13th-note 数学II

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 II で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π，ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ，ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω

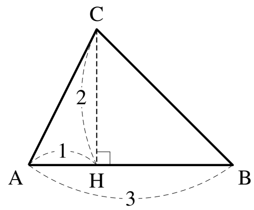
Ver1.521(2012-7-27)

目次

第3章　図形と方程式

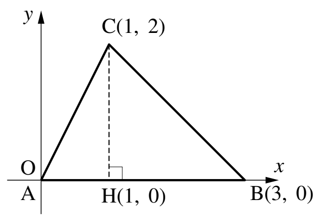
この章では，方程式を用いて図形の問題を扱う．この考え方が，数学があらゆる分野に浸透するための礎を作った．

3.1　図形を座標の上に



たとえば，右の図形を言葉で説明すると，次のようになる．

「長さ 3 の線分 AB を底辺とし，高さが 2 となる点 C をとり，△ABC を作る．このとき，線分 AB 上に AH = 1 となるよう H をとり，線分 CH が辺 AB と垂直であるようにとる」



この図形を座標平面上に書こう．A を原点に，直線 AB を x 軸に一致させれば次のようになる．

「A(0, 0)，B(3, 0)，C(1, 2) とし，△ABC を考える．また，H(1, 0) として辺 AB に垂直な線分 CH を考える．」

結果として，説明が簡潔で分かりやすくなる．

このように，座標平面上に図形を描いて考えることを，**座標幾何学** (coordinate geometry) という[*1]．

【例題 1】 次の 2 つの文章が同じ図形を表すよう，$\boxed{}$ に適当な数値を入れよ．

- 辺 AB を斜辺とし，OA = 3，OB = $\boxed{ア}$ の直角三角形 OAB を考える．
- O(0, 0)，A($\boxed{イ}$, 0)，B($\boxed{ウ}$, 2) とし，△OAB を考える．

【解答】 ア : **2**，イ : **3**，ウ : **0**

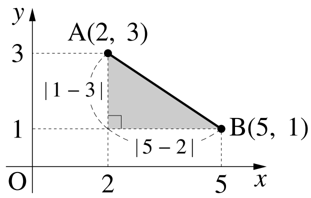
[*1] 図形を扱う学問（**幾何学** (geometry) と言われる）を座標の上で行うので座標幾何学と言われる．また，**解析幾何** (analytic geometry) ともいわれる．歴史的には，ルネ・デカルトが「幾何学 (1637)」において，この方法を最初に用いたとされる．

3.2　平面上の点と座標

1.　2 点間の距離

2 点 A, B が座標平面上にあるとき，A と B の間の距離は三平方の定理を用いて計算できる．

たとえば A(2, 3)，B(5, 1) のとき，y 座標の差について，$3-1$ も $1-3$ も 2 乗すれば同じであることに注意すれば



$$AB^2 = (5-2)^2 + (1-3)^2 \qquad \therefore\ \ AB = \sqrt{13}$$

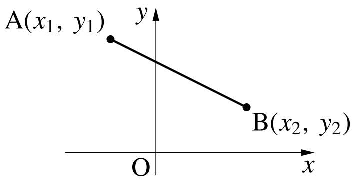
と求められる．このやり方を一般化して，次の公式を得る．

座標平面上の 2 点間の距離

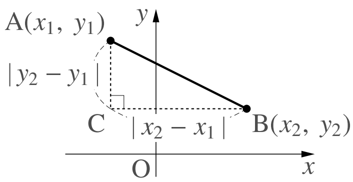
座標平面上の 2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ に対し

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \quad \left(= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}\right)$$

である．特に，A が原点のときは $AB = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ である．



（証明）右図のように，C$(x_1,\ y_2)$ をとる．$AC \fallingdotseq 0$, $CB \fallingdotseq 0$ であれば，三平方の定理から



$$AB^2 = |x_2-x_1|^2 + |y_2-y_1|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

が成り立ち，$AB > 0$ より $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ と分かる．

$BC = 0$ または $CA = 0$ のときは，$x_1 - x_2 = 0$ または $y_1 - y_2 = 0$ なので，明らかに成り立つ．

【例題 2】 2 点 A, B が次の座標にあるとき，2 点 A, B の間の距離を求めよ．

1. A(1, 3)，B(5, 6)　　2. A(−3, −5)，B(2, 3)　　3. A(6, −1)，B(−2, 4)

【解答】

1. $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2} = \mathbf{5}$
2. $AB = \sqrt{\left\{2-(-3)\right\}^2 + \left\{3-(-5)\right\}^2} = \boldsymbol{\sqrt{89}}$
3. $AB = \sqrt{(-2-6)^2 + \left\{4-(-1)\right\}^2} = \boldsymbol{\sqrt{89}}$

【例題 3】 A(3, 2) と P$(x,\ 0)$ の距離を x を用いて表せ．また，$AP = 2\sqrt{2}$ のとき，x の値を求めよ．

【解答】 $PA = \sqrt{(x-3)^2 + (0-2)^2} = \boldsymbol{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}$ であるから

$AP = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 13} = 2\sqrt{2}$

◀『2 点間の距離』(p.74)

$\Leftrightarrow\ x^2-6x+13=8$

これを解いて，$\boldsymbol{x=1,\ 5}$.

◀ 両辺 2 乗した

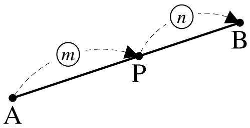
◀ $\Leftrightarrow\ x^2-6x+5=0$

$\Leftrightarrow\ (x-1)(x-5)=0$

2.　線分の内分点・外分点

A.　数直線上の内分点

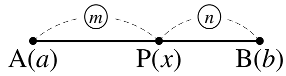
P が線分 AB を $m:n$ に**内分** (interior division) するとは，P が線分 AB 上にあり，AP : PB = $m:n$ を満たすときのことをいった（数学 A，p.106 参照）.



まず，線分 AB に定規を当てて A，B の目盛りは $a,\ b$ であったとき，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の目盛りについて考えよう．これは，数直線上の線分 AB について考えていることと同じである.

数直線上の内分点の座標

数直線上の A(a)，B(b) について，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P は $\dfrac{na+mb}{m+n}$ で求められる.

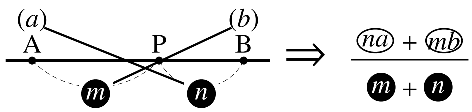


（証明）点 P の目盛りを x とおく．A の目盛り (a) に $x-a$ を足せば P の目盛り (x) であり，P の目盛りに $b-x$ を足せば B の目盛り (b) である．$x-a,\ b-x$ の正負は一致し，AP : PB = $m:n$ となるので

$$(x-a):(b-x)=m:n \quad\Leftrightarrow\quad n(x-a)=m(b-x)$$

これを解いて，$x=\dfrac{na+mb}{m+n}$ と求められる.

上の公式を使うには，右のような図を描き，「比だけを足すと分母，座標と比を交差して掛けて足すと分子になる」と考えると計算しやすい.



【例題 4】 以下の点 A, B について，それぞれ，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，線分 AB を 2 : 3 に内分する点 Q の座標を求めよ.

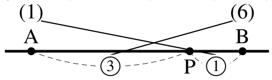
1. A(1)，B(6)　　2. A(−2)，B(7)　　3. A(−3)，B(−1)

【解答】

1. P の座標は $\dfrac{1\cdot1+3\cdot6}{3+1}=\boldsymbol{\dfrac{19}{4}}$，Q の座標は $\dfrac{3\cdot1+2\cdot6}{2+3}=\boldsymbol{3}$
2. P の座標は $\dfrac{1\cdot(-2)+3\cdot7}{3+1}=\boldsymbol{\dfrac{19}{4}}$，Q の座標は $\dfrac{3\cdot(-2)+2\cdot7}{2+3}=\boldsymbol{\dfrac{8}{5}}$
3. P の座標は $\dfrac{1\cdot(-3)+3\cdot(-1)}{3+1}=\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$

   Q の座標は $\dfrac{3\cdot(-3)+2\cdot(-1)}{2+3}=\boldsymbol{-\dfrac{11}{5}}$

◀ 次のような図を描いて考えよう



B. 内分点の座標

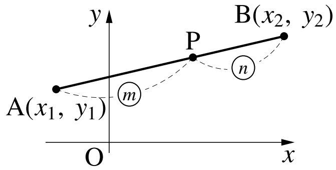
線分 AB が座標平面上にあった場合は次のようになる．

座標平面上の内分点の座標

座標平面上の 2 点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ に対し，線分 AB を $m : n$ に内分する点を P とすると，P の座標は

$$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$$

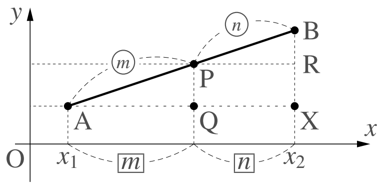
である．特に，P が中点のとき，$m = n$ より，$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ である．



（証明）右下図のように考えれば，$\triangle APQ \backsim \triangle ABX$ であるので Q は線分 AX を $m : n$ に内分する点である．x 座標だけを見れば $A(x_1)$, $X(x_2)$ であるので

$$(\text{Q の } x \text{ 座標}) = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} = (\text{P の } x \text{ 座標})$$

となる．同様にして $(\text{P の } y \text{ 座標}) = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}$ である．



【例題 5】 以下の点 A, B について，それぞれ，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，線分 AB を 2 : 3 に内分する点 Q，線分 AB の中点 H の座標を求めよ．

1. $A(2,\ 5)$，$B(3,\ 2)$
2. $A(-2,\ 3)$，$B(3, -1)$
3. $A(0,\ 0)$，$B(3, -4)$

【解答】

1. P の座標は $\left(\dfrac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{3+1},\ \dfrac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{3+1}\right)$

   Q の座標は $\left(\dfrac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{2+3},\ \dfrac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 2}{2+3}\right)$

   H の座標は $\left(\dfrac{2+3}{2},\ \dfrac{5+2}{2}\right)$ であるので

   $\mathbf{P\left(\frac{11}{4},\ \frac{11}{4}\right)}$, $\mathbf{Q\left(\frac{12}{5},\ \frac{19}{5}\right)}$, $\mathbf{H\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right)}$

2. P の座標は $\left(\dfrac{1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3}{3+1},\ \dfrac{1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1)}{3+1}\right)$

   Q の座標は $\left(\dfrac{3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3}{2+3},\ \dfrac{3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)}{2+3}\right)$

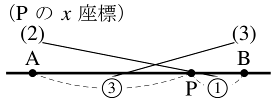
   H の座標は $\left(\dfrac{-2+3}{2},\ \dfrac{3+(-1)}{2}\right)$ であるので

   $\mathbf{P\left(\frac{7}{4},\ 0\right)}$, $\mathbf{Q\left(0,\ \frac{7}{5}\right)}$, $\mathbf{H\left(\frac{1}{2},\ 1\right)}$

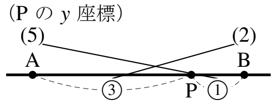
3. $\mathbf{P\left(\frac{9}{4}, -3\right)}$, $\mathbf{Q\left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)}$, $\mathbf{H\left(\frac{3}{2}, -2\right)}$

◀ 次のような図を描いて考えよう

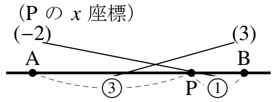
(P の x 座標)



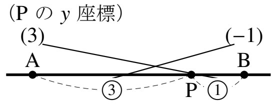
(P の y 座標)



◀ (P の x 座標)



(P の y 座標)

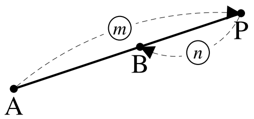


◀ $P\left(\dfrac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 3}{3+1},\ \dfrac{1 \cdot 0 + 3 \cdot (-4)}{3+1}\right)$

$Q\left(\dfrac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 3}{2+3},\ \dfrac{3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4)}{2+3}\right)$

$H\left(\dfrac{0+3}{2},\ \dfrac{0+(-4)}{2}\right)$

C. 外分点の座標



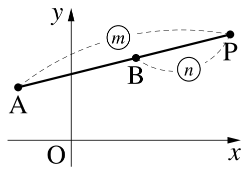
P が線分 AB を $m:n$ に**外分** (exterior division) するとは，P が線分 AB を除く直線 AB 上にあり，AP : PB = $m:n$ を満たすときのことをいった（数学 A，p.106 参照）．

外分の場合は，A から P へ向かう向きと，P から B へ向かう向きが逆なので，結果的には，次の 3 つの計算が同じとなる（【発展 ：直線上の外分点】(p.80) を参照のこと）．

座標平面上の外分点の座標

座標幾何学においては

- AP : PB を $m:n$ に外分する点 P を考える
- AP : PB を $m:(-n)$ に内分する点 P を考える
- AP : PB を $(-m):n$ に内分する点 P を考える



ことは同じことである（ただし，$m \fallingdotseq n$）．つまり，座標平面上の 2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ に対し，線分 AB を $m:n$ に外分する点 P の座標は次のようになる．

$$\mathrm{P}\left(\frac{(-n)x_1+mx_2}{m+(-n)},\ \frac{(-n)y_1+my_2}{m+(-n)}\right) \text{ または } \mathrm{P}\left(\frac{nx_1+(-m)x_2}{(-m)+n},\ \frac{ny_1+(-m)y_2}{(-m)+n}\right)$$

$m>n$ の時は $\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$，$m<n$ の時は $\left(\dfrac{nx_1-mx_2}{-m+n},\ \dfrac{ny_1-my_2}{-m+n}\right)$ を用いると，分母に負の数が表れず，計算ミスが起こりにくい．

【例題 6】 以下の点 A, B について，それぞれ，線分 AB を 3 : 1 に外分する点 P，2 : 3 に外分する点 Q，4 : 3 に外分する点 R の座標を求めよ．

1. A(2, 5)，B(3, 2)
2. A(−2, 3)，B(3, −1)

【解答】

- 点 P は線分 AB を 3 : (−1) に内分した点
- 点 Q は線分 AB を (−2) : 3 に内分した点
- 点 R は線分 AB を 4 : (−3) に内分した点

と考えて，公式に当てはめればよい．

◀ 1 の方が小さいので 1 を (−1) 倍

◀ 2 の方が小さいので 2 を (−1) 倍

◀ 3 の方が小さいので 3 を (−1) 倍

1. P の座標は $\left(\dfrac{(-1)\cdot 2+3\cdot 3}{3+(-1)},\ \dfrac{(-1)\cdot 5+3\cdot 2}{3+(-1)}\right)$

   Q の座標は $\left(\dfrac{3\cdot 2+(-2)\cdot 3}{(-2)+3},\ \dfrac{3\cdot 5+(-2)\cdot 2}{(-2)+3}\right)$

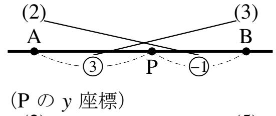
   R の座標は $\left(\dfrac{(-3)\cdot 2+4\cdot 3}{4+(-3)},\ \dfrac{(-3)\cdot 5+4\cdot 2}{4+(-3)}\right)$

   であるので P$\left(\boldsymbol{\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}}\right)$，Q$\,(\mathbf{0,\ 11})$，R$\,(\mathbf{6,\ -7})$

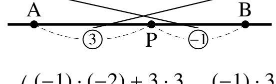
2. P$\left(\boldsymbol{\dfrac{11}{2},\ -3}\right)$，Q$\,(\mathbf{-12,\ 11})$，R$\,(\mathbf{18,\ -13})$

◀ 次のような図を描いて考えよう

（P の x 座標）



（P の y 座標）



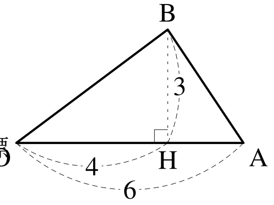
◀ P$\left(\dfrac{(-1)\cdot(-2)+3\cdot 3}{3+(-1)},\ \dfrac{(-1)\cdot 3+3\cdot(-1)}{3+(-1)}\right)$

Q$\left(\dfrac{3\cdot(-2)+(-2)\cdot 3}{(-2)+3},\ \dfrac{3\cdot 3+(-2)\cdot(-1)}{(-2)+3}\right)$

R$\left(\dfrac{(-3)\cdot(-2)+4\cdot 3}{4+(-3)},\ \dfrac{(-3)\cdot 3+4\cdot(-1)}{4+(-3)}\right)$

【練習 7：平面図形】

右の △OAB を座標平面上に O(0, 0)，A(6, 0) となるよう描いて考える．



(1) H の座標，B の座標，辺 OB の中点 N の座標を求めよ．

(2) 辺 OA の中点 M，線分 BM を 2 : 1 に内分する点 G_1 の座標を求めよ．

(3) 線分 BM を 2 : 1 に外分する点 D，線分 AN を 2 : 1 に外分する点 E の座標を求めよ．

(4) OB，BA，AD，DO の長さをすべて求めよ．

【解答】

(1) **H(4, 0)**，**B(4, 3)**，$\mathbf{N\left(2,\ \frac{3}{2}\right)}$

(2) **M(3, 0)**，G_1 の座標は $\left(\dfrac{1\cdot 4+2\cdot 3}{2+1},\ \dfrac{1\cdot 3+0}{2+1}\right)=\mathbf{\left(\dfrac{10}{3},\ 1\right)}$

◂ 公式から $M\left(\dfrac{0+6}{2},\ \dfrac{0+0}{2}\right)$ として計算してもよいが，図を描けば明らかである．

(3) D の座標は $\left(\dfrac{(-1)\cdot 4+2\cdot 3}{2+(-1)},\ \dfrac{(-1)\cdot 3+0}{2+(-1)}\right)=\mathbf{(2,\ -3)}$，

E の座標は $\left(\dfrac{(-1)\cdot 6+2\cdot 2}{2+(-1)},\ \dfrac{0+2\cdot \frac{3}{2}}{2+(-1)}\right)=\mathbf{(-2,\ 3)}$

◂ BM を 2 : (−1) に内分すると考えて，D を求めることができる．

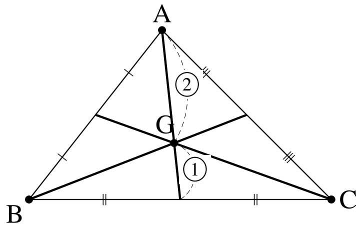
(4) $OB=\sqrt{4^2+3^2}=\mathbf{5}$，$BA=\sqrt{(6-4)^2+(0-3)^2}=\mathbf{\sqrt{13}}$

$AD=\sqrt{(2-6)^2+(-3-0)^2}=\mathbf{5}$，$DO=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\mathbf{\sqrt{13}}$

◂ 『2 点間の距離』(p.74)

◂ 四角形 OBAD は平行四辺形になっている．これは，図を描いても容易に確かめられる．

3. 三角形の重心



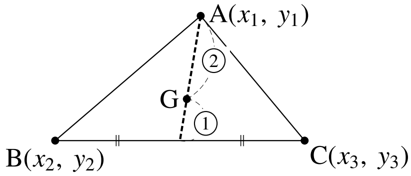
どんな三角形でも，各頂点から引いた 3 本の中線は 1 点で交わった．これを三角形の**重心** (centroid, barycenter) といい，重心は，中線を 2 : 1 に内分する点であった（数学 A，p.118 参照）．

座標平面上で考えると，△ABC の重心の座標は次のように表される．

座標平面上の三角形の重心の座標

座標平面上の $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ について，
△ABC の重心を G の座標は次のようになる．

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$



（証明）辺 BC の中点を N とすると，$N\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$ である．重心 G は線分 AN を 2 : 1 に内分するので G の座標は $\left(\dfrac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \dfrac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)=\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ となる．

三角形の重心の座標は，三角形の 3 頂点の座標の平均だと覚えると良い．

【例題 8】

1. A(3, 2), B(−1, 4), C(−3, −5) に対し，△ABC の重心 G の座標を求めよ．
2. A(1, a), B(b, 2), C(3, −3) の重心が原点であるとき，a, b の値を求めよ．

【解答】

1. $\left(\dfrac{3+(-1)+(-3)}{3},\ \dfrac{2+4+(-5)}{3}\right)=\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}}\right)$
2. 重心の座標が (0, 0) であるので

$$\left(\frac{1+b+3}{3},\ \frac{a+2+(-3)}{3}\right)=(0,\ 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1+b+3=0\\ a+2+(-3)=0\end{cases}\qquad \therefore\ \ \boldsymbol{(a,\ b)=(1,-4)}.$$

4. 座標幾何学の応用

A. 求める点を $(x,\ y)$ とおく

座標平面上で考えると，条件を満たす点を求める問題は，方程式を解く問題に帰着できる．

【暗記 9：求める点を $(x,\ y)$ とおく】

A(5, 4), B(0, −1) があって，点 P(x, y) とする．以下の問いにそれぞれ答えよ．

1. 線分 AP を 2 : 1 に内分する点の座標が (0, 0) であるとき，x, y の値を求め，P の座標を答えよ．
2. AP = BP = $\sqrt{13}$ であるとき，x, y の値を求め，P の座標を答えよ．

【解答】

1. AP を 2 : 1 に内分する点 $\left(\dfrac{2x+5}{3},\ \dfrac{2y+4}{3}\right)$ は，(0, 0) と等しいので

◀『内分点の座標』(p.76)

$$\frac{2x+5}{3}=0\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}\qquad\qquad \frac{2y+4}{3}=0\Leftrightarrow y=-2$$

よって，P の座標は $\left(\boldsymbol{-\dfrac{5}{2},\ -2}\right)$.

2. AP = $\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$, BP = $\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2}$ であるので

◀『2 点間の距離』(p.74)

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}=\mathrm{BP}&\Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2}\\ &\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-4)^2=x^2+(y+1)^2 && \text{◀両辺 2 乗した}\\ &\Leftrightarrow -10x+25-8y+16=2y+1 && \text{◀}x^2,\ y^2\text{ は移項で消去}\\ &\Leftrightarrow 4=x+y \quad\cdots\cdots ① && \text{◀整頓して，両辺を 10 で割った}\\ \mathrm{BP}=\sqrt{13}&\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=13 \quad\cdots\cdots ② && \text{◀両辺 2 乗した}\end{aligned}$$

①を y について解くと $y=4-x$ なので，これを②へ代入して

$$\begin{aligned}x^2+(4-x+1)^2=13&\Leftrightarrow x^2+x^2-10x+25=13\\ &\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\quad\therefore\ \ x=2,\ 3\end{aligned}$$

①から y を求めて，**P(2, 2), (3, 1)** とわかる．

【練習 10：求める点を $(x,\ y)$ とおく】

$A(-1,\ 4)$，$B(1,\ 2)$ がある．

(1) $AP = BP$ となる点 P を y 軸上にとるとき，P の座標を求めよ．

(2) $AQ : BQ : AB = 1 : 1 : \sqrt{2}$ であるとき，点 Q の座標を求めよ．

(3) $\triangle ABR$ が正三角形となるとき，点 R の座標を求めよ．

【発展 11：直線上の外分点】

線分 AB に定規をあてると，A，B の目盛りは $a,\ b$ であったという．線分 AB を $m : n$ に外分する点 P の目盛りを x とおく．

A の目盛り a に $\boxed{ア}$ を足せば P の目盛り x であり，P の目盛り x に $\boxed{イ}$ を足せば B の目盛り b である．$AP : PB = m : n$ となるが，P は辺 AB の外側にあるため $\boxed{ア}$ と $\boxed{イ}$ の符号が異なるから，

$\boxed{ア} : \boxed{イ} = m : (-n)$ $\left(= (-m) : n\right)$ となる．これを解いて，$x = \boxed{ウ}$．

【解答】 $\boldsymbol{ア = x - a,\ イ = b - x,\ ウ = \dfrac{-na + mb}{m - n} \left(= \dfrac{na - mb}{-m + n}\right)}$

B. 点について対称

【暗記 12：点について対称】

$A(1,\ 3)$ について，$P(3,\ 2)$ と対称な点 Q の座標を答えよ．

【解答】 $Q(x,\ y)$ とおく．線分 PQ の中点が A になるので

$$\left(\frac{3+x}{2},\ \frac{2+y}{2}\right) = (1,\ 3)$$

$\dfrac{3+x}{2} = 1$ を解いて $x = -1$，$\dfrac{2+y}{2} = 3$ を解いて $y = 4$ なので，$\mathbf{Q(-1,\ 4)}$．

【練習 13：点について対称】

(1) $(4,\ 3)$ について，$(8,\ 1)$ と対称な点の座標を答えなさい．

(2) $(s,\ 1)$ と $(1,\ t)$ が，$(-2, -4)$ について対称なとき，$s,\ t$ を求めなさい．

【解答】

(1) 求める点を $(x,\ y)$ とおく．$(8,\ 1)$ と $(x,\ y)$ の中点が $(4,\ 3)$ になるので

$$\left(\frac{8+x}{2},\ \frac{1+y}{2}\right) = (4,\ 3)$$

◀ 左辺は『内分点の座標』(p.76)

$\dfrac{8+x}{2} = 4$ を解いて $x = 0$，$\dfrac{1+y}{2} = 3$ を解いて $y = 5$ なので，$\mathbf{(0,\ 5)}$．

(2) $(s,\ 1)$ と $(1,\ t)$ の中点が $(-2, -4)$ になるので

$$\left(\frac{s+1}{2},\ \frac{1+t}{2}\right) = (-2, -4)$$

$\dfrac{s+1}{2} = -2$ を解いて $\boldsymbol{s = -5}$，$\dfrac{1+t}{2} = -4$ を解いて $\boldsymbol{t = -9}$．

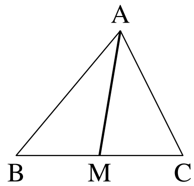
C. 発展 平面図形の証明

【暗記 14：座標平面上で証明する】

$\triangle$ABC において，辺 BC の中点を M とする．このとき

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + MB^2)$$

であることを，座標平面を用いて示せ．

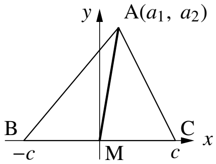


【解答】 右図のように，M が原点となり，BC が x 軸上に位置するような座標平面を考える．$A(a_1, a_2)$，$C(c, 0)$，$B(-c, 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \left(\sqrt{(a_1+c)^2 + a_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(a_1-c)^2 + a_2^2}\right)^2 \\ &= a_1^2 + 2a_1c + c^2 + a_2^2 + a_1^2 - 2a_1c + c^2 + a_2^2 \\ &= 2(a_1^2 + a_2^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$2(AM^2 + MB^2) = 2\left\{\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{c^2}\right)^2\right\} = 2(a_1^2 + a_2^2 + c^2)$$

より，$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + MB^2)$ である． ■

◀ 

これ以外の座標の取り方だと計算が煩雑になる

◀ 『2 点間の距離』(p.74)

上で証明した等式は「中線定理」といわれる．

【暗記 15：重心】

$\triangle$ABC について，辺 AB，BC，CA を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．$\triangle$ABC の重心と $\triangle$DEF の重心が一致することを示せ．

