある試行において，$P(A) = 0.4$，$P(B) = 0.5$，$P(A \cap B) = 0.2$ のとき，次の値を求めよ．

1. $P\left(\overline{A \cap B}\right)$　　2. $P(A \cup B)$　　3. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

【解答】

1. $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = \mathbf{0.8}$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.2 = \mathbf{0.7}$
3. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = \mathbf{0.3}$

3.3　確率の木と独立・従属

複数の試行を行う場合には，樹形図に似た「確率の木」が有効である．

1.　乗法定理と確率の木

A.　確率の乗法定理

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個入った袋から 1 個を玉を取り出し，コイン 1 枚を振る．

コイン 1 枚を振る　$\Longrightarrow$　赤 4 個，白 3 個から 1 個取り出す

表は $\dfrac{1}{2}$，裏は $\dfrac{1}{2}$　　赤は $\dfrac{4}{7}$，白は $\dfrac{3}{7}$

このとき「表が出て，白い玉を選ぶ確率」を考えると

表が出るのは，1 回につき $\dfrac{1}{2}$ 回　$\Longrightarrow$　そのうち白が出るのは，1 回につき $\dfrac{3}{7}$ 回

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{2}$ 回につき $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{7}$ 回

であるから，「表が出て，白い玉を選ぶ確率」は $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{14}$ となる．

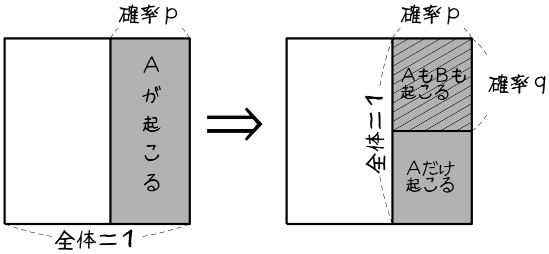
【例題 20】　上の例において，「裏が出て，赤い玉を選ぶ確率」を求めなさい．

【解答】　裏は $\dfrac{1}{2}$，赤い玉は $\dfrac{4}{7}$ の確率なので，$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{7} = \mathbf{\dfrac{2}{7}}$.

確率の乗法定理

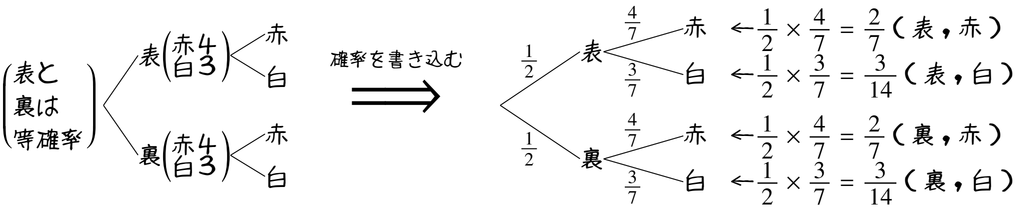
2 つの試行 X, Y を行い
- X の結果，事象 A が起こる確率を p
- （事象 A が起きた後に）
  Y の結果，事象 B が起こる確率を q

とする．
このとき，事象 A, B がともに起こる確率は
pq で与えられる．これを**確率の乗法定理**という．



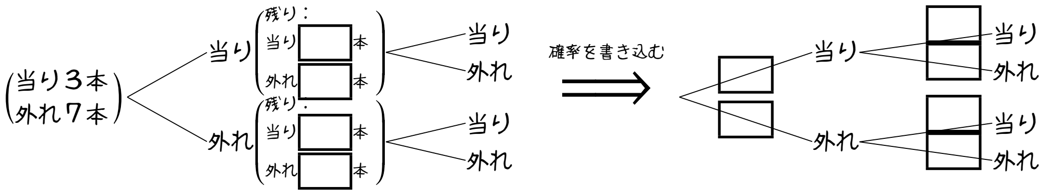
B. 確率の木とは

上で考えた試行は，次のようにまとめられる．



右上のような，樹形図に確率を書き込んだまとめ方を，**確率の木** (probability tree) という．

【例題 21】 当たりが 3 本，外れが 7 本入った箱から，2 回くじを引く．ただし，一度引いたくじは元に戻さない．以下の $\boxed{\quad}$ に，適当な数値を答え，問いに答えよ．

