

# 13th-note 数学 I

(2013 年度卒業生まで)

## ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち、背景が灰色である文字は、数学 I で用いられることがある。

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	$\alpha$	nu	ニュー	N	$\nu$
beta	ベータ	B	$\beta$	xi	クシー, グサイ	$\Xi$	$\xi$
gamma	ガンマ	$\Gamma$	$\gamma$	omicron	オミクロン	O	$o$
delta	デルタ	$\Delta$	$\delta$	pi	パイ	$\Pi$	$\pi, \varpi$
epsilon	イプシロン	E	$\epsilon, \varepsilon$	rho	ロー	P	$\rho, \varrho$
zeta	ゼータ	Z	$\zeta$	sigma	シグマ	$\Sigma$	$\sigma, \varsigma$
eta	イータ	H	$\eta$	tau	タウ	T	$\tau$
theta	シータ	$\Theta$	$\theta, \vartheta$	upsilon	ユプシロン	$\Upsilon$	$\upsilon$
iota	イオタ	I	$\iota$	phi	ファイ	$\Phi$	$\phi, \varphi$
kappa	カッパ	K	$\kappa$	chi	カイ	X	$\chi$
lambda	ラムダ	$\Lambda$	$\lambda$	psi	プシー, プサイ	$\Psi$	$\psi$
mu	ミュー	M	$\mu$	omega	オメガ	$\Omega$	$\omega$

この教材を使う際は

- 表示：原著者のクレジット（「13th-note」または「13th-note & www.ftext.org」）を表示してください。
- 非営利：この教材を営利目的で利用してはいけません。ただし、学校・塾・家庭教師の授業で利用するための無償配布は可能です。
- 継承：この教材を改変した結果生じた教材には、必ず、原著者のクレジット（「13th-note」または「13th-note & www.ftext.org」）を表示してください。



# 目次

第3章	三角比と図形の計量	145
§3.1	鋭角の三角比	145
§1.	三角比の定義 — 正接 (tan), 余弦 (cos), 正弦 (sin)	145
§2.	三角比の利用	150
§3.	三角比の相互関係	155
§3.2	三角比の拡張	160
§1.	座標と三角比の関係	160
§2.	拡張された三角比の相互関係	166
§3.3	余弦定理・正弦定理	173
§1.	辺と角の名前	173
§2.	余弦定理 (第2余弦定理)	173
§3.	三角形の決定 (1)	176
§4.	正弦定理	178
§5.	三角形の決定 (2)	180
§3.4	平面図形の計量	182
§1.	三角形の面積と三角比	182
§2.	平面図形の重要な問題・定理	186
§3.	平面図形の面積比	190
§3.5	空間図形の計量	192
§1.	空間図形の表面積比・体積比	192
§2.	球	194
§3.	空間図形と三角比	196
§3.6	第3章の補足	202
§1.	$36^\circ$ , $72^\circ$ などの三角比	202
§2.	第1余弦定理	205
§3.	ヘロンの公式の証明	206
	三角比の表	207

索引

# 第3章 三角比と図形の計量



たとえば、3 辺の長さが 4 cm, 5 cm, 7 cm の三角形は、1 つに決まる。しかし、その三角形の内角は何度くらいなのか、そもそも鋭角三角形か、鈍角三角形なのかは、描いてみないと分からない。

三角比を用いると、この問題を簡単な計算で解決する。



## 3.1 鋭角の三角比



この節では、直角三角形を用いて、 $90^\circ$  より小さな角(鋭角)の三角比を学ぶ。

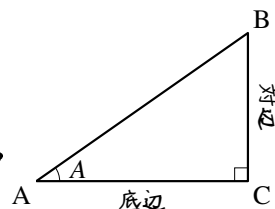
### 1. 三角比の定義 — 正接 (tan), 余弦 (cos), 正弦 (sin)

#### A. 直角三角形の辺の名前

AB が斜辺 (hypotenuse) である直角三角形 ABC を  $\angle A$  から見るとき\*1

辺 BC のことを対辺 (opposite side), 辺 CA のことを底辺 (base)

という。右図を「 $\rightarrow$ 」の位置から見るとき、「 $\rightarrow$ 」の反対側に対辺があり、三角形の底に底辺がある。



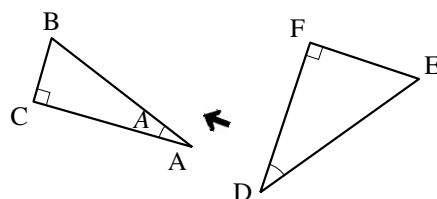
【例題 1】 右の  $\triangle ABC$  を「 $\rightarrow$ 」の位置から見たとき

辺 AB は斜辺、辺 BC は

である。また、 $\triangle DEF$  を頂点 D から見たときは

辺

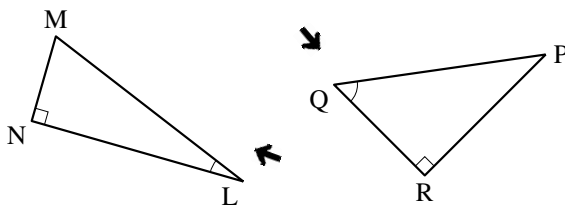
である。



\*1 この章の図にある「 $\rightarrow$ 」は、本文中で「～から見たときの」とある場合の説明の補助として使われている。自分も同じ所から見つめているつもりになって、図形を考えてみよう。

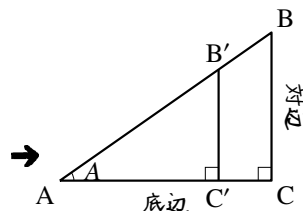
【練習 2：直角三角形の辺の名称】

「→」の位置から見たとき、左の三角形の LM, MN, NL, 右の三角形の PQ, QR, RP は、それぞれ対辺, 底辺, 斜辺のいずれか、



B. 正接 (tan)

右図において、 $\angle A$  から見たときの  $\frac{\text{(対辺)}}{\text{(底辺)}}$  の値は、 $\angle A$  の大きさだけで決まる。実際に測ってみれば、 $\frac{C'B'}{AC'} = \frac{0.75 \times CB}{0.75 \times AC} = \frac{CB}{AC}$  である ( $\triangle AB'C'$  は  $\triangle ABC$  の 0.75 倍で描かれている)。



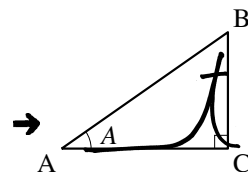
正接 (tan) の定義

右図の直角三角形 ABC において

$$\text{タンジェントエー} \quad \tan A = \frac{\text{(対辺)}}{\text{(底辺)}} = \frac{CB}{AC} \quad \leftarrow \text{筆記体が終わる辺} \quad \leftarrow \text{筆記体が始まる辺}$$

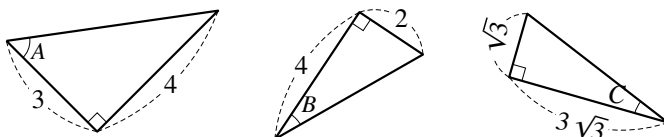
と定義し<sup>\*2</sup>、 $A$  の正接または、 $A$  のタンジェント (tangent) という。

$\tan A$  は、 $\angle A$  から見た底辺に対する対辺の倍率を表している。



tan の定義は  $t$  の筆記体を用いて覚える。右上図では、 $t$  の筆記体は、分母の AC で始まり、分子の CB で終わる。

【例題 3】 右の図において、 $\tan A, \tan B, \tan C$  をそれぞれ求めよ。



必ず、筆記体を用いた定義を確認しよう。慣れれば、問題の図を回したり、自分で描きなおす事なく求められるようになる。

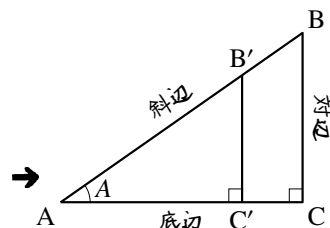
<sup>\*2</sup> この tan というのは、3 文字で 1 つの記号であり  $t \times a \times n$  のことではない。これを明確にするため、数学では  $\tan$  と斜体では書かず、 $\tan$  と立体で書く。これは、次にでてくる  $\sin, \cos$  も同様である。

### C. 余弦 (cos) · 正弦 (sin)

右図において、 $\angle A$  から見たときの  $\frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$ ,  $\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$  の値は  $\angle A$  の大きさだけで決まる。実際、次が成り立つ。

$$\frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} = \frac{AC'}{B'A} = \frac{0.75 \times AC}{0.75 \times BA} = \frac{AC}{BA}$$

$$\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{0.75 \times BC}{0.75 \times AB} = \frac{BC}{AB}$$



#### 余弦 · 正弦の定義

右図の直角三角形 ABC において

$$\text{コサインエー} \quad \cos A = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} = \frac{AC}{BA} \quad \leftarrow \text{筆記体が終わる辺}$$

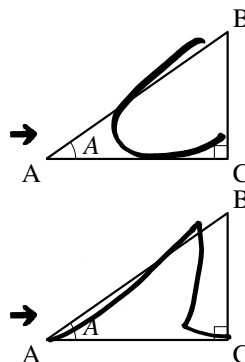
$\leftarrow \text{筆記体が始まる辺}$

と定義し、 $A$  の余弦<sup>よげん</sup>, または、 $A$  のコサイン (cosine) という。  
 $\cos A$  は、 $\angle A$  からみた斜辺に対する底辺の倍率を表している。また

$$\text{サインエー} \quad \sin A = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \frac{BC}{AB} \quad \leftarrow \text{筆記体が終わる辺}$$

$\leftarrow \text{筆記体が始まる辺}$

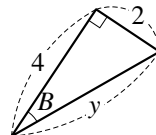
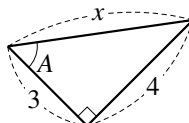
と定義し、 $A$  の正弦<sup>せいげん</sup>, または、 $A$  のサイン (sine) という。  
 $\sin A$  は、 $\angle A$  からみた斜辺に対する対辺の倍率を表している。



$\cos$ ,  $\sin$  の定義も、それぞれ  $c$ ,  $s$  の筆記体を用いて覚える。  $\tan$  も含めたすべて、「筆記体が始まる辺」が分母に、「筆記体が終わる辺」が分子になる。

**【例題 4】** 右の図において

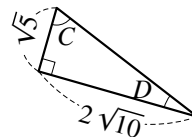
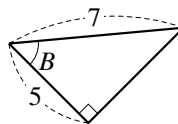
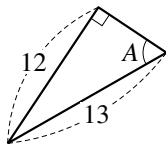
1. 長さ  $x$ ,  $y$  を求めよ。
2.  $\cos A$ ,  $\sin A$  を求めよ。
3.  $\cos B$ ,  $\sin B$  を求めよ。



筆記体の  $c$  は角を回り込むように書き、筆記体の  $s$  は角から斜辺へ向かう、と理解するとよい。

【練習 5：余弦・正弦・正接の定義】

- (1)  $\cos A$ ,  $\sin A$ ,  $\tan A$  を求めよ.
- (2)  $\cos B$ ,  $\sin B$ ,  $\tan B$  を求めよ.
- (3)  $\cos C$ ,  $\sin C$ ,  $\tan C$  を求めよ.
- (4)  $\cos D$ ,  $\sin D$ ,  $\tan D$  を求めよ.



