13th-note 数学 I

（**2013** 年度卒業生まで）

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 I で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π, ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ, ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω

Ver2.74(2012-9-20)

目次

第3章　三角比と図形の計量

たとえば，3 辺の長さが 4 cm，5 cm，7 cm の三角形は，1 つに決まる．しかし，その三角形の内角は何度くらいなのか，そもそも鋭角三角形か，鈍角三角形なのかは，描いてみないと分からない．

三角比を用いると，この問題を簡単な計算で解決する．

3.1　鋭角の三角比

この節では，直角三角形を用いて，90° より小さな角(鋭角)の三角比を学ぶ．

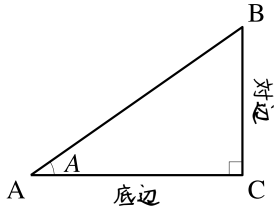
1.　三角比の定義 — 正接 (tan)，余弦 (cos)，正弦 (sin)

A.　直角三角形の辺の名前

AB が**斜辺** (hypotenuse) である直角三角形 ABC を ∠A から見るとき[*1]

辺 BC のことを**対辺** (opposite side) , 辺 CA のことを**底辺** (base)

という．右図を「➔」の位置から見るとき，「➔」の反対側に対辺があり，三角形の底に底辺がある．



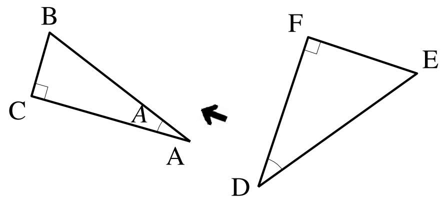
【例題 1】 右の △ABC を「➔」の位置から見たとき

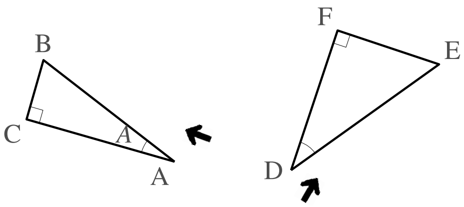
辺 AB は斜辺，辺 BC は ア ，辺 CA は イ

である．また，△DEF を頂点 D から見たときは

辺 ウ は斜辺，辺 エ は対辺，辺 オ は底辺

である．





【解答】

ア：対辺，イ：底辺

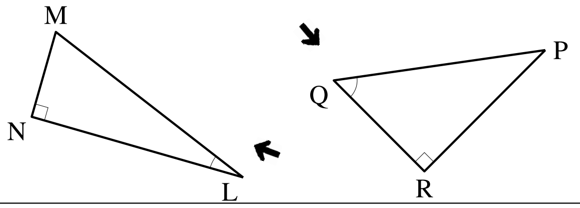
ウ：**DE**，エ：**EF**，オ：**FD**

◂ 慣れないうちは，図を回転させるなどして考えよう．

[*1] この章の図にある “➔” は，本文中で「〜からみたときの」とある場合の説明の補助として使われている．自分も同じ所から見つめているつもりになって，図形を考えてみよう．

【練習 2：直角三角形の辺の名称】

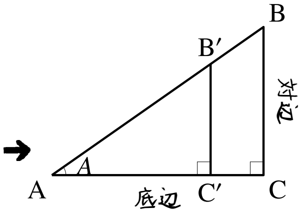
「➔」の位置から見たとき，左の三角形の LM，MN，NL，右の三角形の PQ，QR，RP は，それぞれ対辺，底辺，斜辺のいずれか，



【解答】 左では， **辺 MN は対辺**，**辺 NL は底辺**，**辺 LM は斜辺**になる．
右では， **辺 PR は対辺**，**辺 QR は底辺**，**辺 PQ は斜辺**になる．

B. 正接 (tan)

右図において，∠A から見たときの $\dfrac{(\text{対辺})}{(\text{底辺})}$ の値は，∠A の大きさだけで決まる．実際に測ってみれば，$\dfrac{C'B'}{AC'} = \dfrac{0.75\times CB}{0.75\times AC} = \dfrac{CB}{AC}$ である（△AB'C' は △ABC の 0.75 倍で描かれている）．



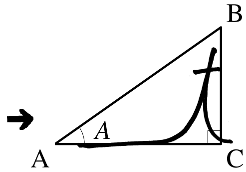
正接 (tan) の定義

右図の直角三角形 ABC において

$$\overset{\text{タンジェントエー}}{\mathbf{tan}\,\boldsymbol{A}} = \frac{(\text{対辺})}{(\text{底辺})} = \frac{CB}{AC}$$

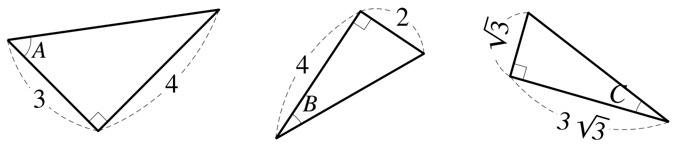
←筆記体が終わる辺
←筆記体が始まる辺

と定義し[*2]，A の**正接**（せいせつ）または，A の**タンジェント** (tangent) という．
tan A は，∠A から見た底辺に対する対辺の倍率を表している．



tan の定義は t の筆記体を用いて覚える．右上図では，t の筆記体は，分母の AC で始まり，分子の CB で終わる．

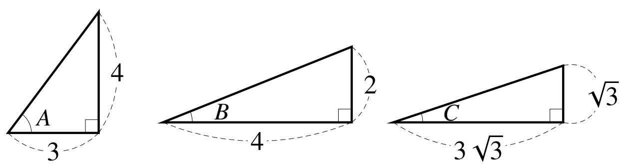
【例題 3】 右の図において，tan A，tan B，tan C をそれぞれ求めよ．



【解答】 右の図より，$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{B} = \dfrac{2}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

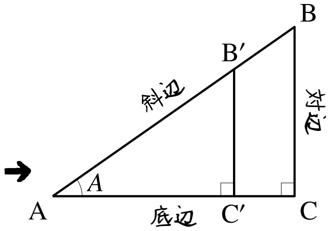
$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{C} = \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$



必ず，筆記体を用いた定義を確認しよう．慣れれば，問題の図を回したり，自分で描きなおす事なく求められるようになる．

[*2] この tan というのは，3 文字で 1 つの記号であり $t\times a\times n$ のことではない．これを明確にするため，数学では tan と斜体では書かず，tan と立体で書く．これは，次にでてくる sin，cos も同様である．

C. 余弦 (cos)・正弦 (sin)



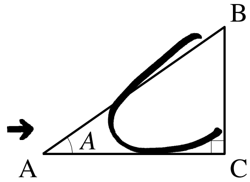
右図において，∠A から見たときの $\dfrac{（底辺）}{（斜辺）}$，$\dfrac{（対辺）}{（斜辺）}$ の値は ∠A の大きさだけで決まる．実際，次が成り立つ．

$$\frac{（底辺）}{（斜辺）} = \frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{B'A}} = \frac{0.75\times\mathrm{AC}}{0.75\times\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BA}}$$

$$\frac{（対辺）}{（斜辺）} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{AB'}} = \frac{0.75\times\mathrm{BC}}{0.75\times\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$

余弦・正弦の定義

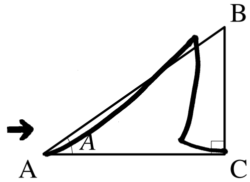
右図の直角三角形 ABC において



$$\overset{\text{コサインエー}}{\cos A} = \frac{（底辺）}{（斜辺）} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BA}} \begin{array}{l} \leftarrow \text{筆記体が終わる辺} \\ \leftarrow \text{筆記体が始まる辺} \end{array}$$

と定義し，A の**余弦**（よげん），または，A の**コサイン** (cosine) という．

$\cos A$ は，∠A からみた斜辺に対する底辺の倍率を表している．また



$$\overset{\text{サインエー}}{\sin A} = \frac{（対辺）}{（斜辺）} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \begin{array}{l} \leftarrow \text{筆記体が終わる辺} \\ \leftarrow \text{筆記体が始まる辺} \end{array}$$

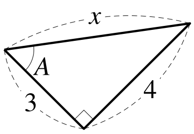
と定義し，A の**正弦**（せいげん），または，A の**サイン** (sine) という．

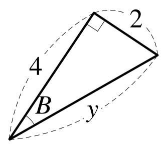
$\sin A$ は，∠A からみた斜辺に対する対辺の倍率を表している．

cos，sin の定義も，それぞれ c，s の筆記体を用いて覚える．tan も含めたすべて，「筆記体が始まる辺」が分母に，「筆記体が終わる辺」が分子になる．

【例題 4】 右の図において

1. 長さ x，y を求めよ．
2. $\cos A$，$\sin A$ を求めよ．
3. $\cos B$，$\sin B$ を求めよ．





【解答】

1. 三平方の定理より，$x = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

   $y = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = \mathbf{2\sqrt{5}}$

2. 定義にしたがって

   $\boldsymbol{\cos A = \dfrac{3}{5}}$，$\boldsymbol{\sin A = \dfrac{4}{5}}$

3. 定義にしたがって

   $\cos B = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$，$\sin B = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$

筆記体の c は角を回り込むように書き，筆記体の s は角から斜辺へ向かう，と理解するとよい．

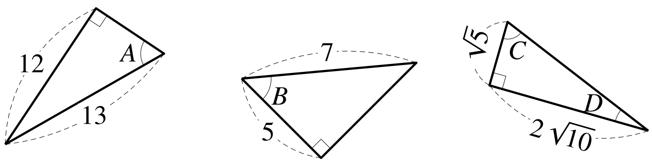
【練習 5：余弦・正弦・正接の定義】

(1) $\cos A$，$\sin A$，$\tan A$ を求めよ．

(2) $\cos B$，$\sin B$，$\tan B$ を求めよ．

(3) $\cos C$，$\sin C$，$\tan C$ を求めよ．

(4) $\cos D$，$\sin D$，$\tan D$ を求めよ．



【解答】

(1) 残りの 1 辺は $\sqrt{13^2-12^2}=5$ である．定義から

◀ 三平方の定理を用いた

$\cos A=\boldsymbol{\dfrac{5}{13}}$，$\sin A=\boldsymbol{\dfrac{12}{13}}$，$\tan A=\boldsymbol{\dfrac{12}{5}}$

(2) 残りの 1 辺は $\sqrt{7^2-5^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ であるので

$\cos B=\boldsymbol{\dfrac{5}{7}}$，$\sin B=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{7}}$，$\tan B=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}$

(3) 斜辺は $\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ であるので

$\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$，$\sin C=\dfrac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

$\tan C=\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

(4) $\cos D=\dfrac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$，$\sin D=\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$\tan D=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

D. 三角比の値

正接，余弦，正弦をまとめて，**三角比** (trigonometric ratio) という．いろいろな角度に関する三角比の値を p.207 にまとめてある．

【例題 6】 p.207 を用いて次の問に答えよ．ただし，$0^\circ < A < 90^\circ$ である．

1. $\cos 40^\circ$ の値を調べよ．また，$\sin A=0.97$ のとき，A のおよその値を求めよ．
2. $\cos B$ が $\sin 20^\circ$ に等しいとき，B の値を求めよ．

【解答】

1. p.207 の表より $\cos 40^\circ \fallingdotseq \boldsymbol{0.766}$，$\boldsymbol{A=76^\circ}$．
2. p.207 の表より $\sin 20^\circ \fallingdotseq 0.342$，このとき，$\boldsymbol{B \fallingdotseq 70^\circ}$

◀ 後の，『$90^\circ-A$ の三角比 (p.158)』から精確に $B=70^\circ$ であることがわかる．

E. 分数と分数の比 — 複分数

「3 を 10 で割った値」を $\dfrac{3}{10}$ と表すように，「$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ を $\dfrac{1}{7}$ で割った値」を $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}}$ と表すこともできる．このように，$\dfrac{a}{b}$ の分子または分母がさらに分数であるとき，$\dfrac{a}{b}$ を**複分数**(ふくぶんすう) (complex fraction) [*3]という．複分数は三角比の計算においてよく現れる．

複分数は，分母と分子に同じ数を掛ければ複分数でなくなる[*4]．

$$\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}\times 21}{\frac{1}{7}\times 21} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{3}_1}\times \cancel{21}^7}{\frac{1}{\cancel{7}_1}\times \cancel{21}^3} = \dfrac{\sqrt{2}\times 7}{1\times 3} = \dfrac{7\sqrt{2}}{3}$$

【例題 7】 複分数 $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{2}{3}}$ を，普通の分数の（複分数でない）形にしなさい．

【解答】 5 と 3 の最小公倍数 15 を分母と分子に掛ければよい．

$$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{5}\times 15}{\frac{2}{3}\times 15} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{5}}\times \cancel{15}^3}{\frac{2}{\cancel{3}}\times \cancel{15}^5} = \dfrac{\sqrt{3}\times 3}{2\times 5} = \dfrac{3\sqrt{3}}{10}$$

F. 有名角の三角比

30°，45°，60° の三角比の値は，知っているものとされる．これらの角は，有名角といわれる．

【暗記 8：有名角の三角比】

1. 3 辺の長さが 1，2，$\sqrt{3}$ の直角三角形を用い，$\cos 30^\circ$，$\sin 30^\circ$，$\tan 30^\circ$ を求めよ．
2. 3 辺の長さが 1，1，$\sqrt{2}$ の直角三角形を用い，$\cos 45^\circ$，$\sin 45^\circ$，$\tan 45^\circ$ を求めよ．
3. $\cos 60^\circ$，$\sin 60^\circ$，$\tan 60^\circ$ を求めよ．

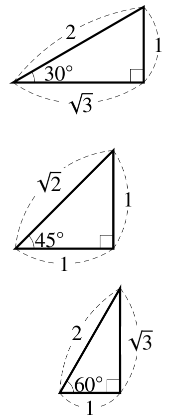
【解答】

1. 右欄外の図より $\cos 30^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\sin 30^\circ = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$
2. 右欄外の直角三角形より

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}},\quad \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}},\quad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = \boldsymbol{1}$$

3. 右欄外の直角三角形より

$$\cos 60^\circ = \boldsymbol{\frac{1}{2}},\quad \sin 60^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}},\quad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$



・・・ 有名角でない三角比の値を覚える必要はない．必要なときは．p.207 の表を用いる．

[*3] 繁分数(はんぶんすう) (compound fraction) ともいう．

[*4] $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}}$ は $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\div\dfrac{1}{7}$ を計算しても求められる．

【練習 9：複分数】

次の複分数を，普通の分数の形になおしなさい（分母の有理化もすること）.

(1) $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{7}}$　(2) $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{25}{9}}$　(3) $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$　(4) $\dfrac{2a}{\frac{1}{2}}$

【解答】

(1) $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{7}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}\times 28}{\frac{1}{7}\times 28} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}^{1}}\times \cancel{28}^{7}}{\frac{1}{\cancel{7}^{1}}\times \cancel{28}^{4}} = \boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{3}}{4}}$

◀ 4 と 7 の最小公倍数である 28 を，分母と分子に掛ける.

(2) $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{25}{9}} = \dfrac{\frac{5}{8}\times 72}{\frac{25}{9}\times 72} = \dfrac{\frac{5}{\cancel{8}^{1}}\times \cancel{72}^{9}}{\frac{25}{\cancel{9}^{1}}\times \cancel{72}^{8}} = \dfrac{\cancel{5}^{1}\times 9}{\cancel{25}^{5}\times 8} = \boldsymbol{\dfrac{9}{40}}$

◀ 8 と 9 の最小公倍数である 72 を，分母と分子に掛ける.

(3) $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{3}^{1}}\times \cancel{6}^{2}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}^{1}}\times \cancel{6}^{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{9}}$

◀ 2 と 3 の最小公倍数である 6 を，分母と分子に掛ける.
その後，分母を有理化する.

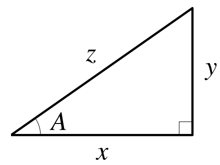
(4) $\dfrac{2a}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2a\times 2}{\frac{1}{2}\times 2} = \dfrac{2a\times 2}{\frac{1}{\cancel{2}}\times \cancel{2}} = \boldsymbol{4a}$

2.　三角比の利用

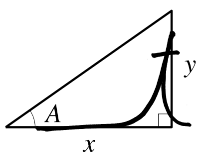
A.　三角比から辺の長さを求める

等式 $\tan A = \dfrac{y}{x}$ の両辺に x を掛けて

$$x\times\tan A = x\times\frac{y}{x} \quad\Leftrightarrow\quad x\tan A = y$$



という式を得る．この結果は，「x から t を書(か)いて，y にたどりつく」筆記体と



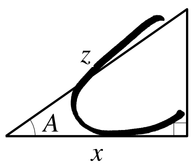
「x に tan を掛(か)けて，y を求める」ことを結びつけて覚えるとよい.

$$\overbrace{x\tan A}^{x\to y\text{ に筆記体 t を書く}} = y$$

同じようにして，cos，sin についても，以下の結果が成り立つ.

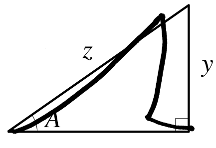
z から x を求める式

$$\overbrace{z\cos A}^{z\to x\text{ に筆記体 c を書く}} = x$$



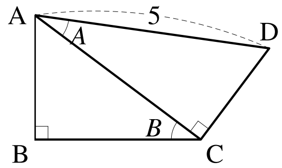
z から y を求める式

$$\overbrace{z\sin A}^{z\to y\text{ に筆記体 s を書く}} = y$$



これら 3 つの式を用いると，三角比から辺の長さを計算しやすい.

【例題 10】 右の図形について



$$\sin A = \frac{3}{5},\ \cos A = \frac{4}{5},\ \tan B = \sqrt{2},\ \cos B = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

とする．以下の問いに答えよ．

1. 辺 $\boxed{ア}$ から始めて ∠A について筆記体の s を書けば，辺 CD で終わるので，
   CD = $\boxed{ア}\sin A = \boxed{イ}$
2. 辺 AD から始めて ∠A について筆記体の c を書き，∠B について筆記体の c を書けば辺 $\boxed{ウ}$ で終わるので，$\boxed{ウ} = (\mathrm{AD}\cos A)\cos B = \mathrm{AD}\cos A\cos B = \boxed{エ}$

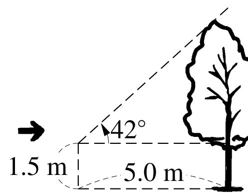
【解答】

1. ア ： **AD**，イ ： $5\times\frac{3}{5} = \mathbf{3}$
2. ウ ： **BC**，エ ： $5\times\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{6}}{3} = \mathbf{\frac{4\sqrt{6}}{3}}$

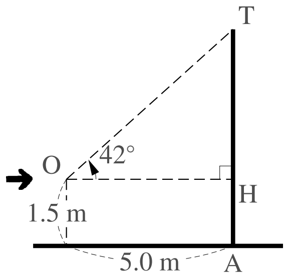
B. 身近な例への三角比の応用

大きなものの長さや高さを測るために，三角比は有効である．

【例題 11】 目の高さが 1.5 m にある人が，木から 5.0 m 離れた地点に立って木のてっぺんを見上げた．すると，水平な地面と視線のなす角[*5]が 42° であった．
この木の高さはおよそ何 m か．(右図参照)
p.207 の三角比の表を使って，小数第 2 位を四捨五入して答えなさい．



【解答】 右図のように O，T，H，A をとると，木の高さは TA の長さになる．



△OTH に注目して

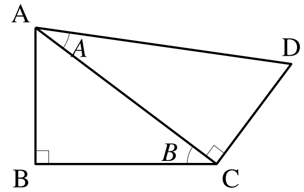
$$\begin{aligned}\mathrm{TH} &= \mathrm{OH}\times\tan 42^\circ\\ &\fallingdotseq 5.0\ \mathrm{m}\times 0.9004\\ &\fallingdotseq 4.5\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

◂ p.207 の表より
$\tan 42^\circ \fallingdotseq 0.9004$

よって，木の高さはおよそ 4.5 + 1.5 = **6.0 m**

[*5] この角度のことを，仰角(ぎょうかく)という．

【練習 12：三角比と辺の長さ】



右の図形について，次の問いに答えよ．

(1) AD = 6 のとき，長さが $6\sin A$，$6\cos A\sin B$ に等しい線分を，それぞれ答えよ．

(2) AC = 5 のとき，CD，AB，AD の長さを，A，B で表せ．

【解答】

(1) 長さ 6 の AD から筆記体の s を書けば CD で終わるので，$6\sin A =$ **CD**.
長さ 6 の AD から筆記体の c を書けば AC で終わり，AC から筆記体の s を書けば AB で終わるので，$6\cos A\sin B = \text{AC}\sin B =$ **AB**

(2) 長さ 5 の AC から筆記体の t を書けば CD で終わるので，CD $= \mathbf{5\tan A}$.
長さ 5 の AC から筆記体の s を書けば AB で終わるので，AB $= \mathbf{5\sin B}$.
また，$\text{AD}\cos A = 5$ より，AD $= \boldsymbol{\dfrac{5}{\cos A}}$

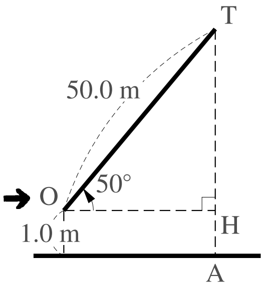
【練習 13：身近な例への三角比の応用】

凧揚げをしていたら，水平な地面に対し 50° の角度で長さ 50.0 m のひもが伸びきった．ひもを持つ手は 1.0 m の高さにあり，糸が一直線に伸びているならば，この凧は地面からおよそ何 m の高さにあるか．p.207 の三角比の表を使って，小数第 2 位を四捨五入して答えなさい．

【解答】　右図のように O，T，H，A をとると，たこの高さは TA の長さになる．△OTH に注目して

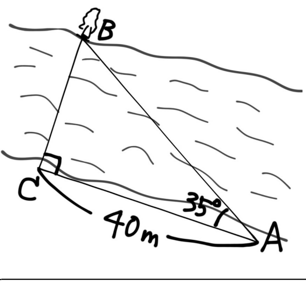
$$\begin{aligned}\text{TH} &= \text{OT}\times\sin 50^\circ\\ &\fallingdotseq 50.0\text{ m}\times 0.7660\\ &= 38.3\text{ m}\end{aligned}$$

よって，たこの高さはおよそ 38.3 + 1.0 = **39.3 m**



◀ p.207 の表より
$\sin 50^\circ \fallingdotseq 0.7660$

【練習 14：川を渡らず川幅を知る方法】



川の長さを測るため，左図の A 点と C 点から，B 点の木を観測したところ，∠BCA = 90°，∠BAC = 35°，AC = 40 m であった．

(1) 川の幅 BC は何 m か．p.207 の三角比の表を使い，小数第 2 位を四捨五入して答えなさい．

(2) C 点から 80 m 離れた点 D から木を見ると，∠BDC はおよそ何度か．p.207 の三角比の表を使い，整数値で答えなさい．

【解答】

(1) BC = 40 m × tan 35° = 40 × 0.7002 ≒ **28.0 (m)**.

