13th-note 数学A

（2013 年度卒業生まで）

目次

Ver1.73(2012-7-21)

第3章 確率

3.1 確率の基礎

1. 確率とは何か

中学で学んだように,「さいころを 1 個振って偶数の目が出る確率」は $\dfrac{1}{2}$ であった．このことを詳しく考えてみよう．

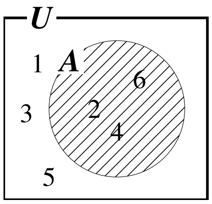
A. さいころにおける「大数の法則」

たとえば,「いかさまのないさいころを 6 回振れば ⚀ は平均 1 回出る」ことは証明できない[*1]が，これを**大数（たいすう）の法則** (law of large numbers) と呼んで，経験的に正しいと考える．

B. 確率 — 1 回あたり何回起こるのか

「さいころを 1 個振った」結果，⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ のいずれかが起こる．
これを集合のように書き出し，U で表すと

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$,　　$n(U) = 6$



となる．このうち,「偶数の目が出る」場合を A で表わすと

$A = \{2,\ 4,\ 6\}$,　　$n(A) = 3$

となる．大数の法則によって「6 回のうち平均 3 回が，A のどれかになる」

$$\iff \text{「1 回あたり } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ 回が，} A \text{ のどれかになる」}$$

となり，この $\dfrac{1}{2}$ が確率を表わしている．

【例題 1】 上の例において,「出た目が 3 の倍数である」場合を B とする．

- 上のように，B を集合で表わすと，$B = \boxed{\text{ア}}$ となり，$n(B) = \boxed{\text{イ}}$ である．
- 大数の法則によって，6 回のうち平均 $\boxed{\text{ウ}}$ 回，B が起こる．
  言いかえると，1 回あたり $\boxed{\text{エ}}$ 回，B は起こる．この $\boxed{\text{エ}}$ が，B の確率である．

[*1] そもそも，完全にいびつのない立方体のさいころを作ることができないうえ，無限回さいころを振ることができない．

C. 試行・事象・同様に確からしい

「さいころを1個振る」のように，同じ条件で繰り返すことができる操作などを**試行** (trial) といい，試行して起こる事柄を**事象** (event) という．前ページの例では，「●が出る」「偶数の目が出る」などが事象になる．また，すべての事象をまとめて**全事象** (whole event) という．前の例では，U が全事象である[*2]．

前ページの例ではさいころにいかさまがないので，全事象 U はすべて等しい可能性で起こる．このことを，U は**同様に確からしい** (equally likely) という．

【例題 2】 「コイン1枚を投げる」試行 X において，表が出る可能性と裏が出る可能性は等しいとする．次の$\boxed{}$に適する数字・言葉を入れなさい．

- 試行 X の全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，どの事象も同様に $\boxed{\text{イ}}$．
- $\boxed{\text{ウ}}$ の法則から，表が出る事象は，平均して $\boxed{\text{ア}}$ 回の X につき $\boxed{\text{エ}}$ 回起こる．つまり，1回あたり $\boxed{\text{オ}}$ 回起こる．

D. 確率の定義

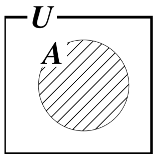
「事象 A の**確率** (probability)」はしばしば $P(A)$ で表わされ[*3]，次で定義される．

集合と確率

全事象 U が同様に確からしいとき

$$（事象 A の確率）= \frac{事象 A の場合の数}{全事象 U の場合の数} \quad \left(記号で表わすと，P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}\right)$$

と定義する．$0 \leqq P(A) \leqq 1$ であり，大数の法則を認めると，事象 A の確率は「試行1回あたり A は何回起こるか」の値を表す．



E. 試行を無作為に行う

選び方にいっさい意図を加えずランダムに選ぶことを「**無作為に** (randamly, at randam) 選ぶ」ともいう．無作為に選んで起こる結果はすべて同じ可能性で起こり，同様に確からしいと考えてよい．

【例題 3】 「7枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ から無作為に1枚選ぶ」試行を X とする．

- 試行 X の全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「奇数を選ぶ」事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{イ}}$ 通りあるから，$\boxed{\text{ウ}}$ の確率で起こる．
- 「3の倍数を選ぶ」事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{エ}}$ 通りあるから，$\boxed{\text{オ}}$ の確率で起こる．

[*2] ここで，「全事象」と「全事象の集合」がどちらも U で書かれている．このように，事象と，それを表わす集合には同じ文字を用い，特に区別しない．

[*3] P は，"probability"の頭文字を表わす．

高校で学ぶ確率の問題において，断りがない限りは以下のことが仮定されている．

- さいころにいかさまやいびつはなく，どの目も出る可能性は等しい．
- ものを並べる，選ぶ，くじを引くなどは，無作為に行っているとする．
- コインの表と裏の出る確率は等しく，「コインが立つ」などの可能性は考えない．
- 「大数の法則」は正しいと考える．

F. 「場合の数」と確率

確率の計算のために，順列 ${}_n\mathrm{P}_r$，階乗 $n!$，組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ などを用いることがある．