【解答】 座標平面上で $\triangle$ABC を考え，$A(a_1, a_2)$，$B(b_1, b_2)$，$C(c_1, c_2)$ とおく．このとき，ABC の重心の座標は $\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}, \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

D は AB を 2 : 1 に内分した点なので，$D\left(\dfrac{a_1+2b_1}{3}, \dfrac{a_2+2b_2}{3}\right)$

E は BC を 2 : 1 に内分した点なので，$E\left(\dfrac{b_1+2c_1}{3}, \dfrac{b_2+2c_2}{3}\right)$

F は CA を 2 : 1 に内分した点なので，$F\left(\dfrac{c_1+2a_1}{3}, \dfrac{c_2+2a_2}{3}\right)$

よって，$\triangle$DEF の重心の座標は

$$\left(\frac{\frac{a_1+2b_1}{3} + \frac{b_1+2c_1}{3} + \frac{c_1+2a_1}{3}}{3}, \frac{\frac{a_2+2b_2}{3} + \frac{b_2+2c_2}{3} + \frac{c_2+2a_2}{3}}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{(a_1+2b_1)+(b_1+2c_1)+(c_1+2a_1)}{9}, \frac{(a_2+2b_2)+(b_2+2c_2)+(c_2+2a_2)}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{3(a_1+b_1+c_1)}{9}, \frac{3(a_2+b_2+c_2)}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

となるので，一致する． ■

◀ A，B，C の座標は，この解答のように文字を揃えておくのがよい．そうすれば，D，E，F がすべて同じ形になり，計算ミスに気づきやすくなる．

上の事実は，数学 B の「ベクトル」を用いても証明できる．

3.3 多変数関数と陰関数

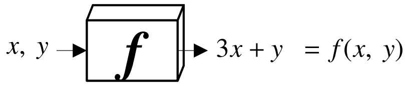
変数を 2 つ以上持つ関数のことを**多変数関数** (multivariable function) という．もし，ある関数が $x,\ y$ を変数にもつならば，その関数は $f(x,\ y)$ のように表される．

A. 多変数関数の例

例として，勝ちに 3 点，引き分けに 1 点，負けに 0 点を与えるときの合計点を考える．

勝った回数が x 回，引き分けた回数が y 回であるときの合計点を $f(x,\ y)$ とおけば

$$f(x,\ y) = 3x + y \quad \cdots\cdots\cdots ①$$



勝った回数 (x) と引き分けの回数 (y) から合計点を決める規則

と求められる．$x,\ y$ はどちらも変数であり，代入は変数が 1 つのときと同じように以下のように書く．

$$f(6,\ 4) = 18 + 4 = 22 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

式②は「6 勝 4 引き分けならば，合計点は 22 点である」ことを表している．

【例題 16】

1. $G(x,\ y) = x^2 + y^2 - 10$ のとき，$G(1,\ 1),\ G(3, -1),\ G(-4,\ t)$ の値を求めよ．
2. 1 個 x 円のりんごを 5 個，1 個 y 円のみかんを 7 個買うときの合計を $s(x,\ y)$ 円とするとき，$s(x,\ y)$ を求めよ．また，$s(100,\ 50),\ s(a,\ 60)$ の値を求めよ．

【解答】

1. $G(1,\ 1) = 1^2 + 1^2 - 10 = \mathbf{-8}$，$G(3, -1) = 3^2 + (-1)^2 - 10 = \mathbf{0}$

   $G(-4,\ t) = (-4)^2 + t^2 - 10 = \boldsymbol{t^2 + 6}$

2. 合計金額は $\boldsymbol{s(x,\ y) = 5x + 7y}$ と表せるので

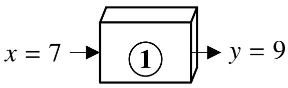
   $s(100,\ 50) = 5 \cdot 100 + 7 \cdot 50 = \mathbf{850}$ [円]

   $s(a,\ 60) = 5 \cdot a + 7 \cdot 60 = \boldsymbol{5a + 420}$ [円]

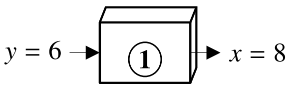
B. 陰関数とは

上の関数 $f(x,\ y) = 3x + y$ の値が 30 であったとする．つまり

$$3x + y = 30 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



合計点が 30 のときの勝った回数 (x) と引き分けの回数 (y) の間の規則



合計点が 30 のときの引き分けの回数 (y) と勝った回数 (x) との間の規則

もし，$x = 7$ であれば，等式①によって $y = 9$ と決まる．このように，x の値に対し，等式①が y の値を与える．

逆に，$y = 6$ であれば，等式①によって $x = 8$ と決まる．このように，y の値に対しても，等式①が x の値を与える．

一般に，①のように

$$F(x,\ y) = k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

という形の等式を（$x,\ y$ についての）**陰関数** (implicit function) といい，$x,\ y$ を変数と呼ぶ[*2]．

[*2] 陰関数という名前の由来は，文字 y が左辺の中で「陰」になっていることにある．また，上の関数 F の変数は 2 つだが，変数が 3 つ以上であってもやはり陰関数という．ただし，F の変数が 1 つのときは陰関数とは呼ばれない．

陰関数 $F(x,\ y) = k$ を満たす $(x,\ y)$ の組を，その陰関数の**解** (solution) という．たとえば，$(x,\ y) = (7,\ 9),\ (8,\ 6)$ は陰関数①の解になっている．

【例題 17】

1. $A(x,\ y) = 2x + 3y - 40$ とする．陰関数 $A(x,\ y) = 0$ において，$x = 5$ のときの y の値と，$y = 4$ のときの x の値を求めよ．
2. 陰関数 $4x - ay = 15$ が $(x,\ y) = (-3,\ 2)$ を解にもつとき，a の値を求めよ．

【解答】

1. $x = 5$ のとき，$2 \cdot 5 + 3y - 40 = 0$ を解いて，$y = \mathbf{10}$.
   ◂ $2x + 3y - 40 = 0$ に $x = 5$ を代入
   $y = 4$ のとき，$2x + 3 \cdot 4 - 40 = 0$ を解いて，$x = \mathbf{14}$.
   ◂ $2x + 3y - 40 = 0$ に $y = 4$ を代入
2. 与えられた陰関数は $(x,\ y) = (-3,\ 2)$ を解に持つので，これを代入して a を解けば

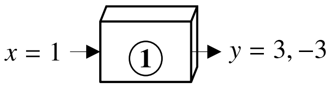
$$4 \cdot (-3) - 2a = 15 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a = -\frac{27}{2}}$$

C. 陰関数とこれまでの関数の違い

陰関数 $F(x,\ y) = k$ は「x の値から変数 y の値を定め」「y の値から x の値を定め」るが，それによってただ 1 つの値に定めるとは限らない．

たとえば，関数 $G(x,\ y) = x^2 + y^2 - 10$ の値が 0 である陰関数

$$G(x,\ y) = x^2 + y^2 - 10 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$



陰関数 $G(x,\ y) = 0$

は 1 つの x の値に対して y を 1 つに定めない．たとえば $x = 1$ のとき

$$1 + y^2 - 10 = 0 \iff y^2 = 9$$

であるので，①は $y = \pm 3$ となり，y の値をただ 1 つには定めない．

【例題 18】

1. $H(x,\ y) = x + y^2 - 30$ とする．陰関数 $H(x,\ y) = 0$ において，$x = 5$ のときの y の値と，$y = 4$ のときの x の値を求めよ．
2. 陰関数 $x^2 + y - 5 = 0$ と関数 $y = p(x)$ は同値な等式であるという．$p(x)$ を求めよ．

【解答】

1. $x = 5$ のとき，$5 + y^2 - 30 = 0$ を解いて，$\boldsymbol{y = -5,\ 5}$.
   ◂ $x + y^2 - 30 = 0$ に $x = 5$ を代入
   $y = 4$ のとき，$x + 4^2 - 30 = 0$ を解いて，$\boldsymbol{x = 14}$.
   ◂ $x + y^2 - 30 = 0$ に $y = 4$ を代入
2. 陰関数 $x^2 + y - 5 = 0$ を y について解けば $y = -x^2 + 5$ になるので $\boldsymbol{p(x) = -x^2 + 5}$ である．
   ◂ 右辺は y を与える x の関数になっている．

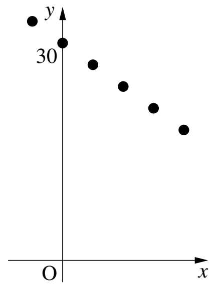
D.　陰関数のグラフ

座標平面上の点 $(x,\ y)$ のうち，陰関数 $F(x,\ y) = k$ を満たす点をすべて集めてできる図形を，陰関数 $F(x,\ y) = k$ の**グラフ** (graph) という．

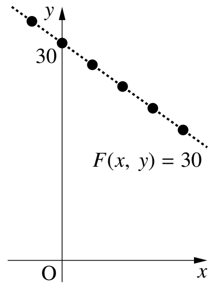
たとえば，関数 $F(x,\ y) = 3x + y = 30$ のグラフは次のように書くことができる．

x	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	33	30	27	24	21	18	$\cdots$

$\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$



それぞれを座標平面上に点でとると，真ん中の図のようになり，最終的には右上図の直線となる．この直線を関数 $F(x,\ y) = 30$ の**グラフ** (graph) という．

上の陰関数 $F(x,\ y) = 3x+y = 30$ を y について解けば $y = -3x+30$ となる．つまり，$F(x,\ y) = 30$ のグラフは直線 $y = -3x + 30$ と一致する．

【例題 19】 上の $F(x,\ y)$ について，以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．

1. 点 $(6,\ \boxed{ア})$, $(-3,\ \boxed{イ})$, $\left(\dfrac{2}{3},\ \boxed{ウ}\right)$ は $F(x,\ y) = 30$ のグラフ上にある．
2. 点 $(\boxed{エ},15)$, $(\boxed{オ},-3)$, $\left(\boxed{カ},20\right)$ は $F(x,\ y) = 30$ のグラフ上にある．

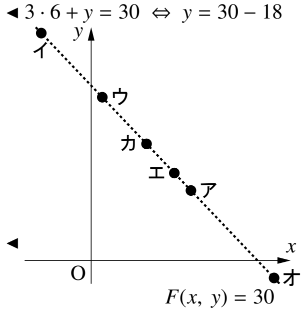
【解答】

1. **ア**: $F(x,\ y) = 3x + y = 30$ に $x = 6$ を代入して，y について解けば $y = 12$．つまり，$(6,\ \mathbf{12})$．
   イ: $3x + y = 30$ に $x = -3$ を代入して解けば $y = 39$ より，$(-3,\ \mathbf{39})$．
   ウ: $3x + y = 30$ に $x = \dfrac{2}{3}$ を代入して解けば $y = 28$ より，$\left(\dfrac{2}{3},\ \mathbf{28}\right)$．
2. **エ**: $F(x,\ y) = 3x + y = 30$ に $y = 15$ を代入して，x について解けば $x = 5$．つまり，$(\mathbf{5},\ 15)$．
   オ: $3x + y = 30$ に $y = -3$ を代入して解けば $x = 11$ より，$(\mathbf{11}, -3)$．
   カ: $3x + y = 30$ に $y = 20$ を代入して解けば $x = \dfrac{10}{3}$ より，$\left(\mathbf{\dfrac{10}{3}},\ 20\right)$．

◀ $3 \cdot 6 + y = 30 \iff y = 30 - 18$

◀ $3 \cdot 6 + y = 30 \iff y = 30 - 18$

◀



E. これまでの関数と陰関数の間の関係

y を与える x の関数 $y = f(x)$ は，必ず陰関数に変形できる[*3]．たとえば，関数 $y = 2x - 3$ は陰関数 $y - 2x + 3 = 0$ と同じ式を表す．このように，関数 $y = f(x)$ は陰関数 $y - f(x) = 0$ に一致する．

一方，陰関数の式を y について解けば，y を与える x の関数に変形できる．

【例題 20】 以下の (a)〜(f) の中から，等しい関数の組をすべて答えよ．

(a) $x + y = 1$ (b) $y = x - 1$ (c) $x + y^2 = 0$ (d) $x^2 + y - 1 = 0$ (e) $y = -x + 1$
(f) $y = -x^2 + 1$

【解答】 すべてを陰関数になおすと

(a) $x + y = 1$ (b) $-x + y = 1$ (c) $x + y^2 = 0$ (d) $x^2 + y - 1 = 0$
(e) $x + y = 1$ (f) $x^2 + y - 1 = 0$

になるので，**(a) と (e)**，**(d) と (f)** が等しい．

F. 直線の一般形 $ax + by + c = 0$

$ax + by + c = 0$ という形の式は直線を表し，直線の方程式の一般形といわれる．

- $(a, b, c) = (2, 3, -1)$ のとき，$2x + 3y - 1 = 0 \iff y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$ となり傾き $-\dfrac{2}{3}$，切片 $\dfrac{1}{3}$ の直線
- $(a, b, c) = (2, 0, -1)$ のとき，$2x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$ となり，y 軸に平行な直線

【暗記 21：2 直線の相等】

1. 2 つの方程式 $y = 2x + b$ と $y = (a - 1)x + 3$ が同じ直線を表わすとき，a, b の値を求めよ．
2. 2 つの方程式 $2x + 3y - 3b + 1 = 0$ と $bx + y - a = 0$ が同じ直線を表わすとき，a, b の値を求めよ．

【解答】

1. 傾きを見比べて $2 = a - 1$ なので $\boldsymbol{a = 3}$，y 切片を見比べて $\boldsymbol{b = 3}$.
2. $2x + 3y - 3b + 1 = 0 \iff y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{-3b + 1}{3}$．一方，$bx + y - a = 0 \iff y = -bx + a$ である．傾きと y 切片を見比べて

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{3} = -b \\ \dfrac{-3b + 1}{3} = a \end{cases} \iff \boldsymbol{(a,\ b) = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)}$$

【別解】$2x + 3y - 3b + 1 = 0$ と $bx + y - a = 0$ について，
$2 : 3 : (-3b + 1) = b : 1 : (-a)$ が成り立てばよい．
$2 : 3 = b : 1$ を解いて $\boldsymbol{b = \frac{2}{3}}$，
$3 : (-3b + 1) = 1 : (-a)$ を解いて $\boldsymbol{a = -\frac{1}{3}}$.

[*3] この意味で，陰関数の概念は，これまで学んだ関数の概念より広い概念である．

3.4　平面上の直線と方程式

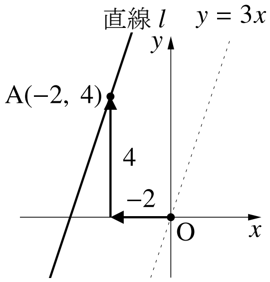
1.　直線の方程式

A.　与えられた 1 点を通り，傾きが定まった直線の方程式

たとえば，A$(-2,\ 4)$ を通り，傾き 3 の直線を l としよう．

右図のように，原点を通る直線 $y=3x$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 4 平行移動させれば直線 l になる．数学 I で学んだように[*4]

- 「x 軸方向に -2 平行移動」と「x を $x+2$ に置き換え」は一致する
- 「y 軸方向に 4 平行移動」と「y を $y-4$ に置き換え」は一致する



から，l の方程式は $y-4=3(x+2)$ と表され，整頓して $y=3x+10$ を得る．

（1 点と傾きが与えられた）直線の方程式

傾きが m で点 $(p,\ q)$ を通る直線の方程式は，次の式で与えられる．

$$y-q=m(x-p)$$

（証明）$y=mx$ が $(p,\ q)$ を通るように「x 軸方向に p 平行移動し（⇔ x を $x-p$ に置き換え）」，「y 軸方向に q 平行移動し（⇔ y を $y-q$ に置き換え）」て，$y-q=m(x-p)$ という方程式が得られる．

【例題 22】 次の条件を満たす直線の方程式を，上の方法で導け．

1. $(3,\ 1)$ を通り，傾きが -3　　2. $(4,-2)$ を通り，傾きが 2　　3. $(a,\ b)$ を通り，傾きが 2

【解答】

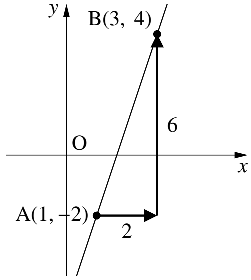
1. $y-1=-3(x-3)\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{y=-3x+10}$
2. $y+2=2(x-4)\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{y=2x-10}$　　3. $\boldsymbol{y-b=2(x-a)}$

上の方法は，中学校で学ぶ方法とは異なるが，今後は上のやり方を採用するのがよい．特に，条件に文字が入った場合にたいへん計算しやすくなる．

[*4] 頂点 $(p,\ q)$ の放物線の方程式は，以下のように考えることができた（数学 I の p.97 参照）．

頂点 $(0,\ 0)$ の放物線 $y=ax^2 \xrightarrow[y\text{ 方向に } q \text{ 平行移動（} y \text{ を } y-q \text{ に置き換える）}]{x\text{ 方向に } p \text{ 平行移動（} x \text{ を } x-p \text{ に置き換える）}} y-q=a(x-p)^2 \iff y=a(x-p)^2+q$ は頂点 $(p,\ q)$

B. 与えられた 2 点を通る直線の方程式



たとえば，A(1, −2)，B(3, 4) を通る直線を m としよう．

m の傾きは，$\dfrac{(y\text{ 座標の増加分})}{(x\text{ 座標の増加分})} = \dfrac{4-(-2)}{3-1} = 3$ である[*5]．そこで『直線の方程式』(p.86) を用いれば

$y+2 = 3(x-1)$ （または，$y-4=3(x-3)$）[*6]

が直線 m の方程式と分かる．これを整頓して $y = 3x-5$ となる．

【例題 23】

次の 2 点を通る直線の方程式を，上の方法で導け．ただし，$a \neq 0$ とする．

1. (1, 2), (3, 4)　　2. (2, 1), (−1, −3)　　3. (5, 1), (−4, −2)　　4. (0, 2), (a, 3)

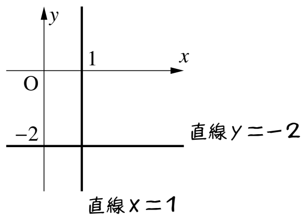
【解答】

1. 傾きは $\dfrac{4-2}{3-1} = 1$ なので，$y-2 = 1\cdot(x-1) \iff \boldsymbol{y = x+1}$
2. 傾きは $\dfrac{-3-1}{-1-2} = \dfrac{4}{3}$ なので，$y-1 = \dfrac{4}{3}(x-2) \iff \boldsymbol{y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{3}}$
3. 傾きは $\dfrac{-2-1}{-4-5} = \dfrac{1}{3}$ なので，$y-1 = \dfrac{1}{3}(x-5) \iff \boldsymbol{y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}}$
4. 傾きは $\dfrac{3-2}{a-0} = \dfrac{1}{a}$ なので $y-2 = \dfrac{1}{a}(x-0) \iff \boldsymbol{y = \dfrac{1}{a}x + 2}$

◀ $y-4 = 1\cdot(x-3)$ でもよい

◀ $y+3 = \dfrac{3}{4}(x+1)$ でもよい，以下も同じ

C. x 軸や y 軸に垂直な直線



x 座標が p である点をすべて集めてできる直線は，「直線 $x = p$」と表され，y 軸に平行になる[*7]．

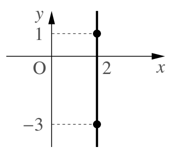
同じように，y 座標が q である点をすべて集めてできる直線は，「直線 $y = q$」と表され，x 軸に平行になる．

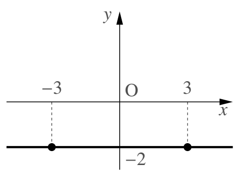
【例題 24】 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ．

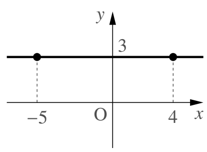
1. (2, 1), (2, −3)　　2. (3, −2), (−3, −2)　　3. (−5, 3), (4, 3)

【解答】

1. 直線 $\boldsymbol{x = 2}$　　2. 直線 $\boldsymbol{y = -2}$　　3. 直線 $\boldsymbol{y = 3}$







[*5] 傾きを求めるとき，B の座標から A の座標を引いても，A の座標から B の座標を引いても，構わない．たとえば上の例では，$\dfrac{(y\text{ 座標の増加分})}{(x\text{ 座標の増加分})} = \dfrac{(-2)-4}{1-3}$ としても，同じ値 3 を得る．分母と分子の，引く順番が揃っていればよい．

[*6] m を A を通り傾き 3 の直線と考えれば $y+2 = 3(x-1)$，B を通り傾き 3 の直線と考えれば $y-4 = 3(x-3)$ となる．

[*7] 実際，数学 I(p.82) で学んだように，放物線 $y = a(x-p)^2+q$ の軸は直線 $x = p$ であった．

【練習 25：直線の方程式】

以下の条件を満たす直線の方程式を求めよ．

(1) $(3, -2)$ を通り，傾きが -2

(2) 2 点 $(3,\ 4),\ (5, -6)$ を通る

(3) $(p, -4)$ を通り，傾きが 3

(4) 2 点 $(3, -2),\ (5, -2)$ を通る

(5) $(2,\ 3)$ を通り，傾きが a

(6) 2 点 $(3,\ 1),\ (s,\ t)$ を通る（$s \fallingdotseq 3$）

(7) 発展 $(a,\ a^2 + a)$ を通り，傾きが $2a + 1$

(8) 発展 2 点 $(a,\ a^2),\ (b,\ b^2)$ を通る（$a \fallingdotseq b$）

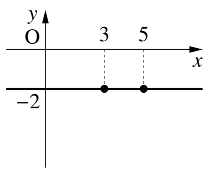
【解答】

(1) $y + 2 = -2(x - 3) \iff \boldsymbol{y = -2x + 4}$

(2) 傾きは $\dfrac{-6-4}{5-3} = -5$ なので，$y - 4 = -5(x - 3) \iff \boldsymbol{y = -5x + 19}$

(3) $y + 4 = 3(x - p) \iff \boldsymbol{y = 3x - 3p - 4}$

(4) 右欄外の図から，直線 $\boldsymbol{y = -2}$

◀ 

(5) $\boldsymbol{y - 3 = a(x - 2)}$

(6) 傾きは $\dfrac{t-1}{s-3}$ なので，$\boldsymbol{y - 1 = \dfrac{t-1}{s-3}(x - 3)}$

(7) $y - (a^2 + a) = (2a + 1)(x - a) \iff \boldsymbol{y = (2a + 1)x - a^2}$

(8) 傾きは $\dfrac{b^2 - a^2}{b - a} = \dfrac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a$ なので，
$y - a^2 = (b + a)(x - a) \iff \boldsymbol{y = (b + a)x - ba}$

【練習 26：x 切片，y 切片が与えられた直線の方程式】

$a \fallingdotseq 0,\ b \fallingdotseq 0$ とする．$(a,\ 0),\ (0,\ b)$ を通る直線の方程式は方程式 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ に一致することを示せ．

【解答】 傾きは $\dfrac{0-b}{a-0} = -\dfrac{b}{a}$ なので，

$$y - b = -\frac{b}{a}(x - 0) \iff y = -\frac{b}{a}x + b \iff \frac{b}{a}x + y = b$$

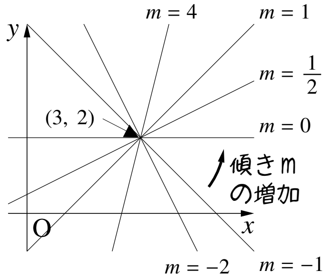
◀ 移項して

$$\iff \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

◀ 両辺 $\dfrac{1}{b}$ 倍

上の事実は「x 切片，y 切片が与えられた直線の方程式」として，しばしば便利である．

D.　一定の条件を満たす直線の集まり



方程式 L： $y-2=m(x-3)$ のグラフは，m の値によって異なる．しかし，『直線の方程式』(p.86) から分かるように常に $(3,\ 2)$ を通る．この m の値に関わらず通る $(3,\ 2)$ は，L の**定点** (constant point) と言われる．また，傾きは m なので m の増加に従い，直線は反時計回りに回転する．

逆に，$(3,\ 2)$ を通る直線を考えると，y 軸に平行な直線（$x=3$）以外は，$y-2=m(x-3)$ という形の方程式で表される．

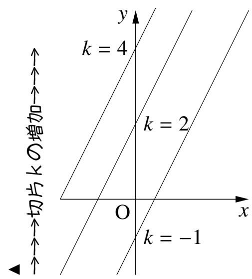
【例題 27】

k は実数とする．以下の $\boxed{}$ に座標を，（　）に「増加」「減少」のいずれかを入れなさい．

1. 方程式 $y-3=k(x+2)$ のグラフは，$\boxed{ア}$ を必ず通る．また，k の （ イ ） によって，グラフは反時計回りに回転する．
2. 方程式 $y=kx-3$ のグラフは，$\boxed{ウ}$ を必ず通る．また，k の （ エ ） によって，グラフは反時計回りに回転する．
3. 方程式 $y=2x+k$ のグラフは，k の増加によって，グラフの y 切片は （ オ ） する．

【解答】

1. 直線 $y-3=k(x+2)$ は $(-2,\ 3)$ を通り傾き k であるから，$\underline{\mathbf{(-2,\ 3)}}_{(ア)}$ が定点になる．また，k の $\underline{\textbf{増加}}_{(イ)}$ によって傾きは増加し，反時計回りに回転する．
2. 傾き k，y 切片 -3 の直線なので，定点は $\underline{\mathbf{(0,\ -3)}}_{(ウ)}$．また，$k$ の $\underline{\textbf{増加}}_{(エ)}$ によって傾きは増加し，反時計回りに回転する．
3. 傾き 2，y 切片 k の直線なので，k の増加によって y 切片は $\underline{\textbf{増加}}_{(オ)}$ する．



【暗記 28：一定の条件を満たす直線の集まり〜その１〜】

k を実数とする．方程式 $l: kx+x+y+3k=0$ の定点を答えよ．また，k の増加によって，グラフの傾き，y 切片はどうなるか答えよ．

【解答】　k についての降べきの順にまとめると

$$kx+x+y+3k=0 \iff k(x+3)+x+y=0$$

よって，定点を $(x,\ y)$ について，連立方程式 $\begin{cases} x+3=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ が成り立つ．これを解いて $(x,\ y)=(-3,\ 3)$ なので，定点は $\mathbf{(-3,\ 3)}$.

◀ k の 1 次の係数が 0 でなければ，式 $k(x+3)+x+y$ は k の値によって変化してしまうので，$x+3=0$．このとき，$k(x+3)+x+y=0 \iff x+y=0$ も成り立たないといけない．

一方，l の式を y について解くと $y=(-k-1)x-3k$ となるので，k の増加によって，傾き $-k-1$ も y 切片 $-3k$ も減少する．つまり，**k の増加によって l は時計回りに回転し，y 切片は減少する**．

【練習 29：直線の定点】

次の方程式の定点を，それぞれ答えよ．

(1) $2x+3ky+4y+3k=0$　　(2) $3kx+2x-4ky-3y+2k+3=0$

【解答】

(1) k について降べきの順にすると $k(3y+3)+(2x+4y)=0$ なので，連立方程式 $\begin{cases} 3y+3=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$ を解いて $(x,\ y)=(2,-1)$.