(2) $\tan\angle\text{BDC} = \dfrac{\text{BC}}{\text{DC}} = \dfrac{28}{80} = 0.35$ である．p.207 より，**およそ 19°**.

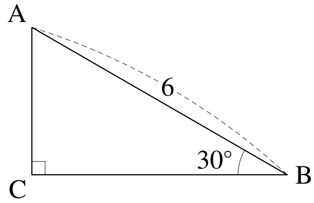
◀ p.207 より，$\tan 35^\circ = 0.7002$

◀ $\tan 19^\circ = 0.3443$
$\tan 20^\circ = 0.3640$

上の例題のようにすれば，原理的には，B へ誰も行くことなく川幅を測ることができる．

C. 15° の三角比とその周辺

たとえば，右の直角三角形の BC の長さを考えよう．

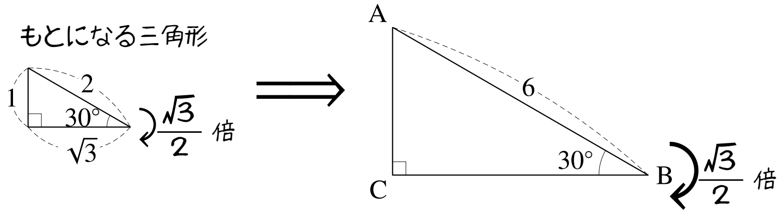


この三角形は 30°, 60°, 90° の直角三角形なので，$AB : BC = 2 : \sqrt{3}$ から

$$6 : BC = 2 : \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2BC = 6\sqrt{3}$$

であるので，$BC = 3\sqrt{3}$ と求められる．

しかし，BC が AB の何倍なのか考えると，三角比を用いる必要もなく，さらに計算がしやすい．

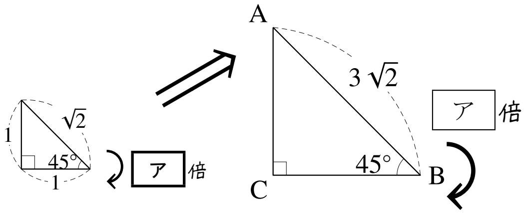


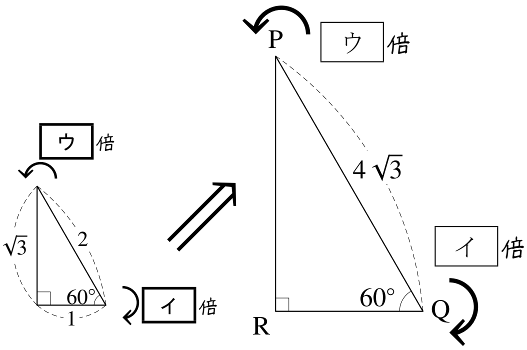
つまり

$$BC = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

上のやり方は結果的には，三角比の値を用いずに，等式 $BC = 6\cos 30°$ を用いている．

【例題 15】 次の図について，以下の問いに答えなさい．





1. 上の図の $\boxed{}$ に当てはまる値を答えなさい．値の分母は有理化しなくてよい．
2. BC，RQ，PR の長さを求めなさい．

【解答】

1. ア : $\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$，イ : $\mathbf{\dfrac{1}{2}}$，ウ : $\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

2. $BC = 3\sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{3}$

   $RQ = 4\sqrt{3} \times \dfrac{1}{2} = \mathbf{2\sqrt{3}}$，$PR = 4\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{6}$

D.　15°，75° の三角比

有名角以外にも，15°，75°，18°，36°，72° の三角比も計算で求められる（18°，36°，72° の三角比については，p.202 を参照のこと）[*6].

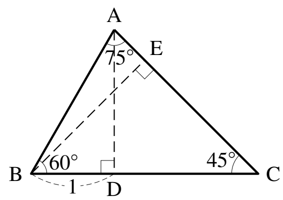
【練習 16：15°，75° の三角比】

$\triangle ABC$ は $\angle A = 75°$，$\angle B = 60°$，$\angle C = 45°$ であり，A から辺 BC へ下ろした垂線の足[*7]を D，B から辺 CA へ下ろした垂線の足を E とする．BD = 1 とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) AB，AD の長さを求めよ．　(2) AC，BC の長さを求めよ．　(3) BE，AE の長さを求めよ．

(4) $\cos 15°$，$\sin 15°$，$\tan 15°$ を求めよ．　(5) $\cos 75°$，$\sin 75°$，$\tan 75°$ を求めよ．

【解答】



(1) $\triangle ABD$ は $DB : BA : AD = 1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形である．
BD = 1 より $\mathbf{AB = 2,\ AD = \sqrt{3}}$.

(2) $\triangle ACD$ は $AD : DC : CA = 1 : 1 : \sqrt{2}$ の直角三角形である．
$AD = \sqrt{3}$ より $AC = \dfrac{\sqrt{2}}{1}AD = \mathbf{\sqrt{6}}$，$CD = AD = \sqrt{3}$.
よって，$BC = BD + CD = \mathbf{1 + \sqrt{3}}$.

(3) $\triangle BEC$ は $BE : EC : CB = 1 : 1 : \sqrt{2}$ の直角三角形である．
$BC = 1 + \sqrt{3}$ より $BE = \dfrac{1}{\sqrt{2}}BC = \mathbf{\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}}$，$EC = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$.
よって，$AE = AC + CE = \sqrt{6} - \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}}$.

(4) $\triangle AEB$ を $\angle B$ からみて

$$\cos 15° = \frac{BE}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}{2} = \mathbf{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin 15° = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{2} = \mathbf{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\tan 15° = \frac{AE}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = \mathbf{2 - \sqrt{3}}$$

(5) $\triangle AEB$ を $\angle A$ からみて

$$\cos 75° = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{2} = \mathbf{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin 75° = \frac{BE}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}{2} = \mathbf{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\tan 75° = \frac{BE}{AE} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)} = \mathbf{2 + \sqrt{3}}$$

[*6] 15°，75°，18°，36°，72° の三角比の値を覚える必要はない．

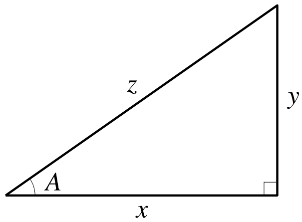
[*7] 「A から辺 BC へ下ろした垂線の足」とは，「A から引いた辺 BC に垂直な線が，辺 BC と交わる点」のことである．

3.　三角比の相互関係

A.　$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

右図の直角三角形において，p.150 で学んだように

$x = z\cos A$ ，　$y = z\sin A$ ……… ①



であった．①を用いて

$$\tan A = \frac{y}{x} = \frac{z\sin A}{z\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

となる．つまり，次の等式 $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ が成り立つ．

B.　$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

三平方の定理より $x^2 + y^2 = z^2$ であるから，これに①を代入して

$(z\cos A)^2 + (z\sin A)^2 = z^2$

$\Leftrightarrow z^2(\cos A)^2 + z^2(\sin A)^2 = z^2$

$\Leftrightarrow (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$ ……… ②

が成り立つ．普通 $(\cos A)^2$，$(\sin A)^2$，$(\tan A)^2$ は，それぞれ $\cos^2 A$，$\sin^2 A$，$\tan^2 A$ と書かれる*8．つまり，等式②は $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ と書かれる．

【例題 17】

1. $\sin A = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin^2 A$ はいくらか．$\cos^2 A$ はいくらか．$\cos A$ はいくらか．
2. $\sin A = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ．

【解答】

1. $\sin^2 A = (\sin A)^2 = \mathbf{\dfrac{4}{9}}$，$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = \mathbf{\dfrac{5}{9}}$，

   $\cos A > 0$ なので，$\cos A = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$

2. $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ より　◀『三角比の相互関係 ii)』

   $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$

   $\cos A > 0$ なので，$\cos A = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \mathbf{\dfrac{4}{5}}$ である．

   また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より，$\tan A = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$　◀『三角比の相互関係 i)』，『複分数』(p.149)

*8 A の 2 乗の cos の値である $\cos(A^2)$ と，$\cos A$ の 2 乗である $(\cos A)^2$ は，全く別の式であるが，かっこを省略して書くと，どちらも $\cos A^2$ となり区別できない．そのため，$\cos A^2$ と書かれたときは常に $\cos(A^2)$ を表すと決まっている．$(\cos A)^2$ のかっこを省略するときには，本文にもあるように $\cos^2 A$ と書く．

【練習 18：三角比の相互関係の利用〜その１〜】

$0^\circ < A < 90^\circ$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\cos A = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めよ．

(2) $\sin A = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ．

【解答】

(1) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ より　◀『三角比の相互関係 ii)』

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$\sin A > 0$ なので，$\sin A = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ である．

また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より　◀『三角比の相互関係 i)』

$$\tan A = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

◀『複分数』(p.149)

(2) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ より　◀『三角比の相互関係 ii)』

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$\cos A > 0$ なので，$\cos A = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$ である．

また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より　◀『三角比の相互関係 i)』

$$\tan A = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

◀『複分数』(p.149)

【暗記 19：$\tan A$ と他の三角比との関係】

等式 $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ を用いて，$\dfrac{1}{\tan A}$ を，$\cos A$，$\sin A$ で表せ．

【解答】

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \iff \frac{\tan A}{1} = \frac{\sin A}{\cos A}$$
$$\iff \boldsymbol{\frac{1}{\tan A} = \frac{\cos A}{\sin A}}$$

◀分母と分子をひっくり返しても，等式は成立する．

C.　$\tan A$ から $\sin A$，$\cos A$ を求める式

$\tan A$ しか与えられていないときは，別の公式が必要になる．

これは，$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ の両辺を $\sin^2 A$ で割って得られる．

$$\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 A} + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}$$

次ページで証明する式 iv) と合わせ，次のようにまとめられる．

三角比の相互関係

右図の直角三角形において

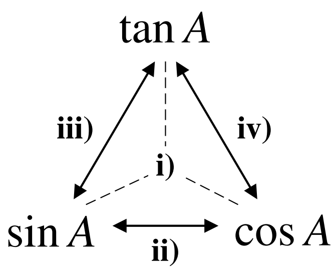
i) $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$　　（$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の関係）

ii) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$　　（$\sin A$ と $\cos A$ の関係）

が成り立つ．また，次の等式も成り立つ．

iii) $\dfrac{1}{\tan^2 A} + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 A}$　　（$\tan A$ と $\sin A$ の関係）

iv) $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$　　（$\cos A$ と $\tan A$ の関係）



iii) と iv) の式を覚える必要はない．ii) の両辺を $\sin^2 A$ や $\cos^2 A$ で割ればよい，と理解しておけばよい．

【例題 20】 $0° < A < 90°$ とする．$\tan A = 7$ のとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ．

【解答】 $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$ より　　◀『三角比の相互関係 iv)』

$$\cos^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A} = \frac{1}{1 + 7^2} = \frac{1}{50}$$

$\cos A > 0$ なので，$\cos A = \sqrt{\dfrac{1}{50}} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{10}}$ である．

また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より　　◀『三角比の相互関係 i)』

$$\sin A = \tan A \times \cos A = 7 \times \frac{\sqrt{2}}{10} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{2}}{10}}$$

【暗記 21：$\tan A$ と $\cos A$ との関係】

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ から，等式 $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$ を導け.

【解答】 $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ の両辺を $\cos^2 A$ で割ると

$$1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A}$$
$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$$

【練習 22：三角比の相互関係の利用〜その２〜】

$0^\circ < A < 90^\circ$ とする．$\tan A = \dfrac{1}{5}$ のとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ.

【解答】 $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$ より

◀『三角比の相互関係 iv)』

$$\cos^2 A = \frac{1}{1+\tan^2 A} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{26}{25}} = \frac{25}{26}$$

$\cos A > 0$ なので，$\cos A = \sqrt{\dfrac{25}{26}} = \boldsymbol{\dfrac{5}{\sqrt{26}}}$ である.

また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より

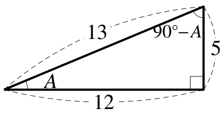
◀『三角比の相互関係 i)』

$$\sin A = \tan A \times \cos A = \frac{1}{5} \times \frac{5}{\sqrt{26}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{26}}}$$

D. $90^\circ - A$ の三角比

【例題 23】 右図の直角三角形において

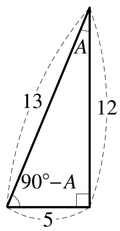
1. $\cos A$，$\sin A$，$\tan A$ を求めよ.
2. $\cos(90^\circ - A)$，$\sin(90^\circ - A)$，$\tan(90^\circ - A)$ を求めよ.



【解答】

1. $\boldsymbol{\cos A = \dfrac{12}{13}}$，$\boldsymbol{\sin A = \dfrac{5}{13}}$，$\boldsymbol{\tan A = \dfrac{5}{12}}$
2. 右欄外の図のように考えて
$\boldsymbol{\cos(90^\circ - A) = \dfrac{5}{13}}$，$\boldsymbol{\sin(90^\circ - A) = \dfrac{12}{13}}$，$\boldsymbol{\tan(90^\circ - A) = \dfrac{12}{5}}$

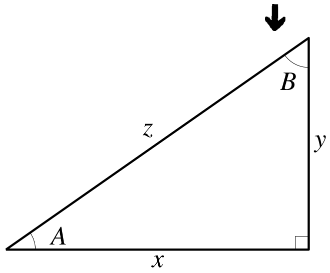
◀



右図の直角三角形において

$B = 90^\circ - A$

であるから，以下のように表すことができる．

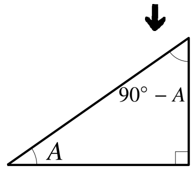


$$\cos(90^\circ - A) = \cos B = \frac{y}{z} = \sin A$$
$$\sin(90^\circ - A) = \sin B = \frac{x}{z} = \cos A$$
$$\tan(90^\circ - A) = \tan B = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan A}$$

$90^\circ - A$ の三角比

右図の直角三角形を考えて，以下の等式が成り立つ．

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$
$$\sin(90^\circ - A) = \cos A$$
$$\tan(90^\circ - A) = \frac{1}{\tan A}$$



この式は暗記するようなものではない．「$90^\circ - A$ の三角比は A だけを使った三角比で表せる」ことを理解し，公式を作れるようにすればよい．

【練習 24：$90^\circ - A$ の三角比の利用】

(1) 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ．

1) $\sin 80^\circ$　　2) $\cos 46^\circ$　　3) $\tan 82^\circ$

(2) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$ を簡単にしなさい．

【解答】

(1) 1) $\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \mathbf{\cos 10^\circ}$

◀ $\sin(90^\circ - A) = \cos A$

2) $\cos 46^\circ = \cos(90^\circ - 44^\circ) = \mathbf{\sin 44^\circ}$

◀ $\cos(90^\circ - A) = \sin A$

3) $\tan 82^\circ = \tan(90^\circ - 8^\circ) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\tan 8^\circ}}$

◀ $\tan(90^\circ - A) = \dfrac{1}{\tan A}$

(2) $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ なので

$\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = \mathbf{1}$

◀『三角比の相互関係 ii)』
$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$45^\circ < A < 90^\circ$ の三角比は，$0^\circ < A < 45^\circ$ の三角比になおすことができる．
p.207 の三角比の表において，$\cos 89^\circ = \sin 1^\circ$，$\cos 88^\circ = \sin 2^\circ$，$\cdots$ を確認してみよう．

3.2　三角比の拡張

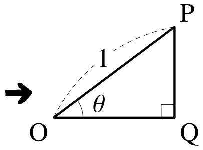
これまでは，鋭角の三角比のみを考えてきた．ここでは三角比の考えを直角・鈍角・0°・180° へと拡張し，0° から 180° までの三角比を統一的に扱う．

1.　座標と三角比の関係

A.　斜辺が 1 である直角三角形の三角比

斜辺が 1 である直角三角形 OPQ について，三角比を考えよう．すると，正弦，余弦，正接はそれぞれ

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = PQ, \qquad \cos\theta = \frac{OQ}{PO} = OQ$$

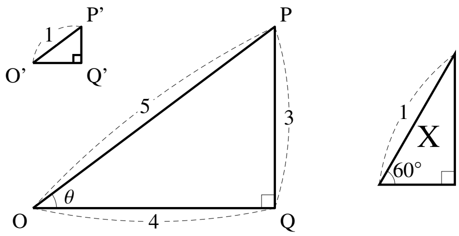


と書ける[*9]．つまり，斜辺の長さが 1 である直角三角形では

「対辺の長さは $\sin\theta$ の値を表し，底辺の長さは $\cos\theta$ の値を表す」

【例題 25】

1. △OPQ と △O'P'Q' は相似である．O'Q'，Q'P' の長さを求めなさい．また，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めなさい．
2. 右奥の直角三角形 X について，斜辺以外の 2 辺の長さを求めなさい．



【解答】

1. △OP'Q' は，△OPQ を $\frac{1}{5}$ 倍に縮小したものなので，

$$OQ' = OQ \times \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{4}{5}}, \quad Q'P' = QO \times \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

さらに，△OP'Q' は斜辺が 1 であるので

$$\cos\theta = \frac{OQ'}{1} = \mathbf{\frac{4}{5}}, \quad \sin\theta = \frac{Q'P'}{1} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

2. 3 辺の長さが 1, 2, $\sqrt{3}$ の直角三角形を $\frac{1}{2}$ 倍に縮小すると，直角三角形 X になる．

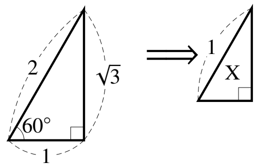
このとき，長さ $\sqrt{3}$ の辺は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ に，長さ 1 の辺は $\frac{1}{2}$ になる．

よって，斜辺以外の 2 辺は $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $\mathbf{\frac{1}{2}}$ である．

◀ OP : OP' = 5 : 1

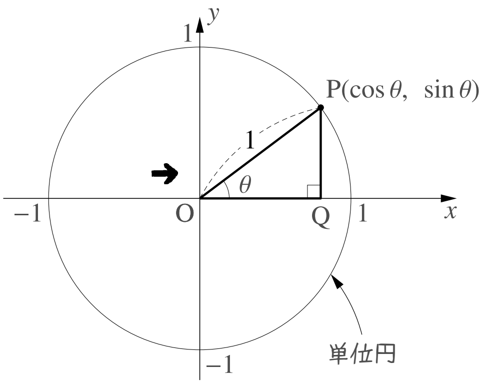
◀ △OPQ から，三角比の定義でも求められる．

◀



[*9] 拡張された三角比では，θ（シータ），φ（ファイ）などギリシア文字を使うことが多い．ギリシア文字の一覧は p.vi 参照．

B. 単位円と直角三角形



座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を**単位円** (unit circle) という．前ページの △OPQ を，左図のように単位円の (上半分の) 中に描いてみよう．そのようにすれば

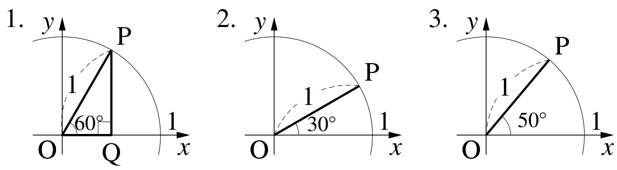
$\cos\theta = \mathrm{OQ} =$ (P の x 座標)

$\sin\theta = \mathrm{QP} =$ (P の y 座標)

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}} = \frac{\text{P の } y \text{ 座標}}{\text{P の } x \text{ 座標}} = (\text{線分 OP の傾き})$$