**D. 三角比の値**

正接, 余弦, 正弦をまとめて, **三角比** (trigonometric ratio) という. いろいろな角度に関する三角比の値を p.210 にまとめている.

【例題 6】 p.210 を用いて次の間に答えよ. ただし,  $0^\circ < A < 90^\circ$  である.

1.  $\cos 40^\circ$  の値を調べよ. また,  $\sin A = 0.97$  のとき,  $A$  のおよその値を求めよ.
2.  $\cos B$  が  $\sin 20^\circ$  に等しいとき,  $B$  の値を求めよ.

## E. 分数と分数の比 — 複分数

「3を10で割った値」を $\frac{3}{10}$ と表すように、「 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ を $\frac{1}{7}$ で割った値」を $\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}}$ と表すこともできる。このように、 $\frac{a}{b}$ の分子または分母がさらに分数であるとき、 $\frac{a}{b}$ を**複分数** (complex fraction) \*3という。複分数は三角比の計算においてよく現れる。

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} \times 21}{\frac{1}{7} \times 21} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} \times 21^7}{\frac{1}{7} \times 21^3} = \frac{\sqrt{2} \times 7}{1 \times 3} = \frac{7\sqrt{2}}{3}$$

複分数は、分母と分子に同じ数を掛ければ複分数でなくなる\*4。

**【例題7】** 複分数 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{2}{3}}$ を、普通の分数の(複分数でない)形にしろ。

## F. 有名角の三角比

$30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ の三角比の値は、知っているものとされる。これらの角は、有名角といわれる。

**【暗記8：有名角の三角比】**

- 3辺の長さが1, 2,  $\sqrt{3}$ の直角三角形を用い、 $\cos 30^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$ ,  $\tan 30^\circ$ を求めよ。
- 3辺の長さが1, 1,  $\sqrt{2}$ の直角三角形を用い、 $\cos 45^\circ$ ,  $\sin 45^\circ$ ,  $\tan 45^\circ$ を求めよ。
- $\cos 60^\circ$ ,  $\sin 60^\circ$ ,  $\tan 60^\circ$ を求めよ。

…有名角でない三角比の値を覚える必要はない。必要ときは、p.210の表を用いる。

\*3 繁分数 (compound fraction) ともいう。

\*4  $\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}}$  は  $\frac{\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{7}$  を計算しても求められる。

【練習 9：複分数】

次の複分数を，普通の分数の形になおしなさい（分母の有理化もすること）。

(1)  $\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{7}}$

(2)  $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{25}{9}}$

(3)  $\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

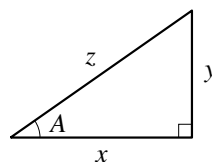
(4)  $\frac{2a}{\frac{1}{2}}$

2. 三角比の利用

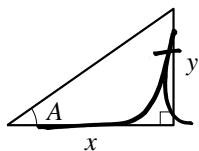
A. 三角比から辺の長さを求める

等式  $\tan A = \frac{y}{x}$  の両辺に  $x$  を掛けて

$$x \times \tan A = x \times \frac{y}{x} \Leftrightarrow x \tan A = y$$



という式を得る。この結果は、「 $x$  から  $t$  を書いて、 $y$  にたどりつく」筆記体と



「 $x$  に  $\tan$  を掛けて、 $y$  を求める」ことを結びつけて覚えるとよい。

$x \rightarrow y$  に筆記体  $t$  を書く

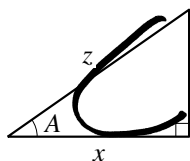
$$x \tan A = y$$

同じようにして、 $\cos$ 、 $\sin$  についても、以下の結果が成り立つ。

$z$  から  $x$  を求める式

$z \rightarrow x$  に筆記体  $c$  を書く

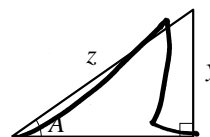
$$z \cos A = x$$



$z$  から  $y$  を求める式

$z \rightarrow y$  に筆記体  $s$  を書く

$$z \sin A = y$$



これら 3 つの式を用いると，三角比から辺の長さを計算しやすい。



【例題 10】 右の図形について

$$\sin A = \frac{3}{5}, \cos A = \frac{4}{5}, \tan B = \sqrt{2}, \cos B = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

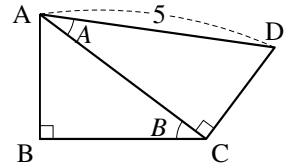
とする。以下の問いに答えよ。

1. 辺  から始めて  $\angle A$  について筆記体の  $s$  を書けば、辺  $CD$  で終わるので、

$$CD = \text{ア} \sin A = \text{イ}$$

2. 辺  $AD$  から始めて  $\angle A$  について筆記体の  $c$  を書き、 $\angle B$  について筆記体の  $c$  を書けば辺  で終わ

$$\text{ウ} = (AD \cos A) \cos B = AD \cos A \cos B = \text{エ}$$



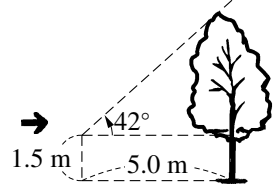
## B. 身近な例への三角比の応用

大きなものの長さや高さを測るために、三角比は有効である。

【例題 11】 目の高さが 1.5 m にある人が、木から 5.0 m 離れた地点に立って木のてっぺんを見上げた。すると、水平な地面と視線のなす角<sup>\*5</sup>が  $42^\circ$ であった。

この木の高さはおよそ何 m か。(右図参照)

p.210 の三角比の表を使って、小数第 2 位を四捨五入して答えなさい。

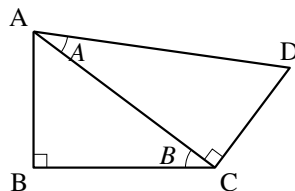


\*5 この角度のことを、ぎょうかく仰角という。

【練習 12：三角比と辺の長さ】

右の図形について、次の問いに答えよ。

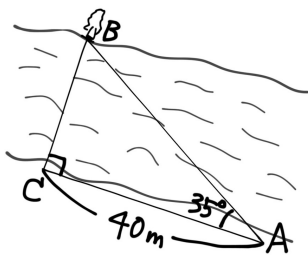
- (1)  $AD = 6$  のとき、長さが  $6 \sin A$ ,  $6 \cos A \sin B$  に等しい線分を、それぞれ答えよ。
- (2)  $AC = 5$  のとき、 $CD$ ,  $AB$ ,  $AD$  の長さを、 $A$ ,  $B$  で表せ。



【練習 13：身近な例への三角比の応用】

たこあ  
 凧揚げをしていたら、水平な地面に対し  $50^\circ$  の角度で長さ  $50.0 \text{ m}$  のひもが伸びきった。ひもを持つ手は  $1.0 \text{ m}$  の高さにあり、糸が一直線に伸びているならば、この凧は地面からおよそ何  $\text{m}$  の高さにあるか。  
 p.210 の三角比の表を使って、小数第 2 位を四捨五入して答えなさい。

【練習 14：川を渡らず川幅を知る方法】



川の長さを測るため、左図の A 点と C 点から、B 点の木を観測したところ、 $\angle BCA = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 35^\circ$ ,  $AC = 40 \text{ m}$  であった。

- (1) 川の幅  $BC$  は何  $\text{m}$  か。 p.210 の三角比の表を使い、小数第 2 位を四捨五入して答えなさい。
- (2) C 点から  $80 \text{ m}$  離れた点 D から木を見ると、 $\angle BDC$  はおよそ何度か。 p.210 の三角比の表を使い、整数値で答えなさい。

… 上の例題のようにすれば、原理的には、B へ誰も行くことなく川幅を測ることができる。

### C. 15° の三角比とその周辺

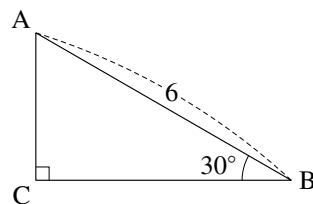
たとえば、右の直角三角形の BC の長さを考えよう。

この三角形は 30°, 60°, 90° の直角三角形なので、 $AB : BC = 2 : \sqrt{3}$  から

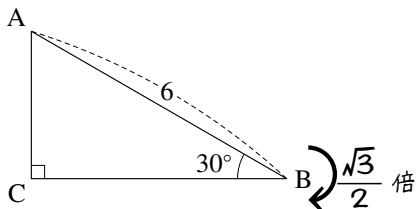
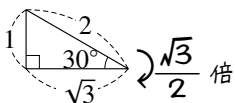
$$6 : BC = 2 : \sqrt{3} \Leftrightarrow 2BC = 6\sqrt{3}$$

であるので、 $BC = 3\sqrt{3}$  と求められる。

しかし、BC が AB の何倍なのか考えると、三角比を用いる必要もなく、さらに計算がしやすい。



もともになる三角形



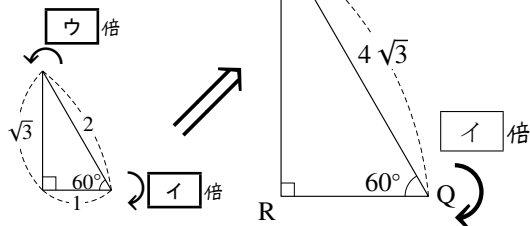
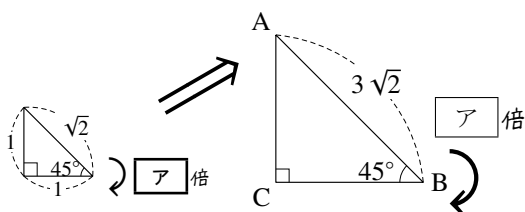
つまり

$$BC = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$



上のやり方は結果的には、三角比の値を用いずに、等式  $BC = 6 \cos 30^\circ$  を用いている。

**【例題 15】** 次の図について、以下の問いに答えなさい。



1. 上の図の  に当てはまる値を答えなさい。値の分母は有理化しなくてよい。
2. BC, RQ, PR の長さを求めなさい。

#### D. $15^\circ$ , $75^\circ$ の三角比

有名角以外にも、 $15^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  の三角比も計算で求められる ( $18^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  の三角比については、p.205 を参照のこと)\*<sup>6</sup>.

##### 【練習 16 : $15^\circ$ , $75^\circ$ の三角比】

$\triangle ABC$  は  $\angle A = 75^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 45^\circ$  であり、A から辺 BC へ下ろした垂線の足\*<sup>7</sup>を D, B から辺 CA へ下ろした垂線の足を E とする.  $BD = 1$  とするとき, 以下の問いに答えなさい.

- (1) AB, AD の長さを求めよ.      (2) AC, BC の長さを求めよ.      (3) BE, AE の長さを求めよ.  
(4)  $\cos 15^\circ$ ,  $\sin 15^\circ$ ,  $\tan 15^\circ$  を求めよ.      (5)  $\cos 75^\circ$ ,  $\sin 75^\circ$ ,  $\tan 75^\circ$  を求めよ.

\*<sup>6</sup>  $15^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  の三角比の値を覚える必要はない.

\*<sup>7</sup> 「A から辺 BC へ下ろした垂線の足」とは、「A から引いた辺 BC に垂直な線が、辺 BC と交わる点」のことである.