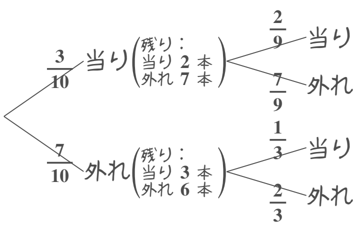


1. 2 回とも当たる確率を求めよ．

2. 2 回とも外れる確率を求めよ．

【解答】

確率の木は右のようになる．



1. $\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{10}^5} \times \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{9}^3} = \mathbf{\dfrac{1}{15}}$

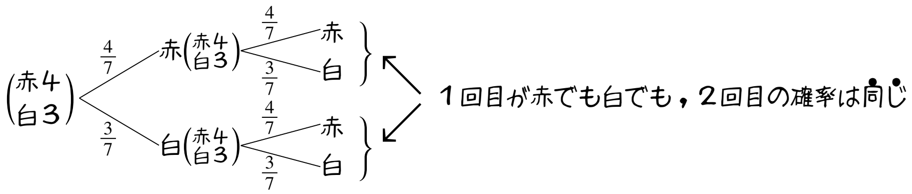
2. $\dfrac{7}{\cancel{10}^5} \times \dfrac{\cancel{2}}{3} = \mathbf{\dfrac{7}{15}}$

◀ 2 回とも赤，白，青はそれぞれ排反なので，足すだけでよい．

2. 独立試行・従属試行

A. 独立試行とは

「赤が 4 個，白が 3 個」入った袋から，1 個を選んで元に戻す試行を，2 回繰り返したとき，確率の木にまとめると次のようになる.

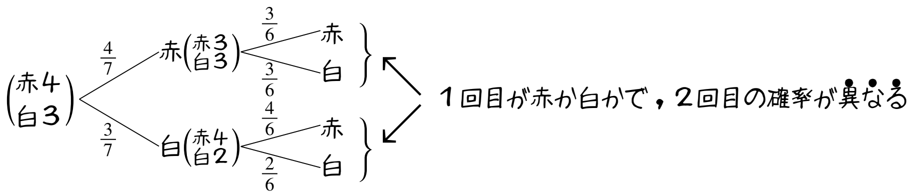


上の例では，1 回目の結果が 2 回目に影響せず，独立している.

試行 X の結果が試行 Y の結果に影響するとき，X, Y は**独立** (independent) である，または，**独立試行** (independent trial) であるという.

B. 従属試行とは

「赤が 4 個，白が 3 個」入った袋から，1 個を選んで元に戻さない試行を，2 回繰り返したとき，確率の木にまとめると次のようになる.



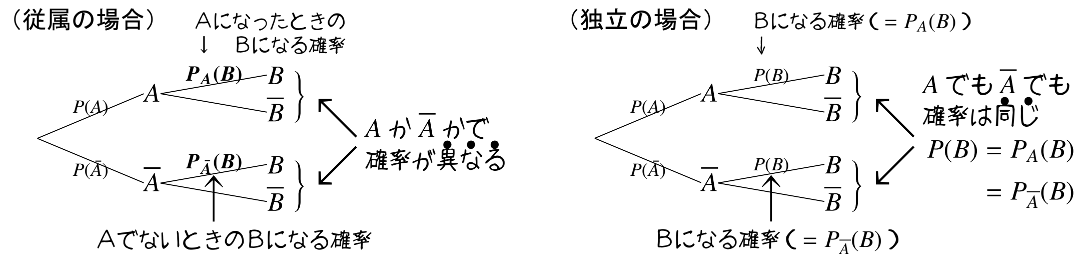
上の例では，1 回目の結果が 2 回目に影響している.

試行 X の結果が試行 Y の結果に影響しないとき，X, Y は**従属** (dependent) である，または，**従属試行** (dependent trial) であるという.

C. 条件付き確率

最初の試行で A になった後，次の試行で B になる確率は $P_A(B)$ で表わされ，「A が起こったときの B の**条件付き確率** (conditional probability) という.

A と B が独立の場合は，$P_A(B)$ も $P_{\overline{A}}(B)$ も等しくなって，$P(B)$ に一致する.



これらの記号を用いて，確率の乗法定理は次のように表わされる.