となる．

【例題 26】 右の各図について，点 P の座標をそれぞれ求めなさい．ただし，3. については「三角比の表 (p.207)」を用いなさい．



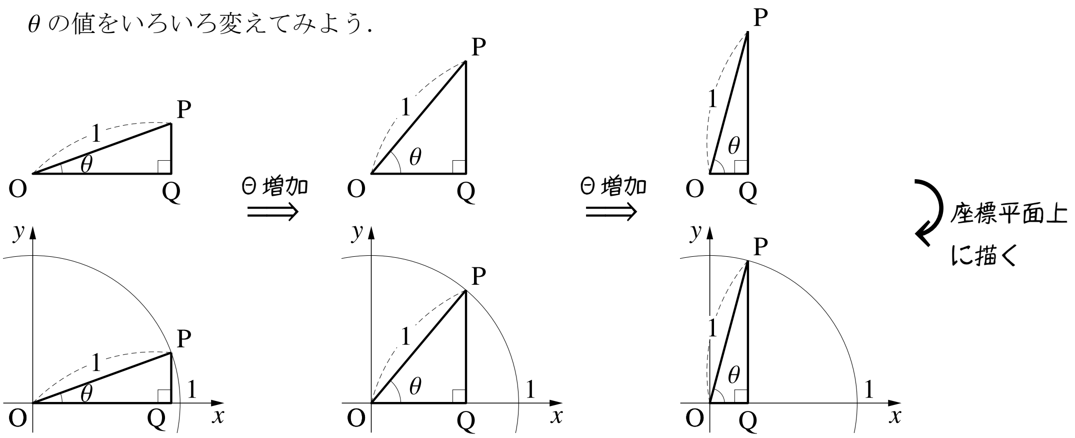
【解答】

1. △OPQ は 3 辺の長さが 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるので，P の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

2. P から垂線を始線へ下ろせば 1. と同じ直角三角形ができるので，P の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

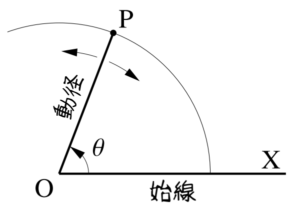
3. P の x 座標は $\cos 50°$ に，y 座標は $\sin 50°$ に一致する．「三角比の表 (p.207)」から P の座標は **(0.6428, 0.766)** である．

θ の値をいろいろ変えてみよう．



常に単位円周上にある点 P を**角点** (angular point) という[*10]．

上の図において，角 θ の大きさは，角点 P の位置で決まる．θ の増加に伴い，角点 P は反時計回りに回る．このとき，回転する線分 OP を**動径** (radial vector)，固定された半直線 OX を**始線** (initial line) という．

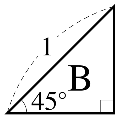


[*10] この「角点」という用語は 13th-note の造語であるので注意のこと．

【練習 27：斜辺が 1 である直角三角形】

(1) 右の直角三角形 B について，斜辺以外の 2 辺の長さを求めなさい．

(2) 斜辺の長さが 1，底辺の長さが $\dfrac{12}{13}$ である直角三角形について，対辺の長さを求めなさい．



【解答】

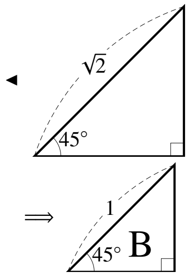
(1) 3 辺の長さが 1，1，$\sqrt{2}$ の直角三角形を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に縮小したものなので，

斜辺以外の辺は **2 辺とも $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$** になる．

(2) 対辺の長さを x とおくと，三平方の定理より

$$x^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{13^2 - 12^2}{13^2} = \frac{25}{13^2}$$

であるので，$x = \sqrt{\dfrac{25}{13^2}} = \boldsymbol{\dfrac{5}{13}}$ となる．

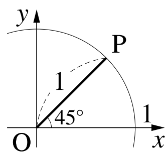


【練習 28：単位円と角点】

右図について，以下の問いに答えなさい．

(1) 動径と始線はどれか．右図に書き込みなさい．

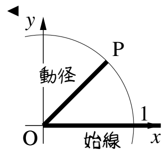
(2) 角点 P の座標をそれぞれ求めなさい．



【解答】

(1) 右欄外のようになる．

(2) P から垂線を始線へ下ろせば，3 辺が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，1 の直角三角形ができるので，P の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ である．



C. 三角比の拡張

角点 P の動く範囲を第 2 象限に広げれば，鈍角の三角比の定義を得る．

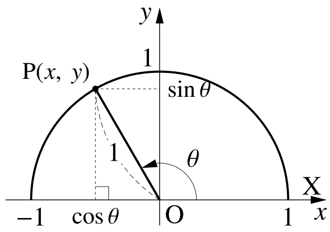
0° から 180° までの三角比

点 O を原点とする座標平面上に単位円の上半分をとり，その周上に角点 P をとる．x 軸の正の部分 OX に対し，$\angle\mathrm{POX} = \theta$ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ とするとき

$\cos\theta =$（角点 P の x 座標）

$\sin\theta =$（角点 P の y 座標）

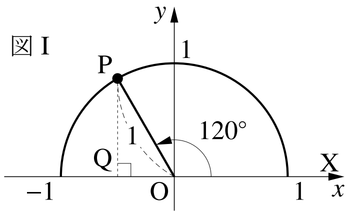
$\tan\theta = \dfrac{\text{（角点 P の } y \text{ 座標）}}{\text{（角点 P の } x \text{ 座標）}} =$ [*11]（動径 OP の傾き）

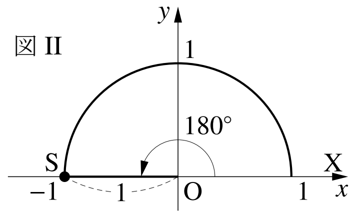


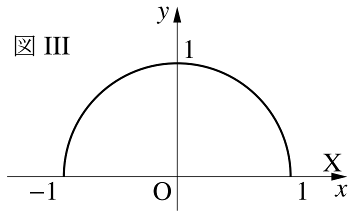
とする．ただし，角点 P の x 座標が 0 のとき，つまり，$\theta = 90°$ のときは $\tan\theta$ を定義しない．

*11 この等号は，（動径 OP の傾き）$= \dfrac{\text{（点 P の } y \text{ 座標）} - \text{（点 O の } y \text{ 座標）}}{\text{（点 P の } x \text{ 座標）} - \text{（点 O の } x \text{ 座標）}}$ であることから導かれる．

【例題 29】



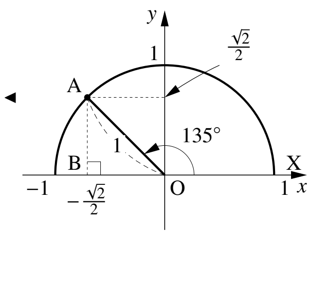




1. 図 I の角点 P，図 II の角点 S の座標を求めよ．
2. $\cos 120°$，$\sin 120°$，$\tan 120°$，$\cos 180°$，$\sin 180°$，$\tan 180°$ の値を求めなさい．
3. $\angle\mathrm{AOX} = 135°$ となるときの角点 A のおよその位置を図 III に書き込み，A の座標を答えよ．
4. $\sin 135°$，$\cos 135°$，$\tan 135°$ の値を求めよ．

【解答】

1. $\angle\mathrm{POQ} = 60°$ より，$\triangle\mathrm{OPQ}$ は 3 辺が $\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，1 の直角三角形であるから，$\mathbf{P}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である．
   また，図 II について $\mathbf{S(-1,\ 0)}$ である．
2. $\mathbf{\cos 120° = -\frac{1}{2}}$，$\mathbf{\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$，$\mathbf{\tan 120°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \mathbf{= -\sqrt{3}}$
   $\mathbf{\cos 180° = -1}$，$\mathbf{\sin 180° = 0}$，$\mathbf{\tan 180°} = \frac{0}{-1} \mathbf{= 0}$
3. 右欄外のようになり，$\triangle\mathrm{AOB}$ は 3 辺の長さが $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，1 の直角三角形であるので，$\mathbf{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ である．
4. $\mathbf{\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$\mathbf{\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$，$\mathbf{\tan 135°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathbf{= -1}$



D. 三角比から角度を求める

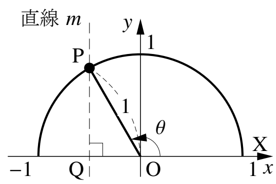
（p.207 の三角比の表を用いずに）三角比から角度を求めることを考えよう．そのためには，単位円を書いて，角点がどこにあるのかを書き込めばよい．

【例題 30】 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ を満たす θ を求めたい．それには

（角点 P の $\boxed{ア}$ 座標）$= -\frac{1}{2}$

となればよい．直線 m ： $\boxed{ア} = -\frac{1}{2}$ と単位円の交点は右図の P になり，

$\angle\mathrm{POQ} = \boxed{イ}$ である．よって，図中の角 θ は $\boxed{ウ}$ であるから $\theta = \boxed{ウ}$ とわかる．



【解答】 ア : x

イ : $\triangle\mathrm{OPQ}$ は 3 辺の長さが 1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{1}{2}$ の直角三角形なので $\angle\mathrm{POQ} = \mathbf{60°}$

ウ : $\theta = \angle\mathrm{POX} = 180° - \angle\mathrm{POQ} = \mathbf{120°}$．

【暗記 31：拡張された三角比】

図 I

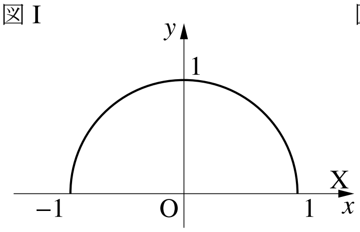


図 II

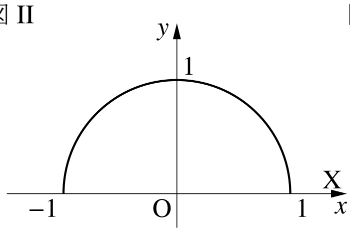
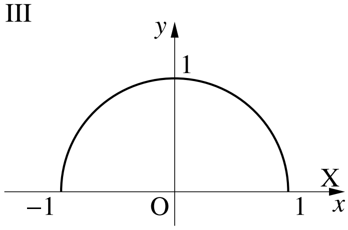


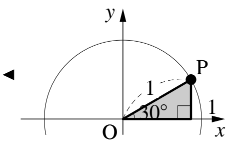
図 III



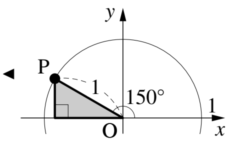
1. $\angle$POX $= 30^\circ$ となる角点 P を図 I に書き込み，$\cos 30^\circ$，$\sin 30^\circ$，$\tan 30^\circ$ の値を求めよ．
   （図に書き込む点は**およその位置**でよい，これは以下の問題でも同様である．）
2. $\angle$QOX $= 150^\circ$ となる角点 Q を図 II に書き込み，$\cos 150^\circ$，$\sin 150^\circ$，$\tan 150^\circ$ の値を求めよ．
3. $\angle$ROX $= 90^\circ$ となる角点 R を図 III に書き込み，$\cos 90^\circ$，$\sin 90^\circ$ の値を求めよ．

【解答】

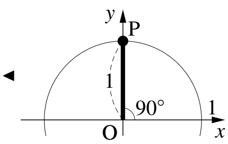
1. 角点 P の位置は，右欄外の図のようになる．塗りつぶされた直角三角形の 3 辺は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，1 であるので，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となり，
   $\boldsymbol{\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\boldsymbol{\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}}$，$\tan 30^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \boldsymbol{= \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$



2. 角点 P の位置は，右欄外の図のようになる．塗りつぶされた直角三角形の 3 辺は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，1 であるので，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となり，
   $\boldsymbol{\cos 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\boldsymbol{\sin 150^\circ = \dfrac{1}{2}}$，$\tan 150^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \boldsymbol{= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$



3. 角点 P の位置は，右欄外の図のようになる．P (0, 1) であり，
   $\boldsymbol{\cos 90^\circ = 0}$，$\boldsymbol{\sin 90^\circ = 1}$

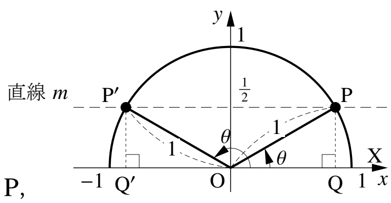


【練習 32：三角比を含む方程式〜その１〜】

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求めたい．それには

（角点の $\boxed{\text{ア}}$ 座標）$= \dfrac{1}{2}$

となればよい．直線 m ：$\boxed{\text{ア}} = \dfrac{1}{2}$ と単位円の交点は右図の角点 P, P’ になり，$\angle$POQ も $\angle$P’OQ’ も $\boxed{\text{イ}}$ に等しい．よって，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ の解は $\theta = \boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ になる．



【解答】　ア：y

イ：$\triangle$OPQ も $\triangle$OP’Q’ も 3 辺が 1，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1}{2}$ の直角三角形なので
$\boldsymbol{\angle \mathrm{POQ} = \angle \mathrm{P'OQ'} = 30^\circ}$

ウ：$\angle$POX $=$ **30°**　　エ：$\angle$P’OX $= 180^\circ - \angle$P’OQ’ $=$ **150°**．

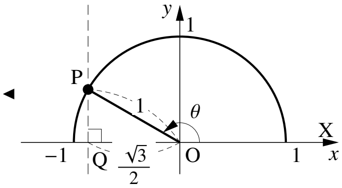
【練習 33：三角比を含む方程式〜その２〜】

以下の式を満たす θ を求めよ．ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

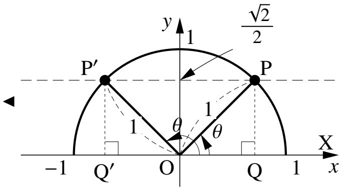
(1) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$　　(4) $\sin\theta = 1$

【解答】

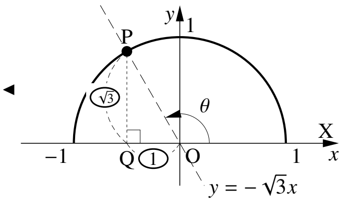
(1)（角点の x 座標の値）$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となればよい．そのようになるのは，右欄外の P である．△OPQ は辺の長さが $\dfrac{1}{2} : 1 : \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の直角三角形なので $\angle\mathrm{POQ} = 30^\circ$．つまり，$\theta = 180^\circ - 30^\circ = \mathbf{150^\circ}$．



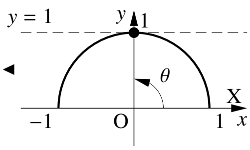
(2)（角点の y 座標の値）$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となればよい．そのようになる点は 2 つ存在し，右欄外の P，P’ である．△OPQ，△OP′Q′ とも直角二等辺三角形であるので $\angle\mathrm{POQ} = 45^\circ, \angle\mathrm{P'OQ'} = 45^\circ$．
つまり，$\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$，または，$\theta = 180^\circ - 45^\circ = \mathbf{135^\circ}$．



(3) 動径 OP の傾きが $-\sqrt{3}$ になればよい．そのような点は右欄外の P である．
△OPQ は辺の長さが $1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形なので $\angle\mathrm{POQ} = 60^\circ$．
つまり，$\theta = 180^\circ - 60^\circ = \mathbf{120^\circ}$．



(4)（角点の y 座標の値）$= 1$ となればよい．そのようになる点は，右欄外の P であるから，$\boldsymbol{\theta = 90^\circ}$．



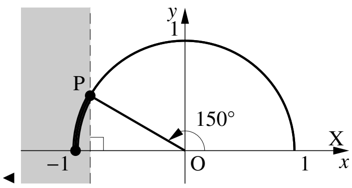
【発展 34：三角比を含む不等式】

以下の式を満たす θ を求めよ．ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

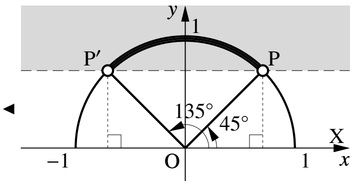
① $\cos\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　② $\sin\theta > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　③ $\tan\theta > -\sqrt{3}$

【解答】

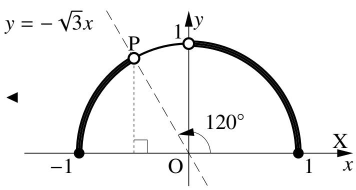
① 上半分の単位円周上において（x 座標の値）$\leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であればよい．
そのようになるのは，右欄外の太線部分であるので，
$\mathbf{150^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ}$．



② 上半分の単位円周上において（y 座標の値）$> \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であればよい．
そのようになるのは，右欄外の太線部分であるので，
$\mathbf{45^\circ < \theta < 135^\circ}$．



③ 上半分の単位円周上において（動径の傾き）$> -\sqrt{3}$ であればよい．
そのようになるのは，右欄外の太線部分であるので，
$\mathbf{0^\circ \leqq \theta < 90^\circ}$，$\mathbf{120^\circ < \theta \leqq 180^\circ}$．



【練習 35：有名角の三角比】

0°，30°，45°，60°，90°，120°，135°，150°，180° の三角比の値をそれぞれ求めよ．

【解答】

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	なし	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0

これらの値は，単位円を用いていつでも導けるようにしておこう．また，90° 以上の有名角でない角の三角比の値は，p.207 の三角比の表，『$90° + \theta$ の三角比』(p.171)，『$180° - \theta$ の三角比』(p.170) を用いて求める．

2.　拡張された三角比の相互関係

A.　拡張された三角比の相互関係

鋭角の三角比において成立した以下の式は，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ においても成立する．

拡張された三角比の相互関係

角 θ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の式が成り立つ．（ただし，i), iii), iv) において，分母が 0 となる場合は考えない．）

i) $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の関係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

ii) $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の関係

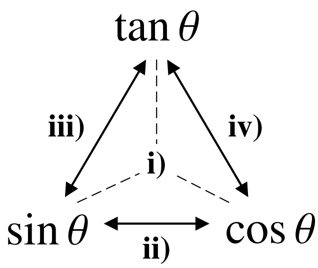
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

iii) $\tan\theta$ と $\sin\theta$ の関係

$$1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

iv) $\cos\theta$ と $\tan\theta$ の関係

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

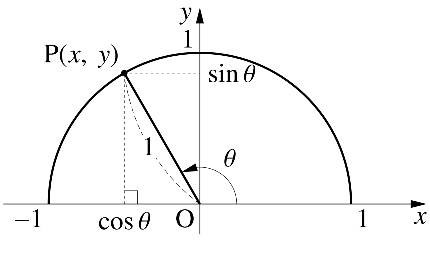


右図の単位円において $\cos\theta = x$，$\sin\theta = y$ であり

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

は tan の定義であった[*12]．また，三平方の定理より $x^2 + y^2 = 1$ であるから

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$



が成り立つ．この等式から，鋭角の時と同じように iii), iv) は導かれる（自力で導けるよう練習しよう）．

[*12] p.162 の脚注を参照のこと

【例題 36】 次の問に答えよ．ただし $0° \leqq \alpha \leqq 180°$ である．

1. $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．
2. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

公式 ii)，iii)，iv) を用いるときは，sin は負の値にならないことに注意して解く必要がある．
一方，cos，tan の値は，負の値もとりうることに注意しよう．

【解答】

1. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ より

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

よって，$\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \boldsymbol{\pm\dfrac{4}{5}}$.

また，$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より，

$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ のとき $\tan\alpha = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ のとき $\tan\alpha = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{4}}$

2. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ より

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$\sin\alpha \geqq 0$ なので，$\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$.

また，$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より $\tan\alpha = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$ である．

◀『三角比の相互関係 ii)』

◀『三角比の相互関係 i)』

◀ $\cos\alpha = \pm\dfrac{4}{5}$，$\tan\alpha = \pm\dfrac{3}{4}$（複号同順）と書いてもよい

◀『三角比の相互関係 ii)』

◀ $0° \leqq \alpha \leqq 180°$ のとき，定義から $\sin\alpha \geqq 0$.

◀『三角比の相互関係 i)』

【暗記 37：$\tan\theta$ と $\cos\theta$ との関係】

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ から，等式 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$， $1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ を導け．

【解答】 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta} \quad ■$$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ の両辺を $\sin^2\theta$ で割ると

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+1=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2\theta}+1=\frac{1}{\sin^2\theta} \quad ■$$

【練習 38：三角比の相互関係の利用〜その３〜】

『拡張された三角比の相互関係』を使って次の問に答えよ．ただし $0°\leqq\alpha\leqq 180°$ である．

(1) $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

(2) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

(3) $\tan\alpha=7$ のとき，$\cos\alpha$，$\sin\alpha$ の値を求めよ．

【解答】

(1) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ より

◀『三角比の相互関係 ii)』

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

$\sin\alpha\geqq 0$ なので，$\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{9}{16}}=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$.

◀ $0°\leqq\alpha\leqq 180°$ のとき，定義から $\sin\alpha\geqq 0$.

また，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}}=-\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\mathbf{-\dfrac{3\sqrt{7}}{7}}$

(2) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ より

◀『三角比の相互関係 ii)』

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$$

よって，$\cos\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{7}{9}}=\mathbf{\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$.