約分を上手に使おう．たとえば，全事象が 5! 通り，事象 A が 4! 通りならば

（うまいやり方）

A の確率は $\dfrac{4!}{5!} = \dfrac{\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \dfrac{1}{5}$

（計算が大変な例） $5! = 120$，$4! = 24$

なので，確率は $\dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$

【練習 4 :「場合の数」と確率〜その１〜】

(1) 「無作為に 6 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ を横一列に並べる」試行を X とする．

- X の全事象は「$\boxed{\text{ア}}$ の階乗」通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「$\boxed{6}$ が右端になる」事象は「$\boxed{\text{イ}}$ の階乗」通りあるから，確率は $\boxed{\text{ウ}}$ になる．
- 「$\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ が隣り合う」事象は「$\boxed{\text{エ}}! \times 2!$」通りあるから，確率は $\boxed{\text{オ}}$ になる．

(2) 試行 X :「出席番号 1 番から 13 番までの 13 人から 3 人を選ぶ」について

- 試行 X の全事象は ${}_{\boxed{\text{カ}}}\mathrm{C}_{\boxed{\text{キ}}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「1 番が選ばれる」事象は ${}_{\boxed{\text{ク}}}\mathrm{C}_{\boxed{\text{ケ}}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{コ}}$ である．
- 「2 が選ばれない」事象は ${}_{\boxed{\text{サ}}}\mathrm{C}_{\boxed{\text{シ}}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ス}}$ である．

上のように，${}_{13}\mathrm{C}_3 = 13\cdot22$ のようにしておくと，約分などが簡単にできる．

【練習 5 :「場合の数」と確率〜その２〜】

両親と子供 4 人が円形のテーブルに座る.

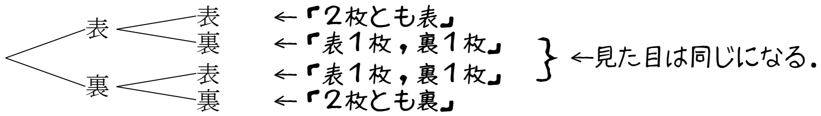
(1) 両親が向かい合う確率を求めよ.　　(2) 両親が隣り合う確率を求めよ.

2.　同様に確からしい

全事象として含まれる事象一つ一つを，**根元事象** (fundamental event) と言う．根元事象はすべて，同様に確からしいように選ばれないといけない.

A.　「同様に確からしい」全事象

同じ大きさ・形のコイン 2 枚を振ったときの全事象は，次の 4 通りである.



全事象を 3 通り（「表 2 枚」「表 1 枚，裏 1 枚」「裏 2 枚」）としてはいけない．「表 1 枚，裏 1 枚」は，「表 2 枚」や「裏 2 枚」と可能性が違う.

【例題 6】

1. 3 枚のコインを振る試行を考える.
   - 全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる.
   - 3 枚とも表になる事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{イ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である.
   - 表が 2 枚となる事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{エ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{オ}}$ である.
2. 試行 X :「同じ大きさの赤 4 個，青 3 個，白 2 個の玉を含む袋から，無作為に 1 個選ぶ」,
   事象 R :「赤い玉を選ぶ」，B :「青い玉を選ぶ」とする.
   - 試行 X の全事象は $\boxed{\text{カ}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる.
   - 事象 R は $\boxed{\text{カ}}$ 通りのうち $\boxed{\text{キ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ク}}$ である.
   - 事象 B は $\boxed{\text{カ}}$ 通りのうち $\boxed{\text{ケ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{コ}}$ である.

B.　さいころ2個を振るときの「同様に確からしい」全事象

さいころ2個を振るときの全事象は，36通りとして考えないといけない．つまり，⚃⚂と⚂⚃は区別して考える．下に見るように，区別しないと全事象が同様に確からしくならない．

⚀から⚅まであるさいころ2個を振るとき，⚂，⚃が出る確率

・1回目と2回目を区別した場合

1回目＼2回目	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
⚁	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
⚂	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
⚃	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
⚄	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
⚅	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全事象は $6^2 = 36$ 通り．⚂，⚃が一つずつになるのは2通りだから，確率は $\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

・1回目と2回目を区別しない場合

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1, 1					
⚁	1, 2	2, 2				
⚂	1, 3	2, 3	3, 3			
⚃	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
⚄	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
⚅	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

根元事象が同様に確からしくない．

（例えば，⚂⚃の可能性と⚀⚀の可能性は異なる）

【例題 7】

1. 2個の大きさの違うさいころを振って，和が5になる確率を求めよ．
2. 2個の同じさいころを振って，積が12になる確率を求めよ．

さいころ2個の確率については，必ず，上のような 6×6 の表を書いて考えよう．

【練習 8：3個のさいころを振る】

同じ大きさの3個のさいころを振るとき，次の確率に答えよ．

(1) 3個の目の和が18になる確率　　(2) 3個とも同じ目になる確率

C. 順列・組合せと「同様に確からしい」全事象

(I) 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から **1 枚選び元に戻す**．この操作を **2 回繰り返した**とき，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ を選ぶ 1 枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

1枚目＼2枚目	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
$\boxed{2}$	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全事象は $6^2 = 36$ 通り．$\boxed{3}$, $\boxed{4}$が 1 枚ずつになるのは 2 通りだから，確率は $\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$	1, 1					
$\boxed{2}$	1, 2	2, 2				
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3	3, 3			
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