独立・従属と乗法定理

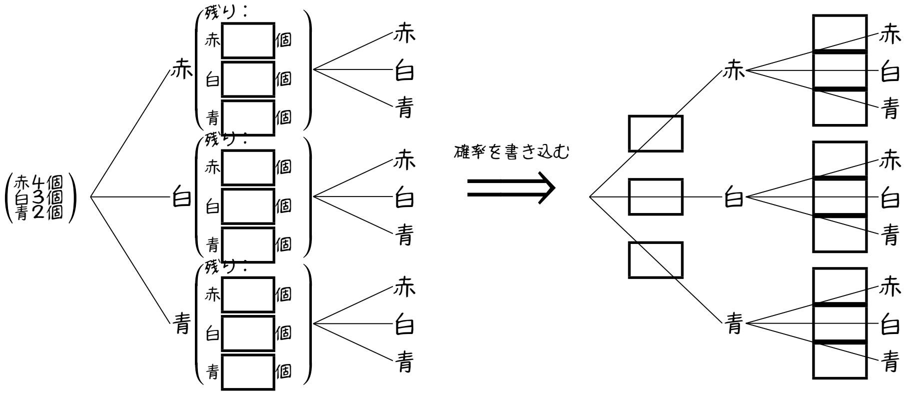
X の事象 A，Y の事象 B について，以下の乗法定理が成り立つ．

　A と B が従属ならば，$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$*7

　A と B が独立ならば，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

【練習 22：確率の木と独立・従属】

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個，青い玉が 2 個入った袋がある．取り出した玉は元に戻さないで，2 回玉を取り出すことをまとめるとき，以下の $\boxed{}$ に，適当な数値を答え，問いに答えよ．



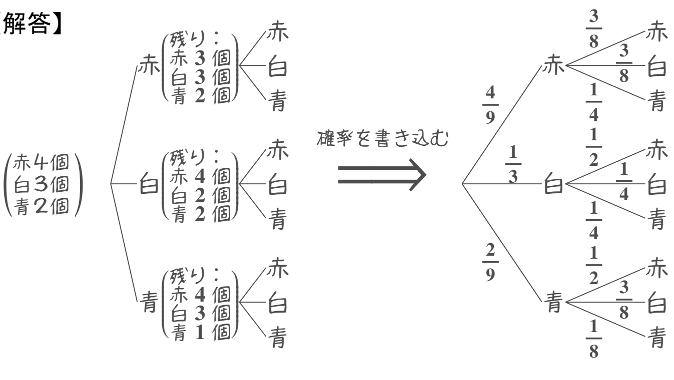
(1) 玉を取り出す 1 回目と 2 回目は，独立か，従属か．

(2) 「1 回目が白」を A，「1 回目が青」を B，「2 回目が青」を C とする．$P_A(C)$, $P_B(C)$ を求めよ．

(3) 2 回とも赤である確率を求めよ．

(4) 2 回とも同じ色である確率を求めよ．

【解答】



(1) 1 回目の色によって 2 回目の確率が異なるので，**従属**である．

(2) 「白→青」から $\boldsymbol{P_A(C)=\frac{1}{4}}$，「青→青」から $\boldsymbol{P_B(C)=\frac{1}{8}}$

(3) $\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}\,3}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}\,2}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(4) 2 回とも白である確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

　2 回とも青である確率は $\frac{\cancel{2}}{9}\times\frac{1}{\cancel{8}\,4}=\frac{1}{36}$

　(3) と合わせて $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}=\frac{6+3+1}{36}=\boldsymbol{\frac{5}{18}}$

*7 逆に，「条件付き確率」を求めるために，等式 $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ を用いることもある（ただし，$P(A)\neq 0$）．

【練習 23：独立・従属・条件付き確率】

(1) A 工場では部品 P，Q，R を使って品物を作る．各部品には色違いがあり，P は 2 個に 1 個が白，Q は 3 個に 1 個が白，R は 4 個に 1 個が白であり，他はすべて黒である．

(a) 真っ白な品物ができる確率を求めよ．

(b) 部品が 1 つだけ白い品物ができる確率を求めよ．

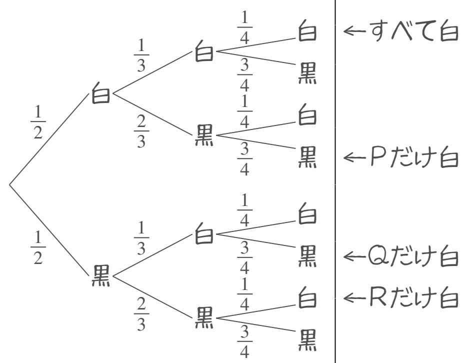
(2) B 工場では，100 個に 1 個不良品が作られてしまう．さらに，不良品を機械がチェックするとき，不良品は必ず見つけ出せるものの，100 回に 1 回，良品を不良品と誤って判断することがある．