よって，**定点は $(2,-1)$**.

(2) k について降べきの順にすると $k(3x-4y+2)+(2x-3y+3)=0$ なので，連立方程式 $\begin{cases} 3x-4y+2=0 \\ 2x-3y+3=0 \end{cases}$ を解いて $(x,\ y)=(6,\ 5)$.

よって，**定点は $(6,\ 5)$**.

2.　直線の平行・垂直

A.　平行な 2 直線の傾きの条件

2 直線の平行は，中学でも学んでいるように以下が成り立つ．

互いに平行な 2 直線の方程式

「異なる 2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ が平行」$\iff$ $m_1=m_2$（n_1，n_2 の値には無関係）

【例題 30】

1. $(3,\ 1)$ を通り，$y=2x-4$ と平行な直線の方程式は，$y-\boxed{ア}=\boxed{イ}\left(x-\boxed{ウ}\right)$ となり，これを整頓して $y=\boxed{エ}$ となる．
2. $(3,-2)$ を通り，$4x+y-2=0$ と平行な直線の方程式は，$y-\boxed{オ}=\boxed{カ}\left(x-\boxed{キ}\right)$ となり，これを整頓して $y=\boxed{ク}$ となる．

【解答】

1. $(3,\ 1)$ を通って傾き 2 の直線となり，$y-1=2(x-3)$ と表せるから
ア : 1，イ : 2，ウ : 3，エ : $2x-5$

◀『直線の方程式』(p.86)

2. $4x+y-2=0 \iff y=-4x+2$ から，$(3,-2)$ を通って傾き -4 の直線なので，**オ : -2，カ : -4，キ : 3，ク : $-4x+10$**

◀『直線の一般形』(p.85)

B. 垂直な 2 直線の傾きの条件

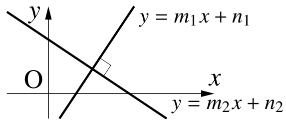
座標平面上の 2 本の直線が，垂直であることは，以下のようにまとめることができる．

互いに垂直な 2 直線の方程式

異なる 2 直線 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$（$m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$）について

- 互いに直交する必要十分条件は $m_1m_2 = -1$

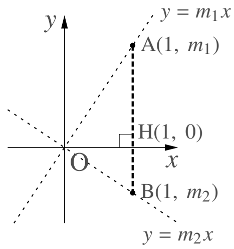
であり，それぞれの傾きのみで定まる（n_1, n_2 の値には無関係）．



（証明）直線を平行移動しても 2 直線の間の角の大きさは変わらないので，原点を通る 2 直線 $y = m_1x$, $y = m_2x$ が直交するときを考えればよい．
右下図のように x 座標が 1 の点 A，B，H をとる．$\angle AOH = 90° - \angle BOH = \angle OBH$ なので，2 つの直角三角形 $\triangle AOH$ と $\triangle OBH$ は相似である．よって

$$\begin{aligned} AH : HO = OH : HB &\iff m_1 : 1 = 1 : (-m_2) \\ &\iff m_1m_2 = -1 \end{aligned}$$

が成り立つ．これは，逆も成立する．



「傾き m の直線と直交するのは傾き $-\dfrac{1}{m}$ の直線」または「傾きの符号を変え，逆数をとれば直交する」のように捉えるとよい．
また，直線 $x = a$ や $y = b$ に平行・直交な直線は，図を描いて考えればよい．

【例題 31】

1. 次の直線と直交する直線の傾きはいくつか．
   1) $y = 2x$　　2) $y = 2x + 1$　　3) $y = \dfrac{1}{4}x + 3$　　4) $y = -\dfrac{3}{2}x - 5$
2. (3, 2) を通り直線 $y = 3x - 4$ に直交する直線の方程式は $y - \boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{イ}}(x - \boxed{\text{ウ}})$ となり，これを整頓して方程式 $y = \boxed{\text{エ}}$ を得る．
3. (−1, 2) を通り直線 $y = 3$ に直交する直線を図示し，方程式を求めなさい．

【解答】

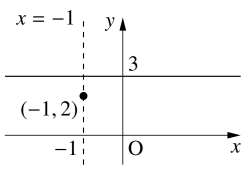
1. 求める傾きを，m とおく．
   1) $2m = -1 \iff \boldsymbol{m = -\dfrac{1}{2}}$　　2) 1) と同じく $\boldsymbol{m = -\dfrac{1}{2}}$
   3) $\dfrac{1}{4}m = -1 \iff \boldsymbol{m = -4}$　　4) $-\dfrac{3}{2}m = -1 \iff \boldsymbol{m = \dfrac{2}{3}}$

◀ 切片の大きさは求める傾きに影響を与えない

2. $y = 3x - 4$ に直交するので，傾きは $-\dfrac{1}{3}$ である．
   (3, 2) を通って傾き $-\dfrac{1}{3}$ の直線は，$y - 2 = -\dfrac{1}{3}(x - 3)$ と表せるから
   ア : 2，イ : $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$，ウ : 3，エ : $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}x + 3}$

◀ 『直線の方程式』(p.86)

3. 右欄外のようになるので，求める方程式は $\boldsymbol{x = -1}$.

◀


【練習 32：与えられた点を通り，与えられた直線に直交する直線の方程式】

(1) $(-3,\ 1)$ を通り直線 $3x-y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線をそれぞれ求めなさい．

(2) $(1,-2)$ を通り直線 $x-2y+3=0$ に平行な直線，垂直な直線をそれぞれ求めなさい．

【解答】

(1) 直線 $3x-y+4=0$ は $y=3x+4$ と変形でき，傾きは 3.

これと平行な直線の傾きは同じ 3 なので ◀『平行な 2 直線の方程式』(p.90)

$$y-1=3\{x-(-3)\} \iff \mathbf{3x-y+10=0}$$ ◀ $y=3x+10$

直交する直線の傾きは $-\dfrac{1}{3}$ なので ◀『垂直な 2 直線の方程式』(p.91)

$$y-1=-\frac{1}{3}\{x-(-3)\} \iff \mathbf{x+3y=0}$$ ◀ $y=-\frac{1}{3}x$ と同じ

(2) 直線 $x-2y+3=0$ は $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ と変形でき，傾きは $\dfrac{1}{2}$.

これと平行な直線の傾きは同じ $\dfrac{1}{2}$ なので

$$y-(-2)=\frac{1}{2}(x-1) \iff \mathbf{x-2y-5=0}$$ ◀ $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

直交する直線の傾きは -2 なので

$$y-(-2)=-2(x-1) \iff \mathbf{2x+y=0}$$ ◀ $y=-2x$ と同じ

【発展 33：一般形の直線の方程式における平行・垂直】

$a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

1. 2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$ が平行なとき，$a_1b_2-a_2b_1=0$ であることを示せ．
2. 2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$ が垂直なとき，$a_1a_2+b_1b_2=0$ であることを示せ．

【解答】

1. 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$ は $y=-\dfrac{a_1}{b_1}x+\dfrac{c_1}{b_1}$ より傾きは $-\dfrac{a_1}{b_1}$.
一方，$a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0$ から直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$ は x 軸にも y 軸にも平行でないので，直線 $a_2x+b_2y+c_2=0$ も x 軸にも y 軸にも平行でない．よって，$a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0$ なので，直線 $a_2x+b_2y+c_2=0$ は $y=-\dfrac{a_2}{b_2}x+\dfrac{c_2}{b_2}$ より傾きは $-\dfrac{a_2}{b_2}$.
2 直線は平行なので傾きが一致するから ◀『平行な 2 直線の方程式』(p.90)
$$-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2} \iff a_1b_2=a_2b_1 \iff a_1b_2-a_2b_1=0 \quad \blacksquare$$

2. 1. と同様にして，直線 $a_2x+b_2y+c_2=0$ は x 軸にも y 軸にも平行でなく，2 直線の傾きは $-\dfrac{a_1}{b_1}$，$-\dfrac{a_2}{b_2}$
2 直線は垂直なので ◀『垂直な 2 直線の方程式』(p.91)
$$-\frac{a_1}{b_1}\times-\frac{a_2}{b_2}=-1 \iff a_1a_2=-b_1b_2 \iff a_1a_2+b_1b_2=0 \quad \blacksquare$$

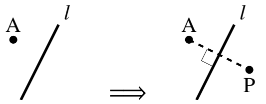
上の事実は，$a_1=0$ のときや，$b_1=0$ のときでも成立する．

C. 直線に対して対称な点

与えられた直線 l に対し，点 A と対称な点を P とすると，以下のことが成り立つ．

(1) 直線 AP は直線 l と垂直である．

(2) 線分 AP の中点は直線 l 上にある．



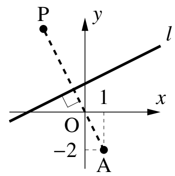
【暗記 34：直線に対して対称な点～直線が座標軸に平行でないとき】

直線 l： $x-2y+3=0$ に対し，A$(1,-2)$ と対称な点 P を求めなさい．

【解答】 P$(s,\ t)$ とおく．

l と AP は直交するので（l の傾き）×（AP の傾き）$=-1$ である．$l \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ から l の傾きは $\dfrac{1}{2}$，直線 AP の傾きは $\dfrac{t-(-2)}{s-1}$ なので

◀『垂直な 2 直線の方程式』(p.91)



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{t-(-2)}{s-1}=-1 \Leftrightarrow \frac{t+2}{2(s-1)}=-1 \Leftrightarrow t+2=-2(s-1)$$
$$\Leftrightarrow t=-2s \quad \cdots\cdots ①$$

また，線分 AP の中点 $\left(\dfrac{s+1}{2},\ \dfrac{t-2}{2}\right)$ は直線 l 上にあるので

◀『内分点の座標』(p.76)

$$\frac{s+1}{2}-2\cdot\frac{t-2}{2}+3=0 \Leftrightarrow (s+1)-2(t-2)+6=0$$
$$\Leftrightarrow s=2t-11 \quad \cdots\cdots ②$$

◀両辺 2 倍した

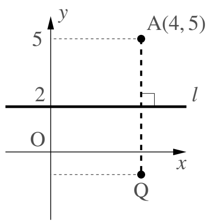
②に①を代入して，$s=2(-2s)-11 \Leftrightarrow s=-\dfrac{11}{5}$.

これを①に代入して $t=\dfrac{22}{5}$，よって $\mathbf{P}\left(-\dfrac{11}{5},\ \dfrac{22}{5}\right)$.

【暗記 35：直線に対して対称な点～直線が座標軸に平行なとき】

直線 l： $y=2$ に対し，A$(4,5)$ と対称な点 P を求めなさい．

【解答】



左の図から，

Q(4, −1)

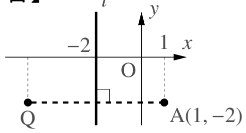
◀まず，A と P は x 座標が等しい．また，直線 l より y 方向に 3 増えると A なので，l より y 方向に 3 減らせば P になる．

【練習 36：直線に対して対称な点】

(1) 直線 l: $x = -2$ に対し，A$(1, -2)$ と対称な点 P を求めなさい．

(2) 直線 m: $-x + 3y - 2 = 0$ に対し，A$(3, -1)$ と対称な点 Q を求めなさい．

【解答】

(1) 

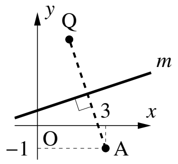
左の図から，

Q(−5, −2)

◀ まず，A と P は y 座標が等しい．また，直線 l より x 方向に 3 増えると A なので，l より x 方向に 3 減らせば P になる．

(2) Q(s, t) とおく．l と AQ は直交するので（m の傾き）×（AQ の傾き）$= -1$ である．$l \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$ から l の傾きは $\dfrac{1}{3}$，直線 AQ の傾きは $\dfrac{t-(-1)}{s-3}$ なので

◀『垂直な 2 直線の方程式』(p.91)



$$\frac{1}{3}\cdot\frac{t-(-1)}{s-3} = -1 \Leftrightarrow \frac{t+1}{3(s-3)} = -1 \Leftrightarrow t+1 = -3(s-3)$$

$$\Leftrightarrow t = -3s + 8 \quad \cdots\cdots ①$$

また，線分 AQ の中点 $\left(\dfrac{s+3}{2}, \dfrac{t+(-1)}{2}\right)$ は直線 l 上にあるので

◀『内分点の座標』(p.76)

$$-\frac{s+3}{2} + 3\cdot\frac{t-1}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow (s+3) - 3(t-1) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow s = 3t - 10 \quad \cdots\cdots ②$$

◀ 両辺 −2 倍した

①に②を代入して，$t = -3(3t-10) + 8 \Leftrightarrow t = \dfrac{19}{5}$.

これを②に代入して $s = \dfrac{7}{5}$，よって，$\mathbf{Q}\left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{19}{5}\right)$.

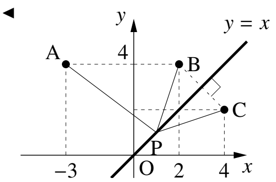
【発展 37：AP ＋ BP が最短になるとき】

A$(-3, 4)$，B$(2, 4)$ がある．直線 $y = x$ 上に点 P を取るとき，AP + BP が最小になるときの P の座標と，その最小値を求めなさい．

【解答】 直線 $y = x$ について B と対称な点を C とする．このとき

AP + BP = AP + CP ≧ AC

◀



であるから，P が線分 AC 上にあるときが求める点で，線分 AC の長さが最小値である．$(2, 4)$ を直線 $y = x$ について対称移動した点が C なので，右欄外の図より C$(4, 2)$ と分かり，最小値は AC $= \sqrt{(-3-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{53}$.

◀ x 座標と y 座標を入れ替えれば $y = x$ に対して対称移動できる．

直線 AC は傾きが $\dfrac{4-2}{-3-4} = -\dfrac{2}{7}$ であり，方程式は $y - 4 = -\dfrac{2}{7}(x+3)$. これと $y = x$ の交点を求めると，

$$x - 4 = -\frac{2}{7}(x+3) \Leftrightarrow 7x - 28 = -2x - 6 \quad \therefore \quad x = \frac{22}{9}$$

◀ 両辺を 7 倍して解いた

よって，$\mathbf{P}\left(\dfrac{22}{9}, \dfrac{22}{9}\right)$ **のとき，$\sqrt{53}$ で最小**となる．

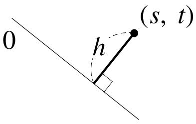
複数の線分の和の最小値を求めるには，いずれかの点を対称移動して考えるとよい．

3. 点と直線の距離

与えられた直線 l と，その直線上にない 1 点 A の距離は次の式で与えられる．

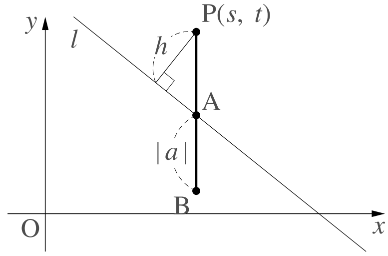
点と直線の距離

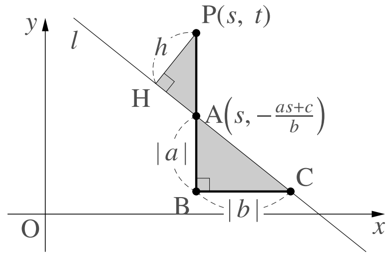
直線 $ax+by+c=0$ と点 $(s,\ t)$ の距離 h は
$h=\dfrac{|as+bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で求められる．



（証明）$a=0$ または $b=0$ のときは省略．直線 $ax+by+c=0$ を l，点 $(s,\ t)$ を P，P から l への垂線の足を H とする．
右図のように，x 座標が s の点 A, B を A は l 上に，B は AB $=|a|$ となるよう P の反対側にとる．A の y 座標は $-\dfrac{as+c}{b}$ となる．
ここで，右下のように B と y 座標が等しい l 上の点 C をとると，直線 l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ なので BC $=|b|$ である．
2 角が等しいから △PAH ∽ △CAB となるので

$$\begin{aligned}
\mathrm{PH}:\mathrm{PA}=\mathrm{CB}:\mathrm{CA} &\Leftrightarrow \mathrm{PH}:\left|t-\left(-\frac{as+c}{b}\right)\right|=|b|:\sqrt{a^2+b^2}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\times\mathrm{PH}=\left|b\left(t+\frac{as+c}{b}\right)\right|\\
&\Leftrightarrow \mathrm{PH}=\frac{|as+bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$





この公式を覚えるには，分子は「直線の式の左辺に $(x,\ y)=(s,\ t)$ を代入し，絶対値をつける（距離なので)」，分母は「$a,\ b$ に三平方の定理を用いる」のようにするとよい．

【例題 38】 それぞれ与えられた直線 l と一点 A について，直線 l と点 A の距離を求めなさい．

1. $l:2x-y+4=0$，A$(2,-1)$
2. $l:3x-4y-2=0$，A$(0,\ 0)$
3. $l:3x-4y-2=0$，A$(-4,-4)$
4. $l:-3x+2y+1=0$，A$(2,\ k)$

【解答】

1. $\dfrac{|2\cdot2-(-1)+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|9|}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{5}}{5}}$
2. $\dfrac{|3\cdot0-4\cdot0-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{25}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$
3. $\dfrac{|3\cdot(-4)-4\cdot(-4)-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|2|}{\sqrt{25}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$
4. $\dfrac{|-3\cdot2+2\cdot k+1|}{\sqrt{(-3)^2+2^2}}=\boldsymbol{\dfrac{|2k-5|}{\sqrt{13}}}$

◀ $|2k-5|$ はこれ以上簡単にできない．

【練習 39：点と直線の距離〜その１〜】

以下の直線と，点 $(2, -1)$ の距離をそれぞれ答えなさい．

(1) $2x - y + 1 = 0$　　(2) $-x + 3y - 5 = 0$　　(3) $y = 3x - 2$

【解答】

(1) $\dfrac{|2 \cdot 2 - (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \boldsymbol{\dfrac{6}{\sqrt{5}}}$

◀ 有理化すれば $\boldsymbol{\dfrac{6\sqrt{5}}{5}}$

(2) $\dfrac{|-2 + 3 \cdot (-1) - 5|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \boldsymbol{\sqrt{10}}$

(3) 直線の式は $3x - y - 2 = 0$ と変形できるので

$$\frac{|3 \cdot 2 - (-1) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

【練習 40：点と直線の距離〜その２〜】

(1) 直線 $l : 3x - 4y - k = 0$ と $\mathrm{A}(2,\ 1)$ の距離が 3 であるとき，k の値を求めよ．

(2) 直線 $l : 2kx + y - 2 = 0$ と $\mathrm{A}(2,\ 1)$ の距離が 1 であるとき，k の値を求めよ．

【解答】

(1) 直線 l と A の距離は $\dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|2 - k|}{5}$ であり，これが 3 に等しいので

◀ 『点と直線の距離』(p.95)

$$\frac{|2 - k|}{5} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad |2 - k| = 15$$

$2 - k = \pm 15$ を解いて，$\boldsymbol{k = 17, -13}$ を得る．

◀ $2 - k = 15$ のときは $k = -13$
　$2 - k = -15$ のときは $k = 17$

(2) 直線 l と A の距離は $\dfrac{|(2k) \cdot 2 + 1 - 2|}{\sqrt{(2k)^2 + 1^2}} = \dfrac{|4k - 1|}{\sqrt{4k^2 + 1}}$ であり，これが 1 に等しいので

$$\frac{|4k - 1|}{\sqrt{4k^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |4k - 1| = \sqrt{4k^2 + 1}$$

両辺とも正なので，両辺 2 乗して

$$\Leftrightarrow (4k - 1)^2 = 4k^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 12k^2 - 8k = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{k = 0,\ \frac{2}{3}}$$

◀ $|4k - 1|^2 = (4k - 1)^2$
　$|4k - 1| = 4k - 1$ のときも，
　$|4k - 1| = -(4k - 1)$ のときも，
　2 乗すれば $(4k - 1)^2$ になる

4.　三角形の面積

【例題 41】　M(1, 2)，A(3, 4)，B(4, −3) があるとき

1. 線分 AB の長さを求めよ.
2. 直線 AB の方程式を求めよ.
3. M と直線 AB の距離を求めよ.
4. △MAB の面積を求めよ.

【解答】

1. $\mathrm{AB} = \sqrt{(4-3)^2+(-3-4)^2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

◄『2 点間の距離』(p.74)

2. 傾きは $\dfrac{4-(-3)}{3-4} = -7$ なので
$y-4 = -7(x-3) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -7x+25}$

3. 直線 AB の式を変形すると $7x+y-25=0$ なので
$$\frac{|7\cdot 1+2-25|}{\sqrt{7^2+1^2}} = \frac{|-16|}{5\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{8\sqrt{2}}{5}}$$

◄『点と直線の距離』(p.95)

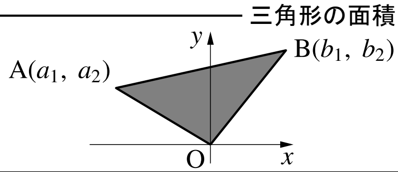
4. $\triangle\mathrm{MAB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\times\dfrac{8\sqrt{2}}{5} = \dfrac{1}{2}\times\cancel{5}\sqrt{2}\times\dfrac{8\sqrt{2}}{\cancel{5}} = \mathbf{8}$

座標平面上の三角形は，頂点のうち 1 点が原点にあれば，次のようにして求められる.

三角形の面積

原点を O，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ とするとき

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$



証明は p.129 を参照のこと

三角形のどの頂点も原点にないときは，下の 2. のように平行移動を用いて求める.

【例題 42】

1. O(0, 0)，A(2, 1)，B(−3, 2) のとき，△OAB の面積を求めよ.
2. M(1, 2)，A(3, 4)，B(4, −3) とする．△MAB を平行移動して △OA′B′ になったという.
   i) A′，B′ の座標を求めよ.　　ii) △OA′B′，△MAB の面積を求めよ.

【解答】

1. $\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}|2\cdot 2-1\cdot(-3)| = \dfrac{1}{2}|7| = \mathbf{\dfrac{7}{2}}$

◄『三角形の面積』(p.97)

2. i) x 軸方向に −1，y 軸方向に −2 平行移動するので
A(3, 4) → **A′(2, 2)**　　B(4, −3) → **B′(3, −5)**

ii) $\triangle\mathrm{OA'B'} = \dfrac{1}{2}|2\cdot(-5)-2\cdot 3| = \dfrac{1}{2}|-16| = \mathbf{8}$．また，△MAB を平行移動して △OA′B′ になったので，△MAB = △OA′B′ = **8**.

◄『三角形の面積』(p.97)

3.5　平面上の円と方程式

この節では，平面上の円が，座標平面上ではどう表現されるか考えていく．

1.　円の方程式～平方完成形

A.　円は中心と半径のみで決まる

円は，中心と半径を決めればただ 1 つに定まり，次の式で表される．

円の方程式～平方完成形

点 $(a,\ b)$ を中心とし，半径が $r\ (>0)$ である円の方程式は，次のように表される．

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

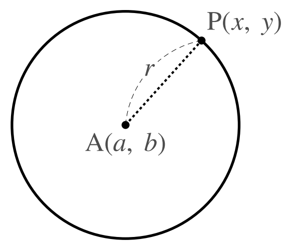
この円の方程式は，平方完成形の方程式といわれる．

（証明）円 C の周上にある点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．2 点 A, P の間の距離が r であることと同値である．『2 点間の距離 (p.74)』で学んだように，$\mathrm{AP}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ であるから

P が円 C の周上にある　$\Leftrightarrow$　$\mathrm{AP}=r$

$\Leftrightarrow$　$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$　……①

等式①の両辺は共に正であるので両辺を 2 乗し，円の方程式を得る．



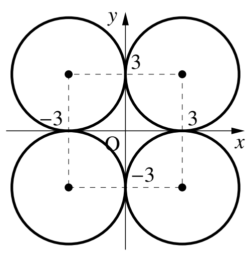
【例題 43】

1. 座標平面上に次のような円があるとき，その方程式をそれぞれ求めよ．
   （a）中心 $(3,\ 2)$，半径 3　　（b）中心 $(-3,\ 1)$，半径 2　　（c）中心 $(0, -2)$，半径 $\sqrt{3}$
2. x 軸，y 軸の両方に接する半径が 3 の円はいくつあるか．また，それぞれの方程式を求めよ．

【解答】

1. （a）$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-2)^2=9}$　　（b）$\boldsymbol{(x+3)^2+(y-1)^2=4}$
   （c）$\boldsymbol{x^2+(y+2)^2=3}$
2. 右欄外の図から，条件を満たす円は **4 つ**ある．$(\pm3, \pm3)$ が中心なので
   $\boldsymbol{(x+3)^2+(y+3)^2=9,\ (x+3)^2+(y-3)^2=9,}$
   $\boldsymbol{(x-3)^2+(y+3)^2=9,\ (x-3)^2+(y-3)^2=9}$

◀



2.　円の方程式〜一般形

A.　円は $x^2+y^2+lx+my+n=0$ という形の式でも表される

中心 $(2,-1)$，半径 3 の円の方程式は $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ となるが，この式は

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9 \iff x^2-4x+4+y^2+2y+1=9$$
$$\iff x^2+y^2-4x+2y-4=0$$

と変形することができる．この形の円の方程式を一般形と言う．

【例題 44】 以下の円の方程式を，一般形で表せ．

1. $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=1$
2. 中心が $(4,-1)$ で半径 3 の円

【解答】

1. 左辺を展開すると，$x^2-3x+\dfrac{9}{4}+y^2+5y+\dfrac{25}{4}=1$ となる．，右辺が 0 になるよう移項して $\boldsymbol{x^2-3x+y^2+5y+\dfrac{15}{2}=0}$.
2. 円の方程式は $(x-4)^2+(y+1)^2=3^2$ となる．展開・整理して
$$\iff x^2-8x+16+y^2+2y+1=9$$
$$\iff \boldsymbol{x^2-8x+y^2+2y+8=0}$$

◀ 右辺が 0 になるよう移項した

B.　一般形を平方完成形に変形する

方程式 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ は

$$x^2+y^2-4x+2y-4=0 \iff \underbrace{(x^2-4x+4)}_{x\text{ について平方完成}}+\underbrace{(y^2+2y+1)}_{y\text{ について平方完成}}-4=4+1$$
$$\iff (x-2)^2+(y+1)^2=9$$

と変形し，中心 $(2,-1)$，半径 3 の円の方程式に一致することがわかる．

【例題 45】 次の円の方程式の中心と半径を求めよ．

1. $x^2+y^2-2x+4y+1=0$
2. $x^2+y^2-6y+1=0$

【解答】

1.
$$(\text{与式}) \iff (x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+1=1+4$$
$$\iff (x-1)^2+(y+2)^2=4$$