### 3. 三角比の相互関係

**A.**  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

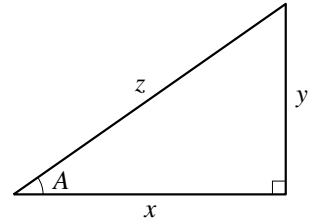
右図の直角三角形において、p.152 で学んだように

$$x = z \cos A, \quad y = z \sin A \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

であった。①を用いて

$$\tan A = \frac{y}{x} = \frac{z \sin A}{z \cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

となる。つまり、次の等式  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$  が成り立つ。



**B.**  $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

三平方の定理より  $x^2 + y^2 = z^2$  であるから、これに①を代入して

$$(z \cos A)^2 + (z \sin A)^2 = z^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 (\cos A)^2 + z^2 (\sin A)^2 = z^2$$

$$\Leftrightarrow (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。普通  $(\cos A)^2$ ,  $(\sin A)^2$ ,  $(\tan A)^2$  は、それぞれ  $\cos^2 A$ ,  $\sin^2 A$ ,  $\tan^2 A$  と書かれる\*8。つまり、等式②は  $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$  と書かれる。

**【例題 17】**

1.  $\sin A = \frac{2}{3}$  のとき、 $\sin^2 A$  はいくらか。 $\cos^2 A$  はいくらか。 $\cos A$  はいくらか。
2.  $\sin A = \frac{3}{5}$  のとき、 $\cos A$ ,  $\tan A$  の値を求めよ。

\*8  $A$  の 2 乗の  $\cos$  の値である  $\cos(A^2)$  と、 $\cos A$  の 2 乗である  $(\cos A)^2$  は、全く別の式であるが、かっこを省略して書くと、どちらも  $\cos A^2$  となり区別できない。そのため、 $\cos A^2$  と書かれたときは常に  $\cos(A^2)$  を表すと決まっている。 $(\cos A)^2$  のかっこを省略するときには、本文にもあるように  $\cos^2 A$  と書く。

【練習 18 : 三角比の相互関係の利用～その 1～】

$0^\circ < A < 90^\circ$  とする. 次の問いに答えよ.

- (1)  $\cos A = \frac{1}{3}$  のとき,  $\sin A$ ,  $\tan A$  の値を求めよ.
- (2)  $\sin A = \frac{2}{3}$  のとき,  $\cos A$ ,  $\tan A$  の値を求めよ.

【暗記 19 :  $\tan A$  と他の三角比との関係】

等式  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$  を用いて,  $\frac{1}{\tan A}$  を,  $\cos A$ ,  $\sin A$  で表せ.

### C. $\tan A$ から $\sin A$ , $\cos A$ を求める式

$\tan A$  しか与えられていないときは、別の公式が必要になる。

これは、 $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$  の両辺を  $\sin^2 A$  で割って得られる。

$$\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 A} + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}$$

次ページで証明する式 iv) と合わせ、次のようにまとめられる。

三角比の相互関係

右図の直角三角形において

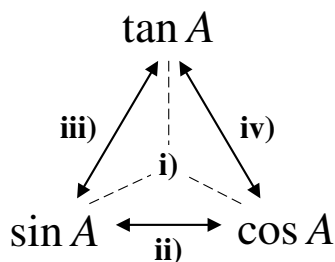
i)  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$  (  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\tan A$  の関係 )

ii)  $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$  (  $\sin A$  と  $\cos A$  の関係 )

が成り立つ。また、次の等式も成り立つ。

iii)  $\frac{1}{\tan^2 A} + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}$  (  $\tan A$  と  $\sin A$  の関係 )

iv)  $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$  (  $\cos A$  と  $\tan A$  の関係 )



iii) と iv) の式を覚える必要はない。ii) の両辺を  $\sin^2 A$  や  $\cos^2 A$  で割ればよい、と理解しておけばよい。

【例題 20】  $0^\circ < A < 90^\circ$  とする。  $\tan A = 7$  のとき、  $\cos A$ ,  $\sin A$  の値を求めよ。

【暗記 21 :  $\tan A$  と  $\cos A$  との関係】

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$  から, 等式  $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$  を導け.

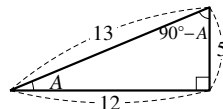
【練習 22 : 三角比の相互関係の利用～その 2～】

$0^\circ < A < 90^\circ$  とする.  $\tan A = \frac{1}{5}$  のとき,  $\cos A$ ,  $\sin A$  の値を求めよ.

#### D. $90^\circ - A$ の三角比

【例題 23】 右図の直角三角形において

1.  $\cos A$ ,  $\sin A$ ,  $\tan A$  を求めよ.
2.  $\cos(90^\circ - A)$ ,  $\sin(90^\circ - A)$ ,  $\tan(90^\circ - A)$  を求めよ.





右図の直角三角形において

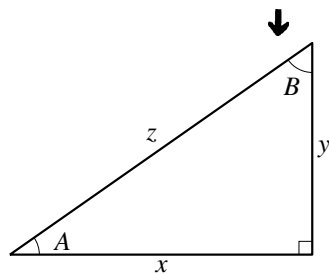
$$B = 90^\circ - A$$

であるから、以下のように表すことができる。

$$\cos(90^\circ - A) = \cos B = \frac{y}{z} = \sin A$$

$$\sin(90^\circ - A) = \sin B = \frac{x}{z} = \cos A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \tan B = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan A}$$



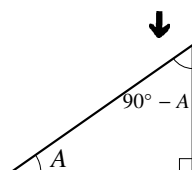
90° - A の三角比

右図の直角三角形を考えて、以下の等式が成り立つ。

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \frac{1}{\tan A}$$



この式は暗記するようなものではない。「90° - A の三角比は A だけを使った三角比で表せる」ことを理解し、公式を作れるようにすればよい。

**【練習 24 : 90° - A の三角比の利用】**

(1) 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

1)  $\sin 80^\circ$

2)  $\cos 46^\circ$

3)  $\tan 82^\circ$

(2)  $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$  を簡単にしなさい。



45° < A < 90° の三角比は、0° < A < 45° の三角比になおすことができる。

p.210 の三角比の表において、 $\cos 89^\circ = \sin 1^\circ$ 、 $\cos 88^\circ = \sin 2^\circ$ 、… を確認してみよう。

## 3.2 三角比の拡張

これまでは、鋭角の三角比のみを考えてきた。ここでは三角比の考えを直角・鈍角・ $0^\circ \cdot 180^\circ$ へと拡張し、 $0^\circ$  から  $180^\circ$  までの三角比を統一的に扱う。

### 1. 座標と三角比の関係

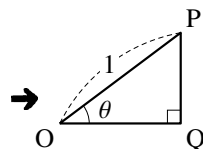
#### A. 斜辺が 1 である直角三角形の三角比

斜辺が 1 である直角三角形  $OPQ$  について、三角比を考えよう。すると、正弦、余弦、正接はそれぞれ

$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = PQ, \quad \cos \theta = \frac{OQ}{OP} = OQ$$

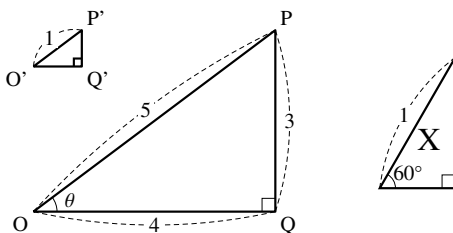
と書ける\*9。つまり、斜辺の長さが 1 である直角三角形では

「対辺の長さは  $\sin \theta$  の値を表し、底辺の長さは  $\cos \theta$  の値を表す」



#### 【例題 25】

1.  $\triangle OPQ$  と  $\triangle O'P'Q'$  は相似である。  $O'Q'$ 、 $Q'P'$  の長さを求めなさい。また、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$  の値を求めなさい。
2. 右奥の直角三角形 X について、斜辺以外の 2 辺の長さを求めなさい。



\*9 拡張された三角比では、 $\theta$ 、 $\varphi$  などギリシア文字を使うことが多い。ギリシア文字の一覧は p.vii 参照。

## B. 単位円と直角三角形

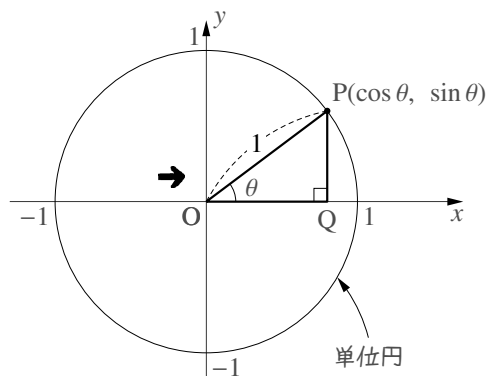
座標平面上の原点  $O$  を中心とする半径 1 の円を単位円 (unit circle) という。前ページの  $\triangle OPQ$  を、左図のように単位円の (上半分の) 中に描いてみよう。そのようにすれば

$$\cos \theta = OQ = (\text{P の } x \text{ 座標})$$

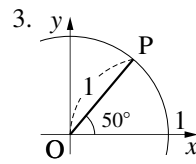
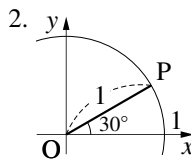
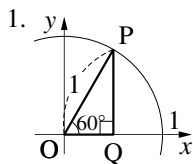
$$\sin \theta = QP = (\text{P の } y \text{ 座標})$$

$$\tan \theta = \frac{QP}{OQ} = \frac{\text{P の } y \text{ 座標}}{\text{P の } x \text{ 座標}} = (\text{線分 OP の 傾き})$$

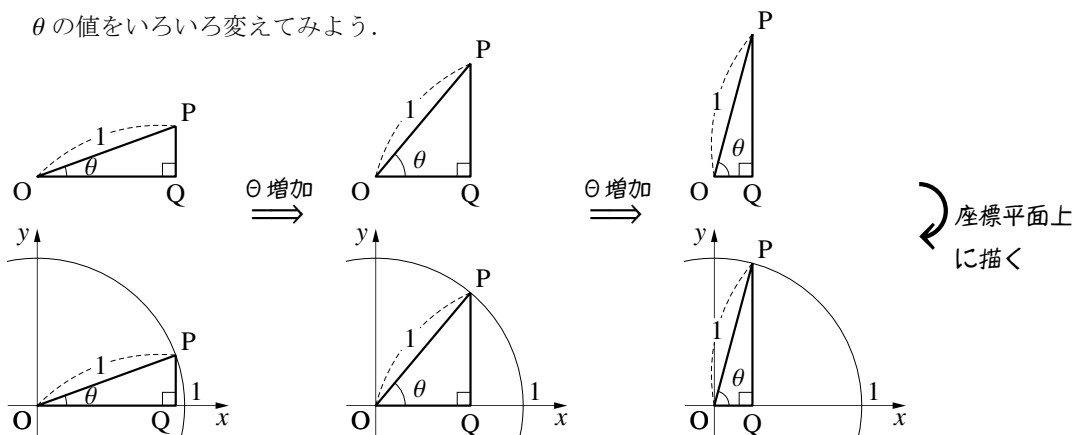
となる。



**【例題 26】** 右の各図について、点  $P$  の座標をそれぞれ求めなさい。ただし、3. については「三角比の表 (p.210)」を用いなさい。

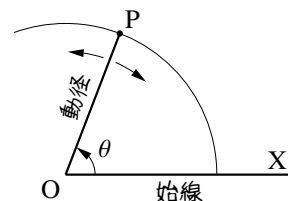


$\theta$  の値をいろいろ変えてみよう。



常に単位円周にある点  $P$  を角点 (angular point) という\*10。

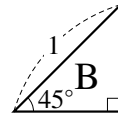
上の図において、角  $\theta$  の大きさは、角点  $P$  の位置で決まる。 $\theta$  の増加に伴い、角点  $P$  は反時計回りに回る。このとき、回転する線分  $OP$  を動径 (radial vector)、固定された半直線  $OX$  を始線 (initial line) という。