(a) 機械が「良品」とチェックする確率を求めよ．

(b) 発展 機械が「不良品」と判断した中に，「良品」が含まれている確率を求めよ．

【解答】

(1) 確率の木にまとめると，右のようになる．



(a) $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{24}}$

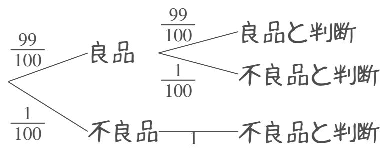
(b) P だけ白は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{24}$

Q だけ白は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{24}$

R だけ白は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{24}$

であるから，$\dfrac{6+3+2}{24}=\boldsymbol{\dfrac{11}{24}}$.

(2) 確率の木にまとめると，右のようになる．



(a) $\dfrac{99}{100}\times\dfrac{99}{100}=\boldsymbol{\dfrac{9801}{10000}}$

(b) 不良品と判断される確率は，

(a) の余事象になり

$1-\dfrac{9801}{10000}=\dfrac{199}{10000}$ である．

良品が不良品と判断される確率は $\dfrac{99}{100}\times\dfrac{1}{100}=\dfrac{99}{10000}$ である．つまり，$\dfrac{\frac{99}{10000}}{\frac{199}{10000}}=\boldsymbol{\dfrac{99}{199}}$

D. 「全事象による解き方」と「乗法定理による解き方」

たとえば，「赤 4 個，白 3 個を含む袋から 2 個取り出すとき，赤が 2 個になる確率」は，次の 2 通りの求め方がある．

(I) 全事象による解き方

- 全事象は「赤 4 個，白 3 個の合計 7 個から 2 個選ぶ」を考えて，${}_7C_2=21$ 通り
- 赤 2 個になる場合は「赤 4 個から取り出す 2 個を選ぶ」を考えて，${}_4C_2=6$ 通り

つまり，$\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$ になる．

(II) 乗法定理による解き方

- 1 個ずつ 2 回，順に取り出すと考える．
- 1 回目が赤である確率は $\dfrac{4}{7}$
- 2 回目も赤である確率は，「赤 3 個，白 3 個」が残りなので $\dfrac{1}{2}$

つまり，$\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{7}$ になる．

自分のやりやすいやり方で解けばよいが，どちらの解き方も理解しているのが最も良い．

【例題 24】 10 本のうち 3 本が当たりであるくじ A と，20 本のうち 3 本が当たりであるくじ B がある．

1. すべてのくじを区別すれば，全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通り，どちらも当たる事象は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．よって，どちらも当たる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ と求められる．
2. 一方，くじ A が当たる確率は $\boxed{\text{エ}}$，くじ B が当たる確率は $\boxed{\text{オ}}$ であるから，どちらも当たる確率は $\boxed{\text{カ}}$ という式から，やはり $\boxed{\text{ウ}}$ と求められる．

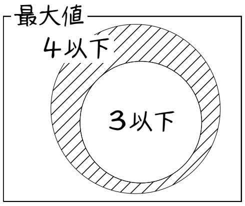
【解答】

1. 全事象は $10 \times 20 = \underline{\mathbf{200}}_{(\text{ア})}$ 通り，両方当たる引き方は $3 \times 3 = \underline{\mathbf{9}}_{(\text{イ})}$ 通りあるから，$\dfrac{3 \times 3}{10 \times 20} = \underline{\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{200}}}_{(\text{ウ})}$
2. 1 つめの当たる確率は $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}}_{(\text{エ})}$，2 つめの当たる確率は $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}}_{(\text{オ})}$，2 つの事象は独立であるから $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} \times \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}}_{(\text{カ})} = \dfrac{9}{200}$

E. 発展 さいころの出た目の最大値

例として，さいころ 3 つを振って，出た目の最大値が 4 である確率を考えよう．このとき

- 「3 つのさいころの最大値が 4 である確率」を求めることは難しい．
- 「3 つのさいころの最大値が 4 以下である確率」は簡単に計算できる．
  なぜなら，3 つとも 1,2,3,4 のどれかであればよいので，$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$ である．



