13th-note 数学II

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 II で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π, ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ, ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω

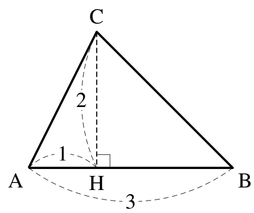
Ver1.521(2012-7-27)

目次

第3章　図形と方程式

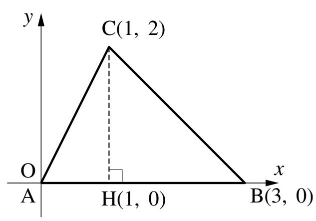
この章では，方程式を用いて図形の問題を扱う．この考え方が，数学があらゆる分野に浸透するための礎を作った．

3.1　図形を座標の上に



たとえば，右の図形を言葉で説明すると，次のようになる．

「長さ 3 の線分 AB を底辺とし，高さが 2 となる点 C をとり，$\triangle$ABC を作る．このとき，線分 AB 上に AH = 1 となるよう H をとり，線分 CH が辺 AB と垂直であるようにとる」



この図形を座標平面上に書こう．A を原点に，直線 AB を x 軸に一致させれば次のようになる．

「A(0, 0)，B(3, 0)，C(1, 2) とし，$\triangle$ABC を考える．また，H(1, 0) として辺 AB に垂直な線分 CH を考える．」

結果として，説明が簡潔で分かりやすくなる．

このように，座標平面上に図形を描いて考えることを，**座標幾何学** (coordinate geometry) という[*1]．

【例題 1】 次の 2 つの文章が同じ図形を表すよう，$\boxed{}$ に適当な数値を入れよ．

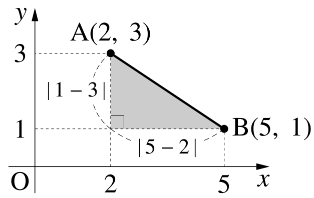
- 辺 AB を斜辺とし，OA = 3, OB = $\boxed{\text{ア}}$ の直角三角形 OAB を考える．
- O(0, 0)，A($\boxed{\text{イ}}$, 0)，B($\boxed{\text{ウ}}$, 2) とし，$\triangle$OAB を考える．

[*1] 図形を扱う学問（**幾何学** (geometry) と言われる）を座標の上で行うので座標幾何学と言われる．また，**解析幾何** (analytic geometry) ともいわれる．歴史的には，ルネ・デカルトが「幾何学 (1637)」において，この方法を最初に用いたとされる．

1.　2点間の距離

2 点 A, B が座標平面上にあるとき，A と B の間の距離は三平方の定理を用いて計算できる．

たとえば A(2, 3)，B(5, 1) のとき，y 座標の差について，$3-1$ も $1-3$ も 2 乗すれば同じであることに注意すれば



$$AB^2 = (5-2)^2 + (1-3)^2 \quad \therefore\ AB = \sqrt{13}$$

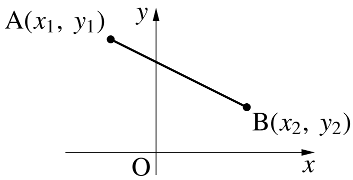
と求められる．このやり方を一般化して，次の公式を得る．

座標平面上の 2 点間の距離

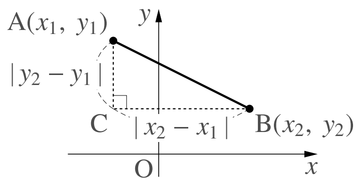
座標平面上の 2 点 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) に対し

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \quad \left(= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}\right)$$

である．特に，A が原点のときは $AB = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ である．



（証明）右図のように，C(x_1, y_2) をとる．AC ≒ 0, CB ≒ 0 であれば，三平方の定理から



$$AB^2 = |x_2-x_1|^2 + |y_2-y_1|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

が成り立ち，$AB > 0$ より $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ と分かる．

$BC = 0$ または $CA = 0$ のときは，$x_1 - x_2 = 0$ または $y_1 - y_2 = 0$ なので，明らかに成り立つ．

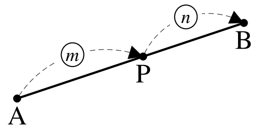
【例題 2】 2 点 A, B が次の座標にあるとき，2 点 A, B の間の距離を求めよ．

1. A(1, 3)，B(5, 6)　　2. A(−3, −5)，B(2, 3)　　3. A(6, −1)，B(−2, 4)

【例題 3】 A(3, 2) と P(x, 0) の距離を x を用いて表せ．また，$AP = 2\sqrt{2}$ のとき，x の値を求めよ．

2.　線分の内分点・外分点

A.　数直線上の内分点

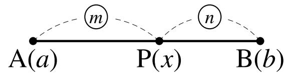


P が線分 AB を $m:n$ に**内分** (interior division) するとは，P が線分 AB 上にあり，AP : PB = $m:n$ を満たすときのことをいった（数学 A，p.106 参照）．

まず，線分 AB に定規を当てて A，B の目盛りは a, b であったとき，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の目盛りについて考えよう．これは，数直線上の線分 AB について考えていることと同じである．

数直線上の内分点の座標

数直線上の A(a)，B(b) について，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P は $\dfrac{na+mb}{m+n}$ で求められる．

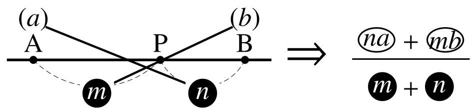


（証明）点 P の目盛りを x とおく．A の目盛り (a) に $x-a$ を足せば P の目盛り (x) であり，P の目盛りに $b-x$ を足せば B の目盛り (b) である．$x-a$, $b-x$ の正負は一致し，AP : PB = $m:n$ となるので

$$(x-a):(b-x)=m:n \iff n(x-a)=m(b-x)$$

これを解いて，$x=\dfrac{na+mb}{m+n}$ と求められる．

上の公式を使うには，右のような図を描き，「比だけを足すと分母，座標と比を交差して掛けて足すと分子になる」と考えると計算しやすい．



【例題 4】 以下の点 A, B について，それぞれ，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，線分 AB を 2 : 3 に内分する点 Q の座標を求めよ．

1. A(1)，B(6)　　2. A(−2)，B(7)　　3. A(−3)，B(−1)

B. 内分点の座標

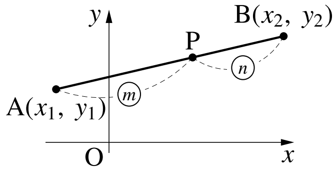
線分 AB が座標平面上にあった場合は次のようになる．

座標平面上の内分点の座標

座標平面上の 2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ に対し，線分 AB を $m : n$ に内分する点を P とすると，P の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

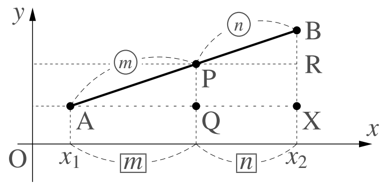
である．特に，P が中点のとき，$m = n$ より，P$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ である．



（証明）右下図のように考えれば，△APQ ∽ △ABX であるので Q は線分 AX を $m : n$ に内分する点である．x 座標だけを見れば A(x_1), X(x_2) であるので

$$（\text{Q の } x \text{ 座標}）= \frac{nx_1+mx_2}{m+n} = （\text{P の } x \text{ 座標}）$$

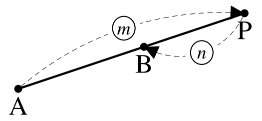
となる．同様にして（P の y 座標）$= \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$ である．



【例題 5】 以下の点 A, B について，それぞれ，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，線分 AB を 2 : 3 に内分する点 Q，線分 AB の中点 H の座標を求めよ．

1. A(2, 5)，B(3, 2)
2. A(−2, 3)，B(3, −1)
3. A(0, 0)，B(3, −4)

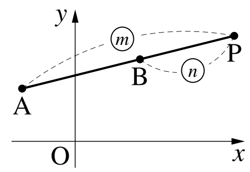
C. 外分点の座標



P が線分 AB を $m:n$ に**外分** (exterior division) するとは，P が線分 AB を除く直線 AB 上にあり，$AP:PB=m:n$ を満たすときのことをいった（数学 A，p.106 参照）．

外分の場合は，A から P へ向かう向きと，P から B へ向かう向きが逆なので，結果的には，次の 3 つの計算が同じとなる（【発展 ：直線上の外分点】(p.80) を参照のこと）．

座標平面上の外分点の座標



座標幾何学においては

- AP : PB を $m:n$ に外分する点 P を考える
- AP : PB を $m:(-n)$ に内分する点 P を考える
- AP : PB を $(-m):n$ に内分する点 P を考える

ことは同じことである（ただし，$m \neq n$）．つまり，座標平面上の 2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ に対し，線分 AB を $m:n$ に外分する点 P の座標は次のようになる．

$$P\left(\frac{(-n)x_1+mx_2}{m+(-n)},\ \frac{(-n)y_1+my_2}{m+(-n)}\right) \text{ または } P\left(\frac{nx_1+(-m)x_2}{(-m)+n},\ \frac{ny_1+(-m)y_2}{(-m)+n}\right)$$

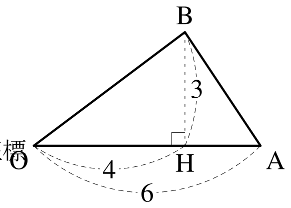
$m>n$ の時は $\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$，$m<n$ の時は $\left(\frac{nx_1-mx_2}{-m+n},\ \frac{ny_1-my_2}{-m+n}\right)$ を用いると，分母に負の数が表れず，計算ミスが起こりにくい．

【例題 6】 以下の点 A, B について，それぞれ，線分 AB を 3 : 1 に外分する点 P，2 : 3 に外分する点 Q，4 : 3 に外分する点 R の座標を求めよ．

1. $A(2,\ 5)$，$B(3,\ 2)$
2. $A(-2,\ 3)$，$B(3,\ -1)$

【練習 7：平面図形】

右の △OAB を座標平面上に O(0, 0)，A(6, 0) となるよう描いて考える．



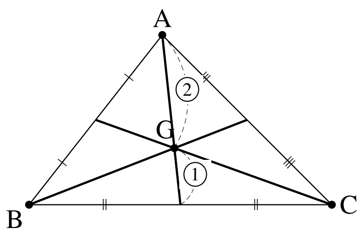
(1) H の座標，B の座標，辺 OB の中点 N の座標を求めよ．

(2) 辺 OA の中点 M，線分 BM を 2 : 1 に内分する点 G_1 の座標を求めよ．

(3) 線分 BM を 2 : 1 に外分する点 D，線分 AN を 2 : 1 に外分する点 E の座標を求めよ．

(4) OB，BA，AD，DO の長さをすべて求めよ．

3. 三角形の重心



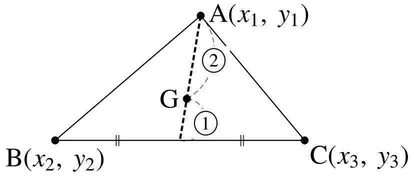
どんな三角形でも，各頂点から引いた 3 本の中線は 1 点で交わった．これを三角形の**重心**（centroid, barycenter）といい，重心は，中線を 2 : 1 に内分する点であった（数学 A，p.118 参照）．