また，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より，

◀『三角比の相互関係 i)』

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ のとき $\tan\alpha=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{14}}{7}}$

◀ $\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$， $\tan\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ （複号同順）と書いてもよい

$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ のとき $\tan\alpha=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{-\frac{\sqrt{7}}{3}}=\mathbf{-\dfrac{\sqrt{14}}{7}}$

(3) $\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ より

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+7^2} = \frac{1}{50}$$

よって，$\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{50}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ である．

また，$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より

$$7 = \frac{\sin\alpha}{\pm\frac{\sqrt{2}}{10}} \quad \therefore \quad \sin\alpha = 7\times\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \pm\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$0 \leqq \sin\alpha$ であるので，$\sin\alpha = -\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ は不適．よって

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10},\quad \sin\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}}$$

◀ 三角比の相互関係 iv)

◀『三角比の相互関係 i)』

◀ 実際，単位円を書けば，tan の値が正であることから，cos は正の値しかありえないことがわかる．

【練習 39：三角比の計算】

次の式を簡単にせよ．

(1) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

(2) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}
&(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2\\
&= (\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) + (\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\\
&= 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\\
&= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

◀『三角比の相互関係 ii)』

(2)
$$\begin{aligned}
&\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\\
&= \frac{\cos\theta(1-\sin\theta) - \cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\
&= \frac{-2\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}\\
&= -\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}\\
&= -\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}\\
&= \boldsymbol{-2\tan\theta}
\end{aligned}$$

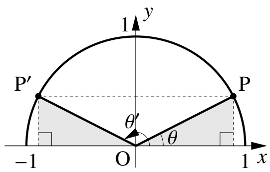
◀ 通分した

◀『三角比の相互関係 ii)』

◀『三角比の相互関係 i)』

B. 180° − θ の三角比

【例題 40】 右の単位円において，角点 P の座標は (0.891, 0.454) である．以下の問いに答えよ．



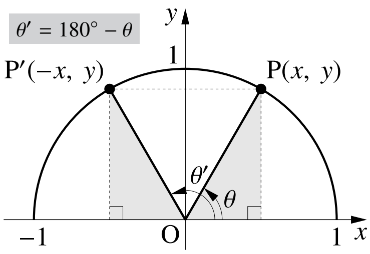
1. $\cos\theta$，$\sin\theta$ を求めよ．
2. 図中の θ' を θ で表せ．
3. P′ の座標を求めよ．
4. $\cos\theta'$，$\sin\theta'$ を求めよ．

【解答】

1. 角点 P の座標は (0.891, 0.454) なので，$\boldsymbol{\cos\theta = 0.891}$，$\boldsymbol{\sin\theta = 0.454}$.
2. $\theta + \theta' = 180°$ なので，$\boldsymbol{\theta' = 180° - \theta}$.
3. P と y 座標が一致しているので，**P′ (−0.891, 0.454)**.
4. P′ の座標は (−0.891, 0.454) なので，$\boldsymbol{\cos\theta' = -0.891}$，$\boldsymbol{\sin\theta' = 0.454}$.

◀ P′ は，y 軸について P と対称である．

右図のように，単位円周上に角 θ の動径 OP と角 $180° - \theta$ ($= \theta'$ とする) の動径 OP′ をとる．



点 P の座標を (x, y) とすると，点 P′ の座標は $(-x, y)$ であり

$$\sin\theta' = y = \sin\theta,\qquad \cos\theta' = -x = -\cos\theta,$$

$$\tan\theta' = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

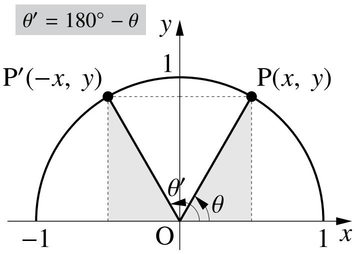
と表すことができる．ここで，$\theta' = 180° - \theta$ であるから，次のようにまとめることができる．

180° − θ の三角比

角 θ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の三角比において

$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$$

が成り立つ(ただし，$\tan 90°$ は考えない)．



つまり，$90° < \theta \leqq 180°$ の三角比は，$0° \leqq \theta < 90°$ の三角比になおして，その値を求めることができる．

【例題 41】 次の式を満たすように $\boxed{}$ の中に 90° より小さい角を入れよ．

1. $\sin 100° = \sin \boxed{}$
2. $\cos 179° = -\cos \boxed{}$
3. $\tan 125° = -\tan \boxed{}$

【解答】

1. $\sin 100° = \sin(180° - 80°) = \sin \mathbf{80°}$ ◀ $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$
2. $\cos 179° = \cos(180° - 1°) = -\cos \mathbf{1°}$ ◀ $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$
3. $\tan 125° = \tan(180° - 55°) = -\tan \mathbf{55°}$ ◀ $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

この式は暗記するようなものではない．「$180^\circ-\theta$ の三角比は θ だけを使った三角比で表せる」ことを理解し，必要なときに，上のように単位円を描き，導出できるようにしておこう．

【例題 42】 p.207 を用いて，$\cos 110^\circ$，$\sin 110^\circ$，$\tan 110^\circ$ の値を求めよ．

【解答】 『$180^\circ-\theta$ の三角比』より，$\cos 110^\circ=-\cos 70^\circ$ である．p.207 の表から $\cos 70^\circ=0.3420$ であるので，$\mathbf{\cos 110^\circ=-0.3420}$．同様にして

$\sin 110^\circ=\sin 70^\circ=\mathbf{0.9397}$,　$\tan 110^\circ=-\tan 70^\circ=\mathbf{-2.7475}$

◀『$90^\circ+\theta$ の三角比』を用いてもよい．その場合は，$\cos 110^\circ=-\sin 20^\circ=-0.3420$ となる．

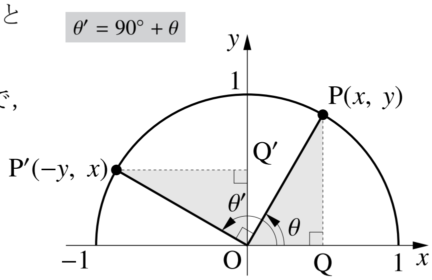
C.　$90^\circ+\theta$ の三角比

右図のように，単位円周上に角 θ の動径 OP と角 $90^\circ+\theta$ $(=\theta'$ とする$)$の動径 OP$'$ をとる．

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\triangle$OPQ と $\triangle$OP$'$Q$'$ は合同なので，点 P$'$ の座標は $(-y,\ x)$ となるから

$\sin\theta'=x=\cos\theta$,　$\cos\theta'=-y=-\sin\theta$,

$\tan\theta'=\dfrac{x}{-y}=-\dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{\tan\theta}$



と表すことができる．ここで，$\theta'=90^\circ+\theta$ であるから，次のようにまとめることができる．

$90^\circ+\theta$ の三角比

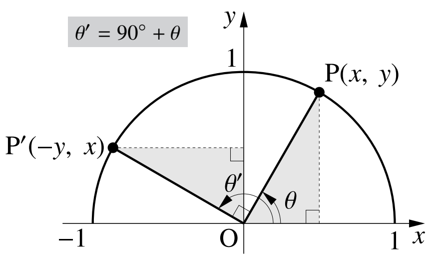
角 θ が $0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ の三角比において

$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$

$\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$

$\tan(90^\circ+\theta)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

が成り立つ(ただし，$\tan 90^\circ$ は考えない)．



【例題 43】 次の式を満たすように $\boxed{}$ の中に 90° より小さい角を入れよ．

1. $\sin 100^\circ=\cos\boxed{}$　2. $\cos 179^\circ=-\sin\boxed{}$　3. $\tan 125^\circ=-\dfrac{1}{\tan\boxed{}}$

【解答】

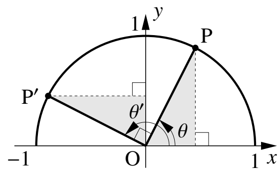
1. $\sin 100^\circ=\sin(90^\circ+10^\circ)=\cos\mathbf{10^\circ}$
2. $\cos 179^\circ=\cos(90^\circ+89^\circ)=-\sin\mathbf{89^\circ}$
3. $\tan 125^\circ=\tan(90^\circ+35^\circ)=-\dfrac{1}{\tan\mathbf{35^\circ}}$

◀ $\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$
◀ $\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$
◀ $\tan(90^\circ+\theta)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

この式も暗記するようなものではない．「$90^\circ+\theta$ の三角比は θ だけを使った三角比で表せる」ということを理解し，必要なときに，上のように単位円を描いて導出できるようにしておこう．

【暗記 44：$90^\circ+\theta$ の三角比の導出】

右の単位円において，角点 P の座標は $(a,\ b)$ である．以下の問いに答えよ．



1. $\cos\theta$, $\sin\theta$ を a, b で表せ．
2. 図中の θ' を θ で表せ．
3. P′ の座標を a, b で表せ．
4. $\cos\theta'$, $\sin\theta'$ を a, b で表せ．

【解答】

1. 角点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の x 座標が $\cos\theta$, y 座標が $\sin\theta$ なので，$\boldsymbol{\cos\theta = a}$, $\boldsymbol{\sin\theta = b}$.
2. $\angle\mathrm{POP'} = 90^\circ$ なので，$\boldsymbol{\theta' = 90^\circ + \theta}$.
3. 塗りつぶされた 2 つの直角三角形は合同なので，$\mathbf{P'}\ \boldsymbol{(-b,\ a)}$.
4. P′ の座標は $(-b,\ a)$ なので，$\boldsymbol{\cos\theta' = -b}$，$\boldsymbol{\sin\theta' = a}$.

【練習 45：$180^\circ-\theta$，$90^\circ+\theta$ の三角比の利用～その１～】

次の式を満たすように $\boxed{}$ の中に 90° より小さい角を入れよ．

(1) $\cos 120^\circ = -\cos\boxed{ア}$，$\sin 120^\circ = \sin\boxed{イ}$　(2) $\cos 120^\circ = -\sin\boxed{ウ}$，$\sin 120^\circ = \cos\boxed{エ}$

(3) $\tan 120^\circ = -\tan\boxed{オ} = -\dfrac{1}{\tan\boxed{カ}}$

【解答】

(1) 『$180^\circ-\theta$ の三角比』より，**ア : 60**，**イ : 60**

(2) 『$90^\circ+\theta$ の三角比』より，**ウ : 30**，**エ : 30**

(3) 『$180^\circ-\theta$ の三角比』より，**オ : 60**

『$90^\circ+\theta$ の三角比』より，**カ : 30**

【練習 46：$180^\circ-\theta$，$90^\circ+\theta$ の三角比の利用～その２～】

次の式を簡単にしなさい．

(1) $\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 80^\circ + \cos 110^\circ + \cos 140^\circ + \cos 170^\circ$

(2) $\cos 10^\circ + \cos 50^\circ + \cos 90^\circ + \cos 130^\circ + \cos 170^\circ$

【解答】

(1) 『$90^\circ+\theta$ の三角比』より

$$\begin{aligned} &\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 80^\circ + \cos 110^\circ + \cos 140^\circ + \cos 170^\circ \\ =\ &\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 80^\circ - \sin 20^\circ - \cos 50^\circ - \cos 80^\circ = \mathbf{0} \end{aligned}$$

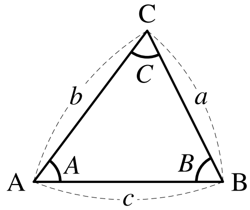
(2) 『$180^\circ-\theta$ の三角比』より

$$\begin{aligned} &\cos 10^\circ + \cos 50^\circ + \cos 90^\circ + \cos 130^\circ + \cos 170^\circ \\ =\ &\cos 10^\circ + \cos 50^\circ + 0 - \cos 50^\circ - \cos 10^\circ = \mathbf{0} \end{aligned}$$

3.3　余弦定理・正弦定理

1.　辺と角の名前

△ABC において，次のように略すことが多い．目的は，後で学ぶ公式を見やすくする事である．



∠A，∠B，∠C の大きさ　⟶　それぞれ A，B，C

辺 BC，CA，AB の長さ ⟶　それぞれ a，b，c

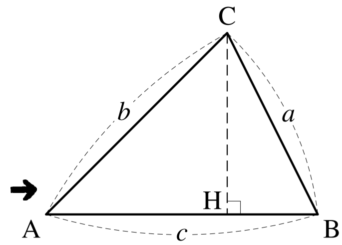
たとえば，角 A の向かい側にある辺 BC を a と表すことになる．

今後，特に断りのない限りこの記法にしたがうこととする．

2.　余弦定理（第 2 余弦定理）

A.　点 A からみた余弦定理

A が鋭角である △ABC において，右図のように垂線 CH をひき，△BCH に三平方の定理を用いると



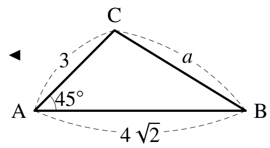
$$
\begin{aligned}
a^2 = \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\
&= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\
&= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\
&= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos A
\end{aligned}
$$

という等式が成り立つ．この等式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

を（点 A からみた）**余弦定理** (cosine theorem) と呼ぶ[*13]．

【例題 47】 △ABC において，$b = 3$，$c = 4\sqrt{2}$，$A = 45^\circ$ のとき，a の値を求めよ．



【解答】 点 A からみる余弦定理より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A = 3^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 3\cdot 4\sqrt{2}\cos 45^\circ$$

$$= 9 + 32 - 24\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 17$$

よって，$\boldsymbol{a = \sqrt{17}}$ である．

*13 **第 2 余弦定理** (second cosine theorem) ともいう．第 1 余弦定理については p.205 を参照のこと．単に「余弦定理」というときにはこちらを指す．

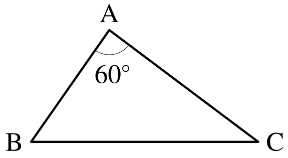
【練習 48：余弦定理の利用〜その１〜】

右図の $\triangle$ABC について，以下の問いに答えなさい．

(1) a, b, c は，通常どの辺の長さを表すか．右図に書き込みなさい．

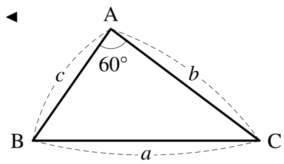
(2) $b = 3$，$c = 2$ のとき，a の値を求めよ．

(3) $a = 3\sqrt{7}$，$c = 6$ のとき，b の値を求めよ．



【解答】

(1) 右欄外のようになる．



(2) 余弦定理より $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ なので

$$a^2 = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ$$

$$= 9 + 4 - 2\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 7$$

$a > 0$ より，$\boldsymbol{a = \sqrt{7}}$ である．

(3) 余弦定理より $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ なので

$$\left(3\sqrt{7}\right)^2 = b^2 + 6^2 - 2\cdot b\cdot 6\cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow\ 63 = b^2 + 36 - \cancel{2}\cdot b\cdot 6\cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

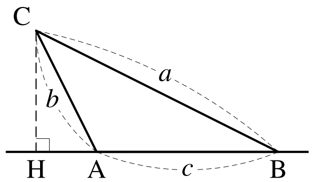
$$\Leftrightarrow\ 0 = b^2 - 6b - 27$$

$$\Leftrightarrow\ (b-9)(b+3) = 0$$

$b > 0$ より，$\boldsymbol{b = 9}$ である．

B.　辺の長さを求める

（点 A からみた）余弦定理は，A が鋭角でなくても成り立つ．右下の図のように，直線 AB 上に垂線 CH をひき，$\triangle$BCH に三平方の定理を用いると



$$(\text{左辺}) = a^2 = \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2$$

$$= \{b\sin(180^\circ - A)\}^2 + \{c + b\cos(180^\circ - A)\}^2$$

$$= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$$ ←『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.170)

（Aが鋭角の時と同じ計算になるので，省略）

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (\text{右辺})$$

角 A が直角のときも，上の等式において $A = 90^\circ$ とすれば成立する．

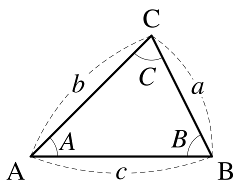
余弦定理（辺の長さを求める）

$\triangle$ABC において，次の等式が成り立つ．

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$　（点Aからみた余弦定理）

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$　（点Bからみた余弦定理）

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$　（点Cからみた余弦定理）



たとえば，点 A から見る代わりに点 B から見ると，a は b に，b は c に，c は a に，A は B になって，点 A からみた余弦定理は点 B からみた余弦定理となる．

この公式は，「2 辺とその間の角が分かれば三角形は決定し，特に，もう 1 辺の長さが決まる」事実に対応している．ただし，上の例題 (3) や p.177, 181 のように「2 辺とその間でない角」が与えられた三角形においても，この余弦定理は利用できる．

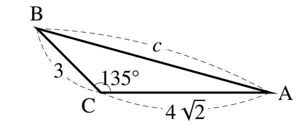
【例題 49】 △ABC において，$a = 3$，$b = 4\sqrt{2}$，$C = 135°$ のとき，c の値を求めよ．

【解答】 点 C からみた余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 3^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4\sqrt{2}\cos 135°$$

$$= 9 + 32 - \cancel{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = 65$$

$c > 0$ より，$\boldsymbol{c = \sqrt{65}}$ である．

◀


C. 角(の余弦)の大きさを求める

点 A から見た余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を $\cos A$ について解けば

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

となるので，a, b, c の大きさから角 A（の余弦）求めることができる．

この等式も，単に余弦定理と呼ばれることが多い．

【例題 50】 △ABC において，$a = \sqrt{19}$，$b = 3$，$c = 5$ のとき，A の値を求めよ．また，$\cos C$ を求めよ．

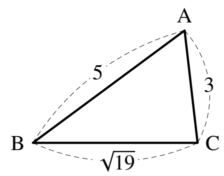
「$\cos C$ を求めよ」のような問題では，角 C の値を求める必要はない．

【解答】 △ABC に点 A からみた余弦定理を用いて

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 5^2 - \left(\sqrt{19}\right)^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{2}$$

よって，$\boldsymbol{A = 60°}$ となる．また，点 A からみた余弦定理を用いて

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\left(\sqrt{19}\right)^2 + 3^2 - 5^2}{2 \cdot \sqrt{19} \cdot 3} = \frac{\cancel{3}}{2 \cdot \sqrt{19} \cdot \cancel{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{19}}}$$

◀


◀ 分母を有理化すれば $\dfrac{\sqrt{19}}{38}$

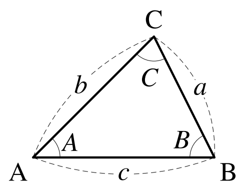
余弦定理（角の余弦を求める）

△ABC において，次の等式が成り立つ．

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad （点Aからみた余弦定理）$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad （点Bからみた余弦定理）$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad （点Cからみた余弦定理）$$



この等式は「3 辺を決めれば三角形も決定し，内角の大きさが決まる」ことに対応している．

この形で余弦定理を覚えてもよい．覚えやすい方で覚え，もう一方へ変形できれば十分である．

【暗記 51：余弦定理の式変形】

1. 等式 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ から，$\cos B$ を a, b, c で表す式を導け．

2. 等式 $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ から，c^2 を求める式を導け．

【解答】

1. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \Leftrightarrow 2ca\cos B = c^2 + a^2 - b^2$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}$$

2. $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow 2ab\cos C = a^2+b^2-c^2$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C}$$

3. 三角形の決定（１）

A. 三角形の決定条件・その１～３辺が与えられた場合

3 辺の長さを与えれば，三角形はただ 1 つに決定し，余弦定理を用いて，各頂点の角度の大きさを計算できる．これは，三角形の合同条件「3 辺が等しい(3 辺相等)」に対応している．

【練習 52：余弦定理の利用～その２～】

△ABC の 3 辺の長さが $a = \sqrt{21}$，$b = 4$，$c = 5$ のとき

(1) A の値を求めよ．　　(2) $\cos C$ を求め，∠C は鋭角か鈍角か答えよ．

【解答】

(1) △ABC に点 A からみた余弦定理を用いて

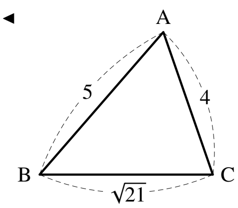
$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4^2+5^2-\left(\sqrt{21}\right)^2}{2\cdot4\cdot5} = \frac{1}{2}$$

よって，$\boldsymbol{A = 60^\circ}$ となる．

(2) 点 C からみた余弦定理を用いて

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{\left(\sqrt{21}\right)^2+4^2-5^2}{2\cdot\sqrt{21}\cdot4} = \frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{8}^{\,2}\sqrt{21}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{14}}$$

$\cos C$ が正なので $C < 90^\circ$ と分かる．よって，**∠C は鋭角**である．

◀


◀ 参考までに，$\dfrac{\sqrt{21}}{14} \fallingdotseq 0.327$ であるので，p.207 の表より $C \fallingdotseq 71^\circ$ である．

B. 鋭角三角形・鈍角三角形

鋭角三角形なのか，鈍角三角形なのかは，三角形の一番大きな角が鋭角か，鈍角か調べれば十分である．

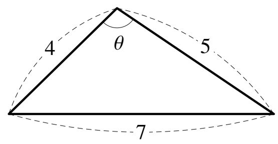
【練習 53：鋭角三角形・鈍角三角形】

3 辺が 4, 5, 7 の三角形において，最も大きな角はどこか．また，これは鋭角三角形か，鈍角三角形か．

【解答】 三角形を図示すると右欄外の図のようになり，**長さ 7 の辺の向かいの角が一番大きい**と分かる．その角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{4^2+5^2-7^2}{2\cdot4\cdot5} = \frac{-8}{2\cdot4\cdot5} < 0$$

から $\theta > 90^\circ$ と分かるので，この三角形は**鈍角三角形**である．

◀ 

点 A からみた余弦定理 $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2ab}$ を用いて，次の事実が導かれる．

A が鋭角 $\Leftrightarrow$ $\cos A > 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 < b^2+c^2$

A が直角 $\Leftrightarrow$ $\cos A = 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 = b^2+c^2$ （三平方の定理に一致）

A が鈍角 $\Leftrightarrow$ $\cos A < 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 > b^2+c^2$