「最大値が 4」の確率は，「最大値が 4 以下であるが，3 以下ではない」確率になる．結局，「最大値が 4」の確率は $\left(\dfrac{\cancel{4}^2}{\cancel{6}^3}\right)^3 - \left(\dfrac{\cancel{3}^1}{\cancel{6}^2}\right)^3 = \dfrac{8}{27} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{37}{196}$ と分かる．

【発展 25：さいころの出た目の最大・最小】

3 個のさいころを投げる試行について，以下の問いに答えよ．

① 「出た目の最大値が 3 になる」確率を求めよ．

② 「出た目の最小値が 3 になる」確率を求めよ．

【解答】

① 「最大値が 3 以下」の確率 $\left(\dfrac{3}{6}\right)^3$ から「最大値が 2 以下」の確率 $\left(\dfrac{2}{6}\right)^3$ を引けばよいので $\left(\dfrac{\cancel{3}^1}{\cancel{6}^2}\right)^3 - \left(\dfrac{\cancel{2}^1}{\cancel{6}^3}\right)^3 = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{27} = \dfrac{\mathbf{19}}{\mathbf{196}}$.

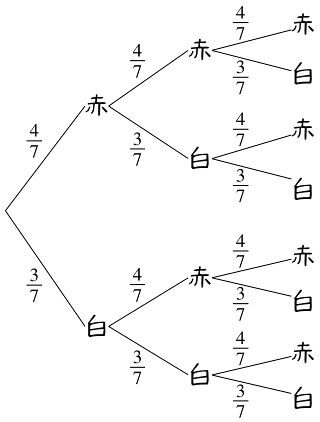
② 「最小値が 3 以上」の確率 $\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$ から「最小値が 4 以上」の確率 $\left(\dfrac{3}{6}\right)^3$ を引けばよいので $\left(\dfrac{\cancel{4}^2}{\cancel{6}^3}\right)^3 - \left(\dfrac{\cancel{3}^1}{\cancel{6}^2}\right)^3 = \dfrac{8}{27} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{\mathbf{37}}{\mathbf{196}}$.

3. 反復試行

A. 反復試行とは

互いに独立な同じ試行を複数回行うことを，**反復試行** (repeated trials) という[*8].

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個入った袋がある．取り出した玉は元に戻し，3 回玉を取り出すことは，右のようにまとめられる．



$\leftarrow$確率は $\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^3$

$\leftarrow$確率は $\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^2\times\left(\frac{3}{7}\right)$

$\leftarrow$確率は $\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^2\times\left(\frac{3}{7}\right)$

⋮

B. 反復試行の確率

例として，「さいころを 5 回振る」試行を考え，「5 回のうち 2 回だけ 1 が出る」確率を求めよう．

1 が出た場合を○，出なかった場合を×で表すと，たとえば次のようになればよい．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
○	×	○	×	×	←○は $\frac{1}{6}$ の確率で，×は $\frac{5}{6}$ の確率で起こる．

この確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ で計算できる．また，次のような場合でもよい．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
×	○	○	×	×	←確率は $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$
×	×	○	○	×	←確率は $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$
		⋮			↑↑↑ すべて同じ確率

5ヶ所から ○ を2つ選べばよい
そのような選び方は ${}_5C_2$ 通り

こうして，$\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ が ${}_5C_2$ 通りあると分かるので，求める確率は次のようになる．

$${}_5C_2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\cancel{10}^{5}\times\frac{1}{36}\times\frac{125}{\cancel{216}^{108}}=\frac{625}{3888}$$

【例題 26】 上の例において，「5 回のうちちょうど 4 回だけ 1 が出る」確率を求めなさい．

【解答】 上と同じように○×で表わすと，次のようになる．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
×	○	○	○	○	←確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)^1$
○	×	○	○	○	←確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)^1$
		⋮			

5ヶ所から ○ を4つ選べばよい
そのような選び方は ${}_5C_4$ 通り

よって，${}_5C_4\times\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)=5\times\frac{1}{1296}\times\frac{5}{6}=\mathbf{\frac{25}{7776}}$