座標平面上で考えると，△ABC の重心の座標は次のように表される．

座標平面上の三角形の重心の座標

座標平面上の $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$ について，△ABC の重心を G の座標は次のようになる．

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$



（証明）辺 BC の中点を N とすると，$N\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$ である．重心 G は線分 AN を 2 : 1 に内分するので G の座標は $\left(\dfrac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \dfrac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)=\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ となる．

三角形の重心の座標は，三角形の 3 頂点の座標の平均だと覚えると良い．

【例題 8】

1. $A(3, 2)$，$B(-1, 4)$，$C(-3, -5)$ に対し，$\triangle ABC$ の重心 G の座標を求めよ．
2. $A(1, a)$，$B(b, 2)$，$C(3, -3)$ の重心が原点であるとき，a, b の値を求めよ．

4. 座標幾何学の応用

A. 求める点を (x, y) とおく

座標平面上で考えると，条件を満たす点を求める問題は，方程式を解く問題に帰着できる．

【暗記 9：求める点を (x, y) とおく】

$A(5, 4)$，$B(0, -1)$ があって，点 $P(x, y)$ とする．以下の問いにそれぞれ答えよ．

1. 線分 AP を 2 : 1 に内分する点の座標が $(0, 0)$ であるとき，x, y の値を求め，P の座標を答えよ．
2. $AP = BP = \sqrt{13}$ であるとき，x, y の値を求め，P の座標を答えよ．

【練習 10：求める点を $(x,\ y)$ とおく】

A$(-1,\ 4)$，B$(1,\ 2)$ がある．

(1) AP = BP となる点 P を y 軸上にとるとき，P の座標を求めよ．

(2) AQ : BQ : AB = $1 : 1 : \sqrt{2}$ であるとき，点 Q の座標を求めよ．

(3) △ABR が正三角形となるとき，点 R の座標を求めよ．

【発展 11：直線上の外分点】

線分 AB に定規をあてると，A，B の目盛りは $a,\ b$ であったという．線分 AB を $m : n$ に外分する点 P の目盛りを x とおく．

A の目盛り a に $\boxed{\text{ア}}$ を足せば P の目盛り x であり，P の目盛り x に $\boxed{\text{イ}}$ を足せば B の目盛り b である．AP : PB = $m : n$ となるが，P は辺 AB の外側にあるため $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ の符号が異なるから，

$\boxed{\text{ア}} : \boxed{\text{イ}} = m : (-n)$ $\left(= (-m) : n\right)$ となる．これを解いて，$x = \boxed{\text{ウ}}$．

B. 点について対称

【暗記 12：点について対称】

A$(1,\ 3)$ について，P$(3,\ 2)$ と対称な点 Q の座標を答えよ．

【練習 13：点について対称】

(1) $(4,\ 3)$ について，$(8,\ 1)$ と対称な点の座標を答えなさい．

(2) $(s,\ 1)$ と $(1,\ t)$ が，$(-2, -4)$ について対称なとき，$s,\ t$ を求めなさい．

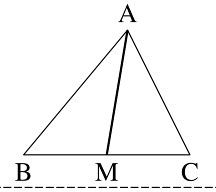
C. 発展 平面図形の証明

【暗記 14：座標平面上で証明する】

$\triangle$ABC において，辺 BC の中点を M とする．このとき

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + MB^2)$$

であることを，座標平面を用いて示せ．



上で証明した等式は「中線定理」といわれる．

【暗記 15：重心】

$\triangle$ABC について，辺 AB，BC，CA を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．$\triangle$ABC の重心と $\triangle$DEF の重心が一致することを示せ．

上の事実は，数学 B の「ベクトル」を用いても証明できる．

3.3　多変数関数と陰関数

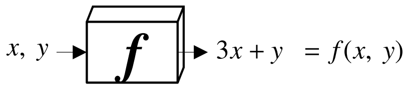
変数を 2 つ以上持つ関数のことを**多変数関数** (multivariable function) という．もし，ある関数が x, y を変数にもつならば，その関数は $f(x, y)$ のように表される．

A. 多変数関数の例

例として，勝ちに 3 点，引き分けに 1 点，負けに 0 点を与えるときの合計点を考える．

勝った回数が x 回，引き分けた回数が y 回であるときの合計点を $f(x, y)$ とおけば

$f(x, y) = 3x + y$ ⋯⋯⋯ ①



勝った回数 (x) と引き分けの回数 (y) から合計点を決める規則

と求められる．x, y はどちらも変数であり，代入は変数が 1 つのときと同じように以下のように書く．

$f(6, 4) = 18 + 4 = 22$ ⋯⋯⋯ ②

式②は「6 勝 4 引き分けならば，合計点は 22 点である」ことを表している．

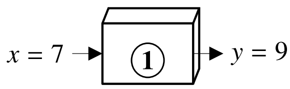
【例題 16】

1. $G(x, y) = x^2 + y^2 - 10$ のとき，$G(1, 1), G(3, -1), G(-4, t)$ の値を求めよ．
2. 1 個 x 円のりんごを 5 個，1 個 y 円のみかんを 7 個買うときの合計を $s(x, y)$ 円とするとき，$s(x, y)$ を求めよ．また，$s(100, 50), s(a, 60)$ の値を求めよ．

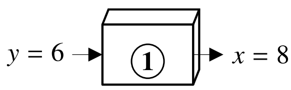
B. 陰関数とは

上の関数 $f(x, y) = 3x + y$ の値が 30 であったとする．つまり

$3x + y = 30$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ①



合計点が 30 のときの勝った回数 (x) と引き分けの回数 (y) の間の規則



合計点が 30 のときの引き分けの回数 (y) と勝った回数 (x) との間の規則

もし，$x = 7$ であれば，等式①によって $y = 9$ と決まる．このように，x の値に対し，等式①が y の値を与える．

逆に，$y = 6$ であれば，等式①によって $x = 8$ と決まる．このように，y の値に対しても，等式①が x の値を与える．

一般に，①のように

$F(x, y) = k$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ②

という形の等式を（x, y についての）**陰関数** (implicit function) といい，x, y を変数と呼ぶ*2.

陰関数 $F(x, y) = k$ を満たす (x, y) の組を，その陰関数の**解** (solution) という．たとえば，$(x, y) = (7, 9), (8, 6)$ は陰関数①の解になっている．

*2 陰関数という名前の由来は，文字 y が左辺の中で「陰」になっていることにある．また，上の関数 F の変数は 2 つだが，変数が 3 つ以上であってもやはり陰関数という．ただし，F の変数が 1 つのときは陰関数とは呼ばれない．

【例題 17】

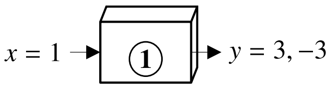
1. $A(x,\ y) = 2x + 3y - 40$ とする．陰関数 $A(x,\ y) = 0$ において，$x = 5$ のときの y の値と，$y = 4$ のときの x の値を求めよ．
2. 陰関数 $4x - ay = 15$ が $(x,\ y) = (-3,\ 2)$ を解にもつとき，a の値を求めよ．

C. 陰関数とこれまでの関数の違い

陰関数 $F(x,\ y) = k$ は「x の値から変数 y の値を定め」「y の値から x の値を定め」るが，それによってただ 1 つの値に定めるとは限らない．

たとえば，関数 $G(x,\ y) = x^2 + y^2 - 10$ の値が 0 である陰関数

$$G(x,\ y) = x^2 + y^2 - 10 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



陰関数 $G(x,\ y) = 0$

は 1 つの x の値に対して y を 1 つに定めない．たとえば $x = 1$ のとき

$$1 + y^2 - 10 = 0 \iff y^2 = 9$$

であるので，①は $y = \pm 3$ となり，y の値をただ 1 つには定めない．

【例題 18】

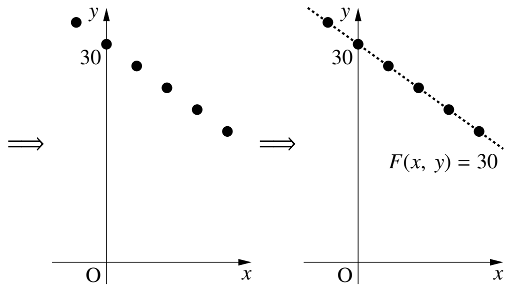
1. $H(x,\ y) = x + y^2 - 30$ とする．陰関数 $H(x,\ y) = 0$ において，$x = 5$ のときの y の値と，$y = 4$ のときの x の値を求めよ．
2. 陰関数 $x^2 + y - 5 = 0$ と関数 $y = p(x)$ は同値な等式であるという．$p(x)$ を求めよ．

D.　陰関数のグラフ

座標平面上の点 $(x,\ y)$ のうち，陰関数 $F(x,\ y) = k$ を満たす点をすべて集めてできる図形を，陰関数 $F(x,\ y) = k$ の**グラフ** (graph) という．

たとえば，関数 $F(x,\ y) = 3x + y = 30$ のグラフは次のように書くことができる．

x	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	33	30	27	24	21	18	$\cdots$



それぞれを座標平面上に点でとると，真ん中の図のようになり，最終的には右上図の直線となる．この直線を関数 $F(x,\ y) = 30$ の**グラフ** (graph) という．

上の陰関数 $F(x,\ y) = 3x+y = 30$ を y について解けば $y = -3x+30$ となる．つまり，$F(x,\ y) = 30$ のグラフは直線 $y = -3x + 30$ と一致する．

【例題 19】 上の $F(x,\ y)$ について，以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．

1. 点 $(6,\ \boxed{\text{ア}})$, $(-3,\ \boxed{\text{イ}})$, $\left(\dfrac{2}{3},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ は $F(x,\ y) = 30$ のグラフ上にある．
2. 点 $(\boxed{\text{エ}},\ 15)$, $(\boxed{\text{オ}},\ -3)$, $\left(\boxed{\text{カ}},\ 20\right)$ は $F(x,\ y) = 30$ のグラフ上にある．

E.　これまでの関数と陰関数の間の関係

y を与える x の関数 $y = f(x)$ は，必ず陰関数に変形できる[*3]．たとえば，関数 $y = 2x - 3$ は陰関数 $y - 2x + 3 = 0$ と同じ式を表す．このように，関数 $y = f(x)$ は陰関数 $y - f(x) = 0$ に一致する．

一方，陰関数の式を y について解けば，y を与える x の関数に変形できる．

【例題 20】 以下の (a)〜(f) の中から，等しい関数の組をすべて答えよ．

(a) $x + y = 1$　(b) $y = x - 1$　(c) $x + y^2 = 0$　(d) $x^2 + y - 1 = 0$　(e) $y = -x + 1$