C. 三角形の決定条件・その２〜２辺とその間の角が与えられた場合

2 辺とその間の角を与えれば三角形はただ 1 つに決定し，余弦定理を用いて残りの辺の長さと角度の大きさを計算できる．これは，三角形の合同条件「2 辺とその間の角が等しい(2 辺 夾(きょう) 角相等)」に対応している．

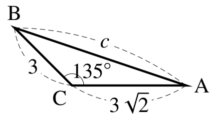
【例題 54】 △ABC において，$a=3$，$b=3\sqrt{2}$，$C=135^\circ$ のとき，c，$\cos B$ の値を求めよ．

【解答】 点 C からみた余弦定理より

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C = 3^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\cdot3\cdot3\sqrt{2}\cos135^\circ$$
$$= 9+18-\cancel{2}\cdot3\cdot3\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = 45$$

$c>0$ より，$\boldsymbol{c = 3\sqrt{5}}$ である．さらに，点 B から見た余弦定理より

$$\cos B = \frac{\left(3\sqrt{5}\right)^2+3^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot3\sqrt{5}\cdot3} = \frac{\cancel{36}^{\,2}}{\cancel{18}\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{2}{5}\sqrt{5}}$$

◀ 

◀ ちなみに $\cos A = \dfrac{3}{10}\sqrt{10}$

D. 答えが 2 つある三角形

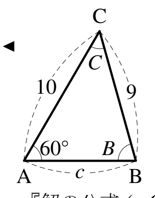
2 辺とその間でない角が与えられた場合も，余弦定理を用いて計算できる．しかし，三角形が決定するとは限らず，答えが 2 つになる場合がある．この問題については p.181 において再び取り上げられる．

【練習 55：2 辺とその間でない角が与えられた場合〜その１〜】

$A=60^\circ$，$a=9$，$b=10$ である三角形において，c を求めよ．

【解答】 点 A からみた余弦定理より

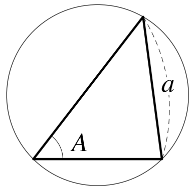
$$9^2 = 10^2+c^2-2\cdot10c\cos60^\circ$$
$$\Leftrightarrow\ 81 = 100+c^2-\cancel{2}\cdot10c\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ c^2-10c+19=0 \qquad \therefore\ c = \boldsymbol{5\pm\sqrt{6}}$$

◀ 

◀『解の公式 (p.63)』を用いて
$\dfrac{10\pm\sqrt{100-76}}{2} = \dfrac{\cancel{2}(5\pm\sqrt{6})}{\cancel{2}}$

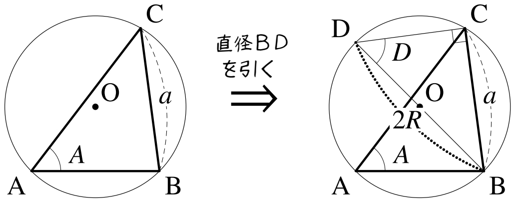
4. 正弦定理

A. 外接円と正弦定理



三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円** (circumscribed circle) といい，外接円の中心を**外心** (circumcenter) という[*14]．数学 A で学ぶように，1 つの三角形に対し，外接円と外心は 1 つに定まる．

次のように，外心が O である鋭角三角形 △ABC を考え，直径 BD を引こう．



線分 BD は円の直径なので ∠BCD = 90° であり，△DBC は直角三角形と分かり，$\sin D = \dfrac{a}{2R}$ である．円周角の定理より $A = D$ であるので

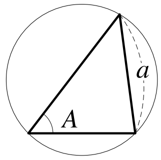
$$\frac{a}{2R} = \sin D = \sin A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

同様に，$\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ も成り立つ．これらの等式を，**正弦定理** (sine theorem) という．

正弦定理では，頻繁に複分数 (p.149) の計算を必要とするので，よく練習しよう．

【例題 56】 △ABC の外接円の半径を R とする．以下の問に答えなさい．

1. $a = 4$, $\sin A = \dfrac{1}{3}$ のとき，R を求めよ．
2. $a = \sqrt{7}$, $A = 30^\circ$ のとき，R を求めよ．
3. $a = \sqrt{6}$, $A = 60^\circ$ のとき，R を求めよ．

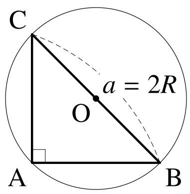


【解答】 いずれも，正弦定理より

◂ $2R = \dfrac{a}{\sin A}$

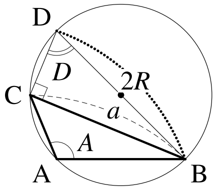
1. $2R = \dfrac{4}{\frac{1}{3}} = \dfrac{4 \times 3}{\frac{1}{3} \times 3} = 12$ なので，$\boldsymbol{R = 6}$.
2. $2R = \dfrac{\sqrt{7}}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\sqrt{7} \times 2}{\frac{1}{2} \times 2} = 2\sqrt{7}$ なので，$\boldsymbol{R = \sqrt{7}}$.
3. $2R = \dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{6} \times 2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2} = \dfrac{2\cancel{\sqrt{6}}^{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{2}$ なので，$\boldsymbol{R = \sqrt{2}}$.

B. 直角三角形・鈍角三角形の正弦定理



A が直角のときは $\sin A = \sin 90^\circ = 1$ である．また，$a = 2R$ である．つまり $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ は両辺とも a と一致し成立する．

[*14] 外心は 3 辺の垂直二等分線の交点に一致する．詳しくは，数学 A で扱う．



A が鈍角のとき，左図のように △ABC の外接円に直径 BD を引くと

$A = \angle\mathrm{DAC} + \angle\mathrm{DAB}$
$\quad = \angle\mathrm{DBC} + \angle\mathrm{DCB}$ （いずれも，円周角の定理）
$\quad = 180^\circ - D$ （△DCB に着目）

である[*15]ので，『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.170) から，$\sin A = \sin(180^\circ - D) = \sin D$ とわかる．

直角三角形 △DBC について $\sin D = \dfrac{a}{2R}$ であるから，次のようにして正弦定理が示される．

$$\sin A = \sin D = \frac{a}{2R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

C. 正弦定理のまとめ

3 つの等式 $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ から，次のようにまとめることができる．

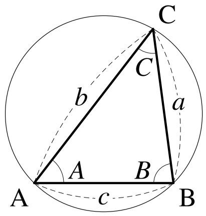
正弦定理

△ABC の外接円の半径 R について

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立つ．特に，辺と角について次の 3 つの式が成り立つ．

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$



【例題 57】

1. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ を a について解け．また，$\sin A = \dfrac{1}{3}$, $b = 6$, $\sin B = \dfrac{2}{5}$ のとき，a の値を求めよ．
2. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ を $\sin A$ について解け．また，$a = 2$, $b = 3$, $\sin B = \dfrac{3}{7}$ のとき，$\sin A$ の値を求めよ．

【解答】

1. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ の両辺に $\sin A$ を掛けて，$\boldsymbol{a = \dfrac{b \sin A}{\sin B}}$．よって，$a = \dfrac{b\sin A}{\sin B} = \dfrac{6 \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{\frac{2}{5}} = \mathbf{5}$

2. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ について，両辺の逆数をとれば

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sin A = \frac{a \sin B}{b}}$$

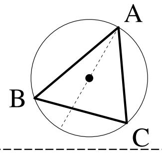
よって，$\sin A = \dfrac{a \sin B}{b} = \dfrac{2 \times \frac{3}{7}}{3} = \dfrac{\frac{6}{7}}{3} = \mathbf{\dfrac{2}{7}}$.

[*15] 一般に，円に内接する四角形においては，向かい合う 2 角の和は 180° となる (p.188)．詳しくは，数学 A でも取り扱われる．

【暗記 58：正弦定理の証明】

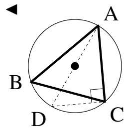
右図について，円の半径を R とする．

$b = 2R\sin B$ を証明しなさい．



【解答】　直径 AD をとれば，$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{B}$ である．また，$\triangle\mathrm{ACD}$ は $\angle\mathrm{C}$ が直角なので $\sin\angle\mathrm{ADC} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DA}} = \dfrac{b}{2R}$，以上より

$$\frac{b}{2R} = \sin B \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 2R\sin B$$

◀


等式 $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$ を確認できるようにしよう．

5.　三角形の決定（２）

A.　三角形の決定条件・その３～１辺とその両端の角が与えられた場合

1 辺とその両端の角が与えれば，三角形はただ 1 つに決定し，残りの辺の長さ，角度またはその余弦を求められる．これは，三角形の合同条件「1 辺とその両端の角が等しい(2 角夾(きょう)辺相等)」に対応している．

【練習 59：正弦定理の利用～その２～】

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$c = 12$，$C = 45°$，$A = 60°$ のとき，a の値と，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を求めよ．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$b = 7$，$B = 60°$，$c = 6$ のとき，$\sin C$ の値と，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を求めよ．

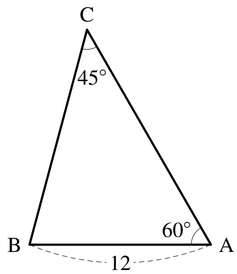
【解答】

(1) 正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A}$，$\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ より

$$a = \frac{c\sin A}{\sin C} = \frac{12\times\sin 60°}{\sin 45°} = \frac{12\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}\times 2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \mathbf{6\sqrt{6}}$$

$$2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{12}{\sin 45°} = \frac{12\times 2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2} = 12\sqrt{2} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{R = 6\sqrt{2}}$$

◀


(2) 正弦定理より $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin B}{b}$ であるので

$$\sin C = \frac{c\sin B}{b} = \frac{6\sin 60°}{7} = \frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{7}}$$

また，$2R = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{7}{\sin 60°} = \dfrac{7\times 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2} = \dfrac{14}{\sqrt{3}}$ から $R = \mathbf{\dfrac{7}{\sqrt{3}}}$．

◀ 有理化すれば $R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$．形が複雑になるので，有理化してもしなくてもよい．

正弦定理から 4 つのことが分かる．上のように辺の長さを求めること，角の（正弦の）大きさを求めること，さらに，外接円の半径を求めること (p.178) と，正弦の比と辺の比が等しいこと (p.182) である．

B.　三角形の決定条件・その４～２辺とその間でない角が与えられた場合

p.177 でも取り上げた，2 辺とその間でない角が与えられた場合を再び考えよう．

【練習 60：2 辺とその間でない角が与えられた場合】

(1) $A=30°$，$a=\sqrt{2}$，$b=2$ である三角形を考えよう．正弦定理を用いて，$B=\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$（ア＜イ）とわかる．一方，余弦定理を用いて，$c=\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$（ウ＜エ）とわかる．
ここで，$B=\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ のときの図をそれぞれ描けば，$B=\boxed{\text{オ}}$ のときの方が c が大きいので，
$B=\boxed{\text{ア}}$ ならば $c=\boxed{\text{カ}}$，$B=\boxed{\text{イ}}$ ならば $c=\boxed{\text{キ}}$ とわかる．

(2) $A=45°$，$a=2$，$b=\sqrt{2}$ である三角形を考えよう．
正弦定理を用いると B の値は 2 つ求められるが，このうち $B=\boxed{\text{ク}}$ のみ適する．
実際，余弦定理を用いると c の値は 2 つ求められるが，このうち $c=\boxed{\text{ケ}}$ のみ適している．

【解答】

(1) 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ を用いて

$$\sin B=\frac{2\sin 30°}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

より，$B=\underline{\mathbf{45°}}_{(\text{ア})}$，$\underline{\mathbf{135°}}_{(\text{イ})}$．次に，点 A についての余弦定理から

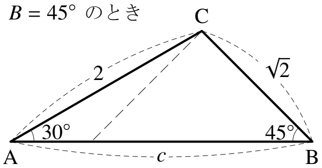
$$\left(\sqrt{2}\right)^2=2^2+c^2-2\cdot 2\cdot c\cos 30°$$

$$\Leftrightarrow\ 2=4+c^2-\cancel{2}\cdot 2c\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

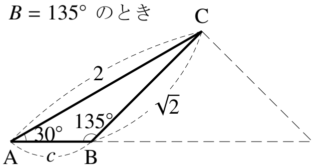
$$\Leftrightarrow\ c^2-2\sqrt{3}c+2=0 \qquad \therefore\quad c=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-8}}{2}=\sqrt{3}\pm 1$$

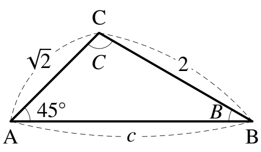
となるから，$c=\underline{\mathbf{\sqrt{3}-1}}_{(\text{ウ})}$，$\underline{\mathbf{\sqrt{3}+1}}_{(\text{エ})}$ である．
ここで，それぞれの B について図を描くと右欄外の図のようになり，
$B=\underline{\mathbf{45°}}_{(\text{オ})}$ のときの方が c が長いと分かる．つまり
$B=45°$ のとき $c=\underline{\mathbf{\sqrt{3}+1}}_{(\text{カ})}$
$B=135°$ のとき $c=\underline{\mathbf{\sqrt{3}-1}}_{(\text{キ})}$ である．

$B=45°$ のとき



$B=135°$ のとき





(2) 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ を用いて

$$\sin B=\frac{\sqrt{2}\sin 45°}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad B=30°,\ 150°$$

$B=150°$ のときは，$A+B=45°+150°>180°$ となって不適．よって，
$B=\underline{\mathbf{30°}}_{(\text{ク})}$ となる．また，点 A からみる余弦定理より

$$2^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+c^2-2\sqrt{2}c\cos 45°$$

$$\Leftrightarrow\ 4=2+c^2-\cancel{2}\sqrt{2}c\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ c^2-2c+2=0 \qquad \therefore\quad c=1\pm\sqrt{3}$$

$c>0$ であるから，$c=\underline{\mathbf{1+\sqrt{3}}}_{(\text{ケ})}$．

C.　正弦の比と辺の比

【発展 61：正弦定理と正弦の比】

$\triangle$ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 4 : 5$ であるとき，次の問いに答えよ．

① 3 辺の長さの比 $a : b : c$ を求めよ．　　② $\cos A$ を求めよ．

【解答】

① $\triangle$ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より $a = 2R\sin A$，$b = 2R\sin B$，$c = 2R\sin C$ であるから

$$\begin{aligned} a : b : c &= 2R\sin A : 2R\sin B : 2R\sin C \\ &= \sin A : \sin B : \sin C = \mathbf{2 : 4 : 5} \end{aligned}$$

② ①より，ある実数 k を用いて $a = 2k,\ b = 4k,\ c = 5k$ と書けるので，余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &= \frac{(4k)^2 + (5k)^2 - (2k)^2}{2 \cdot 4k \cdot 5k} \\ &= \frac{37k^2}{40k^2} = \mathbf{\frac{37}{40}} \end{aligned}$$

◀ 1 : 2 : 3 のそれぞれの値を 2 倍すれば 2 : 4 : 6 になるように，$a : b : c$ を何倍かすれば 2 : 4 : 5 になる，それを k 倍とおく．

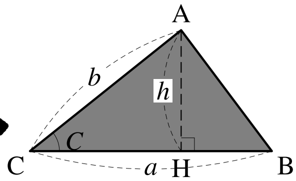
①から分かるように，$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ である．また，②で計算できたように，3 辺の比さえ分かれば 3 角の大きさは決定される．

3.4　平面図形の計量

1.　三角形の面積と三角比

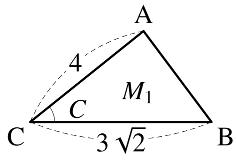
右図において $\triangle$ACH に着目すれば $h = \mathrm{AH} = b\sin C$ であるので，$\triangle$ABC の面積は次のように計算できる．

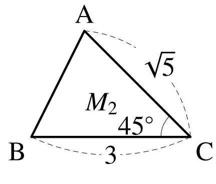
$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b\sin C = \frac{1}{2}ab\sin C$$



【例題 62】

1. 右の三角形 M_1 の角 C について，$\sin C = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ であるという．M_1 の面積を求めよ．
2. 左の三角形 M_2 の面積を求めよ．





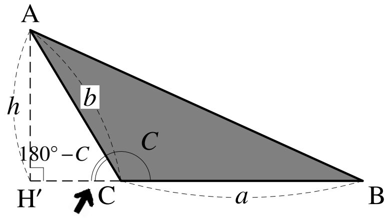
【解答】

1. $S = \dfrac{1}{\cancel{2}}ab\sin C = \dfrac{1}{2} \cdot \cancel{3}\sqrt{2} \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} = \mathbf{2\sqrt{10}}$

2. $S = \dfrac{1}{2}ab\sin 45^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{\dfrac{3\sqrt{10}}{4}}$

$\angle$A が鈍角の場合も，$\triangle$ACH′ に着目して

$h = b\sin(180^\circ - C) = b\sin C$



である（『180° − θ の三角比』(p.170) を用いた）ので,

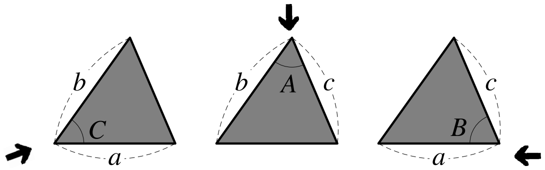
$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

と計算でき，同じ式を得る．また，$\theta = 90^\circ$ の直角三角形の場合も同じ式が成り立つと分かる．

上の面積の公式は，角 C から見て得られた．角 A, B から見た場合も同様の公式が得られる．

三角形の面積

三角形の面積 S は，$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B$ で求めることができる．



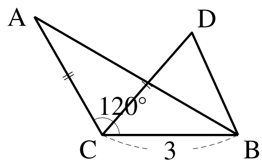
2 辺の長さと，その間の角の sin を掛けて，$\dfrac{1}{2}$ 倍すると面積になる，と理解すればよい．

【練習 63：三角形の面積〜その１〜】

右の図形において，AC = DC = $\sqrt{7}$ とする．

(1) $\triangle$ACB の面積を求めよ．

(2) $\sin\angle\mathrm{DCB} = \dfrac{3}{4}$ のとき，$\triangle$DCB の面積を求めよ．



【解答】

(1) $\triangle \mathrm{ACB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CB}\sin 120^\circ = \dfrac{1}{2}\sqrt{7}\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{21}}{4}}$

(2) $\triangle \mathrm{DCB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CB}\sin\angle\mathrm{DCB} = \dfrac{1}{2}\sqrt{7}\cdot 3\cdot\dfrac{3}{4} = \boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{7}}{8}}$

$\dfrac{1}{2}$ を掛け忘れないよう注意しよう．特に，発展で学ぶ『ヘロンの公式 (p.185』と区別すること．

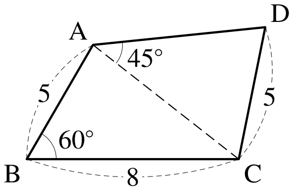
【練習 64：四角形の計量】

四角形 ABCD において，AB = 5，BC = 8，CD = 5，$\angle$ABC = 60°，$\angle$CAD = 45° のとき，次の問に答えよ．

(1) AC の長さを求めよ．

(2) AD の長さを求めよ．

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ．



【解答】

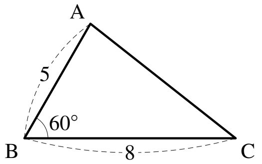
(1) △ABC に $\angle$ABC からみる余弦定理

$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cos \angle \mathrm{ABC}$ を用いて

$$\begin{aligned} \mathrm{AC}^2 &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ \\ &= 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 49 \end{aligned}$$

よって，**AC = 7** である．

◀ 2 辺とその間の角が与えられている



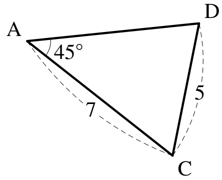
(2) △CAD に $\angle$CAD からみる余弦定理

$\mathrm{DC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{AC} \cos \angle \mathrm{CAD}$ を用いて

$$\begin{aligned} 5^2 &= \mathrm{AD}^2 + 7^2 - 2 \cdot \mathrm{AD} \cdot 7 \cos 45^\circ \\ \Leftrightarrow\ 25 &= \mathrm{AD}^2 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{AD} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{AD}^2 - 7\sqrt{2}\mathrm{AD} + 24 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathrm{AD} &= \frac{7\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(7\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 24}}{2} \\ &= \frac{7\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{3\sqrt{2}}\ \textbf{または}\ \boldsymbol{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

◀ 2 辺とその間でない角が与えられている



◀『解の公式 (p.63)』

(3) △ABC の面積を S_1，△CAD の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \sin \angle \mathrm{ABC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

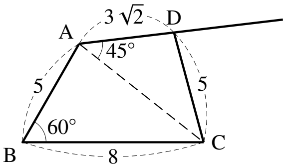
$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \mathrm{AC} \cdot \mathrm{AD} \sin \angle \mathrm{CAD} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \mathrm{AD} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

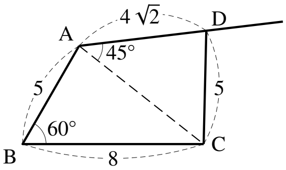
四角形 ABCD の面積は $S_1 + S_2$ に等しいので，

AD = $3\sqrt{2}$ のときは $\boldsymbol{10\sqrt{3} + \frac{21}{2}}$

AD = $4\sqrt{2}$ のときは $\boldsymbol{10\sqrt{3} + 14}$ が求める答えになる．

◀ それぞれ，図は次のようになる．

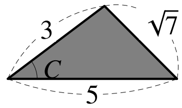




【練習 65：三角形の面積〜その２〜】

右図の三角形について，以下の問いに答えよ．

(1) $\cos C$ を求めよ．　　　(2) 三角形の面積 S を求めよ．



【解答】

(1) △ABC に点 C からみた余弦定理を用いて

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{5^2+3^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}{2\cdot5\cdot3} = \frac{\cancel{27}^{\,9}}{2\cdot5\cdot\cancel{3}} = \mathbf{\frac{9}{10}}$$

(2) $\sin C \geqq 0$ より $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1-\frac{81}{100}} = \sqrt{\frac{19}{100}} = \frac{\sqrt{19}}{10}$ で

◄『三角比の相互関係 (p.166)』

あるので，$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}5\cdot3\cdot\frac{\sqrt{19}}{10} = \mathbf{\frac{3\sqrt{19}}{4}}$

【発展 66：ヘロンの公式】

三角形の 3 辺の長さを a, b, c とし，$s = \frac{a+b+c}{2}$ とおくとき，面積 S は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ に等しくなる．これをヘロンの公式という．この公式を用いて，以下の問いに答えなさい．

① 3 辺の長さが 5, 3, 6 である三角形の面積 S_1，4, 3, 2 である三角形の面積 S_2 を求めよ．

② 3 辺の長さが 5, 3, $\sqrt{7}$ である三角形の面積 S_3 を求めよ．

【解答】

① $\frac{5+3+6}{2} = 7$ より，$S_1 = \sqrt{7(7-5)(7-3)(7-6)} = \mathbf{2\sqrt{14}}$.