*8 重複試行と呼ばれる事も多い．

反復試行

試行 X を n 回繰り返し，確率 p の事象 A がちょうど k 回成り立つ確率は

$${}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k}$$

で求められる（A が起きない確率は $1-p$，A が起きない回数は $n-k$ であることに注意）．

【練習 27：反復試行】

(1) 当たる確率が $\dfrac{1}{10}$ のくじを 5 回引く．そのうちちょうど 3 回当たる確率を求めよ．

(2) さいころ 1 個を 6 回振って，5 以上がちょうど 3 回出る確率を求めよ．

【解答】

(1) ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{10}\right)^3\left(\dfrac{9}{10}\right)^2 = \cancel{10}\times\dfrac{9^2}{\cancel{10^5}\,10^4} = \mathbf{\dfrac{81}{10000}}$

◂ 当たらない確率は $1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$ である

(2) 5 以上が出る確率は $\dfrac{1}{3}$，出ない確率は $\dfrac{2}{3}$ であるから

${}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}\times\dfrac{2^3}{3^6} = 20\times\dfrac{8}{729} = \mathbf{\dfrac{160}{729}}$

◂ 3^6 は $9\times 9\times 9$ と考えて計算するとよい．

C. 反復試行の応用

【例題 28】 コイン 1 枚を振って表か裏か記録していき，表が出た回数が 4 回になるまで振り続ける．

1. コインを 4 回振って終わる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．
2. 5 回で終わるのは，4 回目までに表がちょうど $\boxed{\text{イ}}$ 回出て，5 回目が表になる場合である．よって，その確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．
3. 6 回で終わるのは，5 回目までに表がちょうど $\boxed{\text{エ}}$ 回出て，6 回目が表になる場合である．よって，確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．
4. 7 回で終わる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

【解答】

1. **ア**：$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \mathbf{\dfrac{1}{16}}$

2. **イ**：**3**，　**ウ**：4 回目までに表が 3 回出る確率は ${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)$，

   さらに 5 回目で表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ であるから

   ${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2} = \cancel{4}\times\dfrac{1}{\cancel{2^5}\,2^3} = \mathbf{\dfrac{1}{8}}$

3. **エ**：**3**，　**オ**：5 回目までに表が 3 回出る確率は ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$，

   さらに 6 回目で表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ であるから

   ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{2} = \cancel{10}\,5\times\dfrac{1}{\cancel{2^6}\,2^5} = \mathbf{\dfrac{5}{32}}$

4. **カ**：${}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}\times\dfrac{1}{\cancel{2^7}\,2^5} = \mathbf{\dfrac{5}{32}}$

【練習 29：反復試行】

赤 3 個，青 2 個の合計 5 個のボールが入った袋から，玉を 1 個取り出し，色を記録してから元に戻す．これを 5 回繰り返すとき，以下の確率を求めよ．

(1) 赤がちょうど 3 回出る確率　(2) 赤がちょうど 2 回出る確率　(3) 赤がちょうど 1 回出る確率

【解答】 5 回とも，赤が出る確率は $\dfrac{3}{5}$，出ない確率は $\dfrac{2}{5}$ である．

(1) ${}_5C_3\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}^2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\dfrac{3^3\cdot 2^2}{\cancel{5^5}\,5^4} = \dfrac{2\cdot 27\cdot 4}{625} = \mathbf{\dfrac{216}{625}}$

(2) ${}_5C_2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}^2}{\cancel{2}}\dfrac{3^2\cdot 2^3}{\cancel{5^5}\,5^4} = \dfrac{2\cdot 9\cdot 8}{625} = \mathbf{\dfrac{144}{625}}$

(3) ${}_5C_1\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)^4 = \cancel{5}\cdot\dfrac{3\cdot 2^4}{\cancel{5^5}\,5^4} = \dfrac{3\cdot 16}{625} = \mathbf{\dfrac{48}{625}}$

【練習 30：反復試行の応用】

さいころ 1 つを振り，1 か 2 が出たら +3 点，他が出たら −2 点になるゲームを考える．

(1) このゲームを 3 回繰り返し，4 点である確率を求めよ．

(2) このゲームを 5 回繰り返し，0 点である確率を求めよ．

【解答】 +3 になる確率は $\dfrac{1}{3}$，−2 になる確率は $\dfrac{2}{3}$ である．

(1) +3 が 2 回，−2 が 1 回出ればよいので

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3^3}\,3^2} = \mathbf{\frac{2}{9}}.$$