(f) $y = -x^2 + 1$

F.　直線の一般形 $ax + by + c = 0$

$ax + by + c = 0$ という形の式は直線を表し，直線の方程式の一般形といわれる．

- $(a, b, c) = (2, 3, -1)$ のとき，$2x + 3y - 1 = 0 \iff y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$ となり傾き $-\dfrac{2}{3}$，切片 $\dfrac{1}{3}$ の直線
- $(a, b, c) = (2, 0, -1)$ のとき，$2x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$ となり，y 軸に平行な直線

【暗記 21：2 直線の相等】

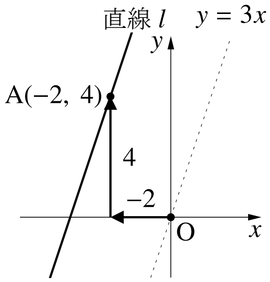
1. 2 つの方程式 $y = 2x + b$ と $y = (a - 1)x + 3$ が同じ直線を表わすとき，a, b の値を求めよ．
2. 2 つの方程式 $2x + 3y - 3b + 1 = 0$ と $bx + y - a = 0$ が同じ直線を表わすとき，a, b の値を求めよ．

[*3] この意味で，陰関数の概念は，これまで学んだ関数の概念より広い概念である．

3.4　平面上の直線と方程式

1.　直線の方程式

A.　与えられた 1 点を通り，傾きが定まった直線の方程式



たとえば，A$(-2,\ 4)$ を通り，傾き 3 の直線を l としよう．

右図のように，原点を通る直線 $y = 3x$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 4 平行移動させれば直線 l になる．数学 I で学んだように[*4]

- 「x 軸方向に -2 平行移動」と「x を $x+2$ に置き換え」は一致する
- 「y 軸方向に 4 平行移動」と「y を $y-4$ に置き換え」は一致する

から，l の方程式は $y-4 = 3(x+2)$ と表され，整頓して $y = 3x+10$ を得る．

（1 点と傾きが与えられた）直線の方程式

傾きが m で点 $(p,\ q)$ を通る直線の方程式は，次の式で与えられる．

$y-q = m(x-p)$

（証明）$y = mx$ が $(p,\ q)$ を通るように「x 軸方向に p 平行移動し（⇔ x を $x-p$ に置き換え）」，「y 軸方向に q 平行移動し（⇔ y を $y-q$ に置き換え）」て，$y-q = m(x-p)$ という方程式が得られる．

【例題 22】 次の条件を満たす直線の方程式を，上の方法で導け．

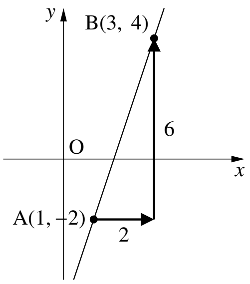
1. $(3,\ 1)$ を通り，傾きが -3　　2. $(4, -2)$ を通り，傾きが 2　　3. $(a,\ b)$ を通り，傾きが 2

上の方法は，中学校で学ぶ方法とは異なるが，今後は上のやり方を採用するのがよい．特に，条件に文字が入った場合にたいへん計算しやすくなる．

[*4] 頂点 $(p,\ q)$ の放物線の方程式は，以下のように考えることができた（数学 I の p.97 参照）．

頂点 $(0,\ 0)$ の放物線 $y = ax^2 \xrightarrow[y\ \text{方向に}\ q\ \text{平行移動（}y\ \text{を}\ y-q\ \text{に置き換える）}]{x\ \text{方向に}\ p\ \text{平行移動（}x\ \text{を}\ x-p\ \text{に置き換える）}} y-q = a(x-p)^2 \iff y = a(x-p)^2+q$ は頂点 $(p,\ q)$

B.　与えられた 2 点を通る直線の方程式



たとえば，$A(1, -2)$，$B(3, 4)$ を通る直線を m としよう．

m の傾きは，$\dfrac{(y\text{ 座標の増加分})}{(x\text{ 座標の増加分})} = \dfrac{4-(-2)}{3-1} = 3$ である[*5]．そこで『直線の方程式』(p.86) を用いれば

$y + 2 = 3(x - 1)$　（または，$y - 4 = 3(x - 3)$）[*6]

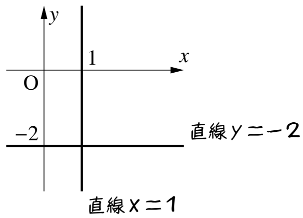
が直線 m の方程式と分かる．これを整頓して $y = 3x - 5$ となる．

【例題 23】

次の 2 点を通る直線の方程式を，上の方法で導け．ただし，$a \fallingdotseq 0$ とする．

1. $(1,\ 2),\ (3,\ 4)$　　2. $(2,\ 1),\ (-1, -3)$　　3. $(5,\ 1),\ (-4, -2)$　　4. $(0,\ 2),\ (a,\ 3)$

C.　x 軸や y 軸に垂直な直線



x 座標が p である点をすべて集めてできる直線は，「直線 $x = p$」と表され，y 軸に平行になる[*7]．

同じように，y 座標が q である点をすべて集めてできる直線は，「直線 $y = q$」と表され，x 軸に平行になる．

【例題 24】　次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ．

1. $(2,\ 1),\ (2, -3)$　　2. $(3, -2),\ (-3, -2)$　　3. $(-5,\ 3),\ (4,\ 3)$

[*5] 傾きを求めるとき，B の座標から A の座標を引いても，A の座標から B の座標を引いても，構わない．たとえば上の例では，$\dfrac{(y\text{ 座標の増加分})}{(x\text{ 座標の増加分})} = \dfrac{(-2)-4}{1-3}$ としても，同じ値 3 を得る．分母と分子の，引く順番が揃っていればよい．

[*6] m を A を通り傾き 3 の直線と考えれば $y + 2 = 3(x - 1)$，B を通り傾き 3 の直線と考えれば $y - 4 = 3(x - 3)$ となる．

[*7] 実際，数学 I(p.82) で学んだように，放物線 $y = a(x - p)^2 + q$ の軸は直線 $x = p$ であった．

【練習 25：直線の方程式】

以下の条件を満たす直線の方程式を求めよ.

(1) $(3, -2)$ を通り，傾きが -2

(2) 2 点 $(3,\ 4)$, $(5, -6)$ を通る

(3) $(p, -4)$ を通り，傾きが 3

(4) 2 点 $(3, -2)$, $(5, -2)$ を通る

(5) $(2,\ 3)$ を通り，傾きが a

(6) 2 点 $(3,\ 1)$, $(s,\ t)$ を通る（$s \fallingdotseq 3$）

(7) 発展 $(a,\ a^2 + a)$ を通り，傾きが $2a + 1$

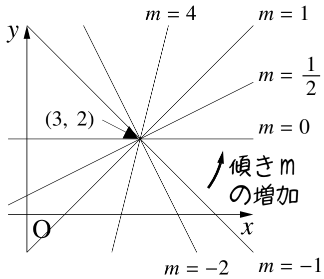
(8) 発展 2 点 $(a,\ a^2)$, $(b,\ b^2)$ を通る（$a \fallingdotseq b$）

【練習 26：x 切片，y 切片が与えられた直線の方程式】

$a \fallingdotseq 0$, $b \fallingdotseq 0$ とする．$(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ を通る直線の方程式は方程式 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ に一致することを示せ.

上の事実は「x 切片，y 切片が与えられた直線の方程式」として，しばしば便利である.

D.　一定の条件を満たす直線の集まり



方程式 L： $y - 2 = m(x - 3)$ のグラフは，m の値によって異なる．しかし，『直線の方程式』(p.86) から分かるように常に $(3,\ 2)$ を通る．この m の値に関わらず通る $(3,\ 2)$ は，L の**定点** (constant point) と言われる．また，傾きは m なので m の増加に従い，直線は反時計回りに回転する．

逆に，$(3,\ 2)$ を通る直線を考えると，y 軸に平行な直線（$x = 3$）以外は，$y - 2 = m(x - 3)$ という形の方程式で表される．

【例題 27】

k は実数とする．以下の $\boxed{}$ に座標を，(　　) に「増加」「減少」のいずれかを入れなさい．

1. 方程式 $y - 3 = k(x + 2)$ のグラフは，$\boxed{ア}$ を必ず通る． また，k の （ イ ） によって，グラフは反時計回りに回転する．
2. 方程式 $y = kx - 3$ のグラフは，$\boxed{ウ}$ を必ず通る． また，k の （ エ ） によって，グラフは反時計回りに回転する．
3. 方程式 $y = 2x + k$ のグラフは， k の増加によって，グラフの y 切片は （ オ ） する．

【暗記 28：一定の条件を満たす直線の集まり〜その１〜】

k を実数とする．方程式 $l : kx + x + y + 3k = 0$ の定点を答えよ．また，k の増加によって，グラフの傾き，y 切片はどうなるか答えよ．

【練習 29：直線の定点】

次の方程式の定点を，それぞれ答えよ．

(1) $2x + 3ky + 4y + 3k = 0$　　(2) $3kx + 2x - 4ky - 3y + 2k + 3 = 0$

2.　直線の平行・垂直

A.　平行な 2 直線の傾きの条件

2 直線の平行は，中学でも学んでいるように以下が成り立つ．

互いに平行な 2 直線の方程式

「異なる 2 直線 $y = m_1 x + n_1$，$y = m_2 x + n_2$ が平行」 $\Longleftrightarrow$ $m_1 = m_2$（n_1，n_2 の値には無関係）

【例題 30】

1. (3, 1) を通り，$y = 2x - 4$ と平行な直線の方程式は，$y - \boxed{ア} = \boxed{イ}\left(x - \boxed{ウ}\right)$ となり，これを整頓して $y = \boxed{エ}$ となる．
2. (3, −2) を通り，$4x + y - 2 = 0$ と平行な直線の方程式は，$y - \boxed{オ} = \boxed{カ}\left(x - \boxed{キ}\right)$ となり，これを整頓して $y = \boxed{ク}$ となる．

B. 垂直な 2 直線の傾きの条件

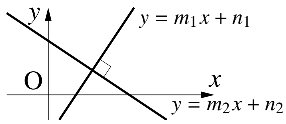
座標平面上の 2 本の直線が，垂直であることは，以下のようにまとめることができる．

互いに垂直な 2 直線の方程式

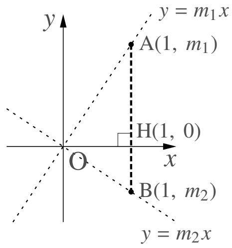
異なる 2 直線 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$（$m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$）について