\*10 この「角点」という用語は 13th-note の造語であるので注意のこと。

【練習 27：斜辺が 1 である直角三角形】

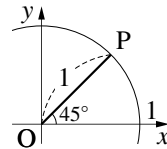
- (1) 右の直角三角形 B について，斜辺以外の 2 辺の長さを求めなさい。  
 (2) 斜辺の長さが 1，底辺の長さが  $\frac{12}{13}$  である直角三角形について，対辺の長さを求めなさい。



【練習 28：単位円と角点】

右図について，以下の問いに答えなさい。

- (1) 動径と始線はどれか．右図に書き込みなさい。  
 (2) 角点 P の座標をそれぞれ求めなさい。



C. 三角比の拡張

角点 P の動く範囲を第 2 象限に広げれば，鈍角の三角比の定義を得る。

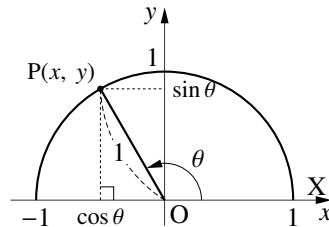
0° から 180° までの三角比

点 O を原点とする座標平面上に単位円の上半分をとり，その周上に角点 P をとる．x 軸の正の部分 OX に対し， $\angle POX = \theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) とするとき

$$\cos \theta = (\text{角点 P の } x \text{ 座標})$$

$$\sin \theta = (\text{角点 P の } y \text{ 座標})$$

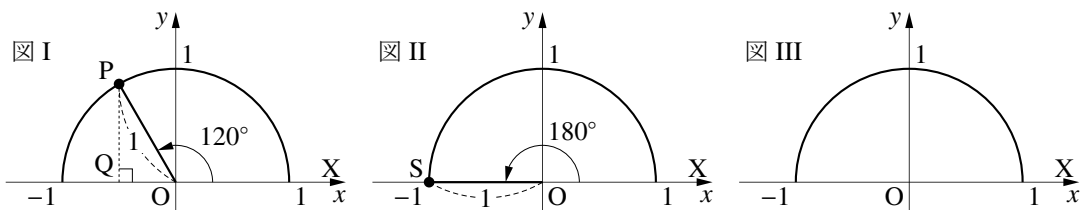
$$\tan \theta = \frac{(\text{角点 P の } y \text{ 座標})}{(\text{角点 P の } x \text{ 座標})} = *11 (\text{動径 OP の傾き})$$



とする．ただし，角点 P の x 座標が 0 のとき，つまり， $\theta = 90^\circ$  のときは  $\tan \theta$  を定義しない。

\*11 この等号は，(動径 OP の傾き) =  $\frac{(\text{点 P の } y \text{ 座標}) - (\text{点 O の } y \text{ 座標})}{(\text{点 P の } x \text{ 座標}) - (\text{点 O の } x \text{ 座標})}$  であることから導かれる。

【例題 29】



1. 図 I の角点 P, 図 II の角点 S の座標を求めよ.
2.  $\cos 120^\circ$ ,  $\sin 120^\circ$ ,  $\tan 120^\circ$ ,  $\cos 180^\circ$ ,  $\sin 180^\circ$ ,  $\tan 180^\circ$  の値を求めなさい.
3.  $\angle AOX = 135^\circ$  となるときの角点 A のおよその位置を図 III に書き込み, A の座標を答えよ.
4.  $\sin 135^\circ$ ,  $\cos 135^\circ$ ,  $\tan 135^\circ$  の値を求めよ.

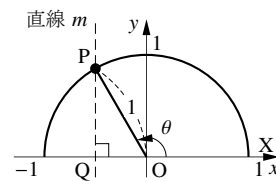
**D. 三角比から角度を求める**

(p.210 の三角比の表を用いずに)三角比から角度を求めることを考えよう. そのためには, 単位円を書いて, 角点がどこにあるのかを書き込めばよい.

【例題 30】  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$  を満たす  $\theta$  を求めたい. それには

(角点 P の **ア** 座標) =  $-\frac{1}{2}$

となればよい. 直線  $m$  : **ア** =  $-\frac{1}{2}$  と単位円の交点は右図の P になり,



$\angle POQ =$  **イ** である. よって, 図中の角  $\theta$  は **ウ** であるから  $\theta =$  **ウ** とわかる.

【暗記 31：拡張された三角比】

図 I

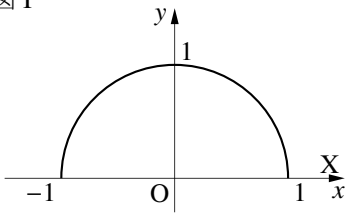


図 II

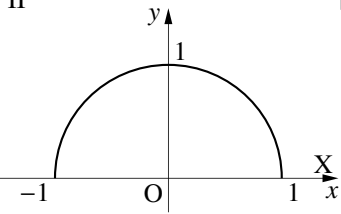
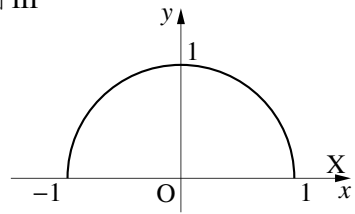


図 III



1.  $\angle POX = 30^\circ$  となる角点 P を図 I に書き込み,  $\cos 30^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$ ,  $\tan 30^\circ$  の値を求めよ.  
(図に書き込む点はおよその位置でよい, これは以下の問題でも同様である.)
2.  $\angle QOX = 150^\circ$  となる角点 Q を図 II に書き込み,  $\cos 150^\circ$ ,  $\sin 150^\circ$ ,  $\tan 150^\circ$  の値を求めよ.
3.  $\angle ROX = 90^\circ$  となる角点 R を図 III に書き込み,  $\cos 90^\circ$ ,  $\sin 90^\circ$  の値を求めよ.

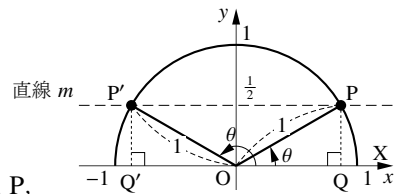
【練習 32：三角比を含む方程式～その 1～】

$\sin \theta = \frac{1}{2}$  を満たす  $\theta$  を求めたい. それには

(角点の ア 座標) =  $\frac{1}{2}$

となればよい. 直線  $m$  : ア =  $\frac{1}{2}$  と単位円の交点は右図の角点 P,

P' になり,  $\angle POQ$  も  $\angle P'OQ'$  も イ に等しい. よって,  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  の解は  $\theta =$  ウ, エ になる.



【練習 33 : 三角比を含む方程式～その 2～】

以下の式を満たす  $\theta$  を求めよ. ただし  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする.

(1)  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(3)  $\tan \theta = -\sqrt{3}$

(4)  $\sin \theta = 1$

【発展 34 : 三角比を含む不等式】

以下の式を満たす  $\theta$  を求めよ. ただし  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする.

①  $\cos \theta \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

②  $\sin \theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$

③  $\tan \theta > -\sqrt{3}$

【練習 35 : 有名角の三角比】

$0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$  の三角比の値をそれぞれ求めよ.

これらの値は、単位円を用いていつでも導けるようにしておこう. また、 $90^\circ$  以上の有名角でない角の三角比の値は、p.210 の三角比の表、『 $90^\circ + \theta$  の三角比』(p.173), 『 $180^\circ - \theta$  の三角比』(p.172) を用いて求める.

## 2. 拡張された三角比の相互関係

### A. 拡張された三角比の相互関係

鋭角の三角比において成立した以下の式は、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  においても成立する.

拡張された三角比の相互関係

角  $\theta$  が  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次の式が成り立つ. (ただし、i), iii), iv) において、分母が 0 となる場合は考えない.)

i)  $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$  の関係

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

ii)  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の関係

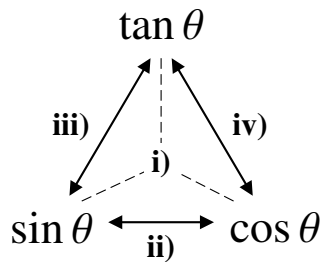
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

iii)  $\tan \theta$  と  $\sin \theta$  の関係

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

iv)  $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の関係

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$



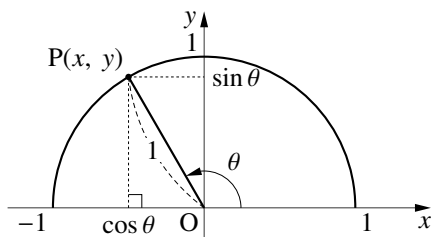
右図の単位円において  $\cos \theta = x, \sin \theta = y$  であり

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

は  $\tan$  の定義であった\*12. また、三平方の定理より  $x^2 + y^2 = 1$  であるから

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

が成り立つ. この等式から、鋭角の時と同じように iii), iv) は導かれる (自力で導けるよう練習しよう).



\*12 p.164 の脚注を参照のこと



【例題 36】 次の問に答えよ。ただし  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  である。

1.  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  のとき,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  の値を求めよ.
2.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  のとき,  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  の値を求めよ.



公式 ii), iii), iv) を用いるときは,  $\sin$  は負の値にならないことに注意して解く必要がある.

一方,  $\cos$ ,  $\tan$  の値は, 負の値もとりにうることに注意しよう.

【暗記 37 :  $\tan \theta$  と  $\cos \theta$  との関係】

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  から, 等式  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ ,  $1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$  を導け.

【練習 38 : 三角比の相互関係の利用～その 3～】

『拡張された三角比の相互関係』を使って次の間に答えよ. ただし  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  である.

(1)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$  のとき,  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  の値を求めよ.

(2)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$  のとき,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  の値を求めよ.

(3)  $\tan \alpha = 7$  のとき,  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  の値を求めよ.

**【練習 39 : 三角比の計算】**

次の式を簡単にせよ.