◀ 両辺に 1 と 4 を足した

となるので，**中心は $(1,-2)$**，**半径は 2** である．

2.
$$(\text{与式}) \iff x^2+(y^2-6y+9)+1=9$$
$$\iff x^2+(y-3)^2=8$$

◀ 両辺に 9 を足した

となるので，**中心は $(0,3)$**，**半径は $2\sqrt{2}$** である．

円の方程式〜一般形

$x,\ y$ についての 2 次式であり，どちらの 2 次の係数も 1 である方程式

$x^2+y^2+lx+my+n=0$

は，$\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{m^2}{4}-n>0$ のときに円の方程式を表し，**一般形の方程式**といわれる．

方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ を，x について，y について別々に平方完成すれば

$$\Leftrightarrow\ \underbrace{(x^2+lx)}_{x^2,\ x\text{ の項を まとめた}}+\underbrace{(y^2+my)}_{y^2,\ y\text{ の項を まとめた}}+n=0\quad\Leftrightarrow\ \underbrace{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2}_{x\text{ について 平方完成}}+\underbrace{\left(y+\frac{m}{2}\right)^2}_{x\text{ について 平方完成}}=\frac{l^2}{4}+\frac{m^2}{4}-n$$

と変形できるので，$\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{m^2}{4}-n>0$ であれば，円の方程式を表していることになる．

$\cdots\cdot$ $\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{m^2}{4}-n=0$ のとき，$(x,\ y)=\left(-\dfrac{l}{2},-\dfrac{m}{2}\right)$ だけが $x^2+lx+y^2+my+n=0$ を満たす．

【練習 46：円の方程式〜平方完成形と一般形】

(1) 中心が $(-2,-1)$ で半径 $\sqrt{3}$ の円の方程式を，平方完成形で表せ．また，一般形で表せ．

(2) 次の中から円の方程式を表すものを選び，その円の中心と半径を求めよ．

a) $x^2+y^2-3x+5=0$　　b) $x^2+y^2+4x+4y+8=0$　　c) $2x^2+2y^2+8x-4y=0$

【解答】

(1) **平方完成形は $(x+2)^2+(y+1)^2=3$**

左辺を展開し，**一般形は $x^2+4x+y^2+2y+2=0$**　　◀ 右辺が 0 になるよう移項した

(2) それぞれ，与えられた式を平方完成すれば

a)（与式）$\Leftrightarrow\ \left\{x^2-3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}+y^2+5=\dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow\ \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=-\dfrac{11}{4}$　　◀ 両辺に $\dfrac{9}{4}$ を足した

b)（与式）$\Leftrightarrow\ (x+2)^2+(y+2)^2=0$

c)（与式）$\Leftrightarrow\ x^2+y^2+4x-2y=0\ \Leftrightarrow\ (x+2)^2+(y-1)^2=5$　　◀ 両辺を 2 で割って平方完成

以上より，**円を表すものは c)**，**中心は $(-2,\ 1)$**，**半径は $\sqrt{5}$** である．

3. 円の方程式の決定

A. 準備〜方程式への代入

たとえば，円 C：$(x-2)^2+(y-b)^2=5$ が $(3,\ 2)$ を通るならば，$(x-2)^2+(y-b)^2=5$ に $(x,\ y)=(3,\ 2)$ を代入した等式は成り立つ，つまり

$$(3-2)^2+(2-b)^2=5\ \Leftrightarrow 1+4-4b+b^2=5$$
$$\Leftrightarrow b^2-4b=0\ \Leftrightarrow\ b(b-4)=0$$

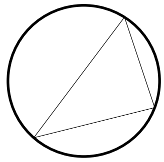
これを解いて $b=0,\ 4$ を得る．特に，円 C の中心は $(2,\ 0)$ または $(2,\ 4)$ と分かる．

【例題 47】 円 C : $(x-a)^2+(y-3)^2=13$ が $(5,\ 5)$ を通るとき，a の値を答えよ．

【解答】 $(x-a)^2+(y-3)^2=13$ に $(x,\ y)=(5,\ 5)$ を代入して

$$(5-a)^2+(5-3)^2=13 \Leftrightarrow 25-10a+a^2+4=13$$
$$\Leftrightarrow a^2-10a+16=0 \Leftrightarrow (a-2)(a-8)=0$$

これを解いて $\boldsymbol{a=2,\ 8}$ である．



B. 与えられた 3 点を通る円の方程式

どんな三角形も，外接円はただ 1 つに定まった．これは，（同一直線上にない）3 点を通る円周がただ 1 つに定まることを意味する．

【暗記 48：円の方程式〜その２〜】

3 点 A(3, 0)，B(0, −2)，C(−2, 1) を通る円 K の方程式について，$\boxed{}$ に適する式・数値を入れよ．

1. K の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく．ここで以下が成立する．

   A を通るから方程式 $\boxed{ア}$，B を通るから方程式 $\boxed{イ}$，C を通るから方程式 $\boxed{ウ}$

   3 式を連立して $(l,\ m,\ n)=\left(\boxed{エ},\ \boxed{オ},\ \boxed{カ}\right)$ と解けて，K の方程式 $\boxed{キ}$ を得る．

2. K の中心を $\mathrm{O}(p,\ q)$ とする．ここで

   OA = OB から $p,\ q$ の方程式 $\boxed{ク}$ が，OA = OC から $p,\ q$ の方程式 $\boxed{ケ}$ が成り立つ．

   2 つの式を連立して解けば $(p,\ q)=\left(\boxed{コ},\ \boxed{サ}\right)$ である．

   つまり，$\mathrm{OA}^2=\boxed{シ}$ であるので K の方程式は $\boxed{ス}$ と分かる．

【解答】

1. A(3, 0) を代入し $3^2+0+3l+0+n=0 \quad \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{3l+n=-9}}_{(ア)}$

   B(0, −2) を代入し $0+(-2)^2+0-2m+n=0 \quad \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{-2m+n=-4}}_{(イ)}$

   C(−2, −1) を代入し $(-2)^2+1^2-2l+m+n=0 \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{-2l+m+n=-5}}_{(ウ)}$

   エ：$\boldsymbol{-1}$，**オ**：$\boldsymbol{-1}$，**カ**：$\boldsymbol{-6}$，**キ**：$\boldsymbol{x^2+y^2-x-y-6=0}$

2. **ク**： $\mathrm{OA}=\mathrm{OB} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sqrt{(p-3)^2+q^2}=\sqrt{p^2+(q+2)^2}}$

   （$\Leftrightarrow \boldsymbol{(p-3)^2+q^2=p^2+(q+2)^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{5=6p+4q}$）

   ケ： $\mathrm{OA}=\mathrm{OC} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sqrt{(p-3)^2+q^2}=\sqrt{(p+2)^2+(q-1)^2}}$

   （$\Leftrightarrow \boldsymbol{(p-3)^2+q^2=(p+2)^2+(q-1)^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{2=5p-q}$）

   ク，**ケ**を整理して，連立方程式 $\begin{cases}6p+4q=5\\5p-q=2\end{cases}$ を得る．これを解いて $\left(\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}_{(コ)},\ \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}_{(サ)}\right)$ を得る．よって，$\mathrm{O}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，A(3, 0) であるから，

   $\mathrm{OA}^2=(\left(\frac{1}{2}-3\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2=\underline{\boldsymbol{\frac{13}{2}}}_{(シ)}$ であるので，K の方程式は

   $\underline{\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}}}_{(ス)}$ となる．

◂ $\begin{cases}3l+n=-9 \cdots\cdots ①\\ -2m+n=-4 \cdots\cdots ②\\ -2l+m+n=-5 \cdots\cdots ③\end{cases}$

② + 2 × ③ より

$$\begin{array}{rrrl} & -2m & +\ n & =\ -4\\ +)\ -4l & +\ 2m & +\ 2n & =\ -10\\ \hline -4l & & +\ 3n & =\ -14 \cdots ②' \end{array}$$

3 × ① − ②′ より $13l=-13$ となって $l=-1$．②，①から $m,\ n$ を求めればよい

◂ 両辺 2 乗して $p^2,\ q^2$ を消去し，両辺整頓した

◂『2 点間の距離』(p.74)

【練習 49：円の方程式〜その２〜】

A(3, 1)，B(4, −4)，C(−1, −5) とする．△ABC の外接円の中心と半径を求めよ．

【解答】 △ABC の外接円は 3 点 A，B，C を通る円に一致する．その方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく．

A を通ることから $3^2+1^2+l\cdot 3+m\cdot 1+n=0$

B を通ることから $4^2+(-4)^2+l\cdot 4+m\cdot(-4)+n=0$

C を通ることから $(-1)^2+(-5)^2+l\cdot(-1)+m\cdot(-5)+n=0$

である．これらを整頓して，連立方程式を得る．

$$\begin{cases} 3l+\ \ m+n=-10 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 4l-4m+n=-32 & \cdots\cdots\cdots ② \\ -l-5m+n=-26 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

◀ ① − ②，② − ③ から得られた 2 式を連立して $(l, m)=(-2, 4)$．①から $n=-8$

これを解いて $(l, m, n)=(-2, 4, -8)$．よって，△ABC の外接円の方程式は

$$x^2+y^2-2x+4y-8=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+(y+2)^2=13$$

◀ 中心と半径を求めるため平方完成型に変形

となり，**△ABC の外接円の中心は (1, −2)，半径は $\boldsymbol{\sqrt{13}}$** である．

【(2) の別解（略解）】

◀ (1) も同じようにして解くことができる

外接円の中心を O(x, y) とすると，OA = OB = OC であるので

$$\begin{cases} \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+4)^2} \\ \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+5)^2} \end{cases}$$

これを解いて，中心は $(x, y)=\mathbf{(1, -2)}$，

外接円の半径は OA $=\sqrt{(3-1)^2+\{1-(-2)\}^2}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$.

C. 円を図形的に考える

円が通る 3 点が与えられた場合も，図を描けば簡単に分かる場合がある．

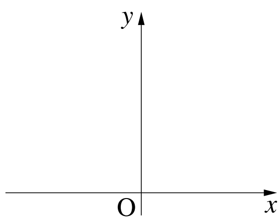
【練習 50：図形的に考える〜その１〜】

3 点 A(2, 2)，B(−4, 2)，C(−4, 4) を通る円 K について考えてみよう．

右に 3 点を図示すれば，K の中心 R は AB の垂直二等分線上にあるから R の $\boxed{\text{ア}}$ 座標は $\boxed{\text{イ}}$，K の中心 R は BC の垂直二等分線上にあるから R の $\boxed{\text{ウ}}$ 座標は $\boxed{\text{エ}}$ と分かる．

よって，R の座標は $\boxed{\text{オ}}$ であり，K の半径は RA = $\boxed{\text{カ}}$ なので，

K の方程式は $\boxed{\text{キ}}$ と求められる．



【解答】 ア：$\boldsymbol{x}$，イ：**−1**，ウ：$\boldsymbol{y}$，エ：**3**，オ：**(−1, 3)**

カ：$\boldsymbol{\sqrt{10}}$，キ：$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-3)^2=10}$

◀ K の半径は RB や RC で求めてもよい．

D.　中心や半径の条件が与えられた円の方程式

中心や半径の条件が与えられた場合は，平方完成形 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を用いて考えよう．

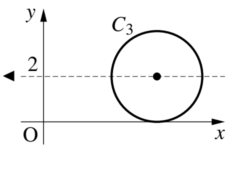
【例題 51】 以下の $\boxed{}$ に　i. $(2,\ b)$，ii. $(a,\ 2)$，iii. $(a,\ b)$，iv. $(a,\ a)$　のうち最も適するものを答え，それぞれの問いに答えなさい．

1. 中心が直線 $x=2$ 上にある円 C_1 の中心は $\boxed{\text{ア}}$ とおくことができる．さらに，C_1 が A$(3,\ 2)$，B$(0,\ 3)$ を通るとき，円 C_1 の方程式を求めよ．
2. 中心が直線 $y=x$ 上にある円 C_2 の中心は $\boxed{\text{イ}}$ とおくことができる．さらに，C_2 が P$(1,\ 3)$，Q$(-2,\ 1)$ を通るとき，円 C_2 の方程式を求めよ．
3. y 座標が正の側で x 軸に接し，円の半径が 2 である C_3 の中心は，$\boxed{\text{ウ}}$ とおくことができる．さらに，C_3 が T$(2,\ 1)$ を通るとき，円 C_3 の方程式を求めよ．

【解答】

1. C_1 の中心の x 座標は 2 になるから <u>**i.**</u>$_{(ア)}$ である．これによって，
求める円の方程式は $(x-2)^2+(y-b)^2=r^2$ とおくことができる．
A を通ることから　$(3-2)^2+(2-b)^2=r^2$
B を通ることから　$(0-2)^2+(3-b)^2=r^2$
$$\iff \begin{cases} b^2-4b+5=r^2 & \cdots\cdots ① \\ b^2-6b+13=r^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$
◀ 整頓して，連立した
①の r^2 に②を代入すると考えてもよい
① − ② から $2b-8=0$ なので $b=4$ である．これを②に代入して $r^2=5$ となるので，求める円の方程式は $\boldsymbol{(x-2)^2+(y-4)^2=5}$.

2. C_2 の中心は，x 座標と y 座標が等しいから <u>**iv.**</u>$_{(イ)}$
求める円の方程式は $(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$ とおくことができる．
◀ 中心は直線 $y=x$ 上にあるので，中心の x 座標を a とおくと，y 座標も a になる
A を通ることから　$(1-a)^2+(3-a)^2=r^2$
B を通ることから　$(-2-a)^2+(1-a)^2=r^2$
$$\iff \begin{cases} 2a^2-8a+10=r^2 & \cdots\cdots ③ \\ 2a^2+2a+5=r^2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$
③−④ から $-10a+5=0$ なので $a=\dfrac{1}{2}$．これを④に代入して $r^2=\dfrac{13}{2}$
となるので，求める円の方程式は $\boldsymbol{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{2}}$．$C_3$ の中心は右欄外のようになり，中心の y 座標は 2 と定まるから <u>**ii.**</u>$_{(ウ)}$，求める円の方程式は $(x-a)^2+(y-2)^2=2^2$ とおくことができる．



T を通ることから　$(2-a)^2+(1-2)^2=2^2$ である．
これを整理して解けば，$a^2-4a+1=0 \iff a=2\pm\sqrt{3}$ なので，求める円の方程式は，$\boldsymbol{\left\{x-(2\pm\sqrt{3})\right\}^2+(y-2)^2=4}$.

◀ $\left\{x-(2+\sqrt{3})\right\}^2+(y-2)^2=4$
$\left\{x-(2-\sqrt{3})\right\}^2+(y-2)^2=4$

【練習 52：円の方程式〜その１〜】

(1) 中心が直線 $y=2$ 上にあり，$(3,\ 5)$, $(2,-2)$ を通る円の方程式を求めよ．

(2) 中心が直線 $y=-x$ 上にあり，$(4,-1)$, $(-3,\ 0)$ を通る円の方程式を求めよ．

(3) $(-3,\ 5)$ を通り，x 座標が負の側で y 軸に接する半径が 2 の円の方程式を求めよ．

【解答】

(1) 求める円の方程式は $(x-a)^2+(y-2)^2=r^2$ とおくことができる．

A を通ることから $(3-a)^2+(5-2)^2=r^2$

B を通ることから $(2-a)^2+(-2-2)^2=r^2$

$$\iff \begin{cases} a^2-6a+18=r^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ a^2-4a+20=r^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ② から $-2a-2=0$ なので $a=-1$ である．これを②に代入すれば $r^2=25$ なので，求める円の方程式は $\boldsymbol{(x+1)^2+(y-2)^2=25}$.

(2) 求める円の方程式は $(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$ とおくことができる．

◀ 中心は直線 $y=-x$ 上にあるので，中心の x 座標を a とおくと，y 座標は $-a$ になる

A を通ることから $(4-a)^2+(-1+a)^2=r^2$

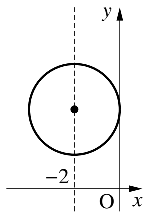
B を通ることから $(-3-a)^2+(0+a)^2=r^2$

$$\iff \begin{cases} 2a^2-10a+17=r^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ 2a^2+6a+9=r^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

④ − ③ から $16a-8=0$ なので $a=\dfrac{1}{2}$ これを③に代入すれば $r^2=\dfrac{25}{2}$ であるので，求める円の方程式は $\boldsymbol{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}}$.

(3) 右欄外の図から，中心の x 座標が -2 とわかるので，求める方程式を $(x+2)^2+(y-b)^2=2^2$ とおくことができる．これが $(-3,\ 5)$ を通るので

◀



$$(-3+2)^2+(5-b)^2=2^2 \Leftrightarrow 1+25-10b+b^2=4$$

$$\Leftrightarrow b^2-10b+22=0 \quad \therefore\ r=5\pm\sqrt{3}$$

なので，求める円の方程式は $\boldsymbol{(x+2)^2+\left\{y-(5\pm\sqrt{3})\right\}^2=4}$

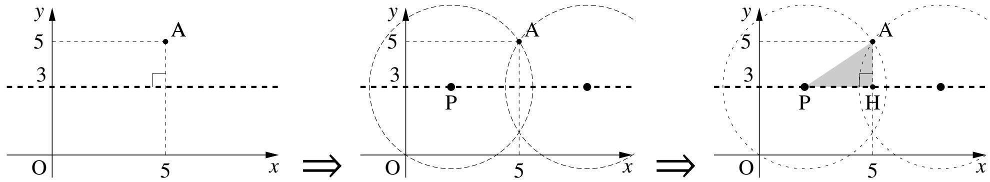
【発展 53：円の方程式〜その２〜】

① 中心が直線 $y=-2x+1$ 上にあり，$(4,\ 2)$, $(-6,-2)$ を通る円の方程式を求めよ．

② 中心が直線 $3x-y-4=0$ 上にあり，x 軸，y 軸の両方に接する円の方程式を求めよ．

【練習 54：円を図形的に考える〜その２〜】

「円 C：$(x-a)^2+(y-3)^2=13$ が A(5, 5) を通る」場合について考えてみよう．



(I) 中心は破線上のどこかにある　**(II)** A を通る円はこのどちらか　**(III)** 三平方の定理を用いて

まず，円 C の中心は $(a,\ 3)$ なので，図 (I) の破線上のどこかに C の中心はある．

A の y 座標が 5 なので AH = $\boxed{\text{ア}}$ であり，C の半径を考えて AP = $\boxed{\text{イ}}$ なので，(III) の直角三角形 APH を考えて，PH = $\boxed{\text{ウ}}$ と分かる．

ここから，C の中心の座標は $\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ のいずれかと分かる．

【解答】　ア：**2**，イ：$\boldsymbol{\sqrt{13}}$，ウ：PH = $\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{AH}^2}=\mathbf{3}$，
エ，オ：**(2, 3), (8, 3)**

◀【確認 47】の結果と一致している

4.　円と直線の関係

A.　円と直線の交点

円と直線の交点の座標を求めるには，連立方程式を解けばよい．このとき，「グラフの交点の座標と連立方程式の解は一致する」．また，連立方程式の解が無い場合は，グラフの交点も無い．

【例題 55】 座標平面上に円 $C: x^2+y^2=5$ があるとき，以下の問いに答えよ．

1. 直線 $l_1: x+y=3$ と円 C の共有点があれば，すべて求めよ．
2. 直線 $l_2: x+y=4$ と円 C の共有点があれば，すべて求めよ．

【解答】

1. l_1 の方程式より $y=3-x$ であるので，$x^2+y^2=5$ に代入すれば

$$x^2+(3-x)^2=5 \iff 2x^2-6x+9=5$$
$$\iff x^2-3x+2=0$$

これを解いて $x=1,\ 2$ である．右欄外の①より，共有点の座標は **(2, 1), (1, 2)** である．

2. l_1 の方程式より $y=4-x$ であるので，$x^2+y^2=5$ に代入すれば

$$x^2+(4-x)^2=5 \iff 2x^2-8x+11=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

となる．2 次方程式⑤の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-2\cdot 11=-6<0$$

であるので⑤は実数解を持たない．つまり，$\boldsymbol{l_2}$ **と** $\boldsymbol{C}$ **は共有点を持たない**．

◀ 直線 l_1 と円 C の共有点は，連立方程式
$$\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots② \end{cases}$$
の解に一致する．

◀ ①に代入して y を解く

◀ 直線 l_2 と円 C の共有点は，連立方程式
$$\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots③ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$
解に一致する．

◀ ⑤は実数解を持たないことは，連立方程式③，④は実数解を持たないことになるため

【練習 56：円と直線の共有点の個数】

次の円と直線の，共有点の座標を求めなさい．なければ「共有点なし」と答えること．

(1) 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=2x-5$　(2) 円 $(x+2)^2+(y-2)^2=5$ と直線 $y=3x+3$

(3) 円 $x^2+y^2=9$ と直線 $x-2y+7=0$

【解答】

(1) 直線の式を代入して $x^2+(2x-5)^2=10 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

よって $x=1,\ 3$ なので，直線の式から**交点は $(1, -3),\ (3,\ 1)$**.

◀ 展開・整頓して，両辺を 5 で割った

(2) 直線の式を代入して

$$(x+2)^2+(3x+3-2)^2=5 \Leftrightarrow 10x^2+10x=0$$

よって $x=0, -1$ なので，直線の式から**交点は $(0, 3),\ (-1,\ 0)$**.

(3) 直線の式を x について解くと $x=2y-7$ なので

$$(2y-7)^2+y^2=9 \Leftrightarrow 5y^2-28y+40=0$$

この 2 次方程式の判別式は $\dfrac{D}{4}=(-14)^2-5\cdot 40=-4<0$ であるので，**共有点はない**.

◀ 解の公式で解くと $y=\dfrac{28\pm\sqrt{-16}}{10}$ となって実数解は存在しない．

B. 円と直線の共有点の個数

円と直線の関係は，「円の中心と，直線の距離」でも決まる．

【暗記 57：円と直線の共有点の個数】

円 $C: x^2+y^2=5$ と直線 $l: x+y=k$ が共有点を持つような実数 k の範囲を，次の 2 通りで求めよ．

1. 2 次方程式の判別式を用いる．　2. 『点と直線の距離』(p.95) を用いる．

【解答】

1. 連立方程式 $\begin{cases} x+y=k & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ が実数解を持つような k の範囲を求めればよい．①より $y=k-x$ なので，②に代入して，

$$x^2+(k-x)^2=5 \Leftrightarrow 2x^2-2kx+k^2-5=0 \cdots\cdots ③$$

◀ 直線 l と円 C の共有点は，この連立方程式の解であるため．

◀ ①，② の実数解と，③の実数解は個数が一致

この 2 次方程式③ が実数解を持つので，

不等式 $\dfrac{D}{4}=k^2-2(k^2-5)\geqq 0 \cdots\cdots ④$ を得る．

$$④ \Leftrightarrow k^2-10\leqq 0 \Leftrightarrow \left(k-\sqrt{10}\right)\left(k+\sqrt{10}\right)\leqq 0$$

◀ $D=(2k)^2-4\cdot 2\cdot(k^2-5)\geqq 0$ でもよい．いずれにしても，実数解をもつには判別式が 0 か正ならばよい．

よって，求める k の範囲は $\boldsymbol{-\sqrt{10}\leqq k\leqq \sqrt{10}}$ である．

2. 条件「直線 $l: x+y=k$ が円 C と共有点を持つ」は

条件「直線 $l: x+y=k$ と円 C の中心の距離が，$\sqrt{5}$ 以下」$\cdots\cdots ⑤$

と必要十分条件である．直線 l と円 C の中心 $(0,\ 0)$ の距離は $\dfrac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$ であるので，⑤の条件は $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}\leqq\sqrt{5} \cdots\cdots ⑥$

となる．これを解いて，⑥ $\Leftrightarrow |k|\leqq\sqrt{10} \Leftrightarrow \boldsymbol{-\sqrt{10}\leqq k\leqq\sqrt{10}}$

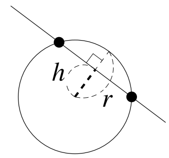
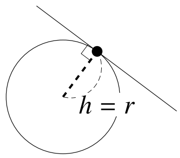
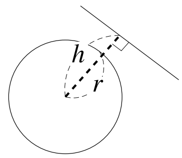
◀ 直線 $x+y-k=0$ と点 $(0,\ 0)$ の距離を『点と直線の距離』(p.95) で計算

「円と直線の共有点」について

円 C : $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ と直線 L : $ax+by+c=0$ を考えるとき

- 円 C と直線 L の共有点の個数
- 方程式 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ と $ax+by+c=0$ を連立して得られる 2 次方程式の判別式 D
- 円の中心 $(p,\ q)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 $h=\dfrac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

について，次のようにまとめることができる．

円 C と直線 L の位置関係			
C と L の共有点の個数	**2 個**	**1 個**	**0 個**
2 次方程式の判別式 D	$\boldsymbol{D>0}$	$\boldsymbol{D=0}$	$\boldsymbol{D<0}$
$(p,\ q)$ と直線 L の距離 h	$\boldsymbol{h<r}$	$\boldsymbol{h=r}$	$\boldsymbol{h>r}$

【練習 58：円と直線の共有点の個数】

(1) 円 $x^2+y^2=k$ と直線 $3x-4y+10=0$ の共有点の個数を，以下の k についてそれぞれ答えなさい．

1) $k=1$　　2) $k=4$　　3) $k=9$

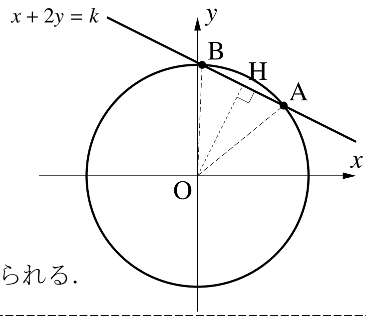
(2) 円 $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$ と直線 $2x+3y-4=0$ が共有点を持つような，実数 r の範囲を求めよ．

C.　円が切り取る線分の長さ

【暗記 59：円が切り取る線分の長さ〜その１〜】

円 C : $x^2+y^2=6$ と直線 l : $x+2y=k$ が 2 点 A，B で交わり，AB $=2$ であるとき，k の値を求めたい．

以下の $\boxed{}$ に入る式・言葉・値を答えよ．



右図のように，円の中心を O とし，O から直線 $x+2y=k$ へ下ろした垂線の足を H とおく．このとき，OA $=\boxed{ア}$，AH $=\boxed{イ}$ であるので，三平方の定理より，OH $=\boxed{ウ}$.

ところで，点 O と直線 l の距離を『点と直線の距離』(p.95) で計算すると $\boxed{エ}$ であるが，これは OH の長さに一致する．

よって，方程式 $\boxed{ウ}=\boxed{エ}$(= OH) を解けば，$k=\boxed{オ}$ と求められる．

【解答】　ア：$\boldsymbol{\sqrt{6}}$,　　イ：$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\mathbf{1}$,　　ウ：$\sqrt{(\sqrt{6})^2-1^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

エ：$\dfrac{|\mathbf{0+2\cdot0-}\boldsymbol{k}|}{\sqrt{\mathbf{1^2+2^2}}}=\dfrac{|\boldsymbol{k}|}{\sqrt{\mathbf{5}}}$

オ：$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\iff|k|=5$，つまり，$\boldsymbol{k=\pm5}$.