- 互いに直交する必要十分条件は $m_1m_2 = -1$

であり，それぞれの傾きのみで定まる（n_1, n_2 の値には無関係）．



（証明）直線を平行移動しても 2 直線の間の角の大きさは変わらないので，原点を通る 2 直線 $y = m_1x$, $y = m_2x$ が直交するときを考えればよい．
右下図のように x 座標が 1 の点 A，B，H をとる．$\angle AOH = 90^\circ - \angle BOH = \angle OBH$ なので，2 つの直角三角形 $\triangle AOH$ と $\triangle OBH$ は相似である．よって



$$\mathrm{AH} : \mathrm{HO} = \mathrm{OH} : \mathrm{HB} \iff m_1 : 1 = 1 : (-m_2)$$
$$\iff m_1m_2 = -1$$

が成り立つ．これは，逆も成立する．

「傾き m の直線と直交するのは傾き $-\dfrac{1}{m}$ の直線」または「傾きの符号を変え，逆数をとれば直交する」のように捉えるとよい．
また，直線 $x = a$ や $y = b$ に平行・直交な直線は，図を描いて考えればよい．

【例題 31】

1. 次の直線と直交する直線の傾きはいくつか．
   1) $y = 2x$　2) $y = 2x + 1$　3) $y = \dfrac{1}{4}x + 3$　4) $y = -\dfrac{3}{2}x - 5$
2. (3, 2) を通り直線 $y = 3x - 4$ に直交する直線の方程式は $y - \boxed{ア} = \boxed{イ}(x - \boxed{ウ})$ となり，これを整頓して方程式 $y = \boxed{エ}$ を得る．
3. (−1, 2) を通り直線 $y = 3$ に直交する直線を図示し，方程式を求めなさい．

【練習 32：与えられた点を通り，与えられた直線に直交する直線の方程式】

(1) $(-3,\ 1)$ を通り直線 $3x - y + 4 = 0$ に平行な直線，垂直な直線をそれぞれ求めなさい.

(2) $(1, -2)$ を通り直線 $x - 2y + 3 = 0$ に平行な直線，垂直な直線をそれぞれ求めなさい.

【発展 33：一般形の直線の方程式における平行・垂直】

$a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

① 2 直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ が平行なとき，$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ であることを示せ.

② 2 直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ が垂直なとき，$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ であることを示せ.

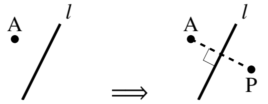
上の事実は，$a_1 = 0$ のときや，$b_1 = 0$ のときでも成立する.

C. 直線に対して対称な点

与えられた直線 l に対し，点 A と対称な点を P とすると，以下のことが成り立つ.

(1) 直線 AP は直線 l と垂直である.

(2) 線分 AP の中点は直線 l 上にある.



【暗記 **34**：直線に対して対称な点〜直線が座標軸に平行でないとき】

直線 l：$x-2y+3=0$ に対し，A$(1,-2)$ と対称な点 P を求めなさい.

【暗記 **35**：直線に対して対称な点〜直線が座標軸に平行なとき】

直線 l：$y=2$ に対し，A$(4,5)$ と対称な点 P を求めなさい.

【練習 36：直線に対して対称な点】

(1) 直線 l： $x = -2$ に対し，A$(1, -2)$ と対称な点 P を求めなさい．

(2) 直線 m： $-x + 3y - 2 = 0$ に対し，A$(3, -1)$ と対称な点 Q を求めなさい．

【発展 37：AP ＋ BP が最短になるとき】

A$(-3, 4)$，B$(2, 4)$ がある．直線 $y = x$ 上に点 P を取るとき，AP + BP が最小になるときの P の座標と，その最小値を求めなさい．

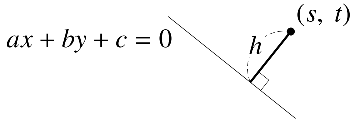
複数の線分の和の最小値を求めるには，いずれかの点を対称移動して考えるとよい．

3.　点と直線の距離

与えられた直線 l と，その直線上にない 1 点 A の距離は次の式で与えられる．

点と直線の距離

直線 $ax+by+c=0$ と点 $(s,\ t)$ の距離 h は
$h=\dfrac{|as+bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で求められる．

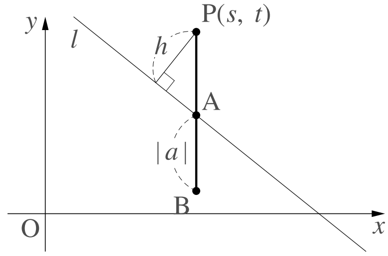


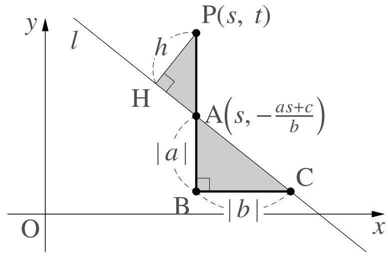
（証明）$a=0$ または $b=0$ のときは省略．直線 $ax+by+c=0$ を l，点 $(s,\ t)$ を P，P から l への垂線の足を H とする．
右図のように, x 座標が s の点 A, B を A は l 上に, B は AB $=|a|$ となるよう P の反対側にとる．A の y 座標は $-\dfrac{as+c}{b}$ となる．
ここで，右下のように B と y 座標が等しい l 上の点 C をとると，直線 l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ なので BC $=|b|$ である．
2 角が等しいから $\triangle$PAH ∽ $\triangle$CAB となるので

$$\mathrm{PH}:\mathrm{PA}=\mathrm{CB}:\mathrm{CA} \Leftrightarrow \mathrm{PH}:\left|t-\left(-\frac{as+c}{b}\right)\right|=|b|:\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\times\mathrm{PH}=\left|b\left(t+\frac{as+c}{b}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{PH}=\frac{|as+bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$





この公式を覚えるには，分子は「直線の式の左辺に $(x,\ y)=(s,\ t)$ を代入し，絶対値をつける（距離なので)」，分母は「$a,\ b$ に三平方の定理を用いる」のようにするとよい．

【例題 38】 それぞれ与えられた直線 l と一点 A について，直線 l と点 A の距離を求めなさい．

1. $l:2x-y+4=0$，A$(2,-1)$
2. $l:3x-4y-2=0$，A$(0,\ 0)$
3. $l:3x-4y-2=0$，A$(-4,-4)$
4. $l:-3x+2y+1=0$，A$(2,\ k)$

【練習 39：点と直線の距離～その１～】

以下の直線と，点 $(2,-1)$ の距離をそれぞれ答えなさい．

(1) $2x-y+1=0$　　(2) $-x+3y-5=0$　　(3) $y=3x-2$

【練習 40：点と直線の距離～その２～】

(1) 直線 $l: 3x-4y-k=0$ と $\mathrm{A}(2,\ 1)$ の距離が 3 であるとき，k の値を求めよ．

(2) 直線 $l: 2kx+y-2=0$ と $\mathrm{A}(2,\ 1)$ の距離が 1 であるとき，k の値を求めよ．

4.　三角形の面積

【例題 41】 M(1, 2)，A(3, 4)，B(4, −3) があるとき

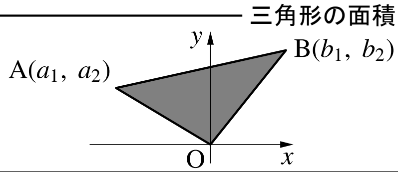
1. 線分 AB の長さを求めよ．
2. 直線 AB の方程式を求めよ．
3. M と直線 AB の距離を求めよ．
4. △MAB の面積を求めよ．

座標平面上の三角形は，頂点のうち 1 点が原点にあれば，次のようにして求められる．

三角形の面積

原点を O，A(a_1, a_2)，B(b_1, b_2) とするとき

$$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$



証明は p.129 を参照のこと

三角形のどの頂点も原点にないときは，下の 2. のように平行移動を用いて求める．

【例題 42】

1. O(0, 0)，A(2, 1)，B(−3, 2) のとき，△OAB の面積を求めよ．
2. M(1, 2)，A(3, 4)，B(4, −3) とする．△MAB を平行移動して △OA′B′ になったという．
   i) A′，B′ の座標を求めよ．　　ii) △OA′B′，△MAB の面積を求めよ．

3.5　平面上の円と方程式

この節では，平面上の円が，座標平面上ではどう表現されるか考えていく．

1.　円の方程式〜平方完成形

A.　円は中心と半径のみで決まる

円は，中心と半径を決めればただ 1 つに定まり，次の式で表される．

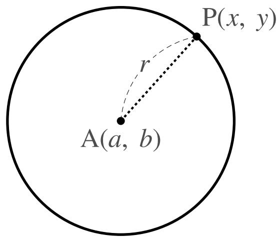
円の方程式〜平方完成形

点 $(a,\ b)$ を中心とし，半径が $r\ (>0)$ である円の方程式は，次のように表される．

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

この円の方程式は，平方完成形の方程式といわれる．

（証明）円 C の周上にある点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．2 点 A, P の間の距離が r であることと同値である．『2 点間の距離 (p.74)』で学んだように，$\mathrm{AP}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ であるから



$$\text{P が円 } C \text{ の周上にある} \iff \mathrm{AP}=r$$
$$\iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \qquad \cdots\cdots①$$

等式①の両辺は共に正であるので両辺を 2 乗し，円の方程式を得る．

【例題 43】

1. 座標平面上に次のような円があるとき，その方程式をそれぞれ求めよ．
   (a) 中心 $(3,\ 2)$，半径 3　　(b) 中心 $(-3,\ 1)$，半径 2　　(c) 中心 $(0,\ -2)$，半径 $\sqrt{3}$
2. x 軸，y 軸の両方に接する半径が 3 の円はいくつあるか．また，それぞれの方程式を求めよ．

2. 円の方程式〜一般形

A. 円は $x^2+y^2+lx+my+n=0$ という形の式でも表される

中心 $(2,-1)$，半径 3 の円の方程式は $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ となるが，この式は

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=9$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y-4=0$$

と変形することができる．この形の円の方程式を一般形と言う．

【例題 44】 以下の円の方程式を，一般形で表せ．

1. $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=1$
2. 中心が $(4,-1)$ で半径 3 の円

B. 一般形を平方完成形に変形する

方程式 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ は

$$x^2+y^2-4x+2y-4=0 \Leftrightarrow \underbrace{(x^2-4x+4)}_{x\text{ について平方完成}}+\underbrace{(y^2+2y+1)}_{y\text{ について平方完成}}-4=4+1$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=9$$

と変形し，中心 $(2,-1)$，半径 3 の円の方程式に一致することがわかる．

【例題 45】 次の円の方程式の中心と半径を求めよ．

1. $x^2+y^2-2x+4y+1=0$
2. $x^2+y^2-6y+1=0$

円の方程式〜一般形

x, y についての 2 次式であり，どちらの 2 次の係数も 1 である方程式

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$

は，$\dfrac{l^2}{4} + \dfrac{m^2}{4} - n > 0$ のときに円の方程式を表し，**一般形の方程式**といわれる．

方程式 $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ を，x について，y について別々に平方完成すれば