(1)  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$

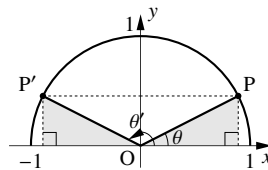
(2)  $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$

## B. $180^\circ - \theta$ の三角比

【例題 40】 右の単位円において、角点 P の座標は  $(0.891, 0.454)$  である。

以下の問いに答えよ。

- $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  を求めよ。
- 図中の  $\theta'$  を  $\theta$  で表せ。
- $P'$  の座標を求めよ。
- $\cos \theta'$ ,  $\sin \theta'$  を求めよ。



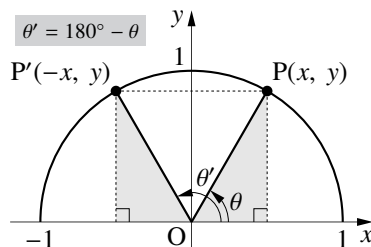
右図のように、単位円周上に角  $\theta$  の動径  $OP$  と角  $180^\circ - \theta (= \theta')$  とする)の動径  $OP'$  をとる。

点 P の座標を  $(x, y)$  とすると、点  $P'$  の座標は  $(-x, y)$  であり

$$\sin \theta' = y = \sin \theta, \quad \cos \theta' = -x = -\cos \theta,$$

$$\tan \theta' = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$

と表すことができる。ここで、 $\theta' = 180^\circ - \theta$  であるから、次のようにまとめることができる。



### $180^\circ - \theta$ の三角比

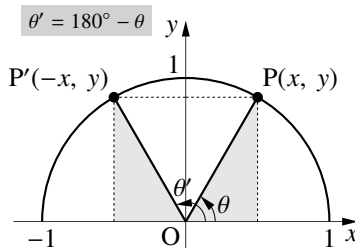
角  $\theta$  が  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  の三角比において

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

が成り立つ(ただし、 $\tan 90^\circ$  は考えない)。



つまり、 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  の三角比は、 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  の三角比になおして、その値を求めることができる。

【例題 41】 次の式を満たすように  の中に  $90^\circ$  より小さい角を入れよ。

1.  $\sin 100^\circ = \sin$

2.  $\cos 179^\circ = -\cos$

3.  $\tan 125^\circ = -\tan$



この式は暗記するようなものではない。「 $180^\circ - \theta$ の三角比は $\theta$ だけを使った三角比で表せる」とを理解し、必要なときに、上のように単位円を描き、導出できるようにしておこう。

【例題 42】 p.210 を用いて、 $\cos 110^\circ$ 、 $\sin 110^\circ$ 、 $\tan 110^\circ$  の値を求めよ。

### C. $90^\circ + \theta$ の三角比

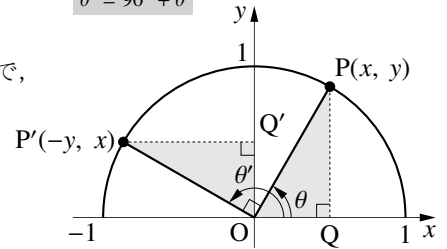
右図のように、単位円周上に角  $\theta$  の動径  $OP$  と角  $90^\circ + \theta (= \theta'$  とする)の動径  $OP'$  をとる。

点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とすると、 $\triangle OPQ$  と  $\triangle OP'Q'$  は合同なので、点  $P'$  の座標は  $(-y, x)$  となるから

$$\sin \theta' = x = \cos \theta, \quad \cos \theta' = -y = -\sin \theta,$$

$$\tan \theta' = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\tan \theta}$$

$$\theta' = 90^\circ + \theta$$



と表すことができる。ここで、 $\theta' = 90^\circ + \theta$  であるから、次のようにまとめることができる。

### $90^\circ + \theta$ の三角比

角  $\theta$  が  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  の三角比において

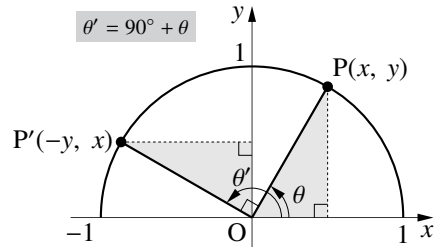
$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

が成り立つ(ただし、 $\tan 90^\circ$  は考えない)。

$$\theta' = 90^\circ + \theta$$



【例題 43】 次の式を満たすように  の中に  $90^\circ$  より小さい角を入れよ。

1.  $\sin 100^\circ = \cos$

2.  $\cos 179^\circ = -\sin$

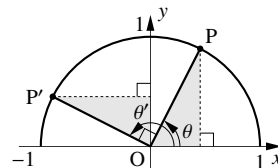
3.  $\tan 125^\circ = -\frac{1}{\tan}$



この式も暗記するようなものではない。「 $90^\circ + \theta$ の三角比は $\theta$ だけを使った三角比で表せる」ということを理解し、必要なときに、上のように単位円を描いて導出できるようにしておこう。

【暗記 44 :  $90^\circ + \theta$  の三角比の導出】

右の単位円において、角点 P の座標は  $(a, b)$  である。以下の問いに答えよ。



1.  $\cos \theta, \sin \theta$  を  $a, b$  で表せ.
2. 図中の  $\theta'$  を  $\theta$  で表せ.
3.  $P'$  の座標を  $a, b$  で表せ.
4.  $\cos \theta', \sin \theta'$  を  $a, b$  で表せ.

【練習 45 :  $180^\circ - \theta, 90^\circ + \theta$  の三角比の利用～その 1～】

次の式を満たすように  の中に  $90^\circ$  より小さい角を入れよ。

(1)  $\cos 120^\circ = -\cos$  ,  $\sin 120^\circ = \sin$        (2)  $\cos 120^\circ = -\sin$  ,  $\sin 120^\circ = \cos$

(3)  $\tan 120^\circ = -\tan$    $= -\frac{1}{\tan}$

【練習 46 :  $180^\circ - \theta, 90^\circ + \theta$  の三角比の利用～その 2～】

次の式を簡単にしなさい。

(1)  $\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 80^\circ + \cos 110^\circ + \cos 140^\circ + \cos 170^\circ$

(2)  $\cos 10^\circ + \cos 50^\circ + \cos 90^\circ + \cos 130^\circ + \cos 170^\circ$



#### 1. 辺と角の名前

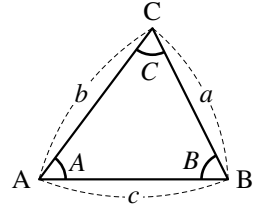
$\triangle ABC$  において、次のように略すことが多い。目的は、後で学ぶ公式を見やすくする事である。

$\angle A, \angle B, \angle C$  の大きさ  $\rightarrow$  それぞれ  $A, B, C$

辺  $BC, CA, AB$  の長さ  $\rightarrow$  それぞれ  $a, b, c$

たとえば、角  $A$  の向かい側にある辺  $BC$  を  $a$  と表すことになる。

今後、特に断りのない限りこの記法にしたがうこととする。

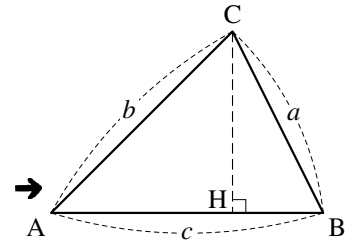


#### 2. 余弦定理 (第2余弦定理)

##### A. 点 A からみた余弦定理

A が鋭角である  $\triangle ABC$  において、右図のように垂線  $CH$  をひき、 $\triangle BCH$  に三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = CH^2 + BH^2 \\ &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \\ &= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$



という等式が成り立つ。この等式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

を (点 A からみた) 余弦定理 (cosine theorem) と呼ぶ\*13。

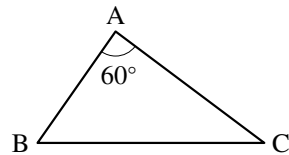
【例題 47】  $\triangle ABC$  において、 $b = 3$ 、 $c = 4\sqrt{2}$ 、 $A = 45^\circ$  のとき、 $a$  の値を求めよ。

\*13 第2余弦定理 (second cosine theorem) ともいう。第1余弦定理については p.208 を参照のこと。単に「余弦定理」というときにはこちらを指す。

【練習 48：余弦定理の利用～その 1～】

右図の  $\triangle ABC$  について、以下の問いに答えなさい。

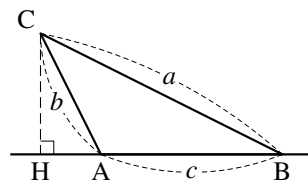
- (1)  $a, b, c$  は、通常どの辺の長さを表すか。右図に書き込みなさい。
- (2)  $b = 3, c = 2$  のとき、 $a$  の値を求めよ。
- (3)  $a = 3\sqrt{7}, c = 6$  のとき、 $b$  の値を求めよ。



**B. 辺の長さを求める**

(点 A からみた) 余弦定理は、 $A$  が鋭角でなくても成り立つ。右下の図のように、直線 AB 上に垂線 CH をひき、 $\triangle BCH$  に三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= a^2 = BC^2 = CH^2 + BH^2 \\
 &= \{b \sin(180^\circ - A)\}^2 + \{c + b \cos(180^\circ - A)\}^2 \\
 &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \leftarrow \text{『}180^\circ - \theta \text{の三角比』(p.172)} \\
 &\quad (\text{A が鋭角の時と同じ計算になるので、省略}) \\
 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (\text{右辺})
 \end{aligned}$$



角  $A$  が直角のときも、上の等式において  $A = 90^\circ$  とすれば成立する。

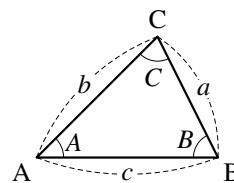
余弦定理 (辺の長さを求める)

$\triangle ABC$  において、次の等式が成り立つ。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\text{点Aからみた余弦定理})$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad (\text{点Bからみた余弦定理})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (\text{点Cからみた余弦定理})$$



たとえば、点 A から見る代わりに点 B から見ると、 $a$  は  $b$  に、 $b$  は  $c$  に、 $c$  は  $a$  に、 $A$  は  $B$  になって、点 A からみた余弦定理は点 B からみた余弦定理となる。

この公式は、「2 辺とその間の角が分かれば三角形は決定し、特に、もう 1 辺の長さが決まる」事実に対応している。ただし、上の例題 (3) や p.179, 183 のように「2 辺とその間でない角」が与えられた三角形においても、この余弦定理は利用できる。



【例題 49】  $\triangle ABC$  において、 $a = 3$ 、 $b = 4\sqrt{2}$ 、 $C = 135^\circ$  のとき、 $c$  の値を求めよ。

### C. 角(の余弦)の大きさを求める

点 A から見た余弦定理  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  を  $\cos A$  について解けば

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

となるので、 $a$ 、 $b$ 、 $c$  の大きさから角 A (の余弦) 求めることができる。

この等式も、単に余弦定理と呼ばれることが多い。

【例題 50】  $\triangle ABC$  において、 $a = \sqrt{19}$ 、 $b = 3$ 、 $c = 5$  のとき、 $A$  の値を求めよ。また、 $\cos C$  を求めよ。



「 $\cos C$  を求めよ」のような問題では、角  $C$  の値を求める必要はない。

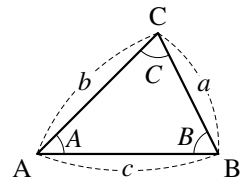
### 余弦定理 (角の余弦を求める)

$\triangle ABC$  において、次の等式が成り立つ。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (\text{点 A からみた余弦定理})$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad (\text{点 B からみた余弦定理})$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (\text{点 C からみた余弦定理})$$



この等式は「3 辺を決めれば三角形も決定し、内角の大きさが決まる」ことに対応している。

この形で余弦定理を覚えてもよい。覚えやすい方で覚え、もう一方へ変形できれば十分である。

【暗記 51：余弦定理の式変形】

1. 等式  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$  から、 $\cos B$  を  $a, b, c$  で表す式を導け.
2. 等式  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$  から、 $c^2$  を求める式を導け.