◀ 直線 $x+2y-k=0$ と点 $(0,\ 0)$ の距離を『点と直線の距離』(p.95) で計算

【練習 60：円が切り取る線分の長さ～その２～】

円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y-1=m(x-2)$ が A，B で交わり AB = 6 であるとき，m の値を求めよ．

【発展 61：円が切り取る線分の長さ～その３～】

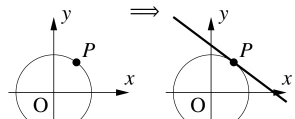
円 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=10$ と直線 $l:x+ky-2=0$ の交点を A，B とし，AB の中点を M，円 C の中心を O とする．以下の問いに答えよ．

① どんな k の値に対しても，直線 l はある定点 P を通る．その定点 P を求めよ．

② $\mathrm{AM}=a$，$\mathrm{OM}=b$ とおくとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ の大きさを a，b で表せ．

③ $\triangle\mathrm{OAB}=3$ のとき，AM，OM の長さを求め，k の値を求めよ．

D. 円の接線～その１～（円周上の接点が与えられ，接線は１本）



簡単のため，円 C の中心が原点 O(0, 0) である場合を考えると右図のようになり，円周上の点 P で C に接する直線は 1 本しか存在しないと分かる．

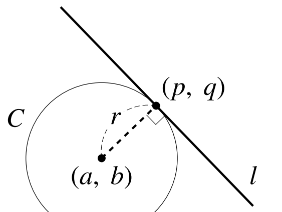
円周上の点から引いた接線の方程式

円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の周上の点 $(p,\ q)$ から引いた接線 l の方程式は

$$(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$$

となる．特に，円 C の中心が原点にある場合は次のようになる．

$$px+qy=r^2$$ ←a＝b＝0を接線 l の式に代入した



（証明）p.130 を参照のこと．

円の方程式において，2 乗のうち片方のみに，$(x,\ y)=(p,\ q)$ を代入すると覚えるとよい．また，次で学ぶ「円周外の点から引いた接線の方程式」と混同しないようにしよう．接線が 1 本に決まるかどうかで判断するとよい．

【例題 62】

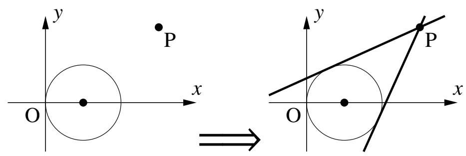
1. 円 $x^2+y^2=13$ の周上の点 (2, 3) で接する，接線の方程式を求めよ．
2. 円 $x^2+y^2=13$ の周上の点 $(2,-3)$ で接する，接線の方程式を求めよ．
3. 円 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$ の周上の点 $(2,-1)$ で接する，接線の方程式を求めよ．
4. 円 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ の周上の点 $(0,-1)$ で接する，接線の方程式を求めよ．

【解答】

1. $2\cdot x+3\cdot y=13 \iff \boldsymbol{2x+3y=13}$
2. $2\cdot x+(-3)\cdot y=13 \iff \boldsymbol{2x-3y=13}$
3. $(2-1)(x-1)+(-1+2)(y+2)=2 \iff \boldsymbol{x+y=1}$
4. $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ を平方完成形に変形して $(x-1)^2+(y+2)^2=2$ となる．よって，$(0,-1)$ で接する接線の方程式は
   $(0-1)(x-1)+(-1+2)(y+2)=2 \iff \boldsymbol{x-y=1}$

E. 円の接線〜その２〜（円周外の点から引き，接線は２本）

円 C の外に点 P をとり，P から引いた円 C の接線を考えよう．右図のようにして，そのような直線は 2 本存在することが分かる．



【暗記 63：円周外の点から引いた接線の方程式】

円 C ：$x^2 + y^2 = 2$ と点 P(3, 1) について，P から引いた C の接線 l の方程式を求めよ．

【解答】 直線 l の傾きを m とする．l の方程式は $y - 1 = m(x - 3)$ となる．

◀ 『直線の方程式』(p.86)

「円 C と直線 l が接する」と「円 C の半径 $\sqrt{2}$ と直線 l の距離が等しい」は必要十分条件であり，l と，円 C の中心 (0, 0) の距離は

$$\frac{|m \cdot 0 - 0 - 3m + 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} \text{ であるので}$$

◀ 『点と直線の距離』(p.95)

$$\frac{|-3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |-3m + 1| = \sqrt{2}\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 6m + 1 = 2m^2 + 2$$

◀ 両辺とも正なので，両辺 2 乗して

$$\Leftrightarrow 7m^2 - 6m - 1 = 0 \quad \therefore m = -\frac{1}{7},\ 1$$

よって，l の方程式は

$m = -\dfrac{1}{7}$ のとき，$y - 1 = -\dfrac{1}{7}(x - 3) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -\dfrac{1}{7}x + \dfrac{10}{7}}$.

◀ 一般形なら $x + 7y - 10 = 0$

$m = 1$ のとき，$y - 1 = 1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = x - 2}$.

◀ 一般形なら $x - y - 2 = 0$

（別解）接点を A(a, b) とおく．このとき

- A での接線の方程式 $ax + by = 2$ が P(3, 1) を通るから
  $3a + b = 2$ ……… ① を満たす．
- A が円 C の周上にあるので $a^2 + b^2 = 2$ ……… ② を満たす．

①より $b = 2 - 3a$ であるので，②に代入すれば

$$a^2 + (2 - 3a)^2 = 2 \Leftrightarrow 5a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5a - 1)(a - 1) = 0 \quad \therefore \quad a = \frac{1}{5},\ 1$$

$a = \dfrac{1}{5}$ のとき，①より $b = \dfrac{7}{5}$ なので，接線の方程式は $\boldsymbol{\dfrac{1}{5}x + \dfrac{7}{5}y = 2}$

$a = 1$ のとき，①より $b = -1$ なので，接線の方程式は $\boldsymbol{x - y = 2}$

【練習 64：円の接線】

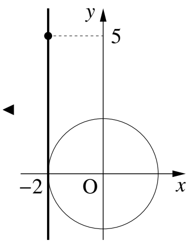
(1) 円 C ：$x^2+y^2=4$ の周上にある $(1,\ \sqrt{3})$ で接する C の接線を求めよ．

(2) 円 C ：$x^2+y^2=4$ の接線のうち，$(-2,\ 5)$ を通るものをすべて求めよ．

【解答】

(1) $1\cdot x+\sqrt{3}y=4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x+\sqrt{3}y=4}$

(2) $(-2,\ 5)$ と円 C を書くと，右欄外の図のようになり，直線 $x=-2$ が接線になると分かる．



もう 1 本は x 軸や y 軸に平行ではないので求める接線を

$$y-5=m(x+2) \quad \Leftrightarrow mx-y+2m+5=0$$

とおく．この直線と C の中心 $(0,\ 0)$ の距離が，2 であればよいので

◀『点と直線の距離』(p.95)

$$\frac{|m\cdot 0-0+2m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2 \Leftrightarrow |2m+5|=2\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (2m+5)^2=2^2(m^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 20m+21=0 \quad \therefore\ m=-\frac{21}{20}$$

よって，$y-5=-\dfrac{21}{20}(x+2) \Leftrightarrow y=-\dfrac{21}{20}x+\dfrac{29}{10}$ は接線になる．

つまり，求める接線は $\boldsymbol{x=-2,\ y=-\dfrac{21}{20}x+\dfrac{29}{10}}$ の 2 本．

（別解）接点を $\mathrm{A}(a,\ b)$ とおく．このとき

- A での接線の方程式 $ax+by=4$ が $\mathrm{P}(-2,\ 5)$ を通るから
  $-2a+5b=4$ ……… ① を満たす．
- A が円 C の周上にあるので $a^2+b^2=4$ ……… ② を満たす．

①より $a=\dfrac{5}{2}b-2$ であるので，②に代入すれば

$$\left(\frac{5}{2}b-2\right)^2+b^2=4 \Leftrightarrow \frac{29}{4}b^2-10b=0$$

$$\Leftrightarrow 29b^2-40b=0 \quad \therefore\ b=0,\ \frac{40}{29}$$

$b=0$ のとき，①より $a=-2$ なので，

接線の方程式は $-2x=4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=-2}$

$b=\dfrac{40}{29}$ のとき，①より $a=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{40}{29}-2=\dfrac{42}{29}$ なので，

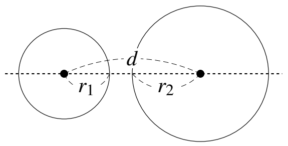
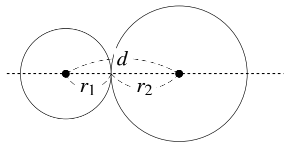
接線の方程式は $\dfrac{42}{29}x+\dfrac{40}{29}y=2 \Leftrightarrow \boldsymbol{21x+20y=29}$.

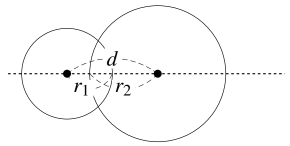
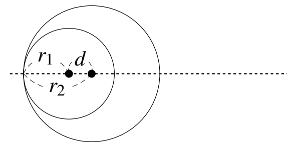
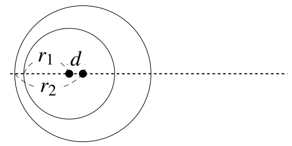
5.　2 円の関係

A.　2 円の位置関係

数学 A で学んだように，2 円の位置関係は以下の 5 つの状態しかない．

2 円の半径を r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$，中心間の距離を d とすると，以下のようになる．

2 円の図		
2 円の位置関係	離れている	外接している
2 円の共有点の個数	0 個	1 個（外接）
2 円の中心間の距離 d	$\boldsymbol{r_2 + r_1 < d}$	$\boldsymbol{d = r_2 + r_1}$

		
交わっている	内接している	一方が他方を含む
2 個	1 個（内接）	0 個
$\boldsymbol{r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1}$	$\boldsymbol{d = r_2 - r_1}$	$\boldsymbol{d < r_2 - r_1}$

円が複数個あるときは，まず，中心間を線で結んだ図を描こう．そのうえで，上のような条件を考えるとよい．

【例題 65】 円 C_1 ： $x^2 + y^2 = 9$ と，半径 5 の円 C_2 がある．C_2 の中心 A が次の点にあるとき，C_1 と C_2 の位置関係を答えよ．

1. A(4, 0)　　2. A(10, 0)　　3. A(2, 0)　　4. A(6, 8)　　5. A(−3, 1)
6. A の y 座標は 4 であり，円 C_1 と C_2 が外接するとき，A の座標を答えなさい．

【解答】 円 C_1 の中心 (0, 0) を O とすると，OA = 5 + 3 = 8 のとき 2 円は外接，OA = 5 − 3 = 2 のとき 2 円は内接であるので，

- 8 < OA のとき 2 円は離れている
- 2 < OA < 8 のとき 2 円は交わっている
- OA < 2 のとき C_2 が C_1 を含む

1. OA = 4 なので，**2 円は交わっている**．
2. OA = 10 なので **2 円は離れている**．
3. OA = 2 なので **2 円は内接している**．
4. $\mathrm{OA} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ なので **2 円は離れている**．
5. $\mathrm{OA} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3.\cdots$ なので **2 円は交わっている**．
6. A(x, 4) とおく．外接するには OA = 8 であればよいので

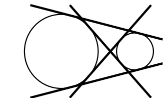
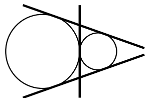
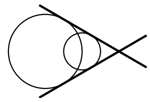
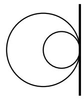
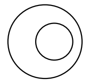
$$\sqrt{x^2 + 4^2} = 8 \Leftrightarrow x^2 + 16 = 64 \Leftrightarrow x^2 = 48$$

よって，$x = \pm 4\sqrt{3}$ であるから，$\mathbf{A(\pm 4\sqrt{3},\ 4)}$．

B. 2円の共通接線

数学 A でも学んだように，2 円の共通接線の本数は，2 円の位置関係によって異なる．

2円の共通接線

本数	4 本	3 本	2 本	1 本	0 本
2 円と共通接線の図					
2 円の位置関係	離れている	外接している	交わっている	内接している	一方が他方を含む
共通外接線	2 本	2 本	2 本	1 本	0 本
共通内接線	2 本	1 本	0 本	0 本	0 本

【例題 66】 前ページの【例題】と同じように，円 C_1 : $x^2+y^2=9$ と，半径 5 の円 C_2 がある．C_2 の中心 A が次の点にあるとき，C_1 と C_2 の共通接線の本数を答えよ．

1. A(4, 0)　2. A(10, 0)　3. A(2, 0)　4. A(6, 8)　5. A(−3, 1)

【解答】 前ページの答えを利用して

1. 2 円は交わっているので **2 本**.
2. 2 円は離れているので **4 本**.
3. 2 円は内接しているので **1 本**.
4. 2 円は離れているので **4 本**.
5. 2 円は交わっているので **2 本**.

【暗記 67：共通接線の長さ】

2 円 $C_1 : x^2+(y-1)^2=1$, $C_2 : (x-3)^2+(y-3)^2=4$ がある．

1. 2 円の共通外接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ A_1，A_2 で接するとき，線分 A_1A_2 の長さを求めよ．
2. 2 円の共通内接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ B_1，B_2 で接するとき，線分 B_1B_2 の長さを求めよ．

【解答】 円 C_1, C_2 の中心を，それぞれ O_1，O_2 とする．

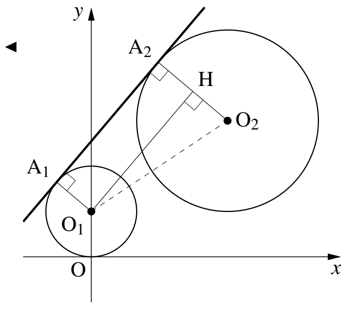
1. O_1 から O_2A_2 へ下ろした垂線の足を H とすると

$$A_1A_2 = O_1H = \sqrt{O_1O_2{}^2 - O_2H^2}$$

である．$O_1O_2 = \sqrt{(3-0)^2+(3-1)^2} = 13$

$O_2H = A_2O_2 - A_2H = 2-1 = 1$ なので

$$A_1A_2 = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{12} = \mathbf{2\sqrt{3}}$$

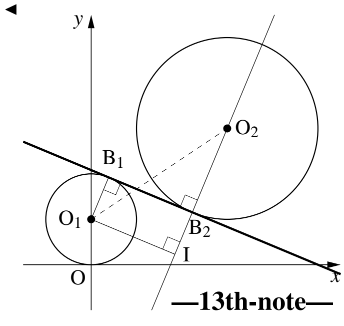


2. O_1 から直線 O_2B_2 へ下ろした垂線の足を I とすると

$$B_1B_2 = O_1I = \sqrt{O_1O_2{}^2 - O_2I^2}$$

である．$O_1O_2 = \sqrt{13}$,　$O_2I = O_2B_2 + B_1O_1 = 2+1 = 3$ なので

$$B_1B_2 = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 - 3^2} = \mathbf{2}$$



【発展 68：2円の共通接線】

2つの円 $C_1:(x+1)^2+(y+1)^2=4$，$C_2:(x-2)^2+(y-2)^2=1$ がある．この2円に対し，共通内接線 l，共通外接線 L を考え，2本ある L の交点を P とする．

① 円 C_1, C_2 と接線 l, L を座標平面上に描き，共通内接線 l の方程式を求めよ．

② P の座標を求めよ．　③ 共通外接線 L の傾きを求めよ．

6. 発展 円と放物線

円と放物線の場合は，基本的に2つの方程式を連立して考えるしかない．『点と直線の距離』は使えないし，相似などを用い図形的に解くこともできないからである．

【発展 69：円と放物線】

放物線 $H:y=x^2$ と，中心が P(0, 2) にある円 C が，2点 A, B で接している．

① 円 C の半径を求めよ．　② $\triangle$APB の面積を求めよ．

7. 2つのグラフの交点を通るグラフ

一般に，2つの陰関数 $F(x,\ y)=a$, $G(x,y)=b$ があるとき，2つのグラフの交点を通るグラフは

$k\{F(x,\ y)-a\}+\{G(x,\ y)-b\}=0$ ……………………… ①

という形で表される（グラフ $F(x,\ y)=a$ 以外は全て表わされる）．

逆に，k がどんな実数でも①のグラフは，$F(x,\ y)=a$, $G(x,y)=b$ の交点を必ず通る．

【暗記 70：2つのグラフの交点を通る円】

直線 L: $2x+3y=1$，円 C: $x^2+y^2=4$ の交点 A, B と，原点 O を通る円の方程式を求めよ．

【解答】 $F(x,\ y)=k(2x+3y-1)+(x^2+y^2-4)$ とおくと，関数 $F(x,\ y)=0$ は，L と C の2交点 A，B を必ず通る．

これが原点を通るとき，$F(0,\ 0)=0$ であればよいので

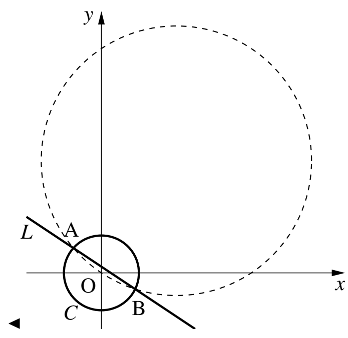
$F(0,\ 0)=\ k(-1)+(-4)=0$

$\Leftrightarrow\ -k-4=0$　　$\therefore\ k=-4$

よって，求める円の方程式は

$-4(2x+3y-1)+(x^2+y^2-4)=0$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x^2+y^2-8x-12y=0}$



【発展 71：2円の交点と，それを通る直線・円】

2円 $C_1:x^2+y^2=2$, $C_2:(x-1)^2+(y-2)^2=3$ の2交点を A, B とする．

① 直線 AB の方程式を求めよ．　② A, B の座標を求めよ（x 座標は A の方が小さいとする）．

③ A, B を通り，原点を通る円の方程式を求めよ．

3.6　軌跡

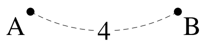
この節では，方程式や関数を利用して，様々な軌跡の表し方にについて学ぶ.

1.　軌跡

軌跡 (locus) とは，「ある条件を満たす点すべてを集めてできる線状の図形」のことである.

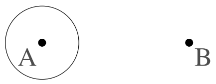
【例題 72】 右の点 A，B について，以下の条件を満たす軌跡を，それぞれ図示しなさい.

1. AP = 1 を満たして動く点 P の軌跡
2. AQ = BQ を満たす点 Q の軌跡
3. ∠ARB = 90° を満たす点 R の軌跡



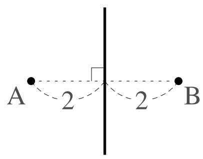
【解答】

1.



点 P の軌跡は上の実線部分，半径 1 の円周になる.

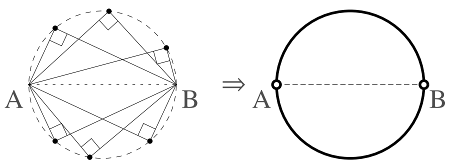
2.



点 Q は，線分 AB の垂直二等分線になる.

◀ △AQB が常に二等辺三角形になる.

3.



点 R の軌跡は線分 AB を直径とする円の円周上にある．ただし，点 A，B を除く.

◀ R が A，B と一致したときは，∠ARB = 90° どころか，∠ARB が存在しない.

2.　座標平面上の軌跡

A.　軌跡の方程式

座標平面上で考えると，軌跡は x と y の間の方程式で表され，それは**軌跡の方程式** (equation of locus) といわれる．これを求めるには，軌跡上の点を (x, y) とおいて，x と y が満たすべき等式を考えればよい.

【例題 73】 A(1, 2)，B(3, 6) とする．$AP^2 + BP^2 = AB^2$ を満たす点 P の軌跡を考える.

1. P(x, y) とおく．AP^2, BP^2 をそれぞれ x, y で表せ.
2. 点 P の軌跡の方程式を求めなさい．また，それはどんな図形か答えなさい.

【解答】

1. $\mathbf{AP^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2}$, $\mathbf{BP^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2}$

2. $AB^2 = (3-1)^2 + (6-2)^2 = 20$ であるから

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 = AB^2 &\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-3)^2 + (y-6)^2 = 20 \\ &\iff 2x^2 - 8x + 2y^2 - 16y + 50 = 20 \\ &\iff x^2 - 4x + y^2 - 8y + 15 = 0 \\ &\iff (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{aligned}$$

よって，P の軌跡の方程式は $\mathbf{(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5}$ であり，**中心が $(2, 4)$ であり半径 $\sqrt{5}$ の円**になる.

◀『2 点間の距離』(p.74)

◀【別解】$AP^2 + BP^2 = AB^2$ ならば $\angle APB = 90°$ なので，P は AB を直径とする円の周上にあり，P が A，B に一致してもよい．よって軌跡は，AB の中点 $(2, 4)$ を中心とし，半径 $\frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$ の円になる.

【例題 74】 座標平面上において，2 点 A(1, 3)，B(4, −3) について，AP : PB = 1 : 2 となる点 P が描く軌跡の方程式を求めなさい．また，それはどのような図形か.

【解答】 $P(x, y)$ とおく．このとき

$AP^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$，$BP^2 = (x-4)^2 + (y+3)^2$ $\cdots$ ①

である．一方，AP : PB = 1 : 2 は

$AP^2 : BP^2 = 1 : 4$ $\cdots\cdots$ ②

と同値である．①を②に代入して整頓すると

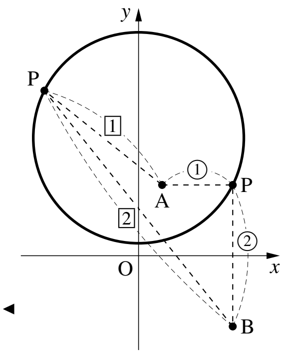
$$\begin{aligned} &\left\{(x-1)^2 + (y-3)^2\right\} : \left\{(x-4)^2 + (y+3)^2\right\} = 1 : 4 \\ \iff &4\left\{(x-1)^2 + (y-3)^2\right\} = (x-4)^2 + (y+3)^2 \\ \iff &4(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 6y + 9) = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 \\ \iff &3x^2 + 3y^2 - 30y + 40 - 25 = 0 \\ \iff &x^2 + y^2 - 10y + 5 = 0 \\ \iff &x^2 + (y-5)^2 = 20 \end{aligned}$$

となる．つまり，点 $P(x, y)$ の軌跡の方程式は $\boldsymbol{x^2 + (y-5)^2 = 20}$ であり，**中心 $(0, 5)$，半径 $2\sqrt{5}$ の円**になる.

◀『2 点間の距離 (p.74)』

◀ AP : PB = 1 : 2 から，AP = k, BP = $2k$ と書ける (k は正の数) ので $AP^2 : BP^2 = k^2 : 4k^2 = 1 : 4$

◀「外同士の積＝内同士の積」



◀

上の式変形はすべて，同値の記号 ⇔ で結ばれ，また，AP : BP = 1 : 2 と $AP^2 : BP^2 = 1 : 4$ は「同値」となっている.

この「同値な変形である」ことは重要で，解答に明記しなければならない．明記しないと，「点 $P(x, y)$ が $x^2 + (y-5)^2 = 20$ を必ず満たす」ことは導かれていても，「円 $x^2 + (y-5)^2 = 20$ 上のすべての点が P の軌跡である」ことを示したことになっていない.

もし，同値関係を書かない場合は，解答の最後に「逆に，円 $x^2 + (y-5)^2 = 20$ 上のすべての点 (x, y) は，上の計算を逆にたどって，P の条件を満たす.」と明記しなければならない.

【練習 75：軌跡〜その１〜】

3 点 A(2, 1)，B(4, 0)，C(0, −1) について，$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 40$ となる点 P の軌跡を求めよ．

【解答】 $P(x, y)$ とおくと

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 40$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y+1)^2 = 40$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 3y^2 = 18$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 10$$

よって，**(2, 0) を中心として半径 $\sqrt{10}$ の円**になる．

◀「軌跡を求めよ」という問題なので，ここまで解いて「**円 $x^2 - 4x + y^2 = 6$ になる**」でもよい．

◀ この (2, 0) は，△ABC の重心になっている．

【練習 76：軌跡〜その２〜】

2 点 A(1, 2)，B(5, −2) について，AP : PB = 3 : 1 となる点 P が描く軌跡を求めよ．

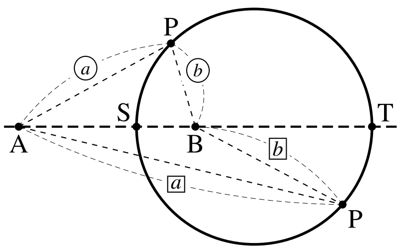
【解答】 $P(x, y)$ とおくと

$$AP : PB = 3 : 1 \Leftrightarrow AP^2 : PB^2 = 9 : 1 \Leftrightarrow 9PB^2 = AP^2$$
$$\Leftrightarrow 9\left\{(x-5)^2 + (y+2)^2\right\} = (x-1)^2 + (y-2)^2$$
$$\Leftrightarrow 9(x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$
$$\Leftrightarrow 8x^2 - 88x + 8y^2 + 40y + 256 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + y^2 + 5y + 32 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

よって，$\left(\frac{11}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ **を中心として半径 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ の円**になる．

◀「軌跡を求めよ」という問題なので，ここまで解いて「**円 $x^2 - 11x + y^2 + 5y + 32 = 0$ になる**」でもよい．

一般に，AP : PB = $a : b$ を満たす点 P の軌跡は，$a \neq b$ ならば円になる（これを**アポロニオスの円** (circle of Apollōnios) という）．この円は，線分 AB を $a : b$ に内分する点（右図の S)，$a : b$ に外分する点（右図の T）が直径の両端になる．$a = b$ ならば，P の軌跡は線分 AB の垂直二等分線である．



【発展 77：軌跡〜その３〜】

直線 $l : y = 2$ と F(0, −3) について，直線 l との距離が，F までの距離と等しくなる点の軌跡を求めよ．

【発展 78：軌跡〜その４〜】

直線 $l : y = -x + 1$ と直線 $m : y = 7x - 2$ から等距離にある点の軌跡を K とおく．ただし，点が直線上にあるときは，直線との距離を 0 とする．K は，直線 l, m にとってのどんな図形を描くか答えよ．また，K の方程式を求めよ．

B. 軌跡を描く点の他にも動点がある場合

軌跡を描く点の他にも動点がある場合を考えてみよう．

【例題 79】 点 A が放物線 $y = x^2$ の周上を動くとき，A と点 B(0, 2) の中点 P の軌跡を考える．

1. $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ とするとき，P の座標を a で表せ．
2. P が描く軌跡の方程式を求めよ．

【解答】

1. P は O(0, 2) と $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ の中点なので

◀『内分点の公式 (p.76)』

$$\left(\frac{0+a}{2}\ \ \frac{2+a^2}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\boldsymbol{\frac{a}{2},\ \frac{a^2+2}{2}}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

2. P$(x,\ y)$ とおく．(1) より $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} & \cdots\cdots\ ② \\ y = \dfrac{a^2+2}{2} & \cdots\cdots\ ③ \end{cases}$ である．②から

$a = 2x$ なので，③に代入すれば $y = \dfrac{(2x)^2+2}{2} = 2x^2+1$ であるから P の軌跡は**放物線 $\boldsymbol{y = 2x^2+1}$** と分かる．

上では P$(x,\ y)$ とおいているが，問題と文字がかぶるため，P$(X,\ Y)$ とおくことも多い．詳しくは p.119 参照のこと．

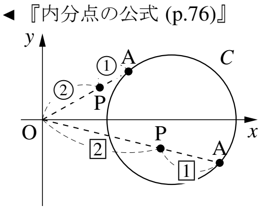
【例題 80】 原点 O について，点 A が円 $C : (x-6)^2 + y^2 = 9$ の周上を動き，線分 OA を 2 : 1 に内分する点を P とする．

1. P$(x,\ y)$，A$(s,\ t)$ とする．x と s の間に成り立つ式，y と t の間に成り立つ式を求めよ．
2. P が描く軌跡の方程式を求めよ．

【解答】

1. P は O(0, 0) と A$(s,\ t)$ による線分 OA を 2 : 1 に内分するので

◀『内分点の公式 (p.76)』



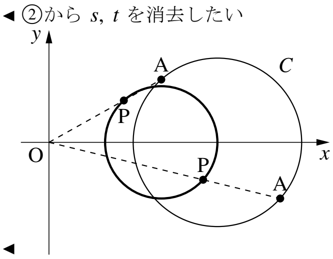
$$x = \frac{2s+0}{2+1} \Leftrightarrow \boldsymbol{3x = 2s} \qquad y = \frac{2t+0}{2+1} \Leftrightarrow \boldsymbol{3y = 2t} \quad \cdots\cdots ①$$

2. 点 A は円 $C : (x-6)^2 + y^2 = 9$ の周上にあるので

$$(s-6)^2 + t^2 = 9 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を満たす．②を s, t について解けば $s = \dfrac{3}{2}x$, $t = \dfrac{3}{2}y$ であるから，これを②に代入して

◀ ②から s, t を消去したい



$$\left(\frac{3}{2}x-6\right)^2 + \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \left\{\frac{3}{2}(x-4)\right\}^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}(x-4)^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9$$

この両辺に $\dfrac{4}{9}$ を掛けて，P の軌跡は**円 $\boldsymbol{(x-4)^2 + y^2 = 4}$** と分かる．

◀

軌跡を求めることと，(連立) 方程式の文章題を解くことには共通点がある．いずれも「求めたいものを x(, y) とおき」「x(, y) が満たす式を作り」「それを解く」「条件に満たしていることを確かめる」という 3 段階を踏む．

【練習 81：動点をもつ軌跡〜その１〜】

A(0, −3) とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) 点 B が放物線 $y = -2x^2$ 上を動くとき，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の軌跡を求めなさい.