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2 + lx)}_{x^2,\ x\ \text{の項をまとめた}} + \underbrace{(y^2 + my)}_{y^2,\ y\ \text{の項をまとめた}} + n = 0 \quad \Leftrightarrow \underbrace{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2}_{x\ \text{について平方完成}} + \underbrace{\left(y + \frac{m}{2}\right)^2}_{x\ \text{について平方完成}} = \frac{l^2}{4} + \frac{m^2}{4} - n$$

と変形できるので，$\dfrac{l^2}{4} + \dfrac{m^2}{4} - n > 0$ であれば，円の方程式を表していることになる．

$\dfrac{l^2}{4} + \dfrac{m^2}{4} - n = 0$ のとき，$(x,\ y) = \left(-\dfrac{l}{2}, -\dfrac{m}{2}\right)$ だけが $x^2 + lx + y^2 + my + n = 0$ を満たす．

【練習 46：円の方程式〜平方完成形と一般形】

(1) 中心が $(-2, -1)$ で半径 $\sqrt{3}$ の円の方程式を，平方完成形で表せ．また，一般形で表せ．

(2) 次の中から円の方程式を表すものを選び，その円の中心と半径を求めよ．

a) $x^2 + y^2 - 3x + 5 = 0$　　b) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = 0$　　c) $2x^2 + 2y^2 + 8x - 4y = 0$

3.　円の方程式の決定

A.　準備〜方程式への代入

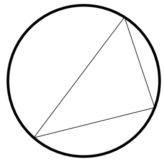
たとえば，円 C：$(x - 2)^2 + (y - b)^2 = 5$ が $(3,\ 2)$ を通るならば，$(x - 2)^2 + (y - b)^2 = 5$ に $(x,\ y) = (3,\ 2)$ を代入した等式は成り立つ，つまり

$$(3 - 2)^2 + (2 - b)^2 = 5 \Leftrightarrow 1 + 4 - 4b + b^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow b^2 - 4b = 0 \Leftrightarrow b(b - 4) = 0$$

これを解いて $b = 0, 4$ を得る．特に，円 C の中心は $(2,\ 0)$ または $(2,\ 4)$ と分かる．

【例題 47】 円 C : $(x-a)^2+(y-3)^2=13$ が (5, 5) を通るとき，a の値を答えよ．

B.　与えられた 3 点を通る円の方程式



どんな三角形も，外接円はただ 1 つに定まった．これは，（同一直線上にない）3 点を通る円周がただ 1 つに定まることを意味する．

【暗記 48：円の方程式～その２～】

3 点 A(3, 0)，B(0, −2)，C(−2, 1) を通る円 K の方程式について，$\boxed{}$ に適する式・数値を入れよ．

1. K の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく．ここで以下が成立する．
   A を通るから方程式 $\boxed{ア}$，B を通るから方程式 $\boxed{イ}$，C を通るから方程式 $\boxed{ウ}$
   3 式を連立して $(l, m, n)=\left(\boxed{エ}, \boxed{オ}, \boxed{カ}\right)$ と解けて，K の方程式 $\boxed{キ}$ を得る．
2. K の中心を O(p, q) とする．ここで
   OA = OB から p, q の方程式 $\boxed{ク}$ が，OA = OC から p, q の方程式 $\boxed{ケ}$ が成り立つ．
   2 つの式を連立して解けば $(p, q)=\left(\boxed{コ}, \boxed{サ}\right)$ である．
   つまり，$\mathrm{OA}^2=\boxed{シ}$ であるので K の方程式は $\boxed{ス}$ と分かる．

【練習 49：円の方程式〜その２〜】

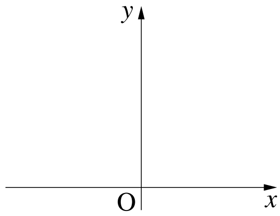
A(3, 1)，B(4, −4)，C(−1, −5) とする．△ABC の外接円の中心と半径を求めよ．

C. 円を図形的に考える

円が通る 3 点が与えられた場合も，図を描けば簡単に分かる場合がある．

【練習 50：図形的に考える〜その１〜】

3 点 A(2, 2)，B(−4, 2)，C(−4, 4) を通る円 K について考えてみよう．
右に 3 点を図示すれば，K の中心 R は AB の垂直二等分線上にあるから R の $\boxed{\text{ア}}$ 座標は $\boxed{\text{イ}}$，K の中心 R は BC の垂直二等分線上にあるから R の $\boxed{\text{ウ}}$ 座標は $\boxed{\text{エ}}$ と分かる．
よって，R の座標は $\boxed{\text{オ}}$ であり，K の半径は RA = $\boxed{\text{カ}}$ なので，
K の方程式は $\boxed{\text{キ}}$ と求められる．



D.　中心や半径の条件が与えられた円の方程式

中心や半径の条件が与えられた場合は，平方完成形 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を用いて考えよう．

【例題 51】 以下の $\boxed{}$ に　i. $(2,\ b)$，ii. $(a,\ 2)$，iii. $(a,\ b)$，iv. $(a,\ a)$　のうち最も適するものを答え，それぞれの問いに答えなさい．

1. 中心が直線 $x=2$ 上にある円 C_1 の中心は $\boxed{\text{ア}}$ とおくことができる．さらに，C_1 が $A(3,\ 2)$，$B(0,\ 3)$ を通るとき，円 C_1 の方程式を求めよ．
2. 中心が直線 $y=x$ 上にある円 C_2 の中心は $\boxed{\text{イ}}$ とおくことができる．さらに，C_2 が $P(1,\ 3)$，$Q(-2,\ 1)$ を通るとき，円 C_2 の方程式を求めよ．
3. y 座標が正の側で x 軸に接し，円の半径が 2 である C_3 の中心は，$\boxed{\text{ウ}}$ とおくことができる．さらに，C_3 が $T(2,\ 1)$ を通るとき，円 C_3 の方程式を求めよ．

【練習 52：円の方程式〜その１〜】

(1) 中心が直線 $y = 2$ 上にあり，$(3,\ 5)$, $(2, -2)$ を通る円の方程式を求めよ．

(2) 中心が直線 $y = -x$ 上にあり，$(4, -1)$, $(-3,\ 0)$ を通る円の方程式を求めよ．

(3) $(-3,\ 5)$ を通り，x 座標が負の側で y 軸に接する半径が 2 の円の方程式を求めよ．

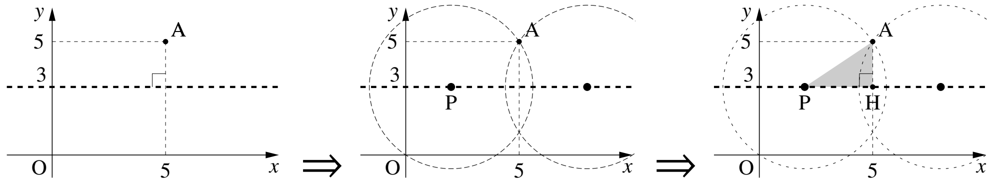
【発展 53：円の方程式〜その２〜】

① 中心が直線 $y = -2x + 1$ 上にあり，$(4,\ 2)$, $(-6, -2)$ を通る円の方程式を求めよ．

② 中心が直線 $3x - y - 4 = 0$ 上にあり，x 軸，y 軸の両方に接する円の方程式を求めよ．

【練習 54：円を図形的に考える〜その２〜】

「円 C：$(x-a)^2+(y-3)^2=13$ が A(5, 5) を通る」場合について考えてみよう．



(I) 中心は破線上のどこかにある　**(II)** Ａを通る円はこのどちらか　**(III)** 三平方の定理を用いて

まず，円 C の中心は $(a,\ 3)$ なので，図 (I) の破線上のどこかに C の中心はある．

A の y 座標が 5 なので AH = $\boxed{\text{ア}}$ であり，C の半径を考えて AP = $\boxed{\text{イ}}$ なので，(III) の直角三角形 APH を考えて，PH = $\boxed{\text{ウ}}$ と分かる．

ここから，C の中心の座標は $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ のいずれかと分かる．

4.　円と直線の関係

A.　円と直線の交点

円と直線の交点の座標を求めるには，連立方程式を解けばよい．このとき，「グラフの交点の座標と連立方程式の解は一致する」．また，連立方程式の解が無い場合は，グラフの交点も無い．

【例題 55】　座標平面上に円 $C : x^2+y^2=5$ があるとき，以下の問いに答えよ．

1. 直線 $l_1 : x+y=3$ と円 C の共有点があれば，すべて求めよ．
2. 直線 $l_2 : x+y=4$ と円 C の共有点があれば，すべて求めよ．

【練習 56：円と直線の共有点の個数】

次の円と直線の，共有点の座標を求めなさい．なければ「共有点なし」と答えること．

(1) 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=2x-5$

(2) 円 $(x+2)^2+(y-2)^2=5$ と直線 $y=3x+3$

(3) 円 $x^2+y^2=9$ と直線 $x-2y+7=0$

B. 円と直線の共有点の個数

円と直線の関係は,「円の中心と，直線の距離」でも決まる．

【暗記 57：円と直線の共有点の個数】

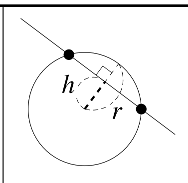
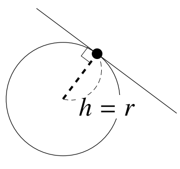
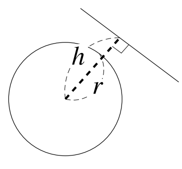
円 $C: x^2+y^2=5$ と直線 $l: x+y=k$ が共有点を持つような実数 k の範囲を，次の 2 通りで求めよ．

1. 2 次方程式の判別式を用いる．
2. 『点と直線の距離』(p.95) を用いる．

円 C : $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ と直線 L : $ax+by+c=0$ を考えるとき

- 円 C と直線 L の共有点の個数
- 方程式 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ と $ax+by+c=0$ を連立して得られる 2 次方程式の判別式 D
- 円の中心 $(p,\ q)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 $h=\dfrac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

について，次のようにまとめることができる．

円 C と直線 L の位置関係			
C と L の共有点の個数	**2 個**	**1 個**	**0 個**
2 次方程式の判別式 D	$\boldsymbol{D>0}$	$\boldsymbol{D=0}$	$\boldsymbol{D<0}$
$(p,\ q)$ と直線 L の距離 h	$\boldsymbol{h<r}$	$\boldsymbol{h=r}$	$\boldsymbol{h>r}$