◀ 結局，何回+3 になるかで，最終得点が決まる．

(2) +3 が 2 回，−2 が 3 回出ればよいので

$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10\cdot\frac{2^3}{3^5} = \mathbf{\frac{80}{243}}.$$

◀ +3 が 2 回出ればよいことは，次の式からも計算できる．
+3 が x 回とすると，得点は $3x + (-2)(5-x) = 5x - 10$ 点，
$5x - 10 = 0$ を解いて $x = 2$．

D. ㊪㊫ 反復試行で複数の事象を考える

さいころを 6 回振って，そのうち 1 がちょうど 2 回，5 以上がちょうど 2 回出る確率を考えてみよう．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	
1	1	5か6	5か6	他	他	←確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
1	1	5か6	他	5か6	他	←確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
			⋮			↑↑↑ すべて同じ確率

6ヶ所に「1」を2つ，
「5か6」を2つ，「他」を2つ並べる
そのような並べ方は $\frac{6!}{2!2!2!}$ 通り

この結果，次の式で計算できる．

$$\frac{6!}{2!2!2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2\cdot2}\cdot\cancel{2}}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{3}}{\cancel{6^2}^{6}\cdot2^2\cdot\cancel{3^2}^{3}}=\frac{5}{72}$$

【㊪㊫ 31：3 つ以上の事象がある反復試行】

① さいころを 4 回振って，1 がちょうど 1 回，2 がちょうど 1 回出る確率を求めよ．

② さいころを 6 回振って，1 も 2 も 3 も 2 回ずつ出る確率を求めよ．

【解答】

① 1 が 1 回 $\left(\text{確率 }\frac{1}{6}\right)$，2 が 1 回 $\left(\text{確率 }\frac{1}{6}\right)$，他が 2 回 $\left(\text{確率 }\frac{2}{3}\right)$ 出ればよいので

$$\frac{4!}{1!1!2!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{2^2}{\cancel{6}\cdot\cancel{6}^{3}\cdot3^2}=\mathbf{\frac{4}{27}}$$

② $$\frac{6!}{2!2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3\cdot2}}{\cancel{2\cdot2}\cdot2\cdot\cancel{6^6}^{6^4}}=\mathbf{\frac{5}{2592}}$$

3.4 期待値

1. 確率分布

たとえば，コイン 2 枚を振って，「表が出た枚数」とそれぞれの確率は，右のような表にまとめられる．

表の枚数	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

このように，起こりうるすべての事象を，確率と共にまとめた表のことを**確率分布** (probability distribution) という．

【例題 32】 次の確率分布の表を完成させなさい．

1. さいころ 2 個を振ったときの，出る目の差

目の差	0	1	2	3	4	5	計
確率							

2. コイン 3 枚を振るときの，表が出る枚数

表の枚数	0	1	2	3	計
確率					

3. 20 本の中に 3 本のあたりくじがあるくじから 2 本引いたときの当たりくじの数

【解答】

1. 目の差は右の表のようになる．全事象は 36 通りなので，確率分布は次のようになる．

目の差	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{5}{18}}$	$\mathbf{\frac{2}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{18}}$	**1**

2. すべて表，すべて裏はともに $\left(\frac{1}{2}\right)^3$，1 枚表は ${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，

2 枚表の場合も
${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$
となる．

表の枚数	0	1	2	3	計
確率	$\mathbf{\frac{1}{8}}$	$\mathbf{\frac{3}{8}}$	$\mathbf{\frac{3}{8}}$	$\mathbf{\frac{1}{8}}$	**1**

3. 当たりが 0 本は $\dfrac{{}_{17}C_2}{{}_{20}C_2}=\dfrac{68}{95}$

1 本は $\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_{17}C_1}{{}_{20}C_2}=\dfrac{51}{190}$

2 本は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_{20}C_2}=\dfrac{3}{190}$

当り	0	1	2	計
確率	$\mathbf{\frac{68}{95}}$	$\mathbf{\frac{51}{190}}$	$\mathbf{\frac{3}{190}}$	**1**

◀ さいころ 2 個の時は書き出そう．

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	0	1	2	3	4	5
⚁	1	0	1	2	3	4
⚂	2	1	0	1	2	3
⚃	3	2	1	0	1	2
⚄	4	3	2	1	0	1
⚅	5	4	3	2	1	0