(2) 点 C が円 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 上を動くとき，線分 AC を 1 : 3 に外分する点 Q の軌跡を求めなさい.

【解答】

(1) $B(a, -2a^2)$，$P(x,\ y)$ とおく．P は線分 AB を 2 : 1 に内分するので

$$\begin{cases} x = \dfrac{0+2a}{2+1} \\ y = \dfrac{-3+2\cdot(-2a^2)}{2+1} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{2a}{3} & \cdots\cdots\cdots ① \\ y = \dfrac{-4a^2-3}{3} & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より，$a = \dfrac{3}{2}x$ であるので，②に代入して

$$y = \frac{-4a^2-3}{3} = \frac{-4\left(\frac{3}{2}x\right)^2-3}{3} = \frac{-9x^2-3}{3} = -3x^2-1$$

よって，求める軌跡は**放物線 $y = -3x^2 - 1$** になる.

(2) $C(s,\ t)$，$P(x,\ y)$ とおく．Q は線分 AC を 1 : 3 に外分するので

$$\begin{cases} x = \dfrac{0+(-1)\cdot s}{-1+3} \\ y = \dfrac{3\cdot(-3)+(-1)\cdot t}{-1+3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{-s}{2} & \cdots\cdots\cdots ③ \\ y = \dfrac{-9-t}{2} & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

$C(s,\ t)$ は円 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 上にあるので,

$$(s-1)^2 + t^2 = 4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

を満たす．③より $s = -2x$，④より $t = -2y - 9$ であるので，⑤に代入すれば

$$(-2x-1)^2 + (-2y-9)^2 = 4 \Leftrightarrow \left\{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2 + \left\{-2\left(y+\frac{9}{2}\right)\right\}^2 = 4$$

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y+\frac{9}{2}\right)^2 = 4$$

よって，求める軌跡は**円 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{9}{2}\right)^2 = 1$** になる.

【練習 82：動点をもつ軌跡〜その２〜】

A(2, 1)，B(1, −4) があり，点 P が円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動くとき，△ABP の重心の軌跡を求めなさい.

【練習 83：頂点の描く軌跡】

放物線 $y = x^2 + 2ax + 4x - 3a + 4$ の頂点を A とするとき，次の問いに答えなさい.

(1) A の座標を a を用いて表せ.　　(2) A の軌跡の方程式を求めよ.

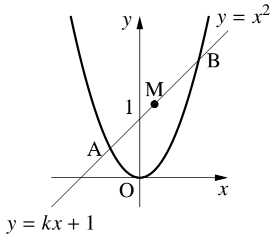
【発展 84：動点をもつ軌跡〜その３〜】

直線 $l : y = x - 3$ と放物線 $C : y = x^2$ がある．点 A が l 上を，点 B が C 上を，線分 AB が y 軸と平行であるように動くとき，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の軌跡を求めなさい.

3. 発展 定義域に注意すべき軌跡

A. グラフの交点の中点が描く軌跡（常にグラフが交点を持つ場合）

放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = kx + 1$ の 2 交点 A，B について，線分 AB の中点を M とし，k がすべての実数をとったときの，M の軌跡について考える．



このとき，A と B の座標は連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = kx + 1 \end{cases}$ の解に一致する．A と B を直接求めるならば，この連立方程式を解いて

$$x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0 \qquad \therefore \quad x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

となる（このとき，k がどんな値でも $k^2 + 4$ は正なので，これらは常に実数である.）．複雑な形をしているが，これが A，B の x 座標である．そこで，M の x 座標を計算すると

$$(\text{M の } x \text{ 座標}) = \frac{\text{A の } x \text{ 座標} + \text{B の } x \text{ 座標}}{2} = \frac{\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} + \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}}{2} = \frac{k}{2}$$

となり，簡潔な値となる．では，複雑な A，B の値を求めず，M の値を計算する方法はないだろうか．

それには，『解と係数の関係 (p.47)』を用いるとよい．

【暗記 85：2 交点の中点の軌跡】

A，B の x 座標を α, β，M$(X,\ Y)$ とする．A，B とも放物線 $y = x^2$ 上にあるので，α, β を用いて，A$(\alpha,$ $\boxed{\text{ア}}$$)$，B$(\beta,$ $\boxed{\text{イ}}$$)$，$X =$ $\boxed{\text{ウ}}$，$Y =$ $\boxed{\text{エ}}$ と表される．

A，B の座標を求めるには，C と l の式を連立して x の 2 次方程式 $\boxed{\text{オ}}$ を解けばよい．$\boxed{\text{オ}}$ の 2 解は α, β であり，$\boxed{\text{オ}}$ の判別式 D は，$D =$ $\boxed{\text{カ}}$ $>$ $\boxed{\text{キ}}$ なので，k の値によらず α, β は常に実数である．2 次方程式 $\boxed{\text{オ}}$ について，『解と係数の関係 (p.47)』より，

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{ク}}, \quad \alpha\beta = \boxed{\text{ケ}}$$

が成り立つので，k のみを用いて $X =$ $\boxed{\text{コ}}$，$Y =$ $\boxed{\text{サ}}$ となる．これから k を消去し，M の軌跡の方程式 $\boxed{\text{シ}}$ を得る．

【解答】 ア: $\boldsymbol{\alpha^2}$，イ: $\boldsymbol{\beta^2}$，ウ: $\boldsymbol{\dfrac{\alpha + \beta}{2}}$，エ: $\boldsymbol{\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}$

オ: $\boldsymbol{x^2 = kx + 1}$ $(\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x^2 - kx - 1 = 0})$

カ: $\boldsymbol{k^2 + 4}$，キ: $\boldsymbol{0}$，ク: $-(-k) = \boldsymbol{k}$，ケ: $\boldsymbol{-1}$，コ: $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \boldsymbol{\dfrac{k}{2}}$

サ: $\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \dfrac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} = \dfrac{k^2 - 2(-1)}{2} = \boldsymbol{\dfrac{k^2 + 2}{2}}$

シ: $Y = 2X^2 + 1$ という等式を得た結果，$\boldsymbol{y = 2x^2 + 1}$ が軌跡の方程式になる．

◀ コより $k = 2X$
これをサに代入

上の例題の最後に「$Y = 2X^2 + 1$ であるから軌跡は $y = 2x^2 + 1$」とした．これは，次の内容を簡潔に述べた結果である（『陰関数のグラフ』(p.84) 参照）．

「P の x 座標を X，P の y 座標を Y とすれば，$Y = 2X^2 + 1$ を満たしている．これは，P$(X,\ Y)$ が $y = 2x^2 + 1$ というグラフの上にあることを意味しているから，これが P の軌跡になる.」

【練習 86：2 交点の中点の軌跡】

放物線 $y = x^2 - 2$ と直線 $y = k(x-1)$ の 2 交点 A，B について，線分 AB の中点を M とする．定数 k がすべての実数をとるとき，M が描く軌跡の方程式を求めよ．

【解答】 $M(X, Y)$ とする．$A(\alpha, \alpha^2-2)$，$B(\beta, \beta^2-2)$ とおくと

$$X = \frac{\alpha+\beta}{2},\ Y = \frac{(\alpha^2-2)+(\beta^2-2)}{2} \quad \cdots\cdots①$$

ここで，α, β は，$y = x^2-2$ と $y = k(x-1)$ を連立した

$$x^2 - 2 = k(x-1) \iff x^2 - kx + k - 2 = 0 \quad \cdots\cdots②$$

の 2 解と一致する．②の判別式を D とすると

$$D = (-k)^2 - 4(k-2) = k^2 - 4k + 8 = (k+2)^2 + 4 > 0$$

であるので，②は任意の k で解を持つ．②において解と係数の関係より

$$\alpha+\beta = k,\ \alpha\beta = k-2$$

が成り立つ．これを①に代入すると

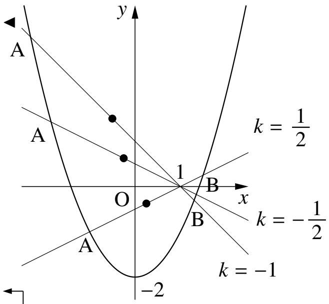
$$X = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{k}{2} \quad \cdots\cdots③$$

$$Y = \frac{\alpha^2+\beta^2-4}{2} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-4}{2} = \frac{k^2-2(k-2)-4}{2} = \frac{k^2-2k}{2} \quad \cdots\cdots④$$

③より $k = 2X$ となるのでこれを④に代入して

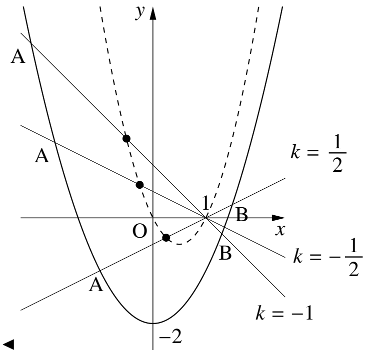
$$Y = \frac{(2X)^2 - 2\cdot(2X)}{2} = 2X^2 - 2X$$

よって，M の軌跡の方程式は $\boldsymbol{y = 2x^2 - 2x}$ である．



◀ 平方完成をした．非負である $(k+2)^2$ に 4 を足すので，どんな k でも正の値をとる．

◀ 『解と係数の関係 (p.47)』



B. 定義域に注意すべき軌跡

これまでの問題では，2 つのグラフには必ず共有点があった．k の値によってグラフが交点を持たないような場合は，次のことに注意して，軌跡の方程式の定義域に注意しないといけない．

- 2 次方程式の解を α, β などでおいたとき，実数解を持つかどうか
- 式で割り算するとき，その式が 0 になることはないだろうか

【発展 87：2 交点の中点の軌跡～その３～】

放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = kx - 1$ について，C と l が異なる 2 交点 A，B をもつよう定数 k が変化するとき，AB の中点を M の軌跡を考える．

① M が存在するための k の範囲を求めよ．　② M の軌跡の方程式を求めよ．

【解答】

① C と l の方程式を連立し，y を消去すると，x についての 2 次方程式

$$x^2 - kx + 1 = 0 \quad \cdots\cdots①$$

◀ $\begin{cases} y = x^2 \\ y = kx - 1 \end{cases}$

を得る．これが実数解をもてばよいので，①の判別式 D

$$D > 0 \Leftrightarrow k^2 - 4\cdot 1\cdot 1 > 0 \Leftrightarrow (k-2)(k+2) > 0$$

より，$\boldsymbol{k < -2,\ 2 < k}$ が求める範囲である．

◀ 実数解をもてば A，B は存在し，M も存在する．逆も正しい．

② A，B は放物線 $y = x^2$ 上にあるので $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ とおける．$\mathrm{M}(x,\ y)$ とすると，$x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ となる．

α, β は①の 2 解に一致するので，$\alpha+\beta = k$,　$\alpha\beta = 1$ である．よって，$k < -2,\ 2 < k$ のとき，$\mathrm{M}(x,\ y)$ について

◀『解と係数の関係』(p.47)

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{k}{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$y = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} = \frac{k^2-2}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

となる．②から $k = 2x$ であるので，③に代入して

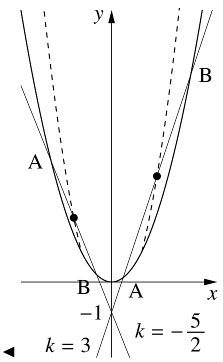
$$y = \frac{(2x)^2-2}{2} = 2x^2 - 1$$

また，k のとる範囲 $k < -2,\ 2 < k$ に代入して

$$2x < -2,\ 2 < 2x \quad\Leftrightarrow\quad x < -1,\ 1 < x$$

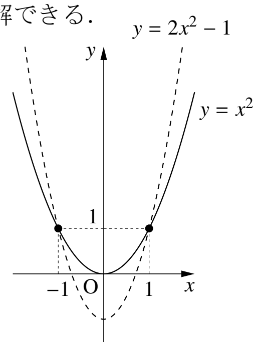
以上より，M の軌跡の方程式は $\boldsymbol{y = 2x^2 - 1\ (x < -1,\ 1 < x)}$ である．

◀



上の例題において，求める軌跡が放物線の一部分になったことは，次のように理解できる．

- 直線 $l : y = kx - 1$ は k の値に関わらず定点 $\mathrm{A}(0, -1)$ を通り，k の値によっては C と l は交わらない．
- 右図のように，M の軌跡の方程式 $y = 2x^2 - 1$ は放物線 C の下に突き抜ける．M は放物線 C より上にあるはずなので，C の下につきぬけた部分は軌跡として適さない．放物線 C と $y = 2x^2 - 1$ の共有点を求めると $(1,\ 1), (-1,\ 1)$ であるから，$-1 \leqq x \leqq 1$ の部分が適さないと分かる．これは上で求めた結果と一致する．



【発展 88：2 交点の中点の軌跡〜その 4 〜】

円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と直線 $l : y = kx + 2$ について，C と l が異なる 2 交点 A，B をもつよう定数 k が変化するとき，AB の中点 M の軌跡を求めよ．

【発展 89：対称式で表された座標の軌跡】

$a^2 + b^2 = 10$ を満たしながら $a,\ b$ が実数全体を動くとき，$\mathrm{M}(a+b\ , ab)$ の軌跡の方程式を求めよ．

【発展 90：2 直線の交点の軌跡】

2 直線 $l_1 : kx + y + 1 = 0$,　$l_2 : x - ky - 1 = 0$ の交点 P が描く軌跡を求めよ．

1. 領域とは

A. 領域とは

平面上の**領域** (domain) とは，「平面的広がり[*8]をもつ，平面の一部分」である[*9].

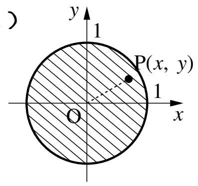
たとえば，以下の不等式は座標平面上の領域を表す.

(A) $x^2 + y^2 \leqq 1$　　(B) $x^2 + y^2 < 1$　　(C) $y > x - 1$

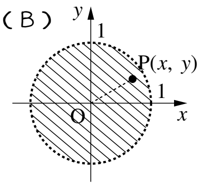
P(x, y) について，$x^2 + y^2 \leqq 1$ を満たす点 P の集まりが，(A) の表す領域である[*10]．これは領域の境界線上も含むので「**境界** (boundary) を含む」という.

(A) の領域から円周上の点を除けば (B) の領域になり，「境界を含まない」.

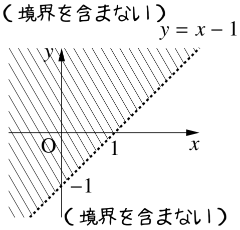
(C) の表す領域は，「直線 $y = x - 1$ よりも y 座標の大きい点の集まり」になり，直線 $y = x - 1$ より上部（境界を含まない）である.

（A）


（境界を含む）

（B）


（境界を含まない）



（C）（境界を含まない）

【例題 91】 座標平面上の以下の領域を，図示しなさい．（領域の図示をするときは，「境界を含む」または「境界を含まない」を書くこと．これは，以後の問題でも同様である.）

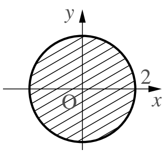
1. $x^2 + y^2 \leqq 4$　2. $x^2 + y^2 > 4$　3. $x^2 + 2x + y^2 - 4y < 0$　4. $y < 2x + 3$　5. $y \geqq 2x + 3$

6. $y \leqq x^2$　7. $y - x^2 > 0$　8. $2x - y + 1 > 0$

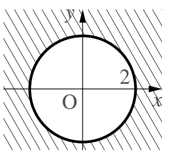
【解答】 3. は，与えられた不等式の左辺を平方完成すると

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) < 1 + 4$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 < 5$$

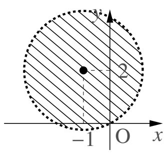
となるので，円周 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ が境界になる.

1.


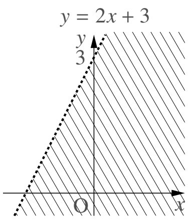
（境界を含む）

2.


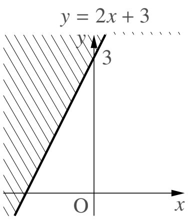
（境界を含まない）

3.


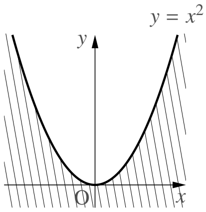
（境界を含まない）

4.


（境界を含まない）

5.


（境界を含む）

6.


（境界を含む）

◀ (1) は中心から 4 以下の点，(2) は中心から 4 より離れている点，のように考えられる.

◀ 1., 2. は直線 $y = 2x + 3$ が，3., 4. は放物線 $y = x^2$ が境界になる.

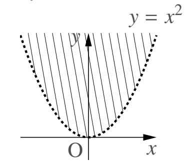
[*8] 平面の一部分が曲線や点であるときは，それを領域とは言わない．「平面的広がり」という表現は曖昧であるが，これを厳密に定義するには高校数学の範囲を大きく超えてしまう．また，空間の領域とは「空間的広がりをもつ，空間の一部分」である.

[*9] 大学以降の数学においては「領域」の定義が異なり，「境界を含まない連続的な（高校数学の）領域」のみを指す.

[*10] このことから，(A) の領域を $\left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ と表すこともできる.

7. $y - x^2 > 0$

$\Leftrightarrow y > x^2$ より

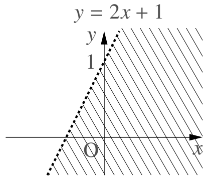


（境界を含まない）

8. $2x - y + 1 > 0$ は

$2x + 1 > y$

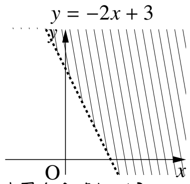
と変形できるので，直線 $y = 2x+1$ より下部が領域になる．



（境界を含まない）

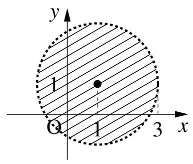
【例題 92】 以下の座標平面上の領域を，式で表しなさい．

1.



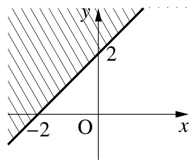
（境界を含まない）

2.



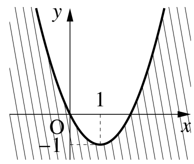
（境界を含まない）

3.



（境界を含む）

4.



（境界を含む）

【解答】

1. 直線 $y = -2x + 3$ の上部なので $\boldsymbol{y > -2x + 3}$
2. 境界は円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ であり，
   領域はその内部なので $\boldsymbol{(x-1)^2 + (y-1)^2 < 4}$

◀ 境界の円は中心が $(1,\ 1)$，半径は 2

3. 境界は切片 2，傾き 1 の直線なので $y = x + 2$ であり，
   領域はその上部なので $\boldsymbol{y \geqq x + 2}$

◀ 傾きは，$\dfrac{2}{2} = 1$

4. 境界は放物線 $y = (x-1)^2 - 1$ であり，
   領域はその下部なので $\boldsymbol{y \geqq (x-1)^2 - 1}$

◀ 境界の放物線は頂点が $(1,\ 1)$，$y = a(x-1)^2 - 1$ に $(x,\ y) = (0,\ 0)$ を代入して $a = 1$

B. 複数の不等式が表す領域

たとえば，領域 $\begin{cases} y < -x^2 + 2 \\ 2x + y + 1 > 0 \end{cases}$ とは，領域 $y < -x^2 + 2$ と領域 $2x + y + 1 > 0$ の共通部分を表す．

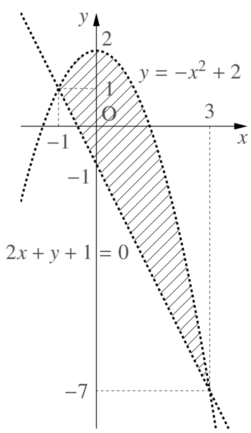
【例題 93】 領域 $\begin{cases} y < -x^2 + 2 & \cdots\cdots ① \\ 2x + y + 1 > 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ を座標平面上に図示しなさい．

【解答】 $2x + y + 1 > 0$ は $y > -2x - 1$ と変形できるので，求める領域は

- $y = -x^2 + 2$ より下部
- $y = -2x - 1$ より上部

であり境界を含まない．

また，連立方程式 $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$ を解いて $(x,\ y) = (3, -7)$，$(-1,\ 1)$ と分かるので，求める領域は右図のようになる．



（境界を含まない）

◀ $y = -x^2 + 2$ を $2x + y + 1 = 0$ に代入して　$2x - x^2 + 2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

から $x = 3, -1$ となり，これを $y = -x^2 + 2$ に代入すればよい．

【練習 94：いろいろな領域】

(1) 領域 $x^2 + 2x + y > 4$ を図示しなさい．

(2) 以下の領域を，それぞれ図示せよ．

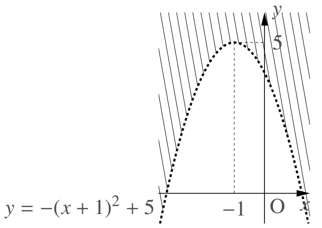
i) $\begin{cases} y < x + 2 \\ y < 2x - 1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y < x^2 + 1 \\ x + y - 3 > 0 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 5 \\ 0 \leqq x - y + 1 \end{cases}$ iv) $x^2 \leqq y \leqq -3x + 4$

【解答】

(1) 不等式 $x^2 + 2x + y > 4$ を変形すると

$$\begin{aligned} y >& -x^2 - 2x + 4 \\ =& -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4 \\ =& -(x + 1)^2 + 5 \end{aligned}$$

となるので，右の斜線部分が求める領域になる．



（境界を含まない）

◀左辺が y だけになるよう移項

◀グラフを書くため，平方完成

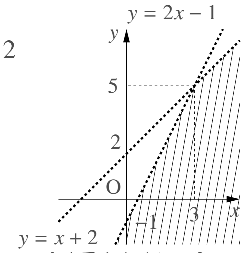
◀頂点が $(-1, 5)$ の放物線

(2) i) 境界は 2 直線 $y = x + 2$, $y = 2x - 1$ であり，2 直線の交点は $(3, 5)$ と求められる．

求める領域は

- 直線 $y = x + 2$ より下部
- 直線 $y = 2x - 1$ より下部

であり境界を含まないので，右図のようになる．



（境界を含まない）

◀$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ を解けばよい．

$y = x + 2$ を $y = 2x - 1$ に代入し

$x + 2 = 2x - 1 \quad \therefore \quad x = 3$

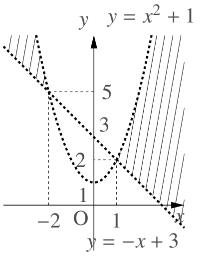
となり，これを $y = x + 2$ に代入すればよい．

ii) 境界は放物線 $y = x^2 + 1$ と直線 $x + y - 3 = 0$ であり，交点は $(-2, 5)$, $(1, 2)$ と求められる．

$x + y - 3 > 0 \Leftrightarrow y > -x + 3$ より，求める領域は

- 放物線 $y = x^2 + 1$ より下部
- 直線 $y = -x + 3$ より上部

であり境界を含まないので，右図のようになる．



（境界を含まない）

◀$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ を解けばよい．

$x + y - 3 = 0$ に $y = x^2 + 1$ を代入し

$$\begin{aligned} & x + (x^2 + 1) - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x + 2)(x - 1) = 0 \end{aligned}$$

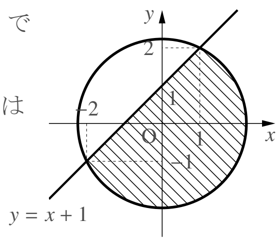
$x = -2, 1$ となるので，それぞれ $y = x^2 + 1$ に代入すればよい．

iii) 境界は円 $x^2 + y^2 = 5$，直線 $x - y + 1 = 0$ であり，交点は $(1, 2)$, $(-2, -1)$ と求められる．

$0 \leqq x - y + 1 \Leftrightarrow y \leqq x + 1$ から，求める領域は

- 円 $x^2 + y^2 = 5$ の内側
- 直線 $y = x + 1$ より下部

であり境界を含むので，右図のようになる．



（境界を含む）

◀$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ を解けばよい．

$x = y - 1$ を $x^2 + y^2 = 5$ に代入し

$$\begin{aligned} & (y - 1)^2 + y^2 = 5 \\ \Leftrightarrow\ & 2y^2 - 2y - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y - 2)(y + 1) = 0 \end{aligned}$$

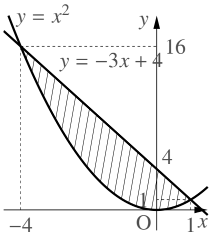
から $y = 2, -1$ となり，これを $y = x - 1$ に代入すればよい．

iv) 求める領域は $x^2 \leqq y$ かつ $y \leqq -3x + 4$ を満たせばよい．つまり

- 放物線 $y = x^2$ より下部
- 直線 $y = -3x + 4$ より上部

であり境界を含む．

境界は放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -3x + 4$ であり，交点は $(1, 1)$, $(-4, 16)$ となる．よって，右図のようになる．



（境界を含む）

◀$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -3x + 4 \end{cases}$ を解けばよい．

y を消去して $x^2 = -3x + 4$，これを解いて $x = -4, 1$.