【練習 58：円と直線の共有点の個数】

(1) 円 $x^2+y^2=k$ と直線 $3x-4y+10=0$ の共有点の個数を，以下の k についてそれぞれ答えなさい．

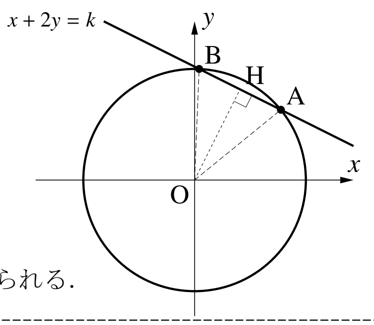
1) $k=1$　　2) $k=4$　　3) $k=9$

(2) 円 $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$ と直線 $2x+3y-4=0$ が共有点を持つような，実数 r の範囲を求めよ．

C.　円が切り取る線分の長さ

【暗記 59：円が切り取る線分の長さ〜その１〜】

円 C : $x^2+y^2=6$ と直線 l : $x+2y=k$ が 2 点 A，B で交わり，AB = 2 であるとき，k の値を求めたい．
以下の $\boxed{}$ に入る式・言葉・値を答えよ．



右図のように，円の中心を O とし，O から直線 $x+2y=k$ へ下ろした垂線の足を H とおく．このとき，OA = $\boxed{\text{ア}}$，AH = $\boxed{\text{イ}}$ であるので，三平方の定理より，OH = $\boxed{\text{ウ}}$．
ところで，点 O と直線 l の距離を『点と直線の距離』(p.95) で計算すると $\boxed{\text{エ}}$ であるが，これは OH の長さに一致する．
よって，方程式 $\boxed{\text{ウ}}$ = $\boxed{\text{エ}}$(= OH) を解けば，k = $\boxed{\text{オ}}$ と求められる．

【練習 60：円が切り取る線分の長さ〜その２〜】

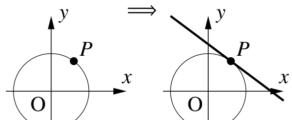
円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y-1=m(x-2)$ が A，B で交わり AB = 6 であるとき，m の値を求めよ．

【発展 61：円が切り取る線分の長さ〜その３〜】

円 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=10$ と直線 $l: x+ky-2=0$ の交点を A，B とし，AB の中点を M，円 C の中心を O とする．以下の問いに答えよ．

1. どんな k の値に対しても，直線 l はある定点 P を通る．その定点 P を求めよ．
2. $\text{AM}=a$，$\text{OM}=b$ とおくとき，△OAB の大きさを a，b で表せ．
3. △OAB = 3 のとき，AM，OM の長さを求め，k の値を求めよ．

D.　円の接線〜その１〜（円周上の接点が与えられ，接線は１本）



簡単のため，円 C の中心が原点 O(0, 0) である場合を考えると右図のようになり，円周上の点 P で C に接する直線は 1 本しか存在しないと分かる．

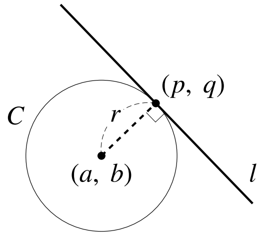
円周上の点から引いた接線の方程式

円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の周上の点 $(p,\ q)$ から引いた接線 l の方程式は

$$(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$$

となる．特に，円 C の中心が原点にある場合は次のようになる．

$$px+qy=r^2$$　←a = b = 0 を接線 l の式に代入した



（証明）p.130 を参照のこと．

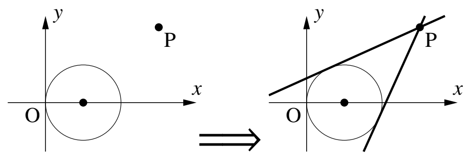
円の方程式において，2 乗のうち片方のみに，$(x,\ y)=(p,\ q)$ を代入すると覚えるとよい．また，次で学ぶ「円周外の点から引いた接線の方程式」と混同しないようにしよう．接線が 1 本に決まるかどうかで判断するとよい．

【例題 62】

1. 円 $x^2+y^2=13$ の周上の点 $(2,\ 3)$ で接する，接線の方程式を求めよ．
2. 円 $x^2+y^2=13$ の周上の点 $(2,-3)$ で接する，接線の方程式を求めよ．
3. 円 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$ の周上の点 $(2,-1)$ で接する，接線の方程式を求めよ．
4. 円 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ の周上の点 $(0,-1)$ で接する，接線の方程式を求めよ．

E. 円の接線〜その２〜（円周外の点から引き，接線は２本）

円 C の外に点 P をとり，P から引いた円 C の接線を考えよう．右図のようにして，そのような直線は 2 本存在することが分かる．



【暗記 63：円周外の点から引いた接線の方程式】

円 C ：$x^2 + y^2 = 2$ と点 P(3, 1) について，P から引いた C の接線 l の方程式を求めよ．

【練習 64：円の接線】

(1) 円 $C\ : x^2+y^2=4$ の周上にある $(1,\ \sqrt{3})$ で接する C の接線を求めよ．

(2) 円 $C\ : x^2+y^2=4$ の接線のうち，$(-2,\ 5)$ を通るものをすべて求めよ．

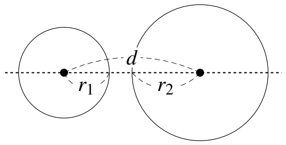
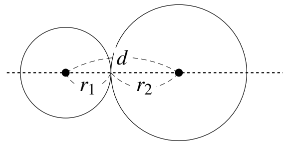
5. 2円の関係

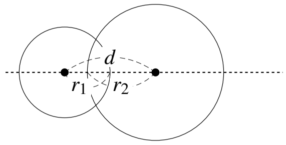
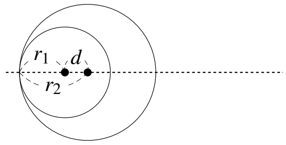
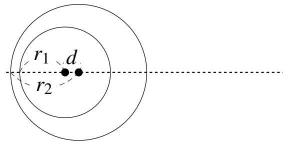
A. 2円の位置関係

数学Aで学んだように，2円の位置関係は以下の5つの状態しかない．

2円の位置関係

2円の半径を r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$，中心間の距離を d とすると，以下のようになる．

2円の図		
2円の位置関係	離れている	外接している
2円の共有点の個数	0個	1個(外接)
2円の中心間の距離 d	$\boldsymbol{r_2 + r_1 < d}$	$\boldsymbol{d = r_2 + r_1}$

		
交わっている	内接している	一方が他方を含む
2個	1個(内接)	0個
$\boldsymbol{r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1}$	$\boldsymbol{d = r_2 - r_1}$	$\boldsymbol{d < r_2 - r_1}$

円が複数個あるときは，まず，中心間を線で結んだ図を描こう．そのうえで，上のような条件を考えるとよい．

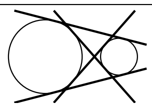
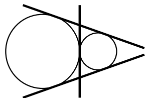
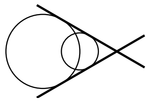
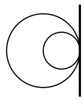
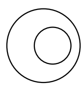
【例題 65】 円 C_1 : $x^2 + y^2 = 9$ と，半径5の円 C_2 がある．C_2 の中心Aが次の点にあるとき，C_1 と C_2 の位置関係を答えよ．

1. A(4, 0)
2. A(10, 0)
3. A(2, 0)
4. A(6, 8)
5. A(−3, 1)
6. Aの y 座標は4であり，円 C_1 と C_2 が外接するとき，Aの座標を答えなさい．

B. 2 円の共通接線

数学 A でも学んだように，2 円の共通接線の本数は，2 円の位置関係によって異なる．

2 円の共通接線

本数	4 本	3 本	2 本	1 本	0 本
2 円と共通接線の図					
2 円の位置関係	離れている	外接している	交わっている	内接している	一方が他方を含む
共通外接線	2 本	2 本	2 本	1 本	0 本
共通内接線	2 本	1 本	0 本	0 本	0 本

【例題 66】 前ページの**【例題】**と同じように，円 C_1 : $x^2 + y^2 = 9$ と，半径 5 の円 C_2 がある．C_2 の中心 A が次の点にあるとき，C_1 と C_2 の共通接線の本数を答えよ．

1. A(4, 0)　　2. A(10, 0)　　3. A(2, 0)　　4. A(6, 8)　　5. A(−3, 1)

【暗記 67 : 共通接線の長さ】

2 円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$, $C_2 : (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$ がある．

1. 2 円の共通外接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ A_1，A_2 で接するとき，線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の長さを求めよ．
2. 2 円の共通内接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ B_1，B_2 で接するとき，線分 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ の長さを求めよ．

【㊥㊦ 68：2円の共通接線】

2つの円 $C_1 : (x+1)^2+(y+1)^2=4$，$C_2 : (x-2)^2+(y-2)^2=1$ がある．この2円に対し，共通内接線 l，共通外接線 L を考え，2本ある L の交点を P とする．

① 円 C_1, C_2 と接線 l, L を座標平面上に描き，共通内接線 l の方程式を求めよ．

② P の座標を求めよ．

③ 共通外接線 L の傾きを求めよ．

6. 発展 円と放物線

円と放物線の場合は，基本的に2つの方程式を連立して考えるしかない．『点と直線の距離』は使えないし，相似などを用い図形的に解くこともできないからである．

【発展 69：円と放物線】

放物線 $H : y=x^2$ と，中心が P(0, 2) にある円 C が，2点 A, B で接している．

① 円 C の半径を求めよ．

② △APB の面積を求めよ．

7. 2つのグラフの交点を通るグラフ

一般に，2つの陰関数 $F(x,\ y)=a$，$G(x,y)=b$ があるとき，2つのグラフの交点を通るグラフは

$k\{F(x,\ y)-a\}+\{G(x,\ y)-b\}=0$ ……………………①

という形で表される（グラフ $F(x,\ y)=a$ 以外は全て表わされる）．

逆に，k がどんな実数でも①のグラフは，$F(x,\ y)=a$，$G(x,y)=b$ の交点を必ず通る．

【暗記 70：2つのグラフの交点を通る円】

直線 L: $2x+3y=1$，円 C: $x^2+y^2=4$ の交点 A, B と，原点 O を通る円の方程式を求めよ．

【発展 71：2円の交点と，それを通る直線・円】

2円 $C_1 : x^2+y^2=2$, $C_2 : (x-1)^2+(y-2)^2=3$ の2交点を A, B とする．

① 直線 AB の方程式を求めよ．

② A, B の座標を求めよ（x 座標は A の方が小さいとする）．

③ A, B を通り，原点を通る円の方程式を求めよ．

3.6　軌跡

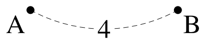
この節では，方程式や関数を利用して，様々な軌跡の表し方にについて学ぶ.

1.　軌跡

軌跡 (locus) とは，「ある条件を満たす点すべてを集めてできる線状の図形」のことである.

【例題 72】 右の点 A，B について，以下の条件を満たす軌跡を，それぞれ図示しなさい.