根元事象が同様に確からしくない．

（例えば，$\boxed{1}\boxed{2}$の可能性と$\boxed{1}\boxed{1}$の可能性は異なる）

(II) 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から **2 枚を選ぶ**とき，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ を選ぶ 1 枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

1枚目＼2枚目	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$		2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
$\boxed{2}$	1, 2		3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3		4, 3	5, 3	6, 3
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4		5, 4	6, 4
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5		6, 5
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	

全事象は $6 \times 5 = 30$ 通り（$= {}_6\mathrm{P}_2$）

$\boxed{3}$, $\boxed{4}$が 1 枚ずつになるのは 2 通り（$= {}_2\mathrm{P}_2$）だから，確率は $\dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$						
$\boxed{2}$	1, 2					
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3				
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4			
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5		
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	

全事象は ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通り

$\boxed{3}$, $\boxed{4}$が 1 枚ずつになるのは 1 通り（$= {}_2\mathrm{C}_2$）だから，確率は $\dfrac{1}{15}$

【例題 9】 箱の中に 9 個のボールがあり，ボールにはそれぞれ，1 から 9 まで書かれている．

1. ボール 1 個を選んで番号を記録し，ボールを元に戻すとき，次の確率を求めよ．
   (a) 3 と 4 を 1 回ずつ記録した　(b) 2 回とも 3 を記録した
2. ボールを 2 個選ぶとき，次の確率を求めよ．
   (a) 3 と 4 を 1 個ずつ選んだ　(b) 2 個とも 3 を選んだ

全事象についての注意

全事象をつくる根元事象は，一つの決め方に定まるとは限らないが，次に注意する必要がある．

- 根元事象がすべて同様に確からしくなるよう，考えなければならない．
- 根元事象を「順列」で考えたならば以後も「順列」で考え，根元事象を「組合せ」で考えたならば以後も「組合せ」で考えないといけない．

【練習 10：同様に確からしい】

a, a, a, b, b, c, c の 7 つの文字を一列に並べる．以下の確率を求めなさい．

(1) b が両端になる確率　　(2) 2 つの c が隣り合う確率

【発展 11：確率の発展問題〜その１〜】

赤，青，黄のカードが 5 枚ずつあり，それぞれ，1 から 5 の数字が 1 つずつ書かれている．この 15 枚の中から 3 枚を任意に選ぶとき，以下の確率を求めよ．

① 3 枚とも同じ色になる　　② 3 枚の色がすべて異なる

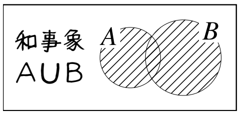
③ 3 枚の数字がすべて異なる　　④ 3 枚の数字も色もすべて異なる

3.2　確率と集合

1.　和事象・積事象・排反

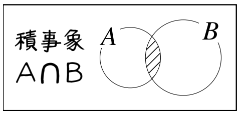
A.　和事象とは

事象 A, B があるとき,「A または B が起きる」という事象を**和事象** (sum event) といい，$A \overset{\text{または}}{\cup} B$ で表す．∪ は集合における「または」と同じ記号である．



B.　積事象とは

また,「A も B も起こる」という事象を**積事象** (product event) といい[*4]，$A \overset{\text{かつ}}{\cap} B$ で表す．∩ は集合における「かつ」と同じ記号である．

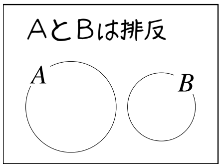


【例題 12】　ジョーカーを除いた 52 枚のトランプから 1 枚を選ぶ．選んだカードが赤（ハートかダイヤ）である事象を R，絵札である事象を P，ハートの 1 桁である事象を N_1 とする．また，すべての場合の集合を U とする．つまり，$n(U) = 52$ である．

1. A :「R と P の積事象」，B :「R と N_1 の和事象」，C :「P と N_1 の和事象」に一致するものを
   ① $R \cap P$　② $R \cup P$　③ $R \cap N_1$　④ $R \cup N_1$　⑤ $P \cap N_1$　⑥ $P \cup N_1$　から選びなさい．
2. 場合の数 $n(R)$, $n(P)$, $n(N_1)$ をそれぞれ答えなさい．
3. 確率 $P(R)$, $P(P)$, $P(N_1)$ をそれぞれ答えなさい．

C.　排反とは

2 つの事象 A, B が同時に起こらないとき，A, B は（互いに）**排反**（はいはん） (exclusive) であるという．A, B が排反であることは，積事象 $A \cap B$ が空集合であることと一致し，ベン図は右図のようになる．その結果，和事象 $A \cup B$ は次で計算できる．



確率の加法定理

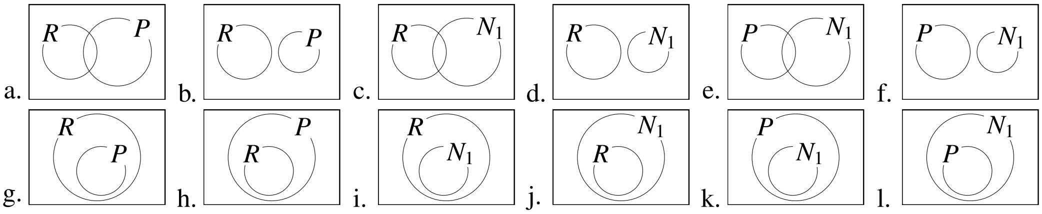
2 つの事象 A, B が排反であれば，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ なので，次の**確率の加法定理**が成り立つ．