### 3. 三角形の決定 (1)

#### A. 三角形の決定条件・その1～3辺が与えられた場合

3辺の長さを与えれば、三角形はただ1つに決定し、余弦定理を用いて、各頂点の角度の大きさを計算できる。これは、三角形の合同条件「3辺が等しい(3辺相等)」に対応している。

【練習 52：余弦定理の利用～その2～】

$\triangle ABC$  の3辺の長さが  $a = \sqrt{21}$ ,  $b = 4$ ,  $c = 5$  のとき

- (1)  $A$  の値を求めよ。      (2)  $\cos C$  を求め、 $\angle C$  は鋭角か鈍角か答えよ。

#### B. 鋭角三角形・鈍角三角形

鋭角三角形なのか、鈍角三角形なのかは、三角形の一番大きな角が鋭角か、鈍角か調べれば十分である。

【練習 53：鋭角三角形・鈍角三角形】

3辺が4, 5, 7の三角形において、最も大きな角はどこか。また、これは鋭角三角形か、鈍角三角形か。

点 A からみた余弦定理  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab}$  を用いて、次の事実が導かれる。

$$A \text{ が鋭角} \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A \text{ が直角} \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{三平方の定理に一致})$$

$$A \text{ が鈍角} \Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

### C. 三角形の決定条件・その2～2辺とその間の角が与えられた場合

2辺とその間の角を与えれば三角形はただ1つに決定し、余弦定理を用いて残りの辺の長さや角度の大きさを計算できる。これは、三角形の合同条件「2辺とその間の角が等しい(2辺夾角相等)」に対応している。

【例題 54】  $\triangle ABC$  において、 $a = 3$ 、 $b = 3\sqrt{2}$ 、 $C = 135^\circ$  のとき、 $c$ 、 $\cos B$  の値を求めよ。

### D. 答えが2つある三角形

2辺とその間でない角が与えられた場合も、余弦定理を用いて計算できる。しかし、三角形が決定するとは限らず、答えが2つになる場合がある。この問題については p.183 において再び取り上げられる。

【練習 55 : 2辺とその間でない角が与えられた場合～その1～】

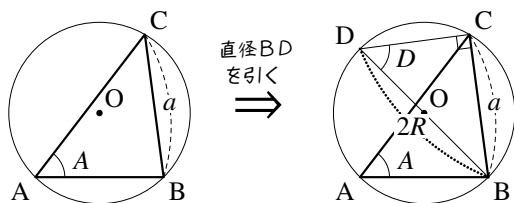
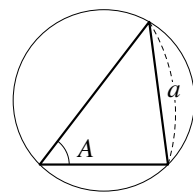
$A = 60^\circ$ 、 $a = 9$ 、 $b = 10$  である三角形において、 $c$  を求めよ。

## 4. 正弦定理

### A. 外接円と正弦定理

三角形の3つの頂点を通る円を、その三角形の**外接円** (circumscribed circle) とい  
い、外接円の中心を**外心** (circumcenter) という\*14。数学 A で学ぶように、1つの三  
角形に対し、外接円と外心は1つに定まる。

次のように、外心が  $O$  である鋭角三角形  $\triangle ABC$  を考え、直径  $BD$  を引こう。



線分  $BD$  は円の直径なので  $\angle BCD = 90^\circ$  であり、  
 $\triangle DBC$  は直角三角形と分かり、 $\sin D = \frac{a}{2R}$  であ  
る。円周角の定理より  $A = D$  であるので

$$\frac{a}{2R} = \sin D = \sin A \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

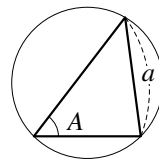
同様に、 $\frac{b}{\sin B} = 2R$ ,  $\frac{c}{\sin C} = 2R$  も成り立つ。これらの等式を、**正弦定理** (sine theorem) という。



正弦定理では、頻繁に複分数 (p.151) の計算を必要とするので、よく練習しよう。

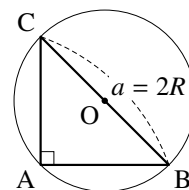
**【例題 56】**  $\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とする。以下の間に答えなさい。

- $a = 4$ ,  $\sin A = \frac{1}{3}$  のとき、 $R$  を求めよ。
- $a = \sqrt{7}$ ,  $A = 30^\circ$  のとき、 $R$  を求めよ。
- $a = \sqrt{6}$ ,  $A = 60^\circ$  のとき、 $R$  を求めよ。

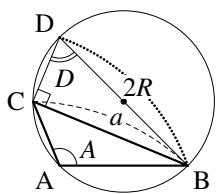


### B. 直角三角形・鈍角三角形の正弦定理

$A$  が直角のときは  $\sin A = \sin 90^\circ = 1$  である。また、 $a = 2R$  である。つまり  
 $\frac{a}{\sin A} = 2R$  は両辺とも  $a$  と一致し成立する。



\*14 外心は3辺の垂直二等分線の交点に一致する。詳しくは、数学 A で扱う。



A が鈍角のとき、左図のように  $\triangle ABC$  の外接円に直径  $BD$  を引くと

$$\begin{aligned} A &= \angle DAC + \angle DAB \\ &= \angle DBC + \angle DCB && \text{(いずれも、円周角の定理)} \\ &= 180^\circ - D && \text{(\triangle DCB に着目)} \end{aligned}$$

である\*15)ので、『 $180^\circ - \theta$ の三角比』(p.172)から、 $\sin A = \sin(180^\circ - D) = \sin D$  とわかる。

直角三角形  $\triangle DBC$  について  $\sin D = \frac{a}{2R}$  であるから、次のようにして正弦定理が示される。

$$\sin A = \sin D = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

### C. 正弦定理のまとめ

3つの等式  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ ,  $\frac{b}{\sin B} = 2R$ ,  $\frac{c}{\sin C} = 2R$  から、次のようにまとめることができる。

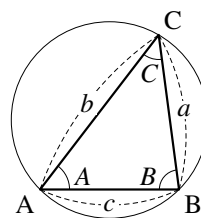
正弦定理

$\triangle ABC$  の外接円の半径  $R$  について

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立つ。特に、辺と角について次の3つの式が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$



#### 【例題 57】

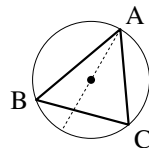
- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$  を  $a$  について解け。また、 $\sin A = \frac{1}{3}$ ,  $b = 6$ ,  $\sin B = \frac{2}{5}$  のとき、 $a$  の値を求めよ。
- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$  を  $\sin A$  について解け。また、 $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $\sin B = \frac{3}{7}$  のとき、 $\sin A$  の値を求めよ。

\*15 一般に、円に内接する四角形においては、向かい合う2角の和は  $180^\circ$  となる (p.190)。詳しくは、数学 A でも取り扱われる。

【暗記 58：正弦定理の証明】

右図について、円の半径を  $R$  とする。

$b = 2R \sin B$  を証明しなさい。



… 等式  $\frac{b}{\sin B} = 2R$  を確認できるようにしよう。

## 5. 三角形の決定 (2)

### A. 三角形の決定条件・その3～1辺とその両端の角が与えられた場合

1辺とその両端の角が与えれば、三角形はただ1つに決定し、残りの辺の長さ、角度またはその余弦を求められる。これは、三角形の合同条件「1辺とその両端の角が等しい(2角夾辺相等)」に対応している。

#### 【練習 59：正弦定理の利用～その2～】

- (1)  $\triangle ABC$  において、 $c = 12$ 、 $C = 45^\circ$ 、 $A = 60^\circ$  のとき、 $a$  の値と、 $\triangle ABC$  の外接円の半径を求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$  において、 $b = 7$ 、 $B = 60^\circ$ 、 $c = 6$  のとき、 $\sin C$  の値と、 $\triangle ABC$  の外接円の半径を求めよ。

… 正弦定理から4つのことが分かる。上のように辺の長さを求めること、角の(正弦の)大きさを求めること、さらに、外接円の半径を求めること (p.180) と、正弦の比と辺の比が等しいこと (p.184) である。

## B. 三角形の決定条件・その4～2辺とその間でない角が与えられた場合

p.179でも取り上げた、2辺とその間でない角が与えられた場合を再び考えよう。

### 【練習 60 : 2 辺とその間でない角が与えられた場合】

(1)  $A = 30^\circ$ ,  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 2$  である三角形を考えよう。正弦定理を用いて,  $B = \boxed{\text{ア}}$ ,  $\boxed{\text{イ}}$  ( $\text{ア} < \text{イ}$ ) とわかる。一方, 余弦定理を用いて,  $c = \boxed{\text{ウ}}$ ,  $\boxed{\text{エ}}$  ( $\text{ウ} < \text{エ}$ ) とわかる。

ここで,  $B = \boxed{\text{ア}}$ ,  $\boxed{\text{イ}}$  のときの図をそれぞれ描けば,  $B = \boxed{\text{オ}}$  のときの方が  $c$  が大きいので,  $B = \boxed{\text{ア}}$  ならば  $c = \boxed{\text{カ}}$ ,  $B = \boxed{\text{イ}}$  ならば  $c = \boxed{\text{キ}}$  とわかる。

(2)  $A = 45^\circ$ ,  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{2}$  である三角形を考えよう。

正弦定理を用いると  $B$  の値は 2 つ求められるが, このうち  $B = \boxed{\text{ク}}$  のみ適する。

実際, 余弦定理を用いると  $c$  の値は 2 つ求められるが, このうち  $c = \boxed{\text{ケ}}$  のみ適している。

### C. 正弦の比と辺の比

#### 【発展 61：正弦定理と正弦の比】

$\triangle ABC$  において、 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 4 : 5$  であるとき、次の問いに答えよ。

- ① 3 辺の長さの比  $a : b : c$  を求めよ。                      ②  $\cos A$  を求めよ。



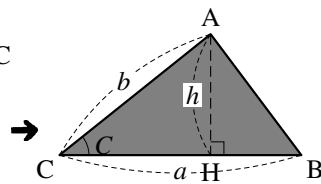
① から分かるように、 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$  である。また、② で計算できたように、3 辺の比さえ分かれば 3 角の大きさは決定される。

## 3.4 平面図形の計量

### 1. 三角形の面積と三角比

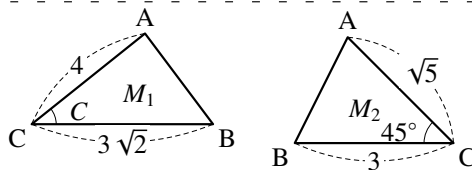
右図において  $\triangle ACH$  に着目すれば  $h = AH = b \sin C$  であるので、 $\triangle ABC$  の面積は次のように計算できる。

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b \sin C = \frac{1}{2}ab \sin C$$



#### 【例題 62】

- 右の三角形  $M_1$  の角  $C$  について、 $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{3}$  であるという。 $M_1$  の面積を求めよ。
- 左の三角形  $M_2$  の面積を求めよ。



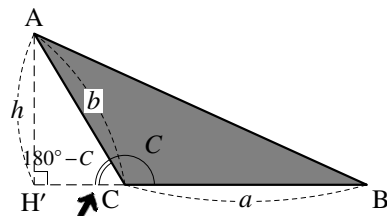


$\angle A$  が鈍角の場合も、 $\triangle ACH'$  に着目して

$$h = b \sin(180^\circ - C) = b \sin C$$

である (『 $180^\circ - \theta$  の三角比』 (p.172) を用いた) ので、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin C$$

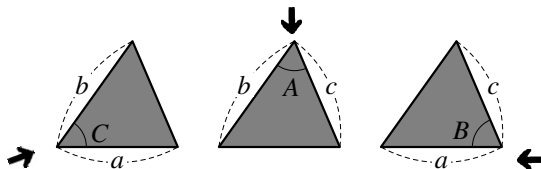


と計算でき、同じ式を得る. また、 $\theta = 90^\circ$  の直角三角形の場合も同じ式が成り立つと分かる.

上の面積の公式は、角  $C$  から見て得られた. 角  $A, B$  から見た場合も同様の公式が得られる.

### 三角形の面積

三角形の面積  $S$  は、 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$  で求めることができる.