$\frac{4+3+2}{2} = \frac{9}{2}$ であるので

$$S_2 = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-2\right)} = \sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{15}}{4}}$$

② $\frac{5+3+\sqrt{7}}{2} = \frac{8+\sqrt{7}}{2}$ であるので

$$S_3 = \sqrt{\frac{8+\sqrt{7}}{2}\left(\frac{8+\sqrt{7}}{2}-5\right)\left(\frac{8+\sqrt{7}}{2}-3\right)\left(\frac{8+\sqrt{7}}{2}-\sqrt{7}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{8+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{-2+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{8-\sqrt{7}}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left(8+\sqrt{7}\right)\left(8-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left\{8^2-\left(\sqrt{7}\right)^2\right\}\left\{\left(\sqrt{7}\right)^2-2^2\right\}} = \frac{1}{4}\sqrt{57\cdot3} = \mathbf{\frac{3\sqrt{19}}{4}}$$

3 辺の長さがすべて整数の時は,「ヘロンの公式」を用いると面積の計算が特に簡単になる．
「ヘロンの公式」の証明は p.206 を参考のこと．自分で導こうとするとよい練習になる．

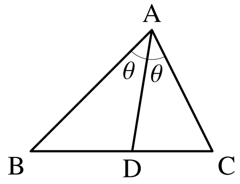
2. 平面図形の重要な問題・定理

A. 角の 2 等分線

【暗記 67：角の 2 等分線の定理】

$AB=4$, $AC=3$ の $\triangle ABC$ において，$\angle A$ の 2 等分線と辺 BC との交点を D とする．

1. BD : DC を求めよ．
2. $BC=\sqrt{21}$ のとき，AD の長さを求めよ．



【解答】

1. $\triangle ABD$，$\triangle ACD$ の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると

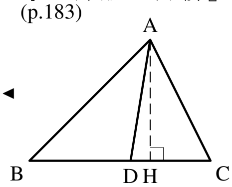
$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot AD\sin\theta,\qquad S_2=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot AD\sin\theta$$

◀ 『三角形の面積』(p.183)

と表せるので，$S_1:S_2=4:3$ ……… ①

また，A から辺 BC に下ろした垂線 AH の長さを h とおくと

◀



$$S_1=\frac{1}{2}BD\cdot h,\quad S_2=\frac{1}{2}DC\cdot h$$

と表せるので，$S_1:S_2=BD:DC$ ……… ②

①，②より $BD:DC=4:3$

2. 1. より，$BD=\dfrac{4}{4+3}\sqrt{21}=\dfrac{4}{7}\sqrt{21}$，$DC=\dfrac{3}{4+3}\sqrt{21}=\dfrac{3}{7}\sqrt{21}$ である．

$AD=x$ とおき，$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ に余弦定理を用いると

$$(\cos\theta=)\ \frac{x^2+4^2-\left(\frac{4}{7}\sqrt{21}\right)^2}{2x\cdot 4}=\frac{x^2+3^2-\left(\frac{3}{7}\sqrt{21}\right)^2}{2x\cdot 3}$$

$$\Leftrightarrow\ 3\left(x^2+16-\frac{48}{7}\right)=4\left(x^2+9-\frac{27}{7}\right)$$

◀ 両辺に $2x\cdot 4\cdot 3=24x$ を掛けた

$$\Leftrightarrow\ \frac{48}{7}=x^2\qquad \therefore\quad x=\sqrt{\frac{48}{7}}=\boldsymbol{\frac{4}{7}\sqrt{21}}$$

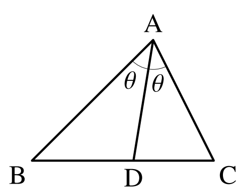
角の 2 等分線の定理

$\triangle ABC$ において，$\angle A$ の 2 等分線と辺 BC との交点を D とするとき

$$\triangle ABD:\triangle ADC=\cancel{\tfrac{1}{2}}AB\cdot\cancel{AD\sin\theta}:\cancel{\tfrac{1}{2}}AC\cdot\cancel{AD\sin\theta}$$ （「面積の公式」より）

$$\triangle ABD:\triangle ADC=BD:DC$$ （底辺の比より）

から，$AB:AC=BD:DC$ が成り立つ．



…… つまり，角の 2 等分線においては，上の 2 辺の比と下の線分の比が一致する．

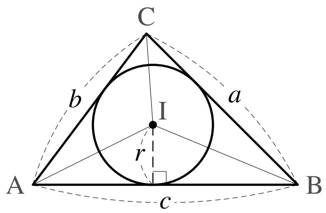
B. 内接円の半径

【暗記 68：内接円の半径を求める】

三角形の 3 つの辺すべてに接する円を，その三角形の**内接円** (inscribed circle) という．1 つの三角形に対し，内接円は 1 つに定まる[*16].

$b=4$，$c=5$，$A=60^\circ$ である $\triangle$ABC について，内接円の半径を r とする．

1. a の値を求めよ．
2. $\triangle$ABC の面積を求めよ．
3. $\triangle$ABC の内接円の半径を求めよ．



【解答】

1. 点 A からみる余弦定理より

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2ab\cos A \\ &= 4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos 60^\circ \\ &= 16+25-40\times\frac{1}{2}=21 \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a=\sqrt{21}}$ である．

2. $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot5\sin60^\circ=\boldsymbol{5\sqrt{3}}$

◀『三角形の面積』(p.183)

3. 内接円の中心を I とすると，$\triangle$ABI，$\triangle$BCI，$\triangle$CAI の面積はそれぞれ $\dfrac{1}{2}cr$，$\dfrac{1}{2}ar$，$\dfrac{1}{2}br$ となるから，$\triangle$ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}r(a+b+c) \quad \cdots\cdots ①$$

◀それぞれ，AB，BC，CA を底辺とみて，内接円の半径を高さにとった．

とも表せる．よって 2. と①より

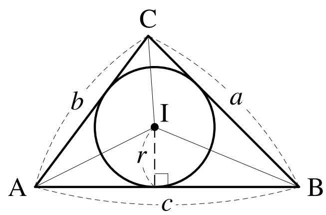
$$\begin{aligned} r &= \frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\cdot5\sqrt{3}}{\sqrt{21}+4+5}=\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{21}+9} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}} \end{aligned}$$

三角形の内接円と面積の関係

三角形の面積 S は，内接円の半径 r を用いて

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{BCI}+\triangle\mathrm{CAI}+\triangle\mathrm{ABI} \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \end{aligned}$$

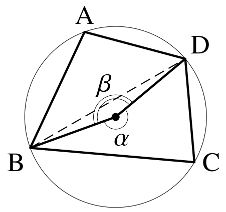
と表すことができる．ここで a，b，c は各辺の長さを表す．



この公式は，必要なときに導くことができれば十分である．ただし，三角形とその内接円を見たら「三角形の面積は計算できる」と連想できるようにしよう．

[*16] 内接円については，数学 A で詳しく取り扱う．

C. 円に内接する四角形



四角形 ABCD が円に内接しているとき，右のように α, β をおくと，中心角は円周角の 2 倍なので

A は右欄外の図の $\dfrac{1}{2}\alpha$ と等しく，C は右欄外の図の $\dfrac{1}{2}\beta$ と等しい．

よって，$A + C = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180°$ [*17]，さらに『$180° - \theta$ の三角比』(p.170) から以下が導かれる．

円に内接する四角形の向かい合う角

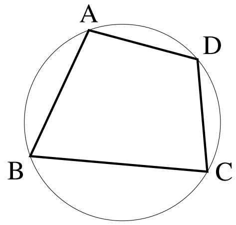
円に内接する四角形において，以下が成立する．

- $A + C = 180°$ （$\Leftrightarrow$ ∠A = (∠C の外角) ）

さらに，『$180° - \theta$ の三角比』(p.170) を用いて

- $\cos A = -\cos C$ （$\cos A = -\cos(180° - A)$ より）
- $\sin A = \sin C$ （$\sin A = \sin(180° - A)$ より）

B, D についても同様である[*18]．



四角形が円に内接している場合は，たいてい，次の関係のうちいくつかを使う．

- 円周角の定理
- 中心角が円周角の 2 倍（特に，直径に対する円周角は 90°）
- 上で学んだ，向かい合う角の関係

【例題 69】 四角形 ABCD は AB = 3, BC = 4, CD = 3, $B = 60°$ であり，円に内接している．

1. 対角線 AC の長さを求めよ．
2. 辺 AD の長さを求めよ．

【解答】

1. △ABC に点 B から見た余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} \mathrm{CA}^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos 60° \\ &= 9 + 16 - 12 = 13 \end{aligned}$$

CA > 0 より，$\mathbf{CA = \sqrt{13}}$．

2. 四角形 ABCD は円に内接しているので $D = 120°$，△CDA について余弦定理より

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = \mathrm{AD}^2 + 3^2 - 2 \cdot \mathrm{AD} \cdot 3 \cos 120°$$

$$\Leftrightarrow\ 13 = \mathrm{AD}^2 + 9 - \cancel{2} \cdot \mathrm{AD} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$0 = \mathrm{AD}^2 + 3\mathrm{AD} - 4$$

これを解いて AD = −4, 1，CA > 0 より，**AD = 1**．

[*17] 『正弦定理』(p.179) の証明 iii) の中で，別の方法で証明した．

[*18] つまり，$\cos B = -\cos D$，$\sin B = \sin D$ が成り立つ．

【暗記 70：円に内接する四角形】

円に内接する四角形 ABCD において，AB = 4，BC = 5，CD = 3，DA = 3 とする．

1. 対角線 BD の長さを求めよ．
2. 四角形 ABCD の面積を求めよ．

【解答】

1. $\triangle$ABD に点 A からみる余弦定理を用いて

$$\mathrm{BD}^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos A$$
$$= 25 - 24 \cos A \quad \cdots\cdots ①$$

$\triangle$CBD に点 C からみる余弦定理を用いて

$$\mathrm{BD}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos C$$
$$= 34 - 30 \cos C \quad \cdots\cdots ②$$

①，②，$\cos A = -\cos C$ より

$$25 - 24 \cos A = 34 + 30 \cos A$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos A = -\frac{9}{54} = -\frac{1}{6}$$

これを①に代入して

$$\mathrm{BD}^2 = 25 - 24 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 29$$

BD > 0 であるので，$\mathbf{BD = \sqrt{29}}$ と分かる．

2. $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$ より

$$\triangle \mathrm{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = \sqrt{35}$$

◂『三角形の面積』(p.183)

また，$\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A$ より

◂『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.170)

$$\triangle \mathrm{CBD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{5}{4}\sqrt{35}$$

◂『三角形の面積』(p.183)

よって，求める面積は $\sqrt{35} + \dfrac{5}{4}\sqrt{35} = \boldsymbol{\dfrac{9}{4}\sqrt{35}}$

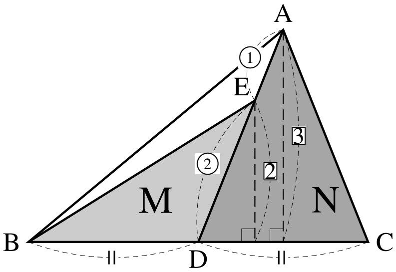
3.　平面図形の面積比

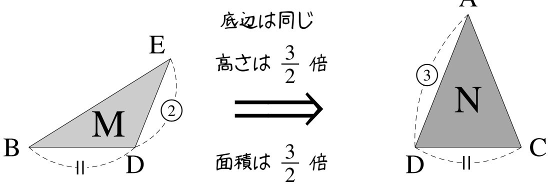
A.　相似でない２つの三角形の面積比

面積比を求めるときには，どこを底辺におくかが重要である．

まず，右の三角形 M，N の面積比を考えてみよう．

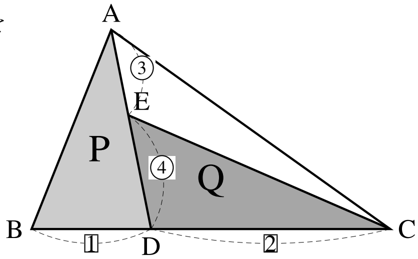
M の底辺を BD，N の底辺を CD とおけば，M，N の底辺の長さは等しく，M の高さの $\frac{3}{2}$ 倍が，N の高さになる．

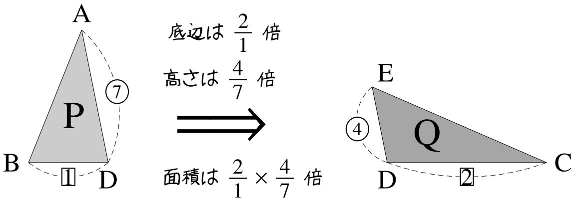




つまり，M の面積を $\frac{3}{2}$ 倍すると N の面積に等しいと分かるから，M，N の面積比は 2 : 3 である．

次に，右の三角形 P，Q の面積比を考えてみよう．P の底辺を BD，Q の底辺を CD とすると，次のようにまとめることができる．





P の面積を $\frac{2}{1} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{7}$ 倍すると Q の面積に等しいと分かるから，P，Q の面積比は 8 : 7 である．

【練習 71：平面図形の線分の比】

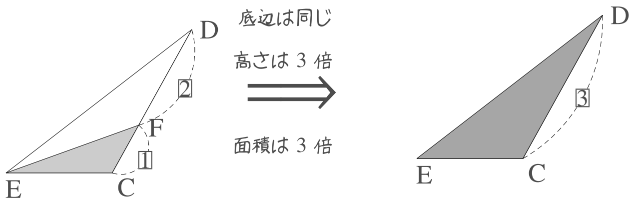
▱ABCD において，辺 BC 上に E を，辺 CD 上に F をとり，BE : EC = 1 : 2，DF : FC = 2 : 1 とする（▱は「平行四辺形」を表す）．

(1) △FEC と △DEC の面積比を求めよ．　(2) △FBC と △DEC の面積比を求めよ．

(3) △FEC と ▱ABCD の面積比を求めよ．

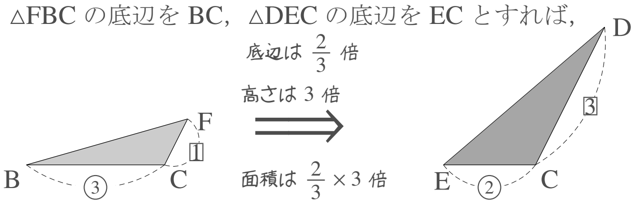
【解答】

(1) 問題文を図示すれば，右欄外のようになる．底辺を EC とすれば

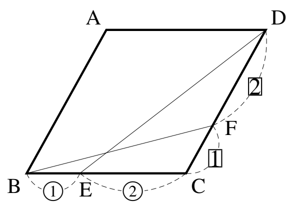


なので，面積比は **1 : 3** である．

(2) △FBC の底辺を BC，△DEC の底辺を EC とすれば，



◂ DC と EC を底辺と考えた場合は，高さが等しくなる．



◂ △FBC の底辺を FC，△DEC の底辺を DC としてもよい．

なので，面積比は **1 : 2** である．

(3)　$\triangle$FEC $\xrightarrow{3\text{ 倍}}$ $\triangle$DEC　　((2) より)

$\xrightarrow{\frac{3}{2}\text{倍}}$ $\triangle$DBC　　(底辺を EC，BC にとれば，底辺は $\frac{3}{2}$ 倍，高さは等しい)

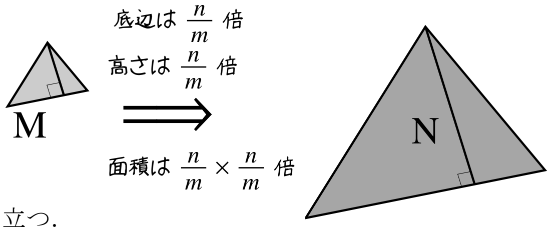
$\xrightarrow{2\text{ 倍}}$ ▱ABCD

よって $\triangle$FEC の $3\times\frac{3}{2}\times 2 = 9$ 倍が ▱ABCD の面積になるので，$\triangle$FEC と ▱ABCD の面積比は **1 : 9** である．

◀ $\triangle$FEC $\xrightarrow{\frac{3}{2}\text{倍}}$ $\triangle$FBC $\xrightarrow{3\text{ 倍}}$ $\triangle$DBC $\xrightarrow{2\text{ 倍}}$ ▱ABCD でもよい．

B.　相似な平面図形の面積比

相似比が $m : n$ である，2 つの三角形の面積比を考えると右のようになる．つまり，M の面積を $\frac{n}{m}\times\frac{n}{m}=\left(\frac{n}{m}\right)^2$ 倍すると N の面積に等しいと分かり，M，N の面積比は $1:\left(\frac{n}{m}\right)^2 = m^2 : n^2$ である．



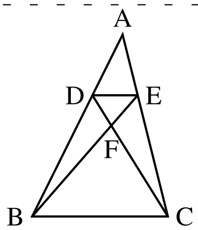
一般に，どんな平面図形においても，次のことが成り立つ．

相似な平面図形の面積比

相似比が $m : n$ である 2 つの平面図形について，その面積比は $m^2 : n^2$ である．

【例題 72】 右の図において，AD : DB = 1 : 2，AE : EC = 1 : 2 であるとする．

1. 相似な三角形の組を 2 つ見つけ(証明は無くてよい)，それぞれについて面積の比を求めよ．
2. $\triangle$DEF と $\triangle$DBF の面積比を求めよ．
3. $\triangle$DEF と $\triangle$ABC の面積比を求めよ．



【解答】

1. AD : AB = AE : AC = 1 : 3，∠A は共通から，$\triangle$**ADE** ∽ $\triangle$**ABC**.
   相似比は 1 : 3，面積比は $1^2 : 3^2 =$ **1 : 9** である．
   また，$\triangle$ADE ∽ $\triangle$ABC より ∠ADE = ∠ABC であるので DE // BC，ここから $\triangle$**FDE** ∽ $\triangle$**FBC**.
   相似比は DE : BC = 1 : 3，面積比は $1^2 : 3^2 =$ **1 : 9** である．
2. EF，FB を底辺として考えると EF : FB = 1 : 3 で高さは等しいので $\triangle$DEF と $\triangle$ABC の面積比は **1 : 3** になる．
3. $\triangle$DEF の面積を S とおく．このとき，1. より $\triangle$FBC = $9S$，2. より $\triangle$DFB = $3S$ である．また，DF : FC = 1 : 3 より $\triangle$EFC = $3S$ であるので，四角形 DECB = $S + 3S + 3S + 9S = 16S$.
   ここで，1. より $\triangle$ADE : $\triangle$ABC = 1 : 9 なので
   　　四角形 DECB : $\triangle$ABC = 8 : 9
   となるので，$\triangle$ABC = $16S\times\frac{9}{8} = 18S$.
   よって，$\triangle$DEF と $\triangle$ABC の面積比は $S : 18S =$ **1 : 18**.