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

[*4] なぜ「積事象」と呼ぶのかは，次節で学ぶ．

【例題 13】　前ページの【例題 12】の試行について考える．

1. 以下の中から，正しいベン図を **3 つ**答えなさい．



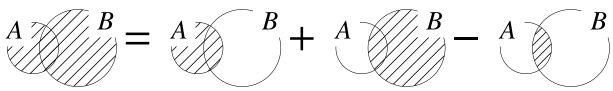
2. R, P, N_1 の中から，互いに排反な 2 つの事象を答えなさい．
3. 確率 $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ をそれぞれ答えなさい．

D.　排反でない和事象の確率

排反でない和事象の確率

A と B が排反でないとき，和事象 $A \cup B$ の確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



で計算できる．

【例題 15】　A，B，C，$\cdots$，I の 9 人から，3 人を選ぶ．

1. A が選ばれる確率を求めよ．
2. B が選ばれる確率を求めよ．
3. A も B も選ばれる確率を求めよ．
4. A または B が選ばれる確率を求めよ．

2. 余事象

A. 余事象とは何か

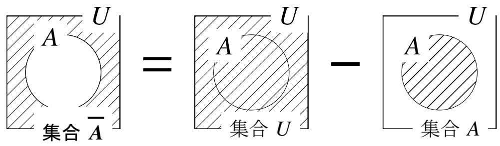
事象 A に対して，A が起こらない事象を A の**余事象** (complementary event) といい，$\overline{A}$ で表す.

余事象の確率

A の余事象 $\overline{A}$ について，$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$ から

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

が成り立つと分かる.



【例題 16】 2 個のさいころを振るとき

- 2 個の出た目が同じになる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である.
- 2 個の出た目が異なる目になる事象は，同じになる事象の $\boxed{\text{イ}}$ なので，出た目が異なる確率は $1 - \boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{ウ}}$ である.

B. 「少なくとも 1 つ」の確率

たとえば，10 本の中に 3 本の当りが入っているくじがある．ここから 3 本を引いて，「少なくとも 1 本当たる確率」を考えよう．この試行では，次のいずれかが起こる.

- 3 本とも当たる
- 2 本だけ当たる
- 1 本だけ当たる
- 1 本も当たらない

これらすべてが『少なくとも 1 本当たる確率』

「少なくとも 1 本当たる」とは，「1 本も当たらない」の余事象と分かる.

「1 本も当たらない」確率は $\dfrac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \dfrac{7}{12}$ であるから，求める確率は $1 - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5}{12}$ と分かる[*5].

【例題 17】 3 枚のコインを振るとき，「少なくとも 1 枚表になる」事象は，「$\boxed{\text{ア}}$」の余事象になる. 「$\boxed{\text{ア}}$」の確率は $\boxed{\text{イ}}$ であるから，「少なくとも 1 枚表になる」確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である.

[*5] 別解として，「3 本とも当たる」「2 本だけ当たる」「1 本だけ当たる」確率をすべて足し合わせても求められるが，答えを出すまでの計算がとても多くなる.

【練習 18：余事象】

(1) 5 個の赤，4 個の白が入った袋から 3 個を選ぶとき，少なくとも 1 個赤が含まれる確率を求めよ．

(2) 5 人の子供がいる家族に，男の子も女の子もいる確率はいくらか．ただし，男の子も女の子も同じ確率で生まれるものとする[*6]．

【発展 19：余事象・加法定理】

1 枚の 100 円玉が 1 枚，4 枚の 10 円玉，5 枚の 1 円玉，合計 10 枚の中から無作為に 3 枚を選ぶ．
「100 円玉が 1 枚含まれる」事象を A，「10 円玉が 2 枚以上含まれる」事象を B とする．

1. 事象 C「合計金額が 100 円以下」，事象 D「合計金額が 20 円以上」に一致するものを
   ① $\overline{A}$　② $\overline{B}$　③ $A \cap B$　④ $A \cup B$　からそれぞれ選びなさい．
2. 確率 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$，$P(D)$ を求めなさい．

[*6] 数学の問題では，このように書いていなくても，同じ確率で生まれると仮定することが多い．しかし，実際にそうであるかどうかは，諸説ある．

C.　確率についての「ド・モルガンの法則」

「ド・モルガンの法則」$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ は，確率においても用いられることがある．

確率についての「ド・モルガンの法則」

どんな事象 A，B に関しても，次の**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) が成り立つ．

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right), \qquad P\left(\overline{A \cap B}\right) = P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$$

【例題 20】 ある試行において，$P(A) = 0.4$，$P(B) = 0.5$，$P(A \cap B) = 0.2$ のとき，次の値を求めよ．

1. $P\left(\overline{A \cap B}\right)$
2. $P(A \cup B)$
3. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