1. $\mathrm{AP} = 1$ を満たして動く点 P の軌跡
2. $\mathrm{AQ} = \mathrm{BQ}$ を満たす点 Q の軌跡
3. $\angle \mathrm{ARB} = 90^\circ$ を満たす点 R の軌跡



2.　座標平面上の軌跡

A.　軌跡の方程式

座標平面上で考えると，軌跡は x と y の間の方程式で表され，それは**軌跡の方程式** (equation of locus) といわれる．これを求めるには，軌跡上の点を (x, y) とおいて，x と y が満たすべき等式を考えればよい.

【例題 73】　A(1, 2)，B(3, 6) とする．$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 = \mathrm{AB}^2$ を満たす点 P の軌跡を考える.

1. $\mathrm{P}(x, y)$ とおく．AP^2, BP^2 をそれぞれ x, y で表せ.
2. 点 P の軌跡の方程式を求めなさい．また，それはどんな図形か答えなさい.

【例題 74】 座標平面上において，2 点 A(1, 3)，B(4, −3) について，AP : PB = 1 : 2 となる点 P が描く軌跡の方程式を求めなさい．また，それはどのような図形か．

上の式変形はすべて，同値の記号 $\Leftrightarrow$ で結ばれ，また，AP : BP = 1 : 2 と $AP^2 : BP^2 = 1 : 4$ は「同値」となっている．

この「同値な変形である」ことは重要で，解答に明記しなければならない．明記しないと，「点 P(x, y) が $x^2 + (y-5)^2 = 20$ を必ず満たす」ことは導かれていても，「円 $x^2 + (y-5)^2 = 20$ 上のすべての点が P の軌跡である」ことを示したことになっていない．

もし，同値関係を書かない場合は，解答の最後に「逆に，円 $x^2 + (y-5)^2 = 20$ 上のすべての点 (x, y) は，上の計算を逆にたどって，P の条件を満たす．」と明記しなければならない．

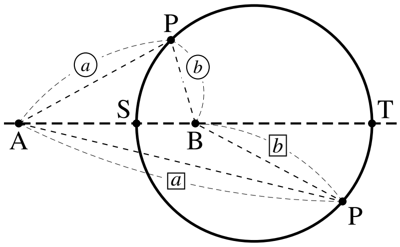
【練習 75：軌跡〜その１〜】

3 点 A(2, 1)，B(4, 0)，C(0, −1) について，$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 40$ となる点 P の軌跡を求めよ．

【練習 76：軌跡〜その２〜】

2 点 A(1, 2)，B(5, −2) について，AP : PB = 3 : 1 となる点 P が描く軌跡を求めよ．

一般に，AP : PB = $a : b$ を満たす点 P の軌跡は，$a \fallingdotseq b$ ならば円になる（これを**アポロニオスの円** (circle of Apollōnios) という）．この円は，線分 AB を $a : b$ に内分する点（右図の S），$a : b$ に外分する点（右図の T）が直径の両端になる．$a = b$ ならば，P の軌跡は線分 AB の垂直二等分線である．



【発展 77：軌跡〜その３〜】

直線 $l : y = 2$ と F(0, −3) について，直線 l との距離が，F までの距離と等しくなる点の軌跡を求めよ．

【発展 78：軌跡〜その４〜】

直線 $l : y = -x + 1$ と直線 $m : y = 7x - 2$ から等距離にある点の軌跡を K とおく．ただし，点が直線上にあるときは，直線との距離を 0 とする．K は，直線 l, m にとってのどんな図形を描くか答えよ．また，K の方程式を求めよ．

B.　軌跡を描く点の他にも動点がある場合

軌跡を描く点の他にも動点がある場合を考えてみよう．

【例題 79】 点 A が放物線 $y = x^2$ の周上を動くとき，A と点 B(0, 2) の中点 P の軌跡を考える．

1. A$(a,\ a^2)$ とするとき，P の座標を a で表せ．
2. P が描く軌跡の方程式を求めよ．

上では P$(x,\ y)$ とおいているが，問題と文字がかぶるため，P$(X,\ Y)$ とおくことも多い．詳しくは p.119 参照のこと．

【例題 80】 原点 O について，点 A が円 $C : (x-6)^2 + y^2 = 9$ の周上を動き，線分 OA を 2 : 1 に内分する点を P とする．

1. P$(x,\ y)$，A$(s,\ t)$ とする．x と s の間に成り立つ式，y と t の間に成り立つ式を求めよ．
2. P が描く軌跡の方程式を求めよ．

軌跡を求めることと，（連立）方程式の文章題を解くことには共通点がある．いずれも「求めたいものを $x(,\ y)$ とおき」「$x(,\ y)$ が満たす式を作り」「それを解く」「条件に満たしていることを確かめる」という 3 段階を踏む．

【練習 81：動点をもつ軌跡〜その１〜】

$A(0, -3)$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) 点 B が放物線 $y = -2x^2$ 上を動くとき，線分 AB を $2 : 1$ に内分する点 P の軌跡を求めなさい.

(2) 点 C が円 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 上を動くとき，線分 AC を $1 : 3$ に外分する点 Q の軌跡を求めなさい.

【練習 82：動点をもつ軌跡〜その２〜】

$A(2,\ 1)$，$B(1, -4)$ があり，点 P が円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動くとき，$\triangle ABP$ の重心の軌跡を求めなさい.

【練習 83：頂点の描く軌跡】

放物線 $y = x^2 + 2ax + 4x - 3a + 4$ の頂点を A とするとき，次の問いに答えなさい.

(1) A の座標を a を用いて表せ.　　(2) A の軌跡の方程式を求めよ.

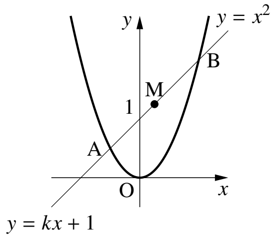
【発展 84：動点をもつ軌跡〜その３〜】

直線 $l : y = x - 3$ と放物線 $C : y = x^2$ がある．点 A が l 上を，点 B が C 上を，線分 AB が y 軸と平行であるように動くとき，線分 AB を $2 : 1$ に内分する点 P の軌跡を求めなさい.

3. 発展 定義域に注意すべき軌跡

A. グラフの交点の中点が描く軌跡（常にグラフが交点を持つ場合）

放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = kx + 1$ の 2 交点 A，B について，線分 AB の中点を M とし，k がすべての実数をとったときの，M の軌跡について考える．



このとき，A と B の座標は連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = kx + 1 \end{cases}$ の解に一致する．A と B を直接求めるならば，この連立方程式を解いて

$$x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0 \qquad \therefore\ x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

となる（このとき，k がどんな値でも $k^2 + 4$ は正なので，これらは常に実数である．）．複雑な形をしているが，これが A，B の x 座標である．そこで，M の x 座標を計算すると

$$(\text{M の } x \text{ 座標}) = \frac{\text{A の } x \text{ 座標} + \text{B の } x \text{ 座標}}{2} = \frac{\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} + \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}}{2} = \frac{k}{2}$$

となり，簡潔な値となる．では，複雑な A，B の値を求めず，M の値を計算する方法はないだろうか．

それには，『解と係数の関係 (p.47)』を用いるとよい．

【暗記 85：2 交点の中点の軌跡】

A，B の x 座標を α, β，M(X, Y) とする．A，B とも放物線 $y = x^2$ 上にあるので，α, β を用いて，A$(\alpha,$ $\boxed{\text{ア}}$)，B$(\beta,$ $\boxed{\text{イ}}$)，$X =$ $\boxed{\text{ウ}}$，$Y =$ $\boxed{\text{エ}}$ と表される．

A，B の座標を求めるには，C と l の式を連立して x の 2 次方程式 $\boxed{\text{オ}}$ を解けばよい．$\boxed{\text{オ}}$ の 2 解は α, β であり，$\boxed{\text{オ}}$ の判別式 D は，$D =$ $\boxed{\text{カ}}$ $>$ $\boxed{\text{キ}}$ なので，k の値によらず α, β は常に実数である．2 次方程式 $\boxed{\text{オ}}$ について，『解と係数の関係 (p.47)』より，

$\alpha + \beta =$ $\boxed{\text{ク}}$，$\alpha\beta =$ $\boxed{\text{ケ}}$

が成り立つので，k のみを用いて $X =$ $\boxed{\text{コ}}$，$Y =$ $\boxed{\text{サ}}$ となる．これから k を消去し，M の軌跡の方程式 $\boxed{\text{シ}}$ を得る．

上の例題の最後に「$Y = 2X^2 + 1$ であるから軌跡は $y = 2x^2 + 1$」とした．これは，次の内容を簡潔に述べた結果である（『陰関数のグラフ』(p.84) 参照）．

「P の x 座標を X，P の y 座標を Y とすれば，$Y = 2X^2 + 1$ を満たしている．これは，P(X, Y) が $y = 2x^2 + 1$ というグラフの上にあることを意味しているから，これが P の軌跡になる．」

【練習 86：2 交点の中点の軌跡】

放物線 $y = x^2 - 2$ と直線 $y = k(x-1)$ の 2 交点 A，B について，線分 AB の中点を M とする．定数 k がすべての実数をとるとき，M が描く軌跡の方程式を求めよ．

B. 定義域に注意すべき軌跡

これまでの問題では，2 つのグラフには必ず共有点があった．k の値によってグラフが交点を持たないような場合は，次のことに注意して，軌跡の方程式の定義域に注意しないといけない．

- 2 次方程式の解を α, β などでおいたとき，実数解を持つかどうか
- 式で割り算するとき，その式が 0 になることはないだろうか

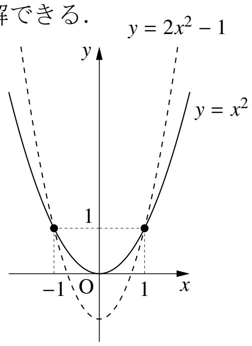
【発展 87：2 交点の中点の軌跡〜その３〜】

放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = kx - 1$ について，C と l が異なる 2 交点 A，B をもつよう定数 k が変化するとき，AB の中点を M の軌跡を考える．

1. M が存在するための k の範囲を求めよ．
2. M の軌跡の方程式を求めよ．

上の例題において，求める軌跡が放物線の一部分になったことは，次のように理解できる．

- 直線 $l : y = kx - 1$ は k の値に関わらず定点 $\mathrm{A}(0, -1)$ を通り，k の値によっては C と l は交わらない．
- 右図のように，M の軌跡の方程式 $y = 2x^2 - 1$ は放物線 C の下に突き抜ける．M は放物線 C より上にあるはずなので，C の下につきぬけた部分は軌跡として適さない．放物線 C と $y = 2x^2 - 1$ の共有点を求めると $(1,\ 1),\ (-1,\ 1)$ であるから，$-1 \leqq x \leqq 1$ の部分が適さないと分かる．これは上で求めた結果と一致する．



【㊜㊫ 88：2 交点の中点の軌跡〜その４〜】

円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と直線 $l : y = kx + 2$ について，C と l が異なる 2 交点 A，B をもつよう定数 k が変化するとき，AB の中点 M の軌跡を求めよ．

【㊜㊫ 89：対称式で表された座標の軌跡】

$a^2 + b^2 = 10$ を満たしながら $a,\ b$ が実数全体を動くとき，$\mathrm{M}(a + b\ , ab)$ の軌跡の方程式を求めよ．

【㊜㊫ 90：2 直線の交点の軌跡】

2 直線 $l_1 : kx + y + 1 = 0$，$l_2 : x - ky - 1 = 0$ の交点 P が描く軌跡を求めよ．

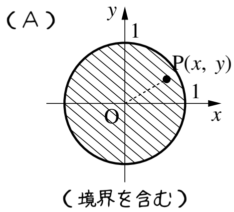
1. 領域とは

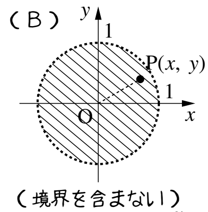
A. 領域とは

平面上の**領域** (domain) とは，「平面的広がり[*8]をもつ，平面の一部分」である[*9].