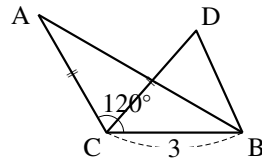


2 辺の長さとして、その間の角の  $\sin$  を掛けて、 $\frac{1}{2}$  倍すると面積になる、と理解すればよい.

### 【練習 63 : 三角形の面積～その 1～】

右の図形において、 $AC = DC = \sqrt{7}$  とする.

- (1)  $\triangle ACB$  の面積を求めよ.
- (2)  $\sin \angle DCB = \frac{3}{4}$  のとき、 $\triangle DCB$  の面積を求めよ.

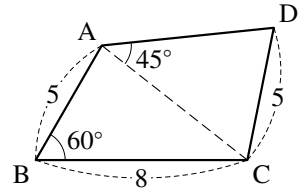


$\frac{1}{2}$  を掛け忘れないよう注意しよう. 特に、発展で学ぶ『ヘロンの公式 (p.187)』と区別すること.

【練習 64 : 四角形の計量】

四角形 ABCD において、 $AB = 5$ 、 $BC = 8$ 、 $CD = 5$ 、 $\angle ABC = 60^\circ$ 、 $\angle CAD = 45^\circ$  のとき、次の問に答えよ。

- (1) AC の長さを求めよ。
- (2) AD の長さを求めよ。
- (3) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

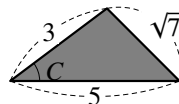


【練習 65 : 三角形の面積～その 2～】

右図の三角形について、以下の問いに答えよ。

(1)  $\cos C$  を求めよ。

(2) 三角形の面積  $S$  を求めよ。



【発展 66 : ヘロンの公式】

三角形の 3 辺の長さを  $a, b, c$  とし、 $s = \frac{a+b+c}{2}$  とおくと、面積  $S$  は  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  に等しくなる。これをヘロンの公式という。この公式を用いて、以下の問いに答えなさい。

- ① 3 辺の長さが 5, 3, 6 である三角形の面積  $S_1$ , 4, 3, 2 である三角形の面積  $S_2$  を求めよ。
- ② 3 辺の長さが 5, 3,  $\sqrt{7}$  である三角形の面積  $S_3$  を求めよ。



3 辺の長さがすべて整数の時は、「ヘロンの公式」を用いると面積の計算が特に簡単になる。

「ヘロンの公式」の証明は p.209 を参考のこと。自分で導こうとするとよい練習になる。

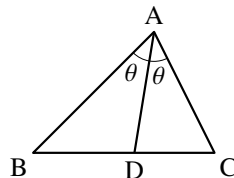
## 2. 平面図形の重要な問題・定理

### A. 角の2等分線

【暗記 67: 角の2等分線の定理】

$AB = 4$ ,  $AC = 3$  の  $\triangle ABC$  において,  $\angle A$  の2等分線と辺  $BC$  との交点を  $D$  とする.

1.  $BD : DC$  を求めよ.
2.  $BC = \sqrt{21}$  のとき,  $AD$  の長さを求めよ.



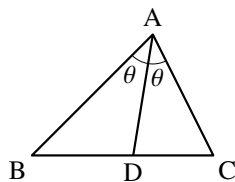
#### 角の2等分線の定理

$\triangle ABC$  において,  $\angle A$  の2等分線と辺  $BC$  との交点を  $D$  とするとき

$$\triangle ABD : \triangle ADC = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \theta : \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \theta \text{ (「面積の公式」より)}$$

$$\triangle ABD : \triangle ADC = BD : DC \text{ (底辺の比より)}$$

から,  $AB : AC = BD : DC$  が成り立つ.



つまり, 角の2等分線においては, 上の2辺の比と下の線分の比が一致する.

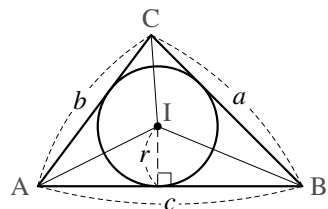
## B. 内接円の半径

### 【暗記 68 : 内接円の半径を求める】

三角形の3つの辺すべてに接する円を、その三角形の**内接円** (inscribed circle) という。1つの三角形に対し、内接円は1つに定まる\*16。

$b = 4, c = 5, A = 60^\circ$  である  $\triangle ABC$  について、内接円の半径を  $r$  とする。

1.  $a$  の値を求めよ。
2.  $\triangle ABC$  の面積を求めよ。
3.  $\triangle ABC$  の内接円の半径を求めよ。

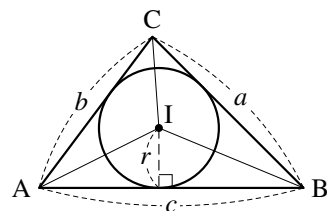


### 三角形の内接円と面積の関係

三角形の面積  $S$  は、内接円の半径  $r$  を用いて

$$\begin{aligned} S &= \triangle BCI + \triangle CAI + \triangle ABI \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで  $a, b, c$  は各辺の長さを表す。

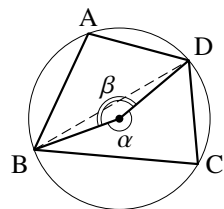


この公式は、必要なときに導くことができれば十分である。ただし、三角形とその内接円を見たら「三角形の面積は計算できる」と連想できるようにしよう。

\*16 内接円については、数学 A で詳しく取り扱う。

### C. 円に内接する四角形

四角形 ABCD が円に内接しているとき、右のように  $\alpha, \beta$  をおくと、中心角は円周角の 2 倍なので



$A$  は右欄外の図の  $\frac{1}{2}\alpha$  と等しく、 $C$  は右欄外の図の  $\frac{1}{2}\beta$  と等しい。

よって、 $A + C = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^\circ$ <sup>\*17</sup>、さらに『 $180^\circ - \theta$  の三角比』(p.172) から以下が導かれる。

円に内接する四角形の向かい合う角

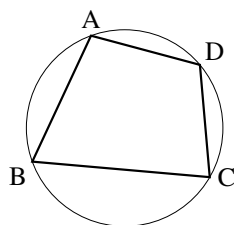
円に内接する四角形において、以下が成立する。

- $A + C = 180^\circ$  ( $\Leftrightarrow \angle A = (\angle C$  の外角))

さらに、『 $180^\circ - \theta$  の三角比』(p.172) を用いて

- $\cos A = -\cos C$  ( $\cos A = -\cos(180^\circ - A)$  より)
- $\sin A = \sin C$  ( $\sin A = \sin(180^\circ - A)$  より)

$B, D$  についても同様である<sup>\*18</sup>。



☞ 四角形が円に内接している場合は、たいてい、次の関係のうちいくつかを使う。

- 円周角の定理
- 中心角が円周角の 2 倍(特に、直径に対する円周角は  $90^\circ$ )
- 上で学んだ、向かい合う角の関係

【例題 69】 四角形 ABCD は  $AB = 3, BC = 4, CD = 3, B = 60^\circ$  であり、円に内接している。

1. 対角線 AC の長さを求めよ。
2. 辺 AD の長さを求めよ。

<sup>\*17</sup> 『正弦定理』(p.181) の証明 iii) の中で、別の方法で証明した。

<sup>\*18</sup> つまり、 $\cos B = -\cos D, \sin B = \sin D$  が成り立つ。

【暗記 70 : 円に内接する四角形】

円に内接する四角形  $ABCD$  において,  $AB = 4$ ,  $BC = 5$ ,  $CD = 3$ ,  $DA = 3$  とする.

1. 対角線  $BD$  の長さを求めよ.
2. 四角形  $ABCD$  の面積を求めよ.

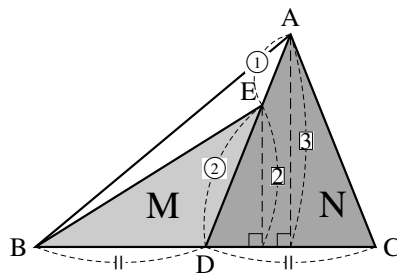
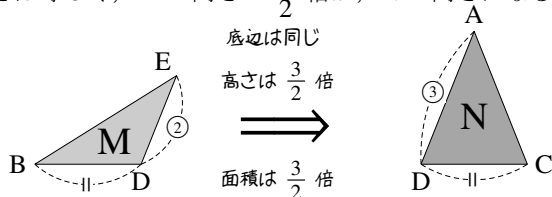
### 3. 平面図形の面積比

#### A. 相似でない2つの三角形の面積比

面積比を求めるときには、どこを底辺におくかが重要である。

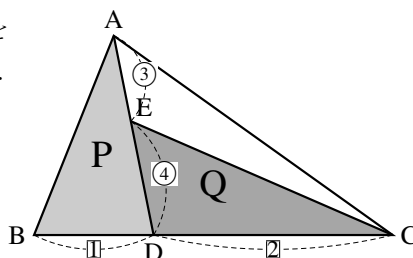
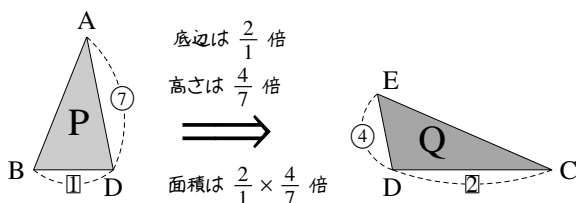
まず、右の三角形 M, N の面積比を考えてみよう。

M の底辺を BD, N の底辺を CD とおけば、M, N の底辺の長さは等しく、M の高さの  $\frac{3}{2}$  倍が、N の高さになる。



つまり、M の面積を  $\frac{3}{2}$  倍すると N の面積に等しいと分かるから、M, N の面積比は 2 : 3 である。

次に、右の三角形 P, Q の面積比を考えてみよう。P の底辺を BD, Q の底辺を CD とすると、次のようにまとめることができる。



P の面積を  $\frac{2}{1} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{7}$  倍すると Q の面積に等しいと分かるから、P, Q の面積比は 8 : 7 である。

#### 【練習 71 : 平面図形の線分の比】

$\square$  ABCD において、辺 BC 上に E を、辺 CD 上に F をとり、 $BE : EC = 1 : 2$ ,  $DF : FC = 2 : 1$  とする ( $\square$  は「平行四辺形」を表す)。

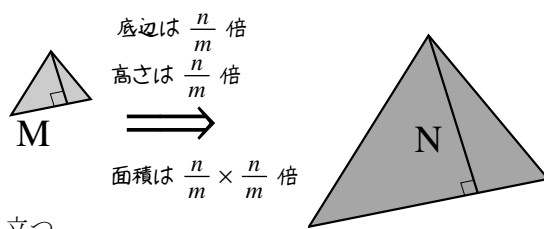
- (1)  $\triangle FEC$  と  $\triangle DEC$  の面積比を求めよ。
- (2)  $\triangle FBC$  と  $\triangle DEC$  の面積比を求めよ。
- (3)  $\triangle FEC$  と  $\square$  ABCD の面積比を求めよ。



## B. 相似な平面図形の面積比

相似比が  $m : n$  である、2 つの三角形の面積比を考えると右のようになる。つまり、M の面積を  $\frac{n}{m} \times \frac{n}{m} = \left(\frac{n}{m}\right)^2$  倍すると N の面積に等しいと分かり、M, N の面積比は  $1 : \left(\frac{n}{m}\right)^2 = m^2 : n^2$  である。