3.3　確率の木と独立・従属

複数の試行を行う場合には，樹形図に似た「確率の木」が有効である．

1.　乗法定理と確率の木

A.　確率の乗法定理

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個入った袋から 1 個を玉を取り出し，コイン 1 枚を振る．

コイン 1 枚を振る　表は $\frac{1}{2}$，裏は $\frac{1}{2}$　$\Longrightarrow$　赤 4 個，白 3 個から 1 個取り出す　赤は $\frac{4}{7}$，白は $\frac{3}{7}$

このとき「表が出て，白い玉を選ぶ確率」を考えると

表が出るのは，1 回につき $\frac{1}{2}$ 回　$\Longrightarrow$　そのうち白が出るのは，1 回につき $\frac{3}{7}$ 回

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}$ 回につき $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$ 回

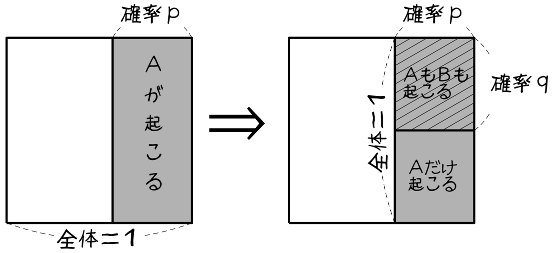
であるから，「表が出て，白い玉を選ぶ確率」は $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$ となる．

【例題 21】 上の例において，「裏が出て，赤い玉を選ぶ確率」を求めなさい．

確率の乗法定理

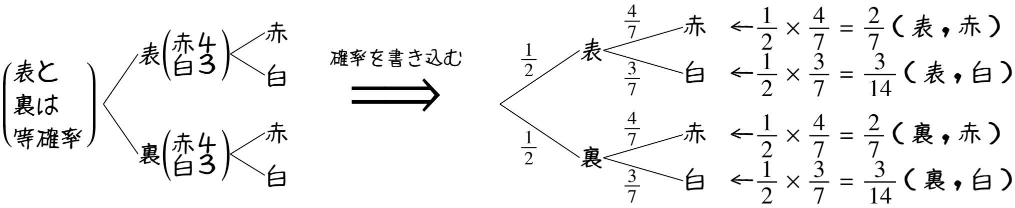
2 つの試行 X, Y を行い
- X の結果，事象 A が起こる確率を p
- （事象 A が起きた後に）
  Y の結果，事象 B が起こる確率を q

とする．
このとき，事象 A, B がともに起こる確率は
pq で与えられる．これを**確率の乗法定理**という．



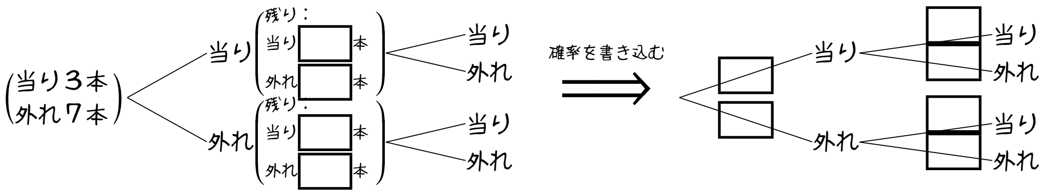
B. 確率の木とは

上で考えた試行は，次のようにまとめられる．



右上のような，樹形図に確率を書き込んだまとめ方を，**確率の木** (probability tree) という．

【例題 22】 当たりが 3 本，外れが 7 本入った箱から，2 回くじを引く．ただし，一度引いたくじは元に戻さない．以下の $\boxed{}$ に，適当な数値を答え，問いに答えよ．

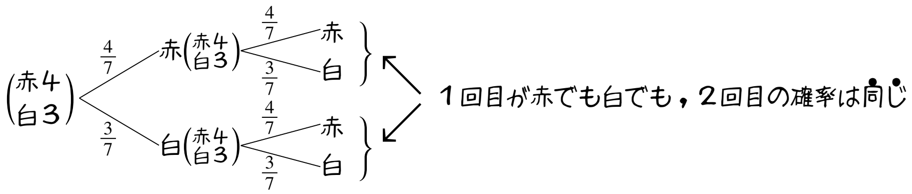


1. 2 回とも当たる確率を求めよ．
2. 2 回とも外れる確率を求めよ．

2. 独立試行・従属試行

A. 独立試行とは

「赤が 4 個，白が 3 個」入った袋から，1 個を選んで元に戻す試行を，2 回繰り返したとき，確率の木にまとめると次のようになる．

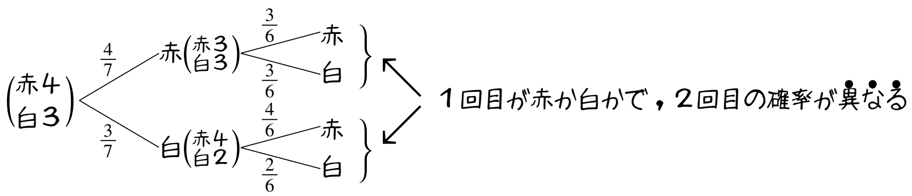


上の例では，1 回目の結果が 2 回目に影響せず，独立している．

試行 X の結果が試行 Y の結果に影響するとき，X, Y は**独立** (independent) である，または，**独立試行** (independent trial) であるという．