たとえば，以下の不等式は座標平面上の領域を表す.

(A) $x^2+y^2 \leqq 1$ (B) $x^2+y^2<1$ (C) $y>x-1$

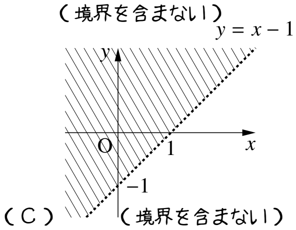




P(x, y) について，$x^2+y^2 \leqq 1$ を満たす点 P の集まりが，(A) の表す領域である[*10]．これは領域の境界線上も含むので「**境界** (boundary) を含む」という.

(A) の領域から円周上の点を除けば (B) の領域になり，「境界を含まない」.

(C) の表す領域は，「直線 $y=x-1$ よりも y 座標の大きい点の集まり」になり，直線 $y=x-1$ より上部（境界を含まない）である.



【例題 91】 座標平面上の以下の領域を，図示しなさい．（領域の図示をするときは，「境界を含む」または「境界を含まない」を書くこと．これは，以後の問題でも同様である.）

1. $x^2+y^2 \leqq 4$ 2. $x^2+y^2>4$ 3. $x^2+2x+y^2-4y<0$ 4. $y<2x+3$ 5. $y \geqq 2x+3$
6. $y \leqq x^2$ 7. $y-x^2>0$ 8. $2x-y+1>0$

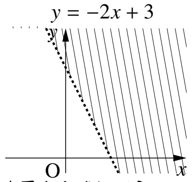
[*8] 平面の一部分が曲線や点であるときは，それを領域とは言わない．「平面的広がり」という表現は曖昧であるが，これを厳密に定義するには高校数学の範囲を大きく超えてしまう．また，空間の領域とは「空間的広がりをもつ，空間の一部分」である.

[*9] 大学以降の数学においては「領域」の定義が異なり，「境界を含まない連続的な（高校数学の）領域」のみを指す.

[*10] このことから，(A) の領域を $\left\{(x, y) \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ と表すこともできる.

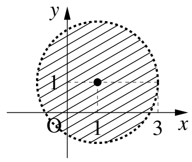
【例題 92】 以下の座標平面上の領域を，式で表しなさい.

1.



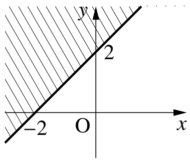
（境界を含まない）

2.



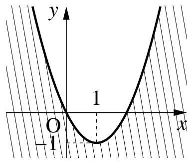
（境界を含まない）

3.



（境界を含む）

4.



（境界を含む）

B. 複数の不等式が表す領域

たとえば，領域 $\begin{cases} y < -x^2 + 2 \\ 2x + y + 1 > 0 \end{cases}$ とは，領域 $y < -x^2 + 2$ と領域 $2x + y + 1 > 0$ の共通部分を表す.

【例題 93】 領域 $\begin{cases} y < -x^2 + 2 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x + y + 1 > 0 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ を座標平面上に図示しなさい.

【練習 94：いろいろな領域】

(1) 領域 $x^2+2x+y>4$ を図示しなさい．

(2) 以下の領域を，それぞれ図示せよ．

i) $\begin{cases} y<x+2 \\ y<2x-1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y<x^2+1 \\ x+y-3>0 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 5 \\ 0 \leqq x-y+1 \end{cases}$ iv) $x^2 \leqq y \leqq -3x+4$

【練習 95：点が領域に含まれるか調べる】

A(1, 2), B(−2, 3), C(−3, −1) とする．

(1) 点 A，B，C のうち，領域 $y > 2x + 3$ に含まれる点をすべて答えよ．

(2) 点 A，B，C のうち，不等式 $x^2 + y^2 < 6$ に含まれる点をすべて答えよ．

2. 領域の利用

A. 条件を満たす (x, y) を xy 平面に図示する

【例題 96】 x, y を実数とするとき，以下の問いに答えよ．

1. 不等式 $(x - y)(x + y - 2) > 0$ を満たす (x, y) を座標平面上に図示せよ．
2. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 2$ ならば $x + y > 0$ であることを，領域を用いて示せ．

【練習 97：領域の利用】

(1) 領域 $(y+2x)(y-2x^2) \leqq 0$ を座標平面上に図示せよ．

(2) $x^2+(y-3)^2 \geqq 16$ ならば $x^2+(y-1)^2 \geqq 4$ であることを，領域を用いて示せ．

【発展 98：領域の利用】

$a,\ b,\ x,\ y$ を実数とするとき，以下の問いに答えよ．

① 領域 $x^2-y^2+2x-1>0$ を座標平面上に図示しなさい．

② $(x-1)^2+y^2 \leqq 5$ ならば $x^2+(y+2)^2 \leqq 20$ であることを示せ．

③ 領域 $y \leqq -x^2+ax+b$ が点 $(1,\ 0)$ を含む $a,\ b$ の範囲を ab 平面に図示せよ．

【発展 99：絶対値を含む不等式の領域】

① 領域 $|x|+|y| \leqq 1$ を図示しなさい．

② $0<k$ について，2 つの領域 $D_1: |x|+|y| \leqq k$，$D_2: x^2+y^2 \leqq 4$ を考える．$D_1 \subset D_2$ となる k の条件，$D_1 \supset D_2$ となる k の条件をそれぞれ答えよ．

B. 最大・最小と領域

$x^2+y^2 \leqq 4$ を満たす $(x,\ y)$ のうち，$2x+y$ がとる最大値・最小値を考えてみよう．この問題は，$2x+y=k$ とおいて，次のようにして領域の問題と置き換えられる．

$x^2+y^2 \leqq 4$ を満たす $(x,\ y)$ のうち，$2x+y=k$ がとる最大値・最小値を求める
$\leftrightarrow$ $x^2+y^2 \leqq 4$ と $2x+y=k$ を同時に満たす $(x,\ y)$ が存在するような，k の最大値・最小値を求める
$\leftrightarrow$ 座標平面において，領域 $x^2+y^2 \leqq 4$ と直線 $2x+y=k$ が共有点を持つような，k の最大値・最小値を求める

こうして，式 $2x+y$ の最大・最小の問題は，座標平面上の問題に置き換えられる．

【暗記 100：最大・最小と領域〜その１〜】

$x^2+y^2 \leqq 4$ を満たす $(x,\ y)$ のうち，$2x+y$ がとる最大値・最小値を求め，それぞれにおける $x,\ y$ の値も求めよ．

【暗記 101：最大・最小と領域〜その２〜】

$0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 2x+y \leqq 8,\ x+3y \leqq 9$ を満たす領域を D とする．

1. 領域 D を図示しなさい．
2. D を満たす $(x,\ y)$ について，$x+y$ の最大値・最小値を求め，それぞれにおける $x,\ y$ の値も求めよ．

【練習 102：最大・最小と領域〜その３〜】

x, y を実数とするとき，以下の最大値・最小値を求め，それぞれにおける x, y の値も求めなさい．

(1) $x^2+y^2 \leqq 5$ のとき，$x-2y$ の取り得る最大値・最小値

(2) $0 \leqq x$, $y \leqq -x+3$, $y \geqq 2x-3$ を満たす $(x,\ y)$ のうち，$x+2y$ がとる値の最大値・最小値と，$3x-y$ がとる値の最大値・最小値

【発展 103：最大・最小と領域〜その４〜】

① $0 \leqq y \leqq -x^2+4$ のとき，値 $x+2y$ のとりうる範囲を求めよ．

② $y \geqq 3x+3$ または $y \geqq -2x+2$ のとき，x^2+y^2 がとりうる値の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ．

A.　三角形の面積の証明（p.97）

【発展 104：三角形の面積】

原点を O とし，A(a_1, a_2)，B(b_1, b_2) とする．ただし，$a_1 \fallingdotseq b_1$ とする．

① 原点から直線 AB へ引いた垂線の長さ h を求めよ．

② 線分 AB の長さを求め，△OAB の面積を求めよ．

この公式は，数学 B で学ぶ「ベクトル」を用いても証明できる．

B. 「円周上の点から引いた接線の方程式」の証明（p.130）

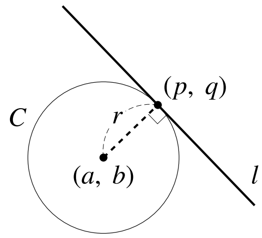
円周上の点から引いた接線の方程式

円 $C : (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の周上の点 $(p,\ q)$ から引いた接線 l の方程式は

$$(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$$

となる．特に，円 C の中心が原点にある場合は次のようになる．

$$px+qy=r^2$$ ←a＝b＝0を接線 l の式に代入した



（証明）$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の中心を $\mathrm{O}(a,\ b)$ とすると，接線 l は線分 OP と直交する直線し，線分 OP の傾きは $\dfrac{q-b}{p-a}$ であるので，

$$\frac{q-b}{p-a}\times（直線\ l\ の傾き）=-1 \iff （直線\ l\ の傾き）=-\frac{p-a}{q-b}$$

となる．よって，l は $(p,\ q)$ を通り傾き $-\dfrac{p-a}{q-b}$ の直線と分かるので

$$\begin{aligned}
y-q=-\frac{p-a}{q-b}(x-p) &\iff (q-b)(y-q)=-(p-a)(x-p)\\
&\iff (q-b)(y-b+b-q)=-(p-a)(x-a+a-p)\\
&\iff (q-b)(y-b)+(q-b)(b-q)=-(p-a)(x-a)-(p-a)(a-p)\\
&\iff (p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=(p-a)^2+(q-b)^2
\end{aligned}$$

となる．ここで，P は円 C の周上にあるので，$(p-a)^2+(q-b)^2=r^2$ を満たす．つまり，l の方程式は $(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$ となる．

この方程式は，数学 B で学ぶベクトルを用いて導くこともできる．