【練習 95：点が領域に含まれるか調べる】

A(1, 2)，B(−2, 3)，C(−3, −1) とする．

(1) 点 A，B，C のうち，領域 $y > 2x + 3$ に含まれる点をすべて答えよ．

(2) 点 A，B，C のうち，不等式 $x^2 + y^2 < 6$ に含まれる点をすべて答えよ．

【解答】

(1) $y > 2x + 3$ へ A，B，C の座標を代入すると

A は $2 > 2 \cdot 1 + 3$ を満たさない，B は $3 > 2 \cdot (-2) + 3$ を満たす，

C は $-1 > 2 \cdot (-3) + 3$ を満たすので，**含まれるのは点 B，C** である．

(2) $x^2 + y^2 < 6$ へ A，B，C の座標を代入すると

A は $1^2 + 2^2 < 6$ を満たす，B は $(-2)^2 + 3^2 < 6$ を満たさない，

C は $(-3)^2 + (-1)^2 < 6$ を満たさないので，**含まれるのは点 A** である．

2. 領域の利用

A. 条件を満たす (x, y) を xy 平面に図示する

【例題 96】 x, y を実数とするとき，以下の問いに答えよ．

1. 不等式 $(x - y)(x + y - 2) > 0$ を満たす (x, y) を座標平面上に図示せよ．
2. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 2$ ならば $x + y > 0$ であることを，領域を用いて示せ．

【解答】

1. 不等式 $(x - y)(x + y - 2) > 0$ は

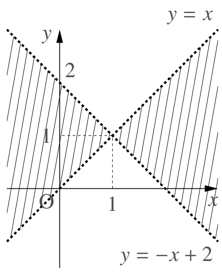
$$\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y - 2 < 0 \end{cases}$$

と同値な条件になる．それぞれ変形すると

$$\begin{cases} y < x \\ y > -x + 2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y > x \\ y < -x + 2 \end{cases}$$

が成立すればよいと分かり，どちらの領域も $y = x$ と $y = -x + 2$ を境界とし，その交点は (1, 1) となる．

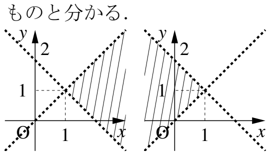
よって求める領域は右上図のように図示できる．



（境界を含まない）

◀ 2 つの式を掛けて正になるための必要十分条件は，どちらも正か，どちらも負になることである．

◀ それぞれ図示すれば，次の 2 つのどちらかを満たす領域が，求めるものと分かる．



2. 円 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ と直線 $x + y = 0$ の共有点を求めると

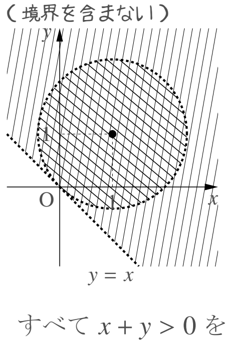
$$(x - 1)^2 + (-x - 1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \ 2x^2 + 2 = 2 \quad \therefore \quad x = 0$$

◀ $y = -x$ を代入した

よって，共有点は (0, 0) のみ[*11]であるから，領域 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 2$ と領域 $x + y > 0$ は右図のようになる．

（境界を含まない）



よって，$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 2$ を満たす (x, y) は，すべて $x + y > 0$ を満たしていることが分かるので，題意は満たされた． ■

【練習 97：領域の利用】

(1) 領域 $(y+2x)(y-2x^2) \leqq 0$ を座標平面上に図示せよ．

(2) $x^2+(y-3)^2 \geqq 16$ ならば $x^2+(y-1)^2 \geqq 4$ であることを，領域を用いて示せ．

【解答】

(1) 不等式 $(y+2x)(y-2x^2) \leqq 0$ は

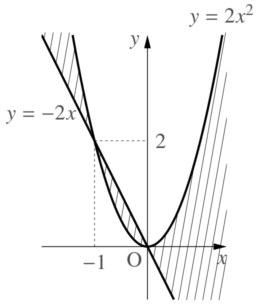
$$\begin{cases} y+2x \geqq 0 \\ y-2x^2 \leqq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y+2x \leqq 0 \\ y-2x^2 \geqq 0 \end{cases}$$

と同値な条件になる．それぞれ変形すると

$$\begin{cases} y \geqq -2x \\ y \leqq 2x^2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leqq -2x \\ y \geqq 2x^2 \end{cases}$$

が成立すればよいと分かる．境界である $y=-2x$ と $y=2x^2$ の交点は $(-1,\ 2),\ (0,\ 0)$ となるから，求める領域は右図のようになる．

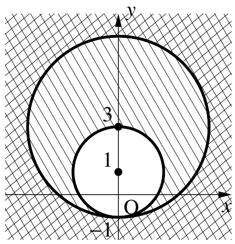
◀2 つの式を掛けて負になるための必要十分条件は，一方が正，他方が負になることである．



（境界を含む）

(2) 連立方程式 $\begin{cases} x^2+(y-3)^2=16 \\ x^2+(y-1)^2=4 \end{cases}$ を解くと $(x,\ y)=(0,-1)$ であり，この 2 円は $(0,-1)$ で接している．これをもとにそれぞれの領域を描くと，右欄外の図のようになる．図より，$x^2+(y-3)^2 \geqq 16$ を満たす $(x,\ y)$ は全て $x^2+(y-1)^2 \geqq 4$ を満たす領域に含まれている．■

◀



【発展 98：領域の利用】

$a,\ b,\ x,\ y$ を実数とするとき，以下の問いに答えよ．

① 領域 $x^2-y^2+2x-1>0$ を座標平面上に図示しなさい．

② $(x-1)^2+y^2 \leqq 5$ ならば $x^2+(y+2)^2 \leqq 20$ であることを示せ．

③ 領域 $y \leqq -x^2+ax+b$ が点 $(1,\ 0)$ を含む $a,\ b$ の範囲を ab 平面に図示せよ．

【発展 99：絶対値を含む不等式の領域】

① 領域 $|x|+|y| \leqq 1$ を図示しなさい．

② $0<k$ について，2 つの領域 $D_1 : |x|+|y| \leqq k$，$D_2 : x^2+y^2 \leqq 4$ を考える．$D_1 \subset D_2$ となる k の条件，$D_1 \supset D_2$ となる k の条件をそれぞれ答えよ．

B. 最大・最小と領域

$x^2+y^2 \leqq 4$ を満たす $(x,\ y)$ のうち，$2x+y$ がとる最大値・最小値を考えてみよう．この問題は，$2x+y=k$ とおいて，次のようにして領域の問題と置き換えられる．

$x^2+y^2 \leqq 4$ を満たす $(x,\ y)$ のうち，$2x+y=k$ がとる最大値・最小値を求める

$\leftrightarrow$ $x^2+y^2 \leqq 4$ と $2x+y=k$ を同時に満たす $(x,\ y)$ が存在するような，k の最大値・最小値を求める

$\leftrightarrow$ 座標平面において，領域 $x^2+y^2 \leqq 4$ と直線 $2x+y=k$ が共有点を持つような，k の最大値・最小値を求める

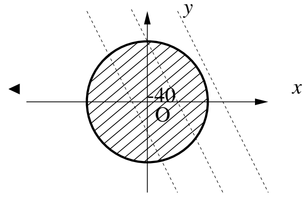
こうして，式 $2x+y$ の最大・最小の問題は，座標平面上の問題に置き換えられる．

【 暗記 100：最大・最小と領域〜その１〜】

$x^2+y^2 \leqq 4$ を満たす $(x,\ y)$ のうち，$2x+y$ がとる最大値・最小値を求め，それぞれにおける $x,\ y$ の値も求めよ．

【解答】 $2x+y=k$ とおく．座標平面上で，領域 $x^2+y^2 \leqq 4$ が直線 $k=2x+y$ と共有点を持つような，k の最大値・最小値を求めればよい．

右図から，領域 $x^2+y^2 \leqq 4$ と直線 $k=2x+y$ が共有点を持つには，直線 $k=2x+y \Leftrightarrow 2x+y-k=0$ と $(0,\ 0)$ の距離が，2 以下であればよい．



直線 $k=2x+y$

◀ 直線 $k=2x+y \Leftrightarrow y=-2x+k$ は，傾き -2，切片 k の直線である．

この条件を『点と直線の距離』(p.95) を用いて解けば

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} \leqq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |k| \leqq 2\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad -2\sqrt{5} \leqq k \leqq 2\sqrt{5}$$

であるから k の最大値は $2\sqrt{5}$，最小値は $-2\sqrt{5}$ と分かる．

◀ または，「円 $x^2+y^2=4$ と直線 $2x+y=k$ が共有点を持てばよい」と考えて，$y=k-2x$ から $x^2+(k-2x)^2=4$ の判別式 $D \geqq 0$ を解いてもよい．

最大値をとる $(x,\ y)$ の値は，$x^2+y^2=4$ と $2x+y=2\sqrt{5}$ を連立して解いて $(x,\ y)=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ と分かる．

同様に，最小値をとる $(x,\ y)$ の値は，$x^2+y^2=4$ と $2x+y=2\sqrt{5}$ を連立して解いて $(x,\ y)=\left(-\dfrac{4}{\sqrt{5}},-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ と分かる．よって

$(x,\ y)=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき k は最大値 $2\sqrt{5}$

$(x,\ y)=\left(-\dfrac{4}{\sqrt{5}},-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき k は最小値 $-2\sqrt{5}$ をとる．

【 暗記 101：最大・最小と領域〜その２〜】

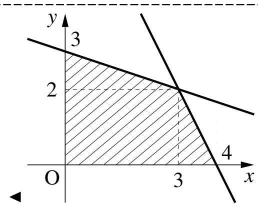
$0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 2x+y \leqq 8,\ x+3y \leqq 9$ を満たす領域を D とする．

1. 領域 D を図示しなさい．
2. D を満たす $(x,\ y)$ について，$x+y$ の最大値・最小値を求め，それぞれにおける $x,\ y$ の値も求めよ．

【解答】

1. $2x+y \leqq 8 \Leftrightarrow y \leqq -2x+8$,　　$x+3y \leqq 9 \Leftrightarrow y \leqq -\dfrac{1}{3}x+3$

   より，領域 D は $0 \leqq x$，$0 \leqq y$，$y \leqq -2x+8$，$y \leqq -\dfrac{1}{3}x+3$ の共通部分になる．よって，領域 D は右のようになる．



◀（境界を含む）

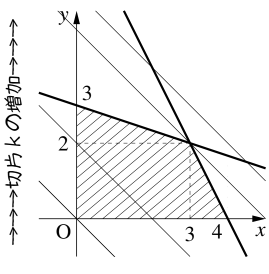
2. 直線 $x+y=k$ が領域 D と共有点をもつような，k の最大値・最小値を求めればよい．直線 $x+y=k \Leftrightarrow y=-x+k$ は切片 k なので，k の増加によって y 軸正の方向へ動く．

   また，直線 $x+y=k$ の傾き -1 は，$y=-2x+8$ の傾きより大きく，$y=-\dfrac{1}{3}x+3$ の傾きより小さい．

   以上から，右欄外の図のように，D と直線 $x+y=k$ が共有点を持つのは，$(3,\ 2)$ を通るときから原点を通るまでである．よって

   $(x,\ y)=(3,\ 2)$ のとき k は最大値 5

   $(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき k は最小値 0 をとる．



【練習 102：最大・最小と領域～その３～】

x, y を実数とするとき，以下の最大値・最小値を求め，それぞれにおける x, y の値も求めなさい.

(1) $x^2+y^2 \leqq 5$ のとき，$x-2y$ の取り得る最大値・最小値

(2) $0 \leqq x$, $y \leqq -x+3$, $y \geqq 2x-3$ を満たす (x, y) のうち，$x+2y$ がとる値の最大値・最小値と，$3x-y$ がとる値の最大値・最小値

【解答】

(1) 座標平面上において，領域 $x^2+y^2 \leqq 5$ と直線 $x-2y=k$ が共有点をもつような k の最大値・最小値を求めればよい.

領域 $x^2+y^2 \leqq 5$ と直線 $x-2y=k$ が共有点をもつには, 直線 $x-2y-k=0$ と $(0, 0)$ の距離が $\sqrt{5}$ 以下であればよいので

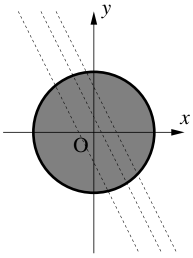
$$\frac{|0-0-k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \leqq \sqrt{5} \iff \frac{|k|}{\sqrt{5}} \leqq \sqrt{5} \iff |k| \leqq 5$$

よって，k の最大値は 5，最小値は -5 である.

$k=5$ のとき，領域と直線の共有点は，円 $x^2+y^2=5$ と直線 $x-2y=5$ の共有点になるので，これを連立して解いて $(x, y)=(1, -2)$，$k=-5$ のときも同様にして $(x, y)=(-1, 2)$ である．以上より

$(x, y)=(1, -2)$ のとき，$k=x-2y$ は最大値 5

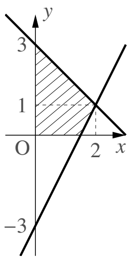
$(x, y)=(-1, 2)$ のとき，$k=x-2y$ は最小値 -5 をとる.



直線 $x-2y=k$

(2) 領域 $0 \leqq x$, $y \leqq -x+3$, $y \geqq 2x-3$ を図示すると右下のようになる.

この領域が直線 $x+2y=k$ と共有点をもつ k の最大値・最小値と，直線 $3x-y=l$ と共有点をもつ l の最大値・最小値を求めればよい.



（境界を含む）

直線 $x+2y=k$ は $y=-\frac{x}{2}+\frac{k}{2}$ であるから，切片 $\frac{k}{2}$ は k の増加によって y 軸正の方向へ動く．また，傾き $-\frac{1}{2}$ は，$y=2x-3$ の傾きより小さく，$y=-3x+7$ の傾きより大きい．よって，右欄外の図のように

$(x, y)=(0, 3)$ のとき，$k=x+2y$ は最大値 6

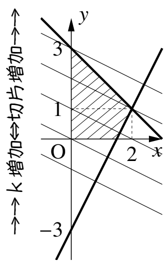
$(x, y)=(0, 0)$ のとき，$k=x+2y$ は最小値 0 をとる.

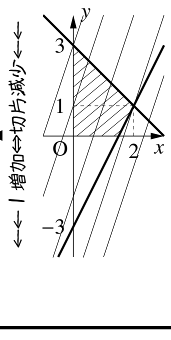
次に，直線 $3x-y=l$ は $y=3x-l$ であるから，切片 $-l$ は l の増加によって y 軸負の方向へ動く．また，傾き 3 は，$y=2x-3$, $y=-3x+7$ の傾きより大きい．よって，右欄外の図のように

$(x, y)=(2, 1)$ のとき，$l=3x-y$ は最大値 5

$(x, y)=(0, 3)$ のとき，$l=3x-y$ は最小値 -3 をとる.

◀ 境界の直線の交点は求めておこう





【発展 103：最大・最小と領域～その４～】

① $0 \leqq y \leqq -x^2+4$ のとき，値 $x+2y$ のとりうる範囲を求めよ.

② $y \geqq 3x+3$ または $y \geqq -2x+2$ のとき，x^2+y^2 がとりうる値の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ.

3.8　第３章の補足

A.　三角形の面積の証明（p.97）

【発展 104：三角形の面積】

原点を O とし，A(a_1, a_2)，B(b_1, b_2) とする．ただし，$a_1 \fallingdotseq b_1$ とする．

① 原点から直線 AB へ引いた垂線の長さ h を求めよ．

② 線分 AB の長さを求め，△OAB の面積を求めよ．

【解答】

① 原点 O と直線 AB の間の距離が h と一致する．直線 AB は，A を通り傾き $\dfrac{b_2-a_2}{b_1-a_1}$ の直線であるので，その方程式は

$$y-a_2=\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(x-a_1)$$
$$\Leftrightarrow\ (b_1-a_1)y-(b_1-a_1)a_2=(b_2-a_2)x-(b_2-a_2)a_1$$
$$\Leftrightarrow\ -(b_2-a_2)x+(b_1-a_1)y-a_2b_1+a_1b_2=0$$

と表される．よって，求める垂線の長さ h は次のようになる．

$$h=\frac{|-(b_2-a_2)\times 0+(b_1-a_1)\times 0-a_2b_1+a_1b_2|}{\sqrt{\{-(b_2-a_2)\}^2+(b_1-a_1)^2}}$$

◀『点と直線の距離』(p.95)

$$=\boldsymbol{\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}}$$

② $\mathbf{AB}=\boldsymbol{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$，$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot h$ より

◀『2 点間の距離』(p.74)

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\cdot\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|}$$

この公式は，数学 B で学ぶ「ベクトル」を用いても証明できる．

B.　「円周上の点から引いた接線の方程式」の証明（p.130）

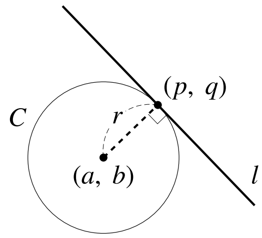
円周上の点から引いた接線の方程式

円 $C : (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の周上の点 $(p,\ q)$ から引いた接線 l の方程式は

$$(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$$

となる．特に，円 C の中心が原点にある場合は次のようになる．

$$px+qy=r^2$$
←a＝b＝0を接線 l の式に代入した



（証明）$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の中心を $\mathrm{O}(a,\ b)$ とすると，接線 l は線分 OP と直交する直線し，線分 OP の傾きは $\dfrac{q-b}{p-a}$ であるので，

$$\frac{q-b}{p-a}\times（直線\ l\ の傾き）=-1 \iff （直線\ l\ の傾き）=-\frac{p-a}{q-b}$$

となる．よって，l は $(p,\ q)$ を通り傾き $-\dfrac{p-a}{q-b}$ の直線と分かるので

$$\begin{aligned} y-q=-\frac{p-a}{q-b}(x-p) &\iff (q-b)(y-q)=-(p-a)(x-p)\\ &\iff (q-b)(y-b+b-q)=-(p-a)(x-a+a-p)\\ &\iff (q-b)(y-b)+(q-b)(b-q)=-(p-a)(x-a)-(p-a)(a-p)\\ &\iff (p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=(p-a)^2+(q-b)^2 \end{aligned}$$

となる．ここで，P は円 C の周上にあるので，$(p-a)^2+(q-b)^2=r^2$ を満たす．つまり，l の方程式は $(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$ となる．

…この方程式は，数学 B で学ぶベクトルを用いて導くこともできる．

【練習：求める点を $(x,\ y)$ とおく】(p.80)

(1) P は y 軸上にあるので，$\mathrm{P}(0,\ y)$ とおくことができる．よって

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}=\mathrm{BP} &\Leftrightarrow \sqrt{\{0-(-1)\}^2+(y-4)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(y-2)^2}\\ &\Leftrightarrow 1+y^2-8y+16=1+y^2-4y+4\\ &\Leftrightarrow -4y=-12\end{aligned}$$

よって，$y=3$ であるから，$\mathbf{P(0,\ 3)}$ である．

(2) $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおく．このとき，$\mathrm{AQ}=\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}$，
$\mathrm{BQ}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ} &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\\ &\Leftrightarrow 2x+1-8y+16=-2x+1-4y+4\\ &\Leftrightarrow 4x-4y+12=0 \quad \therefore x=y-3 \cdots\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

◀ 根号を外し，$x^2,\ y^2$ を消去した．

$$\begin{aligned}\mathrm{AQ}:\mathrm{AB}=1:\sqrt{2} &\Leftrightarrow \cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}=2\cancel{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-4)^2=4\end{aligned}$$

これに①を代入して

$$\begin{aligned}(y-3+1)^2+(y-4)^2=4 &\Leftrightarrow (y-2)^2+(y-4)^2=4\\ &\Leftrightarrow y^2-4y+4+y^2-8y+16=4\\ &\Leftrightarrow 2y^2-12y+16=0\end{aligned}$$

これを解いて $y=2,\ 4$．よって①より $\mathbf{Q(-1,\ 2),\ (1,\ 4)}$

(3) $\mathrm{R}(x,\ y)$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{AR}=\mathrm{BR} &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\\ &\Leftrightarrow x=y-3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AR}=\mathrm{AB} &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}=2\sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-4)^2=8\end{aligned}$$

これに $x=y-3$ を代入して

$$(y-3+1)^2+(y-4)^2=8 \Leftrightarrow 2y^2-12y+12=0$$

これを解いて，$y=3\pm\sqrt{3}$．よって $x=y-3$ より $\mathbf{R\left(\pm\sqrt{3},\ 3\pm\sqrt{3}\right)}$

【発展：円の方程式〜その２〜】(p.104)

① 中心の座標を $(a, -2a+1)$，半径を r とおけば求める円の方程式は $(x-a)^2 + \{y-(-2a+1)\}^2 = r^2$ となる．

◀ 中心の x 座標を a とおけばよい．

$(4, 2)$ を通ることから $(4-a)^2 + \{2-(-2a+1)\}^2 = r^2$

$(-6, -2)$ を通ることから $(-6-a)^2 + \{-2-(-2a+1)\}^2 = r^2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 5a^2 - 4a + 17 = r^2 & \cdots\cdots ① \\ 5a^2 + 45 = r^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ② より $-4a - 28 = 0$ なので $a = -7$ である．これを②に代入すれば $r^2 = 290$ なので，求める円の方程式は $\boldsymbol{(x+7)^2 + (y-15)^2 = 290}$.

② x 軸と y 軸に接するので，中心は，直線 $y = x$ 上，$y = -x$ 上のいずれかにある．

直線 $y = x$ 上に中心があるとき，2 直線 $\begin{cases} y = x \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}$ の交点が円の中心になる．これを解いて中心は $(2, 2)$ とわかる．

◀ $y = x$ を $3x - y - 4 = 0$ に代入して $2x - 4 = 0$ から $x = 2$

直線 $y = -x$ 上に中心があるとき，2 直線 $\begin{cases} y = -x \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}$ の交点が円の中心になる．これを解いて中心は $(1, -1)$ とわかる．

◀ $y = -x$ を $3x - y - 4 = 0$ に代入して $4x - 4 = 0$ から $x = 1$

半径は x 座標に等しいので，求める円の方程式は

$\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4,\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1}$.

◀ 円は x 軸，y 軸に接するため．精確には，x 座標または y 座標の絶対値に等しい．

【練習：円と直線の共有点の個数】(p.107)

(1) $x^2 + y^2 = k$ の中心 $(0, 0)$ と直線 $3x - 4y + 10 = 0$ の距離は

$$\frac{|0 - 0 + 10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

◀ 『点と直線の距離』(p.95)

である．つまり，$\sqrt{k} = 2 \Leftrightarrow k = 4$ なら円と直線は接している．

1) $k = 1 < 4$ なので，共有点は **0 個**　　2) 共有点は **1 個**

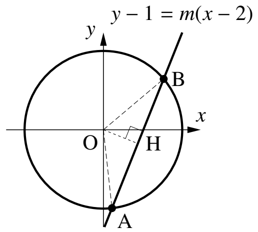
3) $k = 9 > 4$ なので，共有点は **2 個**

(2) 円の中心 $(2, 1)$ と直線 $2x + 3y - 4 = 0$ の距離は

$$\frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

である．よって，$\boldsymbol{r \geqq \dfrac{3}{\sqrt{13}}}$ であればよい．

【練習：円が切り取る線分の長さ〜その２〜】(p.108)



円 C の中心を O とし，直線 $y - 1 = m(x-2)$ へ下ろした垂線の足を H とおく．AB = 6 のとき，AH = 3, OA = $\sqrt{10}$ であるから，△AOH について三平方の定理より，OH = $\sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2} = 1$.