B. 従属試行とは

「赤が 4 個，白が 3 個」入った袋から，1 個を選んで元に戻さない試行を，2 回繰り返したとき，確率の木にまとめると次のようになる．



上の例では，1 回目の結果が 2 回目に影響している．

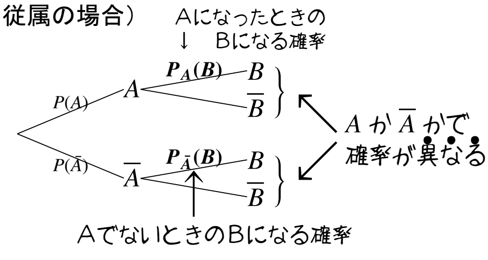
試行 X の結果が試行 Y の結果に影響しないとき，X, Y は**従属** (dependent) である，または，**従属試行** (dependent trial) であるという．

C. 条件付き確率

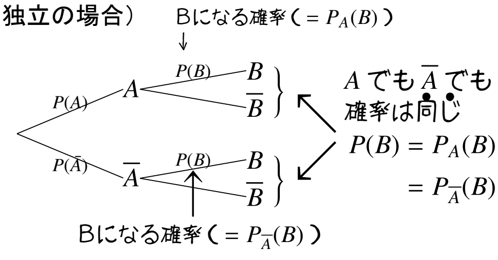
最初の試行で A になった後，次の試行で B になる確率は $P_A(B)$ で表わされ，「A が起こったときの B の**条件付き確率** (conditional probability) という．

A と B が独立の場合は，$P_A(B)$ も $P_{\overline{A}}(B)$ も等しくなって，$P(B)$ に一致する．

（従属の場合）



（独立の場合）



これらの記号を用いて，確率の乗法定理は次のように表わされる．

独立・従属と乗法定理

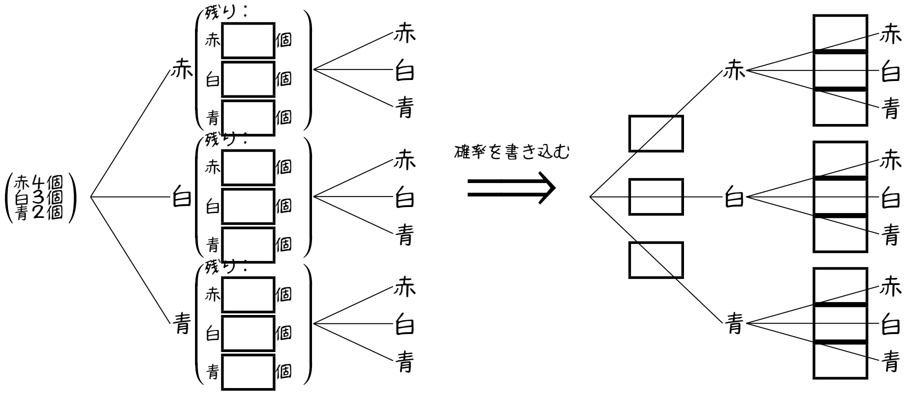
X の事象 A，Y の事象 B について，以下の乗法定理が成り立つ．

A と B が従属ならば，$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ [*7]

A と B が独立ならば，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

【練習 23：確率の木と独立・従属】

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個，青い玉が 2 個入った袋がある．取り出した玉は元に戻さないで，2 回玉を取り出すことをまとめるとき，以下の $\boxed{}$ に，適当な数値を答え，問いに答えよ．



(1) 玉を取り出す 1 回目と 2 回目は，独立か，従属か．

(2) 「1 回目が白」を A，「1 回目が青」を B，「2 回目が青」を C とする．$P_A(C)$, $P_B(C)$ を求めよ．

(3) 2 回とも赤である確率を求めよ．

(4) 2 回とも同じ色である確率を求めよ．

*7 逆に，「条件付き確率」を求めるために，等式 $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ を用いることもある（ただし，$P(A) \neq 0$）．

【練習 24：独立・従属・条件付き確率】

(1) A 工場では部品 P，Q，R を使って品物を作る．各部品には色違いがあり，P は 2 個に 1 個が白，Q は 3 個に 1 個が白，R は 4 個に 1 個が白であり，他はすべて黒である．

(a) 真っ白な品物ができる確率を求めよ．

(b) 部品が 1 つだけ白い品物ができる確率を求めよ．

(2) B 工場では，100 個に 1 個不良品が作られてしまう．さらに，不良品を機械がチェックするとき，不良品は必ず見つけ出せるものの，100 回に 1 回，良品を不良品と誤って判断することがある．

(a) 機械が「良品」とチェックする確率を求めよ．

(b) 発展 機械が「不良品」と判断した中に，「良品」が含まれている確率を求めよ．

D.　「全事象による解き方」と「乗法定理による解き方」

たとえば，「赤 4 個，白 3 個を含む袋から 2 個取り出すとき，赤が 2 個になる確率」は，次の 2 通りの求め方がある．

(I) 全事象による解き方

- 全事象は「赤 4 個，白 3 個の合計 7 個から 2 個選ぶ」を考えて，${}_7C_2 = 21$ 通り
- 赤 2 個になる場合は「赤 4 個から取り出す 2 個を選ぶ」を考えて，${}_4C_2 = 6$ 通り