◀ 『反復試行 (p.96)』

◀ 乗法定理で考えれば
0 本なら $\frac{17}{20}\times\frac{16}{19}$
1 本なら $2\times\frac{3}{20}\times\frac{17}{19}$
2 本なら $\frac{3}{20}\times\frac{2}{19}$

……起こりうるすべての事象をまとめるので，確率の合計は必ず 1 になる．

2. 期待値

100 本のくじがあり，次の内訳で入っているとしよう．

5000 円が当たる 1 等が 1 本
1000 円が当たる 2 等が 3 本
100 円が当たる 3 等が 15 本

当たる金額	5000	1000	100	0	計
確率	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{81}{100}$	1

「当たる金額」について確率分布を書くと，右上のようになる．

このとき，くじを 1 回引いて当たる金額の平均を求めてみよう．たとえば，1 回あたり $\frac{1}{100}$ 回，5000 円をもらえるので，「1 等が当たる金額の平均」は $5000 \times \frac{1}{100}$ になる．

これらを 2 等，3 等でも繰り返し，次のように求められる．

$$\underbrace{5000 \times \frac{1}{100}}_{\text{1等の分}} + \underbrace{1000 \times \frac{3}{100}}_{\text{2等の分}} + \underbrace{100 \times \frac{15}{100}}_{\text{3等の分}} + \underbrace{0 \times \frac{81}{100}}_{\text{外れの分}} = \frac{5000 + 3000 + 1500 + 0}{100} = \frac{9500}{100} = 95$$

このように計算できる値を，**期待値** (expectation value) という．上の例では，当たる金額の期待値は 95 円である．

上のくじ 1 本の代金が 95 円より少ないならば，このくじを買うことは，平均して「得」である．
逆に，95 円より高いならば，このくじを買うことは「損」である．

期待値

試行 X において，ある値 x についての確率分布が右のようになったとする．そのとき，次の式

x の値	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

で計算される値を，x の期待値という．x の期待値は，しばしば $E(x)$ で表わされる．

【例題 33】 さいころを 2 個振って，出た目の和を考える．

1. 目の和の確率分布を完成させなさい．
   ただし，約分はしなくてもよい．
2. 目の和の期待値を求めなさい．

目の和		計
確率		

【解答】

1. 出た目の和は右欄外のようになるので次のようにまとめられる．

目の和	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**

2. $$(2+12)\frac{1}{36} + (3+11)\frac{2}{36} + (4+10)\frac{3}{36} + (5+9)\frac{4}{36} + (6+8)\frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36}$$
$$= \frac{14 \times (1+2+3+4+5) + 7 \times 6}{36} = 7 \times \frac{2 \times 15 + 6}{36} = \mathbf{7}$$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

【練習 34：期待値】

(1) さいころ 1 個とコイン 1 枚を振り，コインが表ならばさいころの目の 100 倍の金額を，コインが裏ならばさいころの目の 50 倍の金額をもらえるとき，この試行の期待値を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{4}$ の確率で当たるくじがある．これを 4 回引いたとき，当たる回数の期待値を求めよ．

【解答】

(1) コインが表ならば，100，200，300，400，500，600 円のいずれか，コインが裏ならば，50，100，150，200，250，300 円のいずれかがもらえる．どれも確率は $\dfrac{1}{12}$ なので

$$\frac{1}{12}\times(100+200+300+400+500+600 \\ +50+100+150+200+250+300)$$

$$=\frac{1}{12}\times 3150=\boldsymbol{\frac{525}{2}}\text{（円）}$$

(2) 1 回だけ当たる確率は ${}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{4\times 3^3}{4^4}$,

2 回だけ当たる確率は ${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{6\times 3^2}{4^4}$,

3 回だけ当たる確率は ${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{4\times 3}{4^4}$,

4 回とも当たる確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^4$ であるから

$$1\times\frac{\cancel{4}\times 3^3}{\cancel{4^4}\,4^3}+\cancel{2}\times\frac{\cancel{6}\,3\times 3^2}{\cancel{4^4}\,4^3}+3\times\frac{\cancel{4}\times 3}{\cancel{4^4}\,4^3}+\cancel{4}\times\frac{1}{\cancel{4^4}\,4^3}$$

$$=\frac{27+27+9+1}{4^3}=\frac{64}{4^3}=\mathbf{1}$$

期待値の計算をするときは，確率分布の表は約分しない方がよい．

索引