◀

一方，OH は O と直線 $y - 1 = m(x-2) \Leftrightarrow mx - y - 2m + 1 = 0$ の距離に等しく，『点と直線の距離』(p.95) より

◀ 『点と直線の距離』(p.95) を用いるため，一般形に直した

$$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \mathrm{OH} = 1 \Leftrightarrow |-2m+1| = \sqrt{m^2+1}$$

◀ 両辺に $\sqrt{m^2+1}$ を掛けた

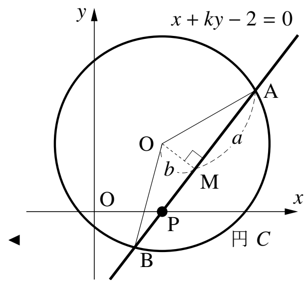
$$\Leftrightarrow (-2m+1)^2 = m^2 + 1$$

◀ 両辺を 2 乗した，絶対値の性質より $|-2m+1|^2 = (-2m+1)^2$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 = m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 4m = 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{m = 0,\ \frac{4}{3}}$$

【発展：円が切り取る線分の長さ〜その３〜】(p.108)



① l の方程式を k について降べきの順に整理すれば

$$yk+(x-2)=0$$

となる．つまり，任意の k で等式が成り立つのは $y=0,\ x-2=0$ のときであるので，直線 l が通る定点 P は **(2, 0)** である．

② $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OM}=\dfrac{1}{2}\cdot(2a)\cdot b=\boldsymbol{ab}$

③ $\triangle\mathrm{OAM}$ は直角三角形なので $a^2+b^2=10$ ……… ①

◀ 三平方の定理より $\mathrm{OM}^2+\mathrm{MA}^2=\mathrm{MA}^2$

一方，(2) より $\triangle\mathrm{OAB}=ab=3$ であり，$a\neq 0$ より $b=\dfrac{3}{a}$ である．これを① に代入すれば

$$a^2+\left(\frac{3}{a}\right)^2=10 \iff a^4+9=10a^2$$
$$\iff a^4-10a^2+9=0$$
$$\iff (a^2-1)(a^2-9)=0$$

$a>0$ であるので，$a=1,3$．$ab=3$ より，$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$．ここで，$\mathrm{OM}<\mathrm{OP}=2$ であるので，$b<2$ が成り立つから，**AM = 3, OM = 1** である．

◀ OM = 3 として計算を進めると

$$\frac{|2+2k-2|}{\sqrt{1^2+k^2}}=3\ (=\mathrm{OM})$$
$$\iff |2k|=3\sqrt{1+k^2}$$
$$\iff 4k^2=9+9k^2$$

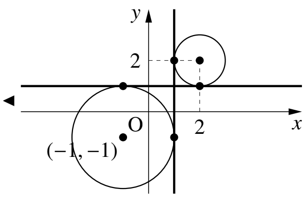
より $k^2=-\dfrac{9}{5}$ となって不適．

また，OM は O(2, 2) と直線 $l:x+ky-2=0$ の距離に一致するので

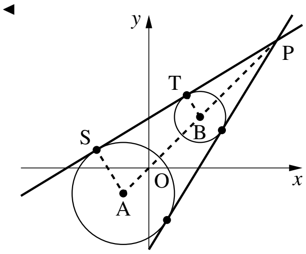
$$\frac{|2+2k-2|}{\sqrt{1^2+k^2}}=1 \iff |2k|=\sqrt{1+k^2}$$
$$\iff 4k^2=1+k^2$$

よって，$k^2=\dfrac{1}{3}$ であるので，$\boldsymbol{k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$．

【発展：2 円の共通接線】(p.113)



① 問題を座標平面上に図示すれば右欄外の図のようになる．
2 本の l は軸に平行な直線と分かり，その方程式は $\boldsymbol{x=1,\ y=1}$ である．



② 右欄外の図のように，2 円の中心を A，B，2 接点を S，T とする．このとき，$\triangle\mathrm{PSA}\backsim\triangle\mathrm{PTB}$ であり，その相似比は SA : TB = 2 : 1．
よって，PA : PB = 2 : 1 であるから，B は線分の AP の中点となる．P(a, b) とおけば

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{-1+b}{2}\right)=(2,\ 2) \iff (a,\ b)=(5,\ 5)$$

よって，**P(5, 5)** である．

③ L の傾きを m とおく．L は P を通るので

$$y-5=m(x-5) \iff mx-y-5m+5=0$$

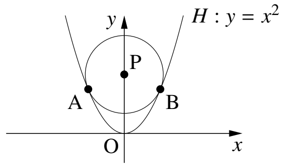
が L の方程式となる．この直線と B の距離が，円 C_2 の半径 1 に等しくなればよいので

$$\frac{|m\cdot 2-2-5m+5|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$
$$\iff |-3m+3|=\sqrt{m^2+1}$$
$$\iff (3m-3)^2=m^2+1$$

◀ 両辺とも正なので，両辺 2 乗

$$\iff 4m^2-9m+4=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{m=\frac{9\pm\sqrt{17}}{8}}$$

【発展：円と放物線】(p.113)



① 右欄外の図から，放物線 H と円 C の共有点の y 座標は 1 つに定まる．円 C の半径を r とおくと，円 C の方程式は $x^2 + (y-2)^2 = r^2$ となる．つまり，A，B の座標は連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 & \cdots\cdots ① \\ x^2 + (y-2)^2 = r^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ の解であり，これが y の解をただ 1 つしかもたなければよい．x を消去すれば

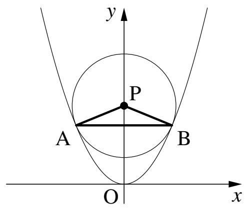
◀ ①式の $x^2 = y$ を，②に代入した．

$$y + (y-2)^2 = r^2 \iff y^2 - 3y + (4 - r^2) = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

この方程式の判別式 D が 0 になればよいので

◀ y の解はただ 1 つに定まり，重解となる

$$D = (-3)^2 - 4(4 - r^2) = 0 \iff -7 + 4r^2 = 0 \quad r > 0 \text{ より } \boldsymbol{r = \frac{\sqrt{7}}{2}}.$$



② ③に $r = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ を代入し，y について解けば $y = \dfrac{3}{2}$．A, B は $y = x^2$ 上の点なので，$\dfrac{3}{2} = x^2$ を解いて，$\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

$\triangle$APB は，底辺 AB $= \sqrt{6}$，高さは $\dfrac{1}{2}$ となるので，$\triangle\mathrm{APB} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{4}}$

【発展：2 円の交点と，それを通る直線・円】(p.113)

① A, B の座標 (x, y) は，連立方程式 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \cdots\cdots ① \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ の解に一致する．② − ① により

◀ 2 次の項を消すため，② − ① をする

$$\begin{array}{rrrrl} & x^2 - 2x + 1 & + y^2 - 4y + 4 & = 3 & \\ -) & x^2 & + y^2 & = 2 & \\ \hline & -2x + 1 & -4y + 4 & = 1 & \iff x + 2y - 2 = 0 \cdots\cdots ③ \end{array}$$

A, B の座標 (x, y) は必ず③を満たすので，この $\boldsymbol{x + 2y - 2 = 0}$ **が直線 AB の方程式**になる．

② ③より $x = 2 - 2y$ なので①に代入して

$$(2 - 2y)^2 + y^2 = 2 \iff 5y^2 - 8y + 2 = 0$$

これを解いて $y = \dfrac{4 \pm \sqrt{6}}{5}$．$x = 2 - 2y$ に代入して

◀ 分けて計算すれば，たとえば，

$y = \dfrac{4 + \sqrt{6}}{5}$ のとき

$$x = 2 - \frac{8 + 2\sqrt{6}}{5} = \frac{10 - (8 + 2\sqrt{6})}{5} = \frac{2 - 2\sqrt{6}}{5}$$

$$x = 2 - \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{5} = \frac{2 \mp 2\sqrt{6}}{5} \quad \text{なので}$$

$$\boldsymbol{\mathrm{A}\left(\frac{2 - 2\sqrt{6}}{5}, \frac{4 + \sqrt{6}}{5}\right), \mathrm{B}\left(\frac{2 + 2\sqrt{6}}{5}, \frac{4 - \sqrt{6}}{5}\right)}.$$

③ k を実数とすると

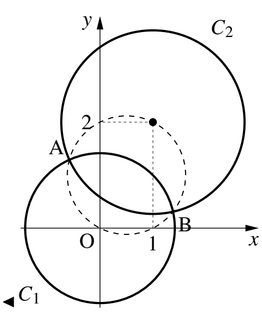
$$F(x, y) = k(x^2 + y^2 - 2) + (x-1)^2 + (y-2)^2 - 3$$

とおけば，$F(x, y) = 0$ のグラフは円 C_1, C_2 の交点 A, B を共に通る．これが原点を通ればよいので，

$$F(0, 0) = 0 \iff F(0, 0) = k(-2) + (-1)^2 + (-2)^2 - 3 = 0$$
$$\iff -2k + 2 = 0 \qquad \therefore\ k = 1$$

よって，求める円の方程式は

$$1 \cdot (x^2 + y^2 - 2) + (x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0$$
$$\iff 2x^2 - 2x + 2y^2 - 4y = 0$$
$$\iff \boldsymbol{x^2 - x + y^2 - 2y = 0}$$



【発展：軌跡〜その３〜】(p.116)

$P(x,\ y)$ とおく．P と直線 l の距離は $|2-y|$ であり，FP の長さと等しいので

$$|2-y| = \sqrt{x^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow (2-y)^2 = x^2+(y+3)^2$$
$$\Leftrightarrow 4-4y = x^2+6y+9$$

これを整理して，**放物線 $y = -\dfrac{1}{10}x^2 - \dfrac{1}{2}$** が求める軌跡になる．

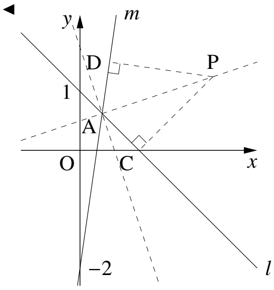
◀ 厳密には $2-y$ になる．というのも図を描けば，直線 l との距離が FP と等しいので，P の y 座標は 2 より小さいと分かる．

◀ このような軌跡を考えて得られた放物線について直線 l は準線，点 F は焦点と言われる．

【発展：軌跡〜その４〜】(p.116)

直線 $l,\ m$ から等距離にある点 P をとる．P が $l,\ m$ の交点 A に一致しないとき，右欄外の図について $\triangle PAC \equiv \triangle PAD$ であるから，常に $\angle PAC = \angle PAD$ が成り立つ．よって，K は**直線 $l,\ m$ のなす角を二等分する直線**になる．

◀



$P(x,\ y)$ とする．P と l の距離が P と m の距離と等しく，$l,\ m$ はそれぞれ $x+y-1=0,\ 7x-y-2=0$ と変形できるから

$$\frac{|x+y-1|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{|7x-y-2|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x-y-2|}{5\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow 5|x+y-1| = |7x-y-2|$$
$$\Leftrightarrow 5(x+y-1) = 7x-y-2 \text{ または } -5(x+y-1) = 7x-y-2$$

つまり，K の軌跡は**直線 $2x-6y+3=0$，直線 $12x+4y-7=0$ の 2 本**になる．

◀ 両辺とも絶対値であればこのようにするとよい．2 乗してしまうと計算が大変になる．

◀ 実際，$l,\ m$ の角の二等分線は 2 本存在する．

【練習：動点をもつ軌跡〜その２〜】(p.118)

$P(s,\ t)$ とおくと，$s^2+t^2=1$ ……… ① を満たしている．また，$\triangle ABP$ の重心を $(x,\ y)$ とすると

$$\begin{cases} x = \dfrac{2+1+s}{3} \\ y = \dfrac{1+(-4)+t}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3+s}{3} \\ y = \dfrac{-3+t}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s = 3x-3 \\ t = 3y+3 \end{cases}$$

◀『三角形の重心の座標』(p.78)

この 2 式を①に代入すれば

$$(3x-3)^2+(3y+3)^2 = 1 \Leftrightarrow \{3(x-1)\}^2+\{3(y+1)\}^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow 9(x-1)^2+9(y+1)^2 = 1$$

よって，求める軌跡は**円 $(x-1)^2+(y+1)^2 = \dfrac{1}{9}$** になる．

【練習：頂点の描く軌跡】(p.118)

(1) $y = x^2+(2a+4)x-3a+4$

$$= \{x+(a+2)\}^2-(a+2)^2-3a+4$$
$$= \{x+(a+2)\}^2-a^2-7a$$

であるから，頂点は **$A(-a-2,\ -a^2-7a)$** となる．

(2) $A(x,\ y)$ とおけば $\begin{cases} x = -a-2 & \cdots\cdots ① \\ y = -a^2-7a & \cdots\cdots ② \end{cases}$ となる．①より $a = -x-2$ であるから②に代入して

$$y = -(-x-2)^2-7(-x-2) = -x^2+3x+10$$

であるから，A の軌跡は**放物線 $y = -x^2+3x+10$** である．

【発展：動点をもつ軌跡〜その３〜】(p.118)

$A(s,\ s-3)$ とおく．線分 AB が y 軸に平行なので B の x 座標も s になり，B は $y=x^2$ 上にあるので，$B(s,\ s^2)$ と分かる．

$P(x,\ y)$ とおく．P は線分 AB を $2:1$ に内分するので

$$\begin{cases} x=\dfrac{s+2s}{2+1} \\ y=\dfrac{s-3+2s^2}{2+1} \end{cases} \iff \begin{cases} x=s & \cdots\cdots\cdots ① \\ y=\dfrac{2s^2+s-3}{3} & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入して，P の軌跡は**放物線 $\boldsymbol{y=\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x-1}$** と分かる．

◀ $B(s,\ s^2)$ とおいて，A の座標を求めてもよい

◀ 実は，計算するまでもなく P の x 座標は s になることが，図を描けば分かる．

【発展：2 交点の中点の軌跡〜その４〜】(p.121)

A，B の x 座標をそれぞれ α,β とすると，これは

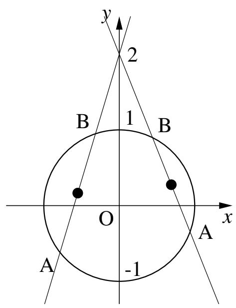
$$x^2+(kx+2)^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad (k^2+1)x^2+4kx+3=0$$

の 2 解である．これが異なる 2 実数解をもつので

$$\frac{D}{4}>0 \Leftrightarrow (2k)^2-(k^2+1)\cdot 3>0$$

$$\Leftrightarrow k^2-3>0 \qquad \therefore\quad k<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

◀ 直線 l は，定点 $(0,\ 2)$ を通る．



一方，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{4k}{k^2+1},\quad \alpha\beta=\frac{3}{k^2+1}$$

となる．また，A も B も直線 l 上にあるので，$A(\alpha,\ k\alpha+2)$，$B(\beta,\ k\beta+2)$ となる．

よって，$M(x,\ y)$ とおくと

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{2k}{k^2+1} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$y=\frac{k\alpha+2+k\beta+2}{2}=\frac{k(\alpha+\beta)+4}{2}=\frac{-\dfrac{4k^2}{k^2+1}+4}{2}$$

$$=\frac{-4k^2+4(k^2+1)}{2(k^2+1)}=\frac{2}{k^2+1} \qquad \cdots\cdots ③$$

◀ 円 C の方程式を用いて，A，B の y 座標を求めることはできない．

◀ 分母・分子に k^2+1 を掛けて整頓した

となる．②，③から $\dfrac{2}{k^2+1}$ を消去して

$$x=-k\cdot\frac{2}{k^2+1}=-ky$$

◀ ②，③も，k について解くと 2 つの解ができる．そこで，いったん k の 2 次式を消す．

③より $y\neq 0$ であるので $k=-\dfrac{x}{y}$．これを③に代入して

$$y=\frac{2}{\left(-\dfrac{x}{y}\right)^2+1}=\frac{2y^2}{x^2+y^2}$$

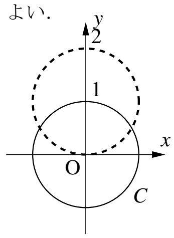
両辺を y で割って整理すれば

$$\Leftrightarrow\ 1=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+y^2=2y$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+(y-1)^2=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

◀ $y\neq 0$ なので，両辺 y で割ってもよい．



◀

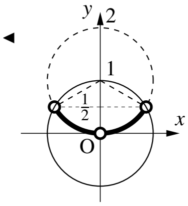
これが，M の軌跡を表す．

ただし，①において，$k^2>3$ であったので

$$4<k^2+1 \quad\Leftrightarrow\quad 0<\frac{1}{k^2+1}<\frac{1}{4}$$

◀ すべての辺が正なので，分母と分子を入れ替えると大小関係が逆転する．

となり，③より $y = 2 \cdot \dfrac{1}{k^2+1}$ であるので，$0 < y < \dfrac{1}{2}$．以上をまとめて，M の軌跡は**円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ のうち，$0 < y < \dfrac{1}{2}$ の部分**である．



④の行以降については

- M は必ず円 C の内部にあるので，円④のうち円 C の内部のみ有効
- 直線 l は「$(0, 2)$ を通り，y 軸に平行でない直線の集まり」であるので，M が原点になることはない

という条件をまとめて，$0 < y < \dfrac{1}{2}$ のみが有効という結論を導いてもよい．

【発展：対称式で表された座標の軌跡】(p.121)

M$(x,\ y)$ とする．つまり，$x = a + b,\ y = ab$ である．与えられた式を変形すれば

◂ M の軌跡の方程式は $x,\ y$ が満たす等式に一致する．

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 = 10 &\Leftrightarrow (a+b)^2 - 2ab = 10\\
&\Leftrightarrow x^2 - 2y = 10
\end{aligned}
$$

となる．y について解き，M の軌跡 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 5$ を得る．

ここで $x = a + b,\ y = ab$ から，t についての 2 次方程式

$$t^2 - xt + y = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

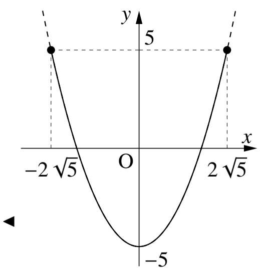
の 2 解が $a,\ b$ となる．$a,\ b$ が実数なので，①の判別式は $D = x^2 - 4y \geqq 0$ でないといけない．まとめると M$(x,\ y)$ は $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - 5 & \cdots\cdots ②\\ x^2 - 4y \geqq 0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$ を同時に満たす $x,\ y$ の値である．②を③に代入して

◂『解と係数の関係 (p.47)』を逆に用いた．

$$x^2 - 4\left(\frac{1}{2}x^2 - 5\right) \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 20 \geqq 0$$

から $-2\sqrt{5} \leqq x \leqq 2\sqrt{5}$ となる．

よって，M の軌跡は**放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 5 \ \left(-2\sqrt{5} \leqq x \leqq 2\sqrt{5}\right)$** である．



【発展：2 直線の交点の軌跡】(p.121)

連立方程式 $\begin{cases} kx+y+1=0 & \cdots\cdots ① \\ x-ky-1=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ を同時に満たす $(x,\ y)$ が P である．

◀ ① と ② から k を消去して，x と y の関係式を求めればよい．

②を k について解けば

$$ky=x-1 \quad \Leftrightarrow \quad k=\frac{x-1}{y}\ (y \neq 0) \qquad \cdots\cdots ③$$

i) $y \neq 0$ のとき，③を①に代入して

$$\frac{x-1}{y}\cdot x+y+1=0$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-x+y^2+y=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \quad （ただし，y \neq 0）$$

ii) $y=0$ のとき，P が l_2 上にあるので

$$x-k\cdot 0-1=0 \quad \Leftrightarrow x=1$$

でないといけない．逆に，点 $(1,\ 0)$ を l_1 の式に代入して $k=-1$ を得るので，この点を P は通る．

◀ つまり，$k=-1$ のときに，l_1 と l_2 が $(1,\ 0)$ で交わる．

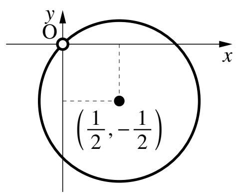
以上より，P の軌跡は以下をまとめたものと分かる．

- $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$（ただし，$y \neq 0$）
- 点 $(1,\ 0)$

これを座標平面上に書き出すと右欄外の図のようになり，

円 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ のうち，(0, 0) を除いた部分が P の軌跡と分かる．

◀

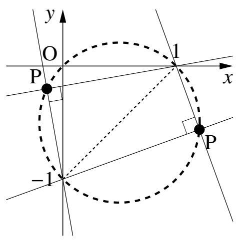


【別解：図形的に解く】直線 $l_1 : kx+(y+1)=0$ は定点 $A(0,-1)$ をもち，直線 $l_2 : -ky+(x-1)=0$ は定点 $B(1,\ 0)$ をもつ．P は $AP \perp PB$ を満たすので，P は線分 AB を直径とする円周上の点になる．

◀ p.89 を参照のこと

ただし，l_1 は y 軸に平行な直線 $x=0$ にはならず，l_2 は x 軸に平行な直線 $y=0$ になることはない．つまり，$x=0,\ y=0$ の交点である $(0,\ 0)$ に P が一致することはない．よって，AB を直径とする **円 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ のうち，(0, 0) を除いた部分が P の軌跡**と分かる．

◀



【発展：領域の利用】(p.126)

① $x^2-y^2+2y-1>0$ の左辺を因数分解すると

$$\Leftrightarrow x^2-(y^2-2y+1)>0 \Leftrightarrow\ x^2-(y-1)^2>0$$

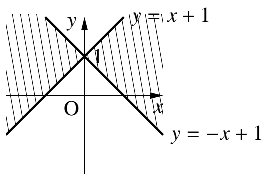
$$\Leftrightarrow\ (x+y-1)(x-y+1)>0$$

となるから，求める領域は

$$\begin{cases} x+y-1>0 \\ x-y+1>0 \end{cases} \quad または \quad \begin{cases} x+y-1<0 \\ x-y+1<0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y>-x+1 \\ y<x+1 \end{cases} \quad または \quad \begin{cases} y<-x+1 \\ y>x+1 \end{cases}$$

となる．これを図示して，右欄外の図のようになる．



◀ （境界を含まない）

② 連立方程式 $\begin{cases} (x-1)^2+y^2=5 & \cdots\cdots ① \\ x^2+(y+2)^2=20 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ を解くと $x=6-2y$ なので，これを①に代入すると

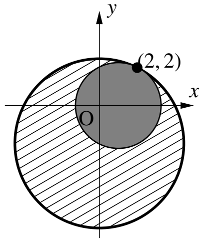
$$(6-2y-1)^2+y^2=5$$

$$\Leftrightarrow\ 25-20y+4y^2+y^2=5$$

$\Leftrightarrow\ (y-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow\ y = 2$

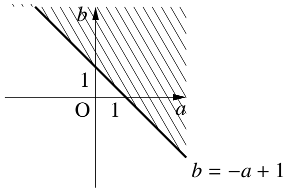
$y=2$ を $x=6-2y$ に代入すると $x=2$ であり，解が 1 つに定まるので，2 円は $(2,2)$ でお互いに接している．これをもとにそれぞれの領域を描くと，右欄外の図のようになる．図より，$(x-1)^2+y^2 \leqq 5$ を満たす領域は全て $x^2+(y+2)^2 \leqq 20$ を満たす領域に含まれる． ■



③ 領域 $y \leqq -x^2+ax+b$ が点 $(1,\ 0)$ を含むので

$0 \leqq -1^2 + a\cdot 1 + b$

を満たす．これを整頓して $\boldsymbol{b \geqq -a+1}$ を満たせばよいと分かる．これを ab 平面上に図示すれば，右欄外のようになる．



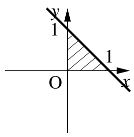
【発展：絶対値を含む不等式の領域】(p.126)

① $x,\ y$ の正負によって場合分けをすると

i) $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ のとき，求める領域は

$x+y \leqq 1 \Leftrightarrow y \leqq -x+1$

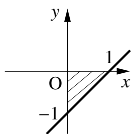
となるので，右欄外のようになる．



ii) $x \geqq 0,\ y < 0$ のとき，求める領域は

$x-y \leqq 1 \Leftrightarrow x-1 \leqq y$

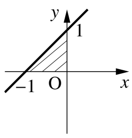
となるので，右欄外のようになる．



iii) $x < 0,\ y \geqq 0$ のとき，求める領域は

$-x+y \leqq 1 \Leftrightarrow y \leqq x+1$

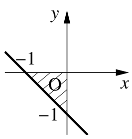
となるので，右欄外のようになる．



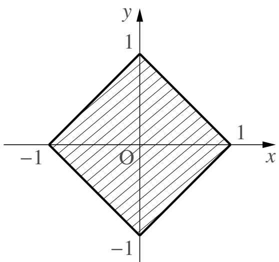
iv) $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ のとき，求める領域は

$-x-y \leqq 1 \Leftrightarrow -x-1 \leqq y$

となるので，右欄外のようになる．

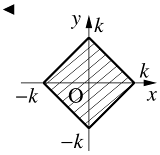


以上をまとめると，求める領域は右図のようになる．

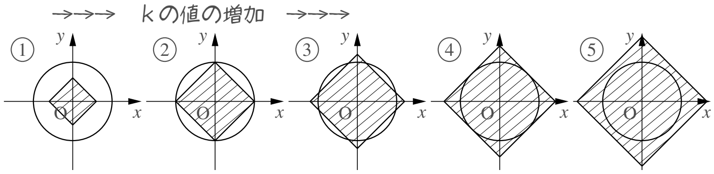


（境界を含む）

② ①と同様にして，領域 D_1 は右欄外のようになる．領域 D_2 は半径 2 の円の内部であるから，D_1, D_2 の関係は k の値によって以下のように変わる．



（境界を含む）



$D_1 \subset D_2$ になるのは，①，②のときになる．②のときは $k=2$ であるから $0 < k \leqq 2$ であればよい．

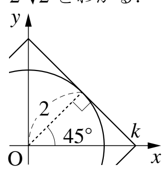
$D_1 \supset D_2$ になるのは，④，⑤のときに限る．④のときは，直線 $x+y=k$ が原点から 2 の距離にあるときなので

$$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad k = 2\sqrt{2} \quad (0 < k \text{ より})$$

であるから，$2\sqrt{2} \leqq k$ であればよい．

以上をまとめて，$\boldsymbol{D_1 \subset D_2}$ **のときは** $\boldsymbol{0 < k \leqq 2}$，$\boldsymbol{D_1 \supset D_2}$ **のときは** $\boldsymbol{2\sqrt{2} \leqq k}$ が求める条件となる．

◀ 次のように図形的に考えても，$k = 2\sqrt{2}$ とわかる．



【発展：最大・最小と領域〜その４〜】(p.128)

① 領域 $0 \leqq y \leqq -x^2+4$ が直線 $x+2y=k$ と共有点をもつような k の最大値・最小値を求めればよい．

直線 $x+2y=k$ は $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$ であるから，切片 $\dfrac{k}{2}$ は k の増加によって y 軸正の方向へ動く．つまり，k が最小値をとるのは $(-2,\ 0)$ のときであり，$k=x+2y=(-2)+2\cdot 0=-2$.

また，放物線 $y=-x^2+4$ と直線 $x+2y=k$ が接するときに k は最大値をとる．

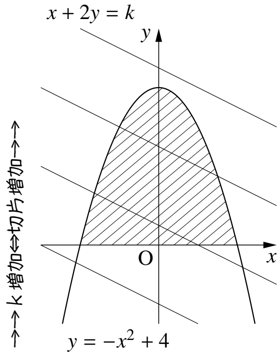
放物線 $y=-x^2+4$ と直線 $x+2y=k$ が接するときは

$$x+2(-x^2+4)=k \Leftrightarrow 2x^2-x+k-8=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

が重解をもつので，この 2 次方程式の判別式を D とすれば

$$D=(-1)^2-4\cdot 2(k-8)=0 \Leftrightarrow 1-8k+64=0 \Leftrightarrow k=\frac{65}{8}$$

以上より，k のとりうる範囲は $\boldsymbol{-2 \leqq k \leqq \dfrac{65}{8}}$ である．



◀ このときの $x,\ y$ を求めるには，$k=\dfrac{65}{8}$ として方程式を解く．

① $\Leftrightarrow 2x^2-x+\dfrac{1}{8}=0$

から $x=\dfrac{1}{4}$，$y=-x^2+4=\dfrac{63}{16}$.

② 領域 $y \geqq 3x+3$ または $y \geqq -2x+2$ が，$x^2+y^2=k$ と共有点をもつような k の最小値を求めればよい．

円 $x^2+y^2=k$ が $y \geqq 3x+3$ と共有点を持つには

$$\sqrt{k} \geqq \frac{|3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow k \geqq \frac{9}{10}$$

であればよい．また，$y=-2x+2$ と共有点を持つのは

$$\sqrt{k} \geqq \frac{|2|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow k \geqq \frac{4}{5}$$

である．この少なくとも一方を満たせばよいので，k の最小値は $\dfrac{4}{5}$ である．

このときの $x,\ y$ は，連立方程式 $\begin{cases} y=-2x+2 \\ x^2+y^2=\dfrac{4}{5} \end{cases}$ の解である．

$x^2+(-2x+2)^2=\dfrac{4}{5}$ を解いて $x=\dfrac{4}{5}$，$y=-2x+2=\dfrac{2}{5}$ となるから

$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)}$ **のとき，k は最小値 $\dfrac{4}{5}$ をとる．**