つまり，$\dfrac{6}{21} = \dfrac{2}{7}$ になる．

(II) 乗法定理による解き方

- 1 個ずつ 2 回，順に取り出すと考える．
- 1 回目が赤である確率は $\dfrac{4}{7}$
- 2 回目も赤である確率は，「赤 3 個，白 3 個」が残りなので $\dfrac{1}{2}$

つまり，$\dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{7}$ になる．

自分のやりやすいやり方で解けばよいが，どちらの解き方も理解しているのが最も良い．

【例題 25】 10 本のうち 3 本が当たりであるくじ A と，20 本のうち 3 本が当たりであるくじ B がある．

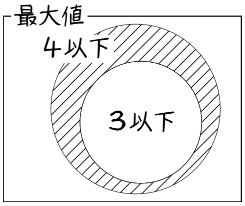
1. すべてのくじを区別すれば，全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通り，どちらも当たる事象は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．よって，どちらも当たる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ と求められる．
2. 一方，くじ A が当たる確率は $\boxed{\text{エ}}$，くじ B が当たる確率は $\boxed{\text{オ}}$ であるから，どちらも当たる確率は $\boxed{\text{カ}}$ という式から，やはり $\boxed{\text{ウ}}$ と求められる．

E. 発展　さいころの出た目の最大値

例として，さいころ 3 つを振って，出た目の最大値が 4 である確率を考えよう．このとき

- 「3 つのさいころの最大値が 4 である確率」を求めることは難しい．
- 「3 つのさいころの最大値が 4 以下である確率」は簡単に計算できる．

  なぜなら，3 つとも 1,2,3,4 のどれかであればよいので，$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$ である．



「最大値が 4」の確率は，「最大値が 4 以下であるが，3 以下ではない」確率になる．結局，「最大値が 4」の確率は $\left(\dfrac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}^{3}}\right)^3 - \left(\dfrac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}^{2}}\right)^3 = \dfrac{8}{27} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{37}{196}$ と分かる．

【発展 26：さいころの出た目の最大・最小】

3 個のさいころを投げる試行について，以下の問いに答えよ．

① 「出た目の最大値が 3 になる」確率を求めよ．

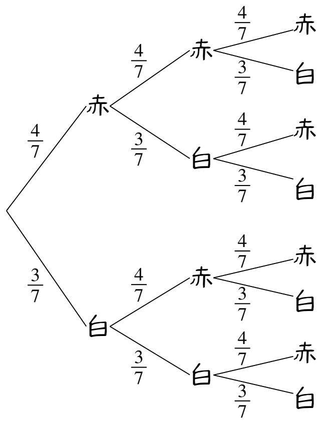
② 「出た目の最小値が 3 になる」確率を求めよ．

3.　反復試行

A.　反復試行とは

互いに独立な同じ試行を複数回行うことを，**反復**(はんぷく)**試行** (repeated trials) という[*8].

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個入った袋がある．取り出した玉は元に戻し，3 回玉を取り出すことは，右のようにまとめられる．



←確率は $\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^3$

←確率は $\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^2\times\left(\frac{3}{7}\right)$

←確率は $\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^2\times\left(\frac{3}{7}\right)$

⋮

B.　反復試行の確率

例として，「さいころを 5 回振る」試行を考え，「5 回のうち 2 回だけ 1 が出る」確率を求めよう．

1 が出た場合を○，出なかった場合を×で表すと，たとえば次のようになればよい．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
○	×	○	×	×	←○は $\frac{1}{6}$ の確率で，×は $\frac{5}{6}$ の確率で起こる．

この確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ で計算できる．また，次のような場合でもよい．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
×	○	○	×	×	←確率は $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$
×	×	○	○	×	←確率は $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$
		⋮			↑↑↑ すべて同じ確率

5ヶ所から ○ を2つ選べばよい
そのような選び方は ${}_5C_2$ 通り

こうして，$\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ が ${}_5C_2$ 通りあると分かるので，求める確率は次のようになる．

$${}_5C_2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\cancel{10}^{5}\times\frac{1}{36}\times\frac{125}{\cancel{216}^{108}}=\frac{625}{3888}$$

【例題 27】　上の例において，「5 回のうちちょうど 4 回だけ 1 が出る」確率を求めなさい．

[*8] 重複(ちょうふく)試行と呼ばれる事も多い．

反復試行

試行 X を n 回繰り返し，確率 p の事象 A がちょうど k 回成り立つ確率は

$${}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k}$$

で求められる（A が起きない確率は $1-p$，A が起きない回数は $n-k$ であることに注意）．

【練習 28：反復試行】

(1) 当たる確率が $\dfrac{1}{10}$ のくじを 5 回引く．そのうちちょうど 3 回当たる確率を求めよ．

(2) さいころ 1 個を 6 回振って，5 以上がちょうど 3 回出る確率を求めよ．

C. 反復試行の応用

【例題 29】 コイン 1 枚を振って表か裏か記録していき，表が出た回数が 4 回になるまで振り続ける．

1. コインを 4 回振って終わる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．
2. 5 回で終わるのは，4 回目までに表がちょうど $\boxed{\text{イ}}$ 回出て，5 回目が表になる場合である．よって，その確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．
3. 6 回で終わるのは，5 回目までに表がちょうど $\boxed{\text{エ}}$ 回出て，6 回目が表になる場合である．よって，確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．
4. 7 回で終わる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