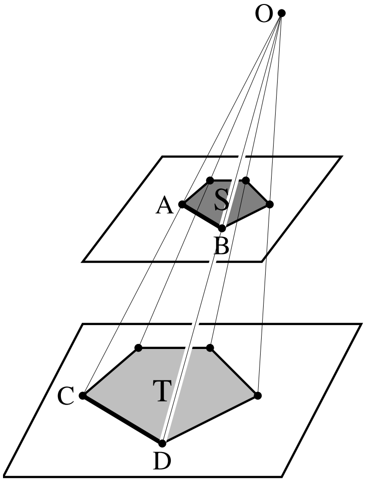
◀ 略証をつけておいた．
◀ 相似比が $m : n$ のとき，面積比は $m^2 : n^2$
◀ $\triangle$ADE ∽ $\triangle$ABC を証明せず AD : DB = AE : EC から DE // BC を導いても構わない．

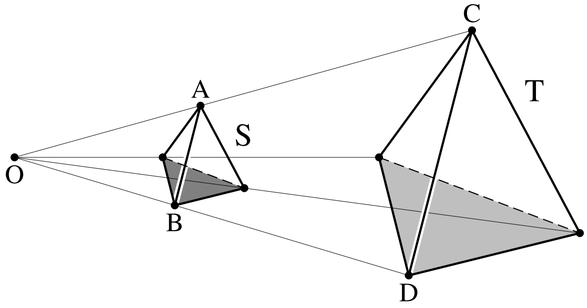
3.5　空間図形の計量

1.　空間図形の表面積比・体積比

A.　空間における相似について

2 つの図形が**相似** (similar) であるとは，「一方の図形を，ある 1 点に対して拡大・縮小すれば，他方の図形と合同になる」関係のことをいった．この定義は，空間内における相似にも当てはまる．





相似な二つの図形の，対応する辺の長さの比を**相似比** (ratio of similitude) という．

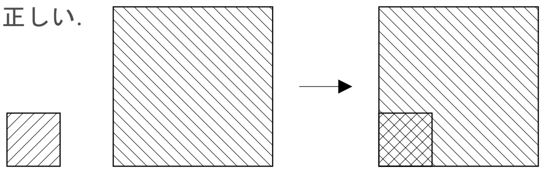
たとえば，上の図において，図形 S と図形 T はいずれも相似である．また，S と T の相似比はいずれも AB : CD に等しい．

【例題 73】 以下の，相似に関する文章は正しいか，間違いか答えなさい．

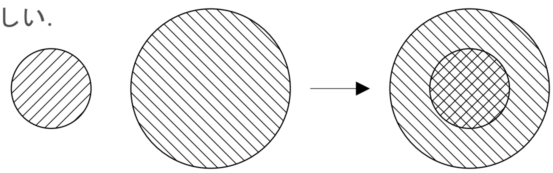
1. どのような 2 つの正方形も，相似である．
2. どのような 2 つの円も，相似である．
3. どのような 2 つの直方体も，相似である．
4. 2 つの立体 S と T が相似ならば，S の表面と T の表面は互いに相似である．

【解答】

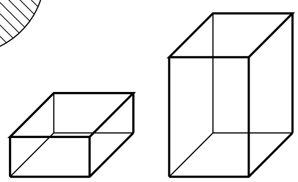
1. **正しい**．



2. **正しい**．



3. **間違い**．たとえば，右の直方体２つは相似ではない(高さのみが異なっている)．

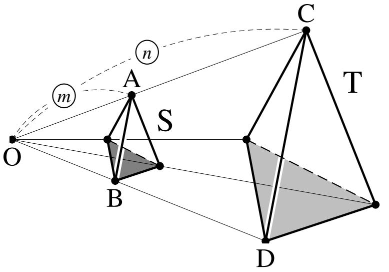


4. **正しい**．S の全体が拡大・縮小されて T になるのだから，S の一部分を拡大・縮小しても T のある一部になる．

◀前ページのうち，立体図形のものを参考にすること．

B.　相似な空間図形の表面積・体積の比

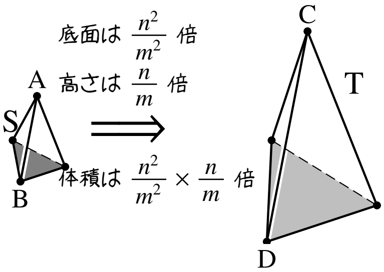
相似比が $m:n$ である，２つの相似な三角錐 S，T について，表面積比と体積比を考えてみよう．



p.4 で考えたように，２つの立体が相似ならば，その表面の図形は互いに相似である．

左の S と T の場合，S の４つの表面の図形の面積を S_1，S_2，S_3, S_4 とおけば, T の４つの表面の図形の面積は $\dfrac{n^2}{m^2}S_1$, $\dfrac{n^2}{m^2}S_2$, $\dfrac{n^2}{m^2}S_3$，$\dfrac{n^2}{m^2}S_4$ となるので，次のように分かる．

$$(\text{S の表面積}):(\text{T の表面積}) = (S_1+S_2+S_3+S_4):\left\{\frac{n^2}{m^2}(S_1+S_2+S_3+S_4)\right\}$$
$$= 1:\left(\frac{n^2}{m^2}\right) = m^2:n^2$$



次に体積比を考えよう．

上で考えたように，S の底面積の $\dfrac{n^2}{m^2}$ 倍が T の底面積になる．

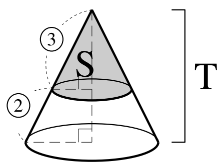
また，S の高さの $\dfrac{n}{m}$ 倍が T の高さになるから，S の体積を $\dfrac{n^2}{m^2}\times\dfrac{n}{m}=\dfrac{n^3}{m^3}$ 倍すると T の体積に等しい[*19]．よって，S，T の体積比は $m^3:n^3$ である．

一般に，どんな空間図形においても，次のことが成り立つ．

相似な立体図形の表面積比・体積比

相似比が $m:n$ である２つの立体図形について，
(1) それぞれの表面をなす図形は相似であり，その相似比は $m:n$ である．
(2) 表面積比は $m^2:n^2$ である．
(3) 体積比は $m^3:n^3$ である．

【例題 74】 右図のような円錐 T を切り，上にできた円錐を S とする．
1. S と T は相似である．相似比を求めよ．
2. S と T の表面積比を求めよ．
3. T から S を除いた図形を U とする．S と U の体積比を求めよ．



【解答】

1. 母線の長さの比から，**3 : 5**
2. (1) より，表面積比は $3^2:5^2=$ **9 : 25**
3. (1) より，S と T の体積比は $3^3:5^3=27:125$
つまり，S と U の体積比は $27:(125-27)=$ **27 : 98**

◀ 相似比が $m:n$ のとき，表面積比は $m^2:n^2$

◀ 相似比が $m:n$ のとき，体積比は $m^3:n^3$．また，S と U は相似ではないことに注意．

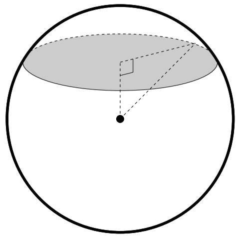
[*19] この例では，体積が $\dfrac{1}{3}\times$（底面積）$\times$（高さ）で求められるから分かる．

2. 球

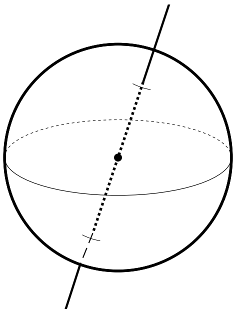
円を空間に広げたものが球，と考えてよい．

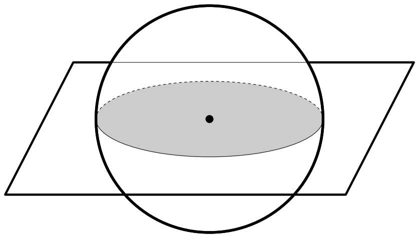
球は，最も美しい図形の 1 つとして，古来から人々の興味を惹いてきた．

球には以下の性質がある．

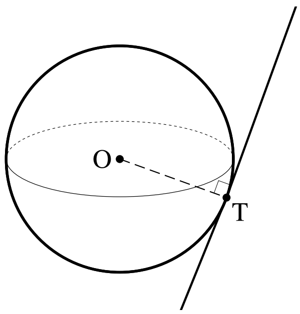


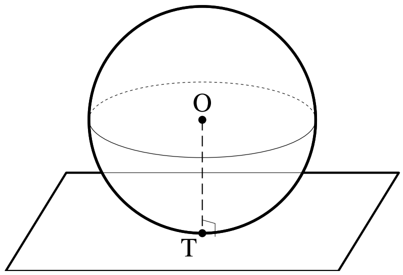
- 球を平面で切れば，その切り口は必ず円である．
- 中心を通るどの直線，平面に対しても，球は対称である．





- O を中心とする球が，球面上の点 T で平面・直線と接するとき，直線 OT はその平面・直線と直交する．





これらは，球の定義[*20]と三平方の定理から証明することができる（ここでは省略する）．

[*20] 「点 O を中心とする半径 r の球」は「点 O から距離 r にある空間上の点を全て集めてできる図形」と定義できる．また，数学 B において球面の方程式を学ぶ．

A. 球の表面積と体積

半径 r の球の体積，表面積は次のようになる[*21].

球の表面積・体積

半径 r の球について，　表面積は $4\pi r^2$，　体積は $\dfrac{4}{3}\pi r^3$　である.

「表面積を表す $4\pi r^2$ の r^2 を $\dfrac{r^3}{3}$ におきかえると，体積を表す $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ になる」と覚えると良い.

【練習 75：球の表面積，体積】

(1) 半径 4 cm の球の，表面積と体積をそれぞれ求めよ.

(2) 1 辺 8 cm の立方体の表面積と直径 10 cm の球の表面積では，どちらが大きいか.

(3) 1 辺 10 cm の立方体に高さ 9 cm まで水を入れてある．この水の中に半径 3 cm の球を静かに入れると，何 cm^3 の水があふれるか．ただし，表面張力は考えない.

【解答】

(1) 表面積は　$4\pi \cdot 4^2 = \mathbf{64\pi\ cm^2}$

体積は　$\dfrac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \mathbf{\dfrac{256}{3}\pi\ cm^3}$

(2) 1 辺 8cm の立方体の表面積は，$6 \times 8^2 = 384\ \mathrm{cm}^2$

直径 10 cm の球の半径は 5 cm なので，表面積は

$4\pi \cdot 5^2 = 100\pi < 100 \times 3.2 = 320 < 384\ \mathrm{cm}^2$

よって，**1 辺 8 cm の立方体の表面積の方が大きい**.

◀ 1 辺 8cm の立方体の表面は，1 辺 8cm の正方形 6 枚でできている.

◀ $\pi = 3.14159265\cdots$ より $\pi < .3.2$

(3) 水中に入れた球の体積は $\dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi\ \mathrm{cm}^3$ なので，

水の体積と球の体積の和は $10 \cdot 10 \cdot 9 + 36\pi = 900 + 36\pi\ \mathrm{cm}^3$ である.

実際には $10^3 = 1000\ \mathrm{cm}^3$ しか入らないので，あふれる水の体積は

$(900 + 36\pi) - 1000 = \mathbf{36\pi - 100\ cm^3}$

[*21] 数学 III の微積分を用いて，これらの計算ができる．体積については，次の発展 のようにして計算できる.

3.　空間図形と三角比

空間図形の問題は，特定の平面を取り出し，平面図形の問題として考えてみよう．

A.　直角が 1 つの頂点に集まった四面体

四面体の頂点の 1 つに，2 つ以上直角を含む場合は比較的簡単である．図形を切ることなく，どれかの面を取り出して考えればたいていうまくいくからである[*22]．

1 つの頂点に直角が 3 つ集まった三角錐のことを**直角三角錐** (rectangular triangular pyramid) という．

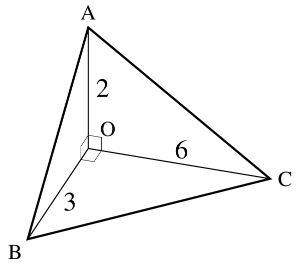
【練習 76：直角三角錐の計量】

右の図のように，$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ の直角三角錐 OABC において，次の問に答えよ．ただし，$OA = 2$，$OB = 3$，$OC = 6$ とする．

(1) 辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ求めよ．

(2) $\angle ACB = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ．



【解答】

(1) $\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCA$ それぞれに，三平方の定理を用いて

$$\mathbf{AB = \sqrt{13}},\ \mathbf{BC = 3\sqrt{5}},\ \mathbf{CA = 2\sqrt{10}}$$

(2) $\triangle ABC$ に $\angle ACB$ からみる余弦定理を用いて

$$\cos\theta = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \cdot CB} = \frac{40 + 45 - 13}{2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{2}}{5}}$$

(3) (2) より

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{18}{25}} = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

だから，(1) より $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}CA \cdot CB \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{7}}{5} = \mathbf{3\sqrt{14}}$$

【練習 77：三角錐の計量】

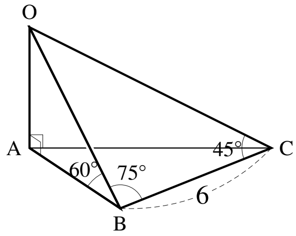
右図のような三角錐 OABC において，次の問に答えよ．

(1) 辺 OB の長さを求めよ．

(2) 辺 OC の長さを求めよ．

(3) 辺 AC の長さを求めよ．

(4) $\angle ABC = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．



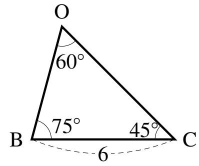
【解答】

[*22] 平面に対し，異なる 2 方向から直角である線分は，平面に対し垂線になっていることに注意すればよい．

(1) $\triangle$OBC に正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{OB}}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 60^\circ}$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{OB} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} \times 6 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 6 = \mathbf{2\sqrt{6}}$$

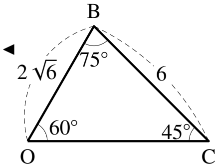


(2) $\triangle$OBC に $\angle$BCO からみた余弦定理を用いて

$$\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 6^2 + \mathrm{OC}^2 - 2\cdot 6\mathrm{OC}\cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow\ 24 = 36 + \mathrm{OC}^2 - 6\sqrt{2}\mathrm{OC}$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{OC}^2 - 6\sqrt{2}\mathrm{OC} + 12 = 0$$



$\angle$BOC からみた余弦定理や，$\angle$OBC からみる第 1 余弦定理 (p.205) を用いてもよい．

よって，$\mathrm{OC} = \dfrac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot 12}}{2} = 3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}$ である．$\triangle$OBC は角 B が最大なので，辺 OC が一番長い．よって，OC = $\mathbf{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}$.

(3) まず，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}\sin 60^\circ = 2\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{3\sqrt{2}}$ これより，$\triangle$OAC に三平方の定理を用いて

$$\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{OC}^2 - \mathrm{OA}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2}$$

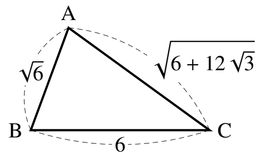
$$= \mathbf{\sqrt{6 + 12\sqrt{3}}}$$

◀ $\sqrt{6+12\sqrt{3}}$ はこれ以上簡単にならない

(4) まず，$\mathrm{AB} = \mathrm{OB}\cos 60^\circ = 2\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{2} = \sqrt{6}$．これより，$\triangle$ABC に $\angle$ABC からみる余弦定理を用いて

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$

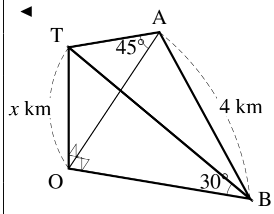
$$= \frac{6 + 36 - \left(6 + 12\sqrt{3}\right)}{2\cdot\sqrt{6}\cdot 6} = \mathbf{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}}$$



【発展 78：山の高さを求める】

ある山から真北の地点 A と，真東の地点 B があり，この 2 点は 4 km 離れており，共に標高 200 m である．地点 A から山の頂上を見上げると 45° の高さであった．次に，地点 B から山の頂上を見上げると 30° の高さであった．この山の高さは何 km か.

【解答】　山の頂上を T，山の頂上から真下にある標高 200 m の点を O として問題を図に描けば，右欄外のようになる．山の高さを求めるには，OT の長さを求めればよい.



OT の高さを x km とおく．$\triangle$OTA を点 A から見ると

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{\mathrm{OA}} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{OA} = x \qquad \cdots\cdots ①$$

$\triangle$OTB を点 B から見ると

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{\mathrm{OB}} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{OB} = \sqrt{3}x \qquad \cdots\cdots ②$$

$\triangle$AOB における三平方の定理 $\mathrm{AO}^2 + \mathrm{BO}^2 = 4^2$ に①，②を代入して

$$x^2 + \left(\sqrt{3}x\right)^2 = 4^2 \quad\Leftrightarrow\quad x = 2$$

と解ける．つまり，山の高さは 2 km + 200 m = **2.2 km** である．

B. 正多面体

空間図形において，全ての面が合同な正多角形からなり，各頂点に集まる辺の数が全て等しい多面体のことを**正多面体** (regular polyhedron) という[*23]．

正多面体は，次の 5 つしかない．

正四面体，正六面体(立方体)，正八面体，正十二面体，正二十面体

正多面体にはたくさんの二等辺三角形がある．それを上手に生かした切り口を考えよう．

【練習 79：正四面体の計量】

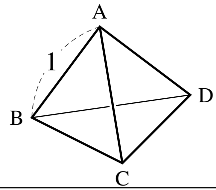
右下図のように，1 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD について以下の問に答えよ．

(1) $\triangle$BCD の面積 S を求めよ．

(2) 頂点 A から $\triangle$BCD に下ろした垂線の長さを求めよ．

(3) 発展 正四面体 ABCD に内接する球の半径を求めよ．

(4) 発展 正四面体 ABCD に外接する球の半径を求めよ．



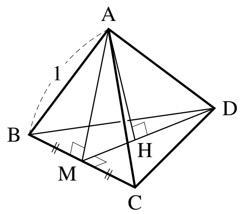
【解答】

(1) $\angle$CBD = 60° であるから

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BC}\sin 60^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

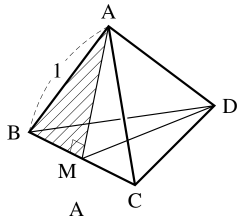
◀『三角形の面積』(p.183)

(2) まず，辺 BC の中点を M とおくと，AM $\perp$ BC，DM $\perp$ BC となり，A から MD におろした垂線の足を H とすると，AH が求める長さである．



まず，$\triangle$ABM に三平方の定理を用いて

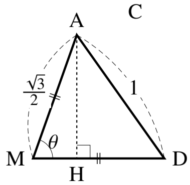
$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BM}^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$



よって，AM $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$．同様に，DM $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

次に，$\angle$AMD $= \theta$ とおくと，$\triangle$AMD に点 M からみた余弦定理を用いて

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MD}^2 - \mathrm{AD}^2}{2\mathrm{MA}\cdot\mathrm{MD}}$$
$$= \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$



であり，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

◀『三角比の相互関係』(p.166)

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

[*23] たとえば，正四面体は正多面体であるが，正四面体 2 つを重ねてできる六面体は，頂点に集まる辺の数が 3 つの場合と 4 つの場合があるので，正多面体ではない．

よって，AH の長さは

$$AH = AM\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

【別解：H が △BCD の重心であることを使う】

$AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$DM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ までは上の解答と同じ.

次に，正四面体の対称性から，点 H は △BCD の重心となるので MH : HD = 1 : 2，つまり

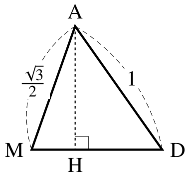
$$MH = \frac{1}{3}DM = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

最後に，△AMH に三平方の定理を用いて

$$AH^2 = AM^2 - MH^2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{36}$$
$$= \frac{27-3}{36} = \frac{2}{3}$$

よって，$AH = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ となる.

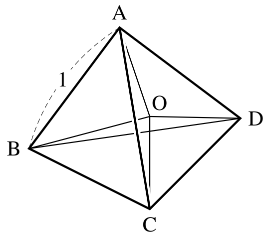
◂



(3) 内接球の中心の点を O とし，その半径を r とおく．このとき，正四面体は 4 つの正三角錐 OABC，OACD，OADB，OBCD に分けることができる．これらの正三角錐の体積は，どれも $\dfrac{1}{3}\times S\times r$ であるから，正四面体 ABCD の体積 V は

$$V = 4\times\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}r = \frac{\sqrt{3}r}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

◂



また，(1)，(2) より正四面体 ABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\times S\times AH = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

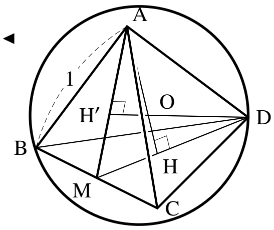
よって，①，②より

$$\frac{\sqrt{3}r}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \iff r = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{12}}$$

◂ このやり方は，平面上の三角形における，内接円の半径の導き方 (p.187) と同じ発想である.

(4) M を辺 BC の中点にとり，H，H′ を右図のようにとる．図形の対称性から，外接球の中心 O は AH 上および DH′ 上にあるのがわかる.

◂



H は △BCD の重心だから

$$DH = DM\times\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

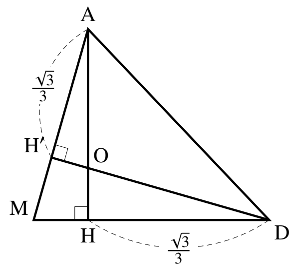
となる．同様に，$AH' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である.

◂ $MH = \sqrt{AM^2 - MH^2}$ から計算してもよい.

ここで，AO = R とおくと，△AH′O ∽ △AHM より

$$AH : AO = AH : AM$$
$$\iff \frac{\sqrt{3}}{3} : R = \frac{\sqrt{6}}{3} : \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\iff \frac{\sqrt{6}}{3}R = \frac{1}{2}$$
$$\iff R = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

◂



C.　正多角錐

角錐のうち，底面が正多角形で，側面が二等辺三角形で作られ，側面の頂点が一点に集まっている多面体のことを**正多角錐** (regular pyramid) という(正角錐ともいう)．底面が正 n 角形の正多角錐のことを正 n 角錐といい，n は 3 以上の自然数をとりうる．

正多角錐においては，頂点からの垂線の足が，底面の中心(対角線の交点)にくる．よって，底面の対角線を通る平面などに着目するとよい．

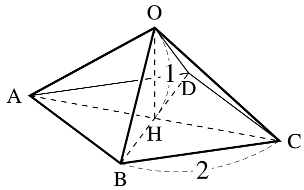
【練習 80：正四角錐の計量】

右図のように，底面の 1 辺の長さが 2，高さ OH が 1 である正四角錐 OABCD について以下の問に答えよ．

(1) AB の中点を M とするとき，∠OMH を求めよ．

(2) A から辺 OB に下ろした垂線 AE の長さを求めよ．

(3) 辺 OB の中点を E とするとき，∠AEC を求めよ．



【解答】

(1) 直角三角形 OMH において OH = HM = 1 より，∠OMH **= 45°**.