【練習 30：反復試行】

赤 3 個，青 2 個の合計 5 個のボールが入った袋から，玉を 1 個取り出し，色を記録してから元に戻す．これを 5 回繰り返すとき，以下の確率を求めよ．

(1) 赤がちょうど 3 回出る確率　　(2) 赤がちょうど 2 回出る確率　　(3) 赤がちょうど 1 回出る確率

【練習 31：反復試行の応用】

さいころ 1 つを振り，1 か 2 が出たら +3 点，他が出たら −2 点になるゲームを考える．

(1) このゲームを 3 回繰り返し，4 点である確率を求めよ．

(2) このゲームを 5 回繰り返し，0 点である確率を求めよ．

D. 発展 反復試行で複数の事象を考える

さいころを 6 回振って，そのうち 1 がちょうど 2 回，5 以上がちょうど 2 回出る確率を考えてみよう．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	
1	1	5か6	5か6	他	他	←確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
1	1	5か6	他	5か6	他	←確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
			⋮			↑ ↑ ↑ すべて同じ確率

6ヶ所に「1」を2つ，
「5か6」を2つ，「他」を2つ並べる
そのような並べ方は $\frac{6!}{2!2!2!}$ 通り

この結果，次の式で計算できる．

$$\frac{6!}{2!2!2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2\cdot2}\cdot\cancel{2}}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{3}}{\cancel{6}^{\cancel{2}\,6}\cdot2^2\cdot\cancel{3}^{\cancel{2}\,3}}=\frac{5}{72}$$

【発展 32：3 つ以上の事象がある反復試行】

① さいころを 4 回振って，1 がちょうど 1 回，2 がちょうど 1 回出る確率を求めよ．

② さいころを 6 回振って，1 も 2 も 3 も 2 回ずつ出る確率を求めよ．

3.4 期待値

1. 確率分布

たとえば，コイン 2 枚を振って，「表が出た枚数」とそれぞれの確率は，右のような表にまとめられる．

表の枚数	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

このように，起こりうるすべての事象を，確率と共にまとめた表のことを**確率分布** (probability distribution) という．

【例題 33】 次の確率分布の表を完成させなさい．

1. さいころ 2 個を振ったときの，出る目の差

目の差	0	1	2	3	4	5	計
確率							

2. コイン 3 枚を振るときの，表が出る枚数

表の枚数	0	1	2	3	計
確率					

3. 20 本の中に 3 本のあたりくじがあるくじから 2 本引いたときの当たりくじの数

起こりうるすべての事象をまとめるので，確率の合計は必ず 1 になる．

2. 期待値

100 本のくじがあり，次の内訳で入っているとしよう．

5000 円が当たる 1 等が 1 本
1000 円が当たる 2 等が 3 本
100 円が当たる 3 等が 15 本

当たる金額	5000	1000	100	0	計
確率	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{81}{100}$	1

「当たる金額」について確率分布を書くと，右上のようになる．

このとき，くじを 1 回引いて当たる金額の平均を求めてみよう．たとえば，1 回あたり $\frac{1}{100}$ 回，5000 円をもらえるので，「1 等が当たる金額の平均」は $5000 \times \frac{1}{100}$ になる．

これらを 2 等，3 等でも繰り返し，次のように求められる．

$$\underbrace{5000 \times \frac{1}{100}}_{\text{1等の分}} + \underbrace{1000 \times \frac{3}{100}}_{\text{2等の分}} + \underbrace{100 \times \frac{15}{100}}_{\text{3等の分}} + \underbrace{0 \times \frac{81}{100}}_{\text{外れの分}} = \frac{5000 + 3000 + 1500 + 0}{100} = \frac{9500}{100} = 95$$

このように計算できる値を，**期待値** (expectation value) という．上の例では，当たる金額の期待値は 95 円である．

上のくじ 1 本の代金が 95 円より少ないならば，このくじを買うことは，平均して「得」である．
逆に，95 円より高いならば，このくじを買うことは「損」である．

期待値

試行 X において，ある値 x についての確率分布が右のようになったとする．そのとき，次の式

$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$

で計算される値を，x の期待値という．x の期待値は，しばしば $E(x)$ で表わされる．

x の値	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

【例題 34】 さいころを 2 個振って，出た目の和を考える．

1. 目の和の確率分布を完成させなさい．
   ただし，約分はしなくてもよい．
2. 目の和の期待値を求めなさい．

目の和		計
確率		

【練習 35：期待値】

(1) さいころ 1 個とコイン 1 枚を振り，コインが表ならばさいころの目の 100 倍の金額を，コインが裏ならばさいころの目の 50 倍の金額をもらえるとき，この試行の期待値を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{4}$ の確率で当たるくじがある．これを 4 回引いたとき，当たる回数の期待値を求めよ．

期待値の計算をするときは，確率分布の表は約分しない方がよい．

索引