(2) ∠OBA = θ とおくと，三平方の定理より

$$\text{OB} = \sqrt{\text{OH}^2 + \text{BH}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{OM} = \sqrt{2}$$

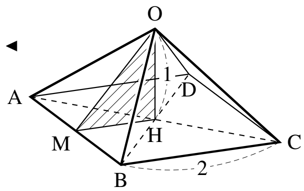
である．△OBM に着目して，$\sin\theta = \dfrac{\text{OM}}{\text{OB}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ となる．ここで，△ABE に着目すれば，$\text{AE} = \text{AB}\sin\theta = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$ である．

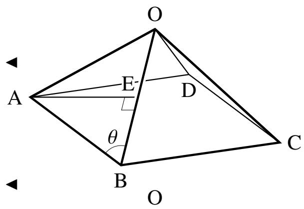
(3) △OAB ≡ △OCB であり，△AEC に余弦定理を用いると

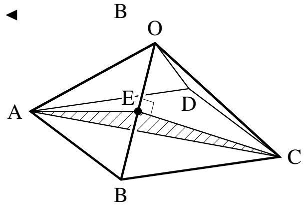
$$\cos\angle\text{AEC} = \frac{\text{AE}^2 + \text{CE}^2 - \text{AC}^2}{2\text{AE}\cdot\text{CE}} = \frac{2\text{AE}^2 - \text{AC}^2}{2\text{AE}^2} = 1 - \frac{\text{AC}^2}{2\text{AE}^2}$$

$$= 1 - \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = -\frac{1}{2}$$

よって，∠AEC **= 120°** となる．







(1) の ∠OMH は底面と側面のなす角に，(3) の ∠AEC は側面と側面のなす角に一致している．

D. 球を含んだ空間図形

空間図形に球を含む場合は，「球の中心と，球と他の図形の共有点」を結んだ平面に着目するとよい．

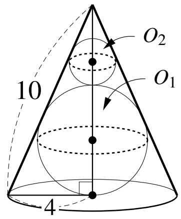
【練習 81：円錐と内接球】

底面の半径が 4，母線の長さが 10 の円錐がある．

(1) この円錐に内接する球 O_1 の半径を求めよ．

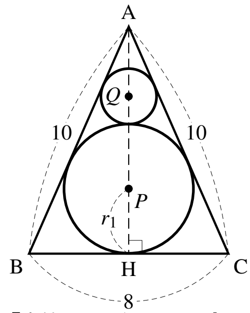
(2) 球 O_1 の上に外接し，さらに円錐に内接する球 O_2 の半径を求めよ．

ただし，球 O_1，O_2 とも，半径はできるだけ大きくなるようにする．



【解答】 円錐の頂点を A，球 O_1，O_2 の中心をそれぞれ P，Q，A から底面に下ろした垂線の足を H とする．このとき，線分 AH は P，Q を通る．

(1) 直線 AH を含み，底面に垂直な面で切ると，断面図は右欄外の図のようになり，球 O_1 の断面は，△ABC の内接円になる．



△ABC の面積を S，球 O_1 の半径 r_1 とすると

$$S = \frac{1}{2}(10+10+8)r_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．面積 S は，$\mathrm{AH} = \sqrt{10^2 - 4^2} = 2\sqrt{21}$ より

◀『内接円の半径 (p.187)』

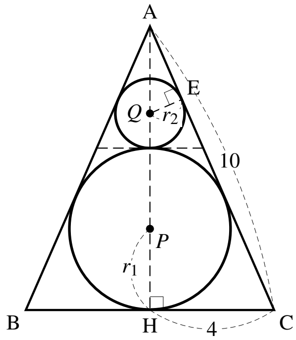
$$S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 2\sqrt{21} = 8\sqrt{21}$$

であるので，これを①に代入して

$$8\sqrt{21} = \frac{1}{2}(10+10+8)r_1$$

$$\therefore\ r_1 = \frac{8}{14}\sqrt{21} = \boldsymbol{\frac{4}{7}\sqrt{21}}$$

(2) (1) と同じ断面を考え，右欄外の図のように E をとると △AQE ∽ △ACH である．よって，球 O_2 の半径を r_2 とすれば



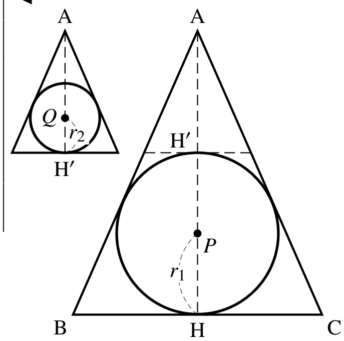
$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QE} = \mathrm{AC} : \mathrm{CH}$$

$$(\mathrm{AH} - 2r_1 - r_2) : r_2 = \cancel{10}^{5} : \cancel{4}^{2}$$

$$2\left(2\sqrt{21} - \frac{8}{7}\sqrt{21} - r_2\right) = 5r_2$$

$$\frac{12}{7}\sqrt{21} = 7r_2 \qquad \therefore\ r_2 = \boldsymbol{\frac{12}{49}\sqrt{21}}$$

【別解】 球 O_1，O_2 の接点を H′ とし，右のように断面図を 2 つ考える．すると，左図を A について拡大したものが右図になる．



2 つの断面図の相似比は

$$\mathrm{AH'} : \mathrm{AH} = \left(2\sqrt{21} - \frac{8}{7}\sqrt{21}\right) : 2\sqrt{21} = 3 : 7$$

である．ここから，$r_2 = \dfrac{3}{7}r_1 = \dfrac{12}{49}\sqrt{21}$.

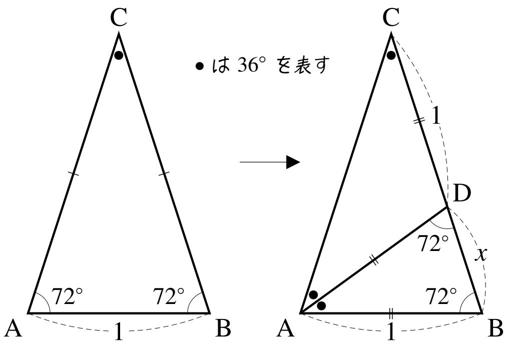
別解では断面が相似であることを使っているが，2 つの断面図のもとになる立体をそれぞれ考えても，やはり互いに相似である．

3.6　第３章の補足

1.　36°，72° などの三角比

A.　36°，72°，72° の三角形を考える

18° に関する三角比を考えるため，まず，右図の二等辺三角形 ABC について BC，AC の長さを求めよう[*24].



ここで，右図の奥のように ∠A の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする．このとき，

$$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{DCA} = 36^\circ$$

より △DAC は二等辺三角形になる．また

$$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{ABD} = 72^\circ$$

より △ABD も二等辺三角形になる．これらより，CD = AD = AB = 1 が成り立つ．

さらに，△CAB ∽ △ABD であるから，CB : AB = AB : BD が成り立つ．よって，$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{CB} \times \mathrm{BD}$ であるので，BD = x とおくと

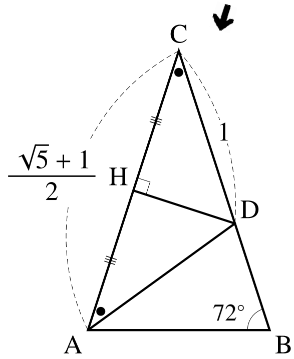
$$1 \times 1 = (1 + x) \times x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$x > 0$ であるから，解の公式より $\mathrm{BD} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ と求められる．これより

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} + 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

となる．また，$\mathrm{AC} = \mathrm{BD} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$ である．

B.　36° の三角比とその周辺



△ACD に着目し，右図のように．点 D から辺 AC へ垂線 DH を引く．

直角三角形 DCH に，余弦の定義を用いて

$$\cos 36^\circ = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{DC}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{CA}}{1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

さらに，三角比の相互関係 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて

$$\sin^2 36^\circ = 1 - \cos^2 36^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$$

であり，$\sin 36^\circ > 0$ であるから，$\sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ である．

また，これらより $\tan 36^\circ = \dfrac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}} =$（計算省略）$= \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ である．

[*24] 18° に関する三角比を求めるためには，AB の長さはいくつでもよい．ここでは，考えやすくするため 1 とした．

【練習 82：36° とその周辺の三角比】

$\sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$，$\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，$\tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ を利用して次の三角比の値を求めよ．

(1) $\sin 54^\circ$，$\cos 54^\circ$，$\tan 54^\circ$　(2) $\sin 126^\circ$，$\cos 126^\circ$，$\tan 126^\circ$

(3) $\sin 144^\circ$，$\cos 144^\circ$，$\tan 144^\circ$

【解答】

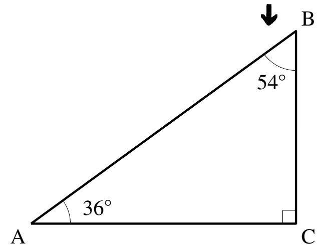
(1) $54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$ であるから，『$90^\circ - A$ の三角比』(p.158) より次のように求めることができる．

$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \mathbf{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\cos 54^\circ = \sin 36^\circ = \mathbf{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\tan 54^\circ = \frac{1}{\tan 36^\circ} = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}}$$

◀



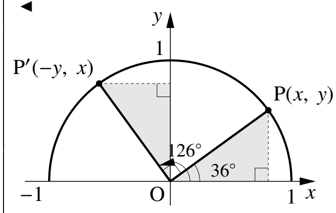
(2) $126^\circ = 90^\circ + 36^\circ$ であるから，『$90^\circ + \theta$ の三角比』(p.171) より次のように求めることができる．

$$\sin 126^\circ = \cos 36^\circ = \mathbf{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\cos 126^\circ = -\sin 36^\circ = \mathbf{-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\tan 126^\circ = -\frac{1}{\tan 36^\circ} = \mathbf{-\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}}$$

◀



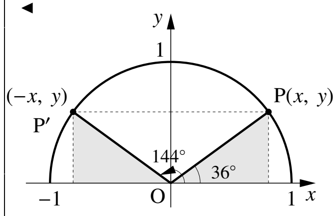
(3) $144^\circ = 180^\circ - 36^\circ$ であるから，『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.170) より次のように求めることができる．

$$\sin 144^\circ = \sin 36^\circ = \mathbf{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\cos 144^\circ = -\cos 36^\circ = \mathbf{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

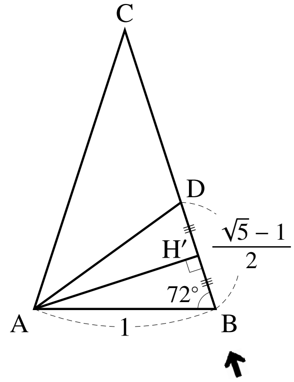
$$\tan 144^\circ = -\tan 36^\circ = \mathbf{-\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

◀



C. 72° の三角比とその周辺

今度は △ABD に着目し，右図のように．点 A から辺 BD へ垂線 AH′ を引く．直角三角形 ABH′ に，余弦の定義を用いて



$$\cos 72^\circ = \frac{\mathrm{BH'}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{BD}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

さらに，三角比の相互関係 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて

$$\sin^2 72^\circ = 1 - \cos^2 72^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

であり，$\sin 72^\circ > 0$ であるから，$\sin 72^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ である．

また，これらより $\tan 72^\circ = \dfrac{\sin 72^\circ}{\cos 72^\circ} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} =$ (計算省略) $= \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ である．

【練習 83：72° とその周辺の三角比】

$\sin 72^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$，$\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\tan 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ を利用して次の三角比を求めよ．

(1) $\sin 18^\circ$，$\cos 18^\circ$，$\tan 18^\circ$
(2) $\sin 108^\circ$，$\cos 108^\circ$，$\tan 108^\circ$
(3) $\sin 162^\circ$，$\cos 162^\circ$，$\tan 162^\circ$

【解答】

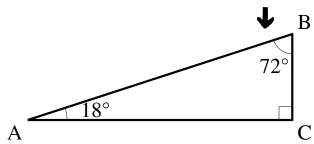
(1) $18^\circ = 90^\circ - 72^\circ$ であるから，『$90^\circ - A$ の三角比』(p.158) より次のように求めることができる．

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

$$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\tan 18^\circ = \frac{1}{\tan 72^\circ} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}}$$

◂



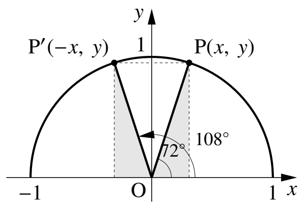
(2) $108^\circ = 180^\circ - 72^\circ$ であるから，『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.170) より次のように求めることができる．

$$\sin 108^\circ = \sin 72^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\cos 108^\circ = -\cos 72^\circ = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

$$\tan 108^\circ = -\tan 72^\circ = \boldsymbol{-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

◂

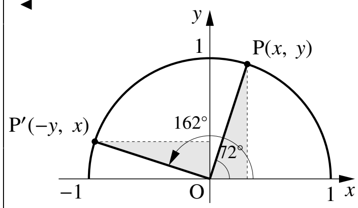


(3) $162^\circ = 90^\circ + 72^\circ$ であるから，『$90^\circ + \theta$ の三角比』(p.171) より次のように求めることができる.

$$\sin 162^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 162^\circ = -\sin 72^\circ = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

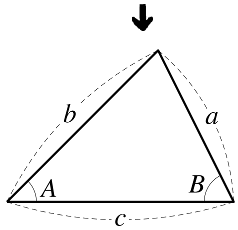
$$\tan 162^\circ = -\frac{1}{\tan 72^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$



2. 第 1 余弦定理

三角形の 2 つの角と 2 辺の長さの間に次の関係式が成り立つ.

$c = b\cos A + a\cos B$

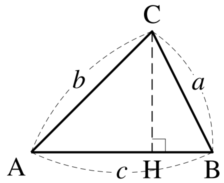


これを，**第 1 余弦定理** (first cosine theorem) という.

A が鋭角のときは，線分 AB 上に垂線 CH をひいて（A が直角の時は H と A が一致する）

（右辺）$= b\cos A + a\cos B = \mathrm{AH} + \mathrm{BH} = \mathrm{AB} = c =$（左辺）

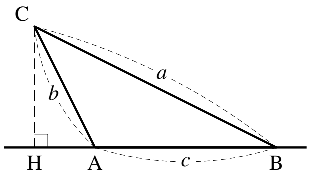
となり成立する（A が直角の時は $a\cos A = 0$ なので $\mathrm{AH} = 0$）.



【暗記 84：第 1 余弦定理の導出】
上の続きとして，A が鈍角のときも第 1 余弦定理が成り立つことを証明せよ.

【解答】 直線 AB 上に，右欄外の図のように垂線 CH をひくと

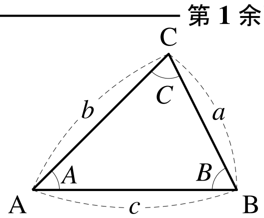
（右辺）$= b\cos A + a\cos B$
$= -b\cos(180^\circ - A) + a\cos B$
$= -\mathrm{AH} + \mathrm{BH} = \mathrm{AB} = c =$（左辺） ■



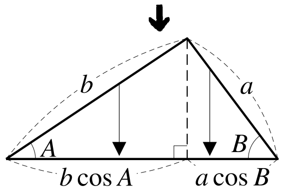
第 1 余弦定理

△ABC において次の等式が成り立つ.

$c = b\cos A + a\cos B$
$b = a\cos C + c\cos A$
$a = c\cos B + b\cos C$



この定理は，ある角から見たときに左右 2 つの辺を向かいの辺に押しつぶす感じで覚えると良い.
また，上の暗記例題のように自分で垂線の引けるならば，公式を覚えなくてもよい.



3.　ヘロンの公式の証明

【発展 85：ヘロンの公式の導出】

3 辺の長さが a, b, c である三角形について，以下の問いに答えなさい．

① 長さ c の辺の対角 C について，$\sin C$ を a, b, c で表せ．式は整頓しなくてよい．

② $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ としたとき，三角形の面積 S が $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ に等しいことを示せ．

【解答】

① 余弦定理より $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ であり，$\sin C > 0$ なので

$$\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$$

② 三角形の面積の公式より $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ なので

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}\\
&= \sqrt{\frac{1}{4}a^2b^2\left\{1-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}\right\}}\\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\}}\\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}}\\
&= \sqrt{\frac{1}{16}(a^2+2ab+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}\\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\{(a^2+2ab+b^2)-c^2\}\{c^2-(a^2-2ab+b^2)\}}\\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}}\\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\})}\\
&= \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}\\
&= \sqrt{\frac{1}{16}2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)}\\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}$$

◀ $\dfrac{1}{2}ab$ を根号の中へ

◀ 平方の差についての因数分解

◀ 平方の差についての因数分解

◀ $-a+b+c = a+b+c-2a = 2s-2a$ などを用いた

三角比の表

0°	1.0000	0.0000	0.0000	**角**	**cos**	**sin**	**tan**
1°	0.9998	0.0175	0.0175	46°	0.6947	0.7193	1.0355
2°	0.9994	0.0349	0.0349	47°	0.6820	0.7314	1.0724
3°	0.9986	0.0523	0.0524	48°	0.6691	0.7431	1.1106
4°	0.9976	0.0698	0.0699	49°	0.6561	0.7547	1.1504
5°	0.9962	0.0872	0.0875	50°	0.6428	0.7660	1.1918
6°	0.9945	0.1045	0.1051	51°	0.6293	0.7771	1.2349
7°	0.9925	0.1219	0.1228	52°	0.6157	0.7880	1.2799
8°	0.9903	0.1392	0.1405	53°	0.6018	0.7986	1.3270
9°	0.9877	0.1564	0.1584	54°	0.5878	0.8090	1.3764
10°	0.9848	0.1736	0.1763	55°	0.5736	0.8192	1.4281
11°	0.9816	0.1908	0.1944	56°	0.5592	0.8290	1.4826
12°	0.9781	0.2079	0.2126	57°	0.5446	0.8387	1.5399
13°	0.9744	0.2250	0.2309	58°	0.5299	0.8480	1.6003
14°	0.9703	0.2419	0.2493	59°	0.5150	0.8572	1.6643
15°	0.9659	0.2588	0.2679	60°	0.5000	0.8660	1.7321
16°	0.9613	0.2756	0.2867	61°	0.4848	0.8746	1.8040
17°	0.9563	0.2924	0.3057	62°	0.4695	0.8829	1.8807
18°	0.9511	0.3090	0.3249	63°	0.4540	0.8910	1.9626
19°	0.9455	0.3256	0.3443	64°	0.4384	0.8988	2.0503
20°	0.9397	0.3420	0.3640	65°	0.4226	0.9063	2.1445
21°	0.9336	0.3584	0.3839	66°	0.4067	0.9135	2.2460
22°	0.9272	0.3746	0.4040	67°	0.3907	0.9205	2.3559
23°	0.9205	0.3907	0.4245	68°	0.3746	0.9272	2.4751
24°	0.9135	0.4067	0.4452	69°	0.3584	0.9336	2.6051
25°	0.9063	0.4226	0.4663	70°	0.3420	0.9397	2.7475
26°	0.8988	0.4384	0.4877	71°	0.3256	0.9455	2.9042
27°	0.8910	0.4540	0.5095	72°	0.3090	0.9511	3.0777
28°	0.8829	0.4695	0.5317	73°	0.2924	0.9563	3.2709
29°	0.8746	0.4848	0.5543	74°	0.2756	0.9613	3.4874
30°	0.8660	0.5000	0.5774	75°	0.2588	0.9659	3.7321
31°	0.8572	0.5150	0.6009	76°	0.2419	0.9703	4.0108
32°	0.8480	0.5299	0.6249	77°	0.2250	0.9744	4.3315
33°	0.8387	0.5446	0.6494	78°	0.2079	0.9781	4.7046
34°	0.8290	0.5592	0.6745	79°	0.1908	0.9816	5.1446
35°	0.8192	0.5736	0.7002	80°	0.1736	0.9848	5.6713
36°	0.8090	0.5878	0.7265	81°	0.1564	0.9877	6.3138
37°	0.7986	0.6018	0.7536	82°	0.1392	0.9903	7.1154
38°	0.7880	0.6157	0.7813	83°	0.1219	0.9925	8.1443
39°	0.7771	0.6293	0.8098	84°	0.1045	0.9945	9.5144
40°	0.7660	0.6428	0.8391	85°	0.0872	0.9962	11.4301
41°	0.7547	0.6561	0.8693	86°	0.0698	0.9976	14.3007
42°	0.7431	0.6691	0.9004	87°	0.0523	0.9986	19.0811
43°	0.7314	0.6820	0.9325	88°	0.0349	0.9994	28.6363
44°	0.7193	0.6947	0.9657	89°	0.0175	0.9998	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	0.0000	1.0000	な　し
角	**cos**	**sin**	**tan**	**角**	**cos**	**sin**	**tan**

これらの値を計算するには，大学で学習することになるテイラー展開（または，マクローリン展開）が必要となる．

索引