一般に、どんな平面図形においても、次のことが成り立つ。

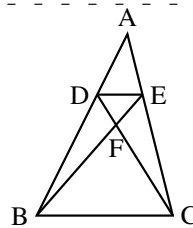


相似な平面図形の面積比

相似比が  $m : n$  である 2 つの平面図形について、その面積比は  $m^2 : n^2$  である。

【例題 72】 右の図において、 $AD : DB = 1 : 2$ 、 $AE : EC = 1 : 2$  であるとする。

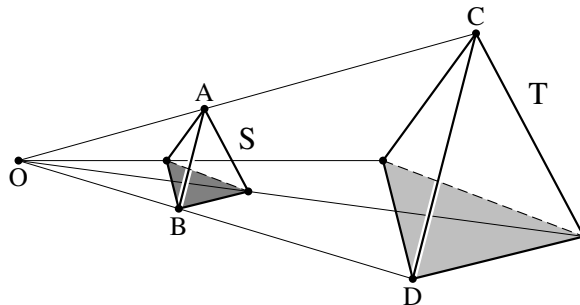
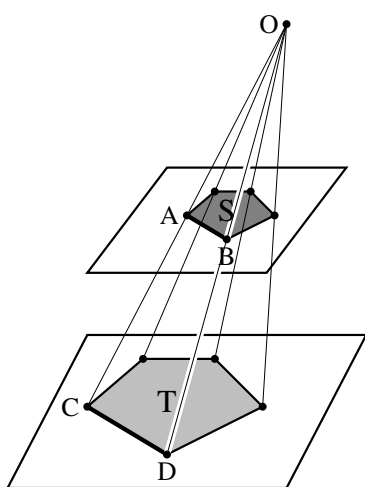
1. 相似な三角形の組を 2 つ見つけ(証明は無くてもよい)、それぞれについて面積の比を求めよ。
2.  $\triangle DEF$  と  $\triangle DBF$  の面積比を求めよ。
3.  $\triangle DEF$  と  $\triangle ABC$  の面積比を求めよ。



## 1. 空間図形の表面積比・体積比

### A. 空間における相似について

2つの図形が相似 (similar) であるとは、「一方の図形を、ある1点に対して拡大・縮小すれば、他方の図形と合同になる」関係のことをいった。この定義は、空間内における相似にも当てはまる。



相似な二つの図形の、対応する辺の長さの比を**相似比** (ratio of similitude) という。

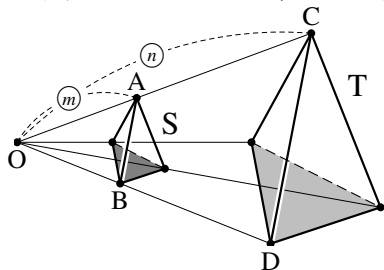
たとえば、上の図において、図形 S と図形 T はいずれも相似である。また、S と T の相似比はいずれも  $AB : CD$  に等しい。

**【例題 73】** 以下の、相似に関する文章は正しいか、間違いか答えなさい。

1. どのような2つの正方形も、相似である。
2. どのような2つの円も、相似である。
3. どのような2つの直方体も、相似である。
4. 2つの立体 S と T が相似ならば、S の表面と T の表面は互いに相似である。

## B. 相似な空間図形の表面積・体積の比

相似比が  $m:n$  である, 2つの相似な三角錐  $S, T$  について, 表面積比と体積比を考えてみよう.



p.4 で考えたように, 2つの立体が相似ならば, その表面の図形は互いに相似である.

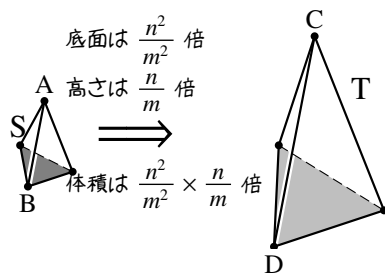
左の  $S$  と  $T$  の場合,  $S$  の4つの表面の図形の面積を  $S_1, S_2, S_3, S_4$  とおけば,  $T$  の4つの表面の図形の面積は  $\frac{n^2}{m^2}S_1, \frac{n^2}{m^2}S_2, \frac{n^2}{m^2}S_3, \frac{n^2}{m^2}S_4$  となるので, 次のように分かる.

$$\begin{aligned} (S \text{ の表面積}) : (T \text{ の表面積}) &= (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) : \left\{ \frac{n^2}{m^2}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \right\} \\ &= 1 : \left( \frac{n^2}{m^2} \right) = m^2 : n^2 \end{aligned}$$

次に体積比を考えよう.

上で考えたように,  $S$  の底面積の  $\frac{n^2}{m^2}$  倍が  $T$  の底面積になる.

また,  $S$  の高さの  $\frac{n}{m}$  倍が  $T$  の高さになるから,  $S$  の体積を  $\frac{n^2}{m^2} \times \frac{n}{m} = \frac{n^3}{m^3}$  倍すると  $T$  の体積に等しい\*19. よって,  $S, T$  の体積比は  $m^3 : n^3$  である.



一般に, どんな空間図形においても, 次のことが成り立つ.

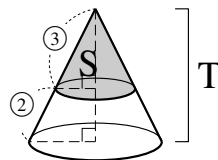
### 相似な立体図形の表面積比・体積比

相似比が  $m:n$  である2つの立体図形について,

- (1) それぞれの表面をなす図形は相似であり, その相似比は  $m:n$  である.
- (2) 表面積比は  $m^2:n^2$  である.
- (3) 体積比は  $m^3:n^3$  である.

**【例題 74】** 右図のような円錐  $T$  を切り, 上にできた円錐を  $S$  とする.

1.  $S$  と  $T$  は相似である. 相似比を求めよ.
2.  $S$  と  $T$  の表面積比を求めよ.
3.  $T$  から  $S$  を除いた図形を  $U$  とする.  $S$  と  $U$  の体積比を求めよ.



\*19 この例では, 体積が  $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$  で求められるから分かる.

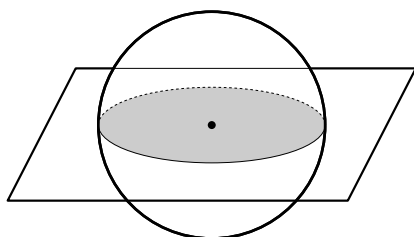
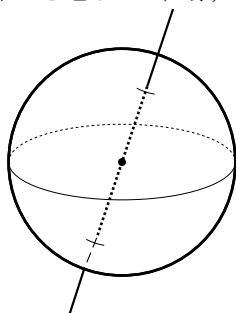
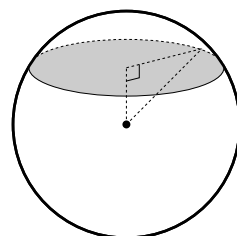
## 2. 球

円を空間に広げたものが球、と考えてよい。

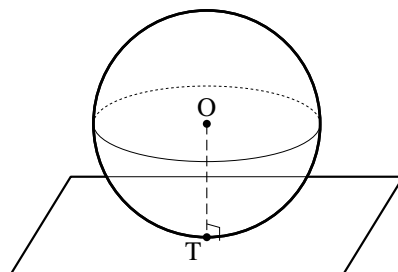
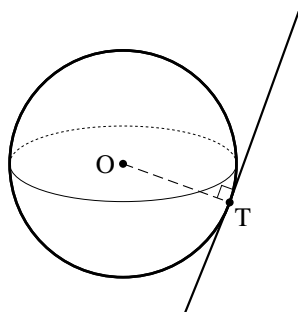
球は、最も美しい図形の1つとして、古来から人々の興味を惹いてきた。

球には以下の性質がある。

- 球を平面で切れば、その切り口は必ず円である。
- 中心を通るどの直線、平面に対しても、球は対称である。



- $O$  を中心とする球が、球面上の点  $T$  で平面・直線と接するとき、直線  $OT$  はその平面・直線と直交する。



これらは、球の定義<sup>\*20</sup>と三平方の定理から証明することができる（ここでは省略する）。

<sup>\*20</sup> 「点  $O$  を中心とする半径  $r$  の球」は「点  $O$  から距離  $r$  にある空間上の点を全て集めてできる図形」と定義できる。また、数学  $B$  において球面の方程式を学ぶ。

## A. 球の表面積と体積

半径  $r$  の球の体積，表面積は次のようになる\*21.

球の表面積・体積

半径  $r$  の球について，表面積は  $4\pi r^2$ ，体積は  $\frac{4}{3}\pi r^3$  である.



「表面積を表す  $4\pi r^2$  の  $r^2$  を  $\frac{r^3}{3}$  におきかえると，体積を表す  $\frac{4}{3}\pi r^3$  になる」と覚えると良い.

### 【練習 75：球の表面積，体積】

- (1) 半径 4 cm の球の，表面積と体積をそれぞれ求めよ.
- (2) 1 辺 8 cm の立方体の表面積と直径 10 cm の球の表面積では，どちらが大きいか.
- (3) 1 辺 10 cm の立方体に高さ 9 cm まで水を入れてある．この水の中に半径 3 cm の球を静かに入れると，何  $\text{cm}^3$  の水があふれるか．ただし，表面張力は考えない.

\*21 数学 III の微積分を用いて，これらの計算ができる．体積については，次の(発)展のようにして計算できる.

### 3. 空間図形と三角比

空間図形の問題は、特定の平面を取り出し、平面図形の問題として考えてみよう。

#### A. 直角が1つの頂点に集まった四面体

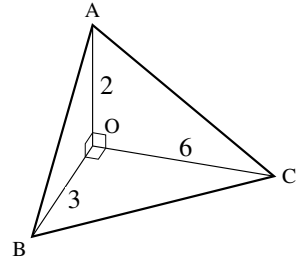
四面体の頂点の1つに、2つ以上直角を含む場合は比較的簡単である。図形を切ることなく、どれかの面を取り出して考えればたいていうまくいくからである\*22。

1つの頂点に直角が3つ集まった三角錐のことを**直角三角錐** (rectangular triangular pyramid) という。

#### 【練習 76：直角三角錐の計量】

右の図のように、 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$  の直角三角錐  $OABC$  において、次の間に答えよ。ただし、 $OA = 2$ 、 $OB = 3$ 、 $OC = 6$  とする。

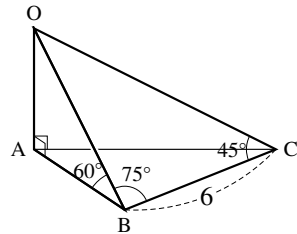
- (1) 辺  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  の長さをそれぞれ求めよ。
- (2)  $\angle ACB = \theta$  とするとき、 $\cos \theta$  の値を求めよ。
- (3)  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ。



#### 【練習 77：三角錐の計量】

右図のような三角錐  $OABC$  において、次の間に答えよ。

- (1) 辺  $OB$  の長さを求めよ。
- (2) 辺  $OC$  の長さを求めよ。
- (3) 辺  $AC$  の長さを求めよ。
- (4)  $\angle ABC = \theta$  とするとき、 $\cos \theta$  の値を求めよ。



\*22 平面に対し、異なる2方向から直角である線分は、平面に対し垂線になっていることに注意すればよい。

【**発**展 78 : 山の高さを求める】

ある山から真北の地点 A と、真東の地点 B があり、この 2 点は 4 km 離れており、共に標高 200 m である。地点 A から山の頂上を見上げると  $45^\circ$  の高さであった。次に、地点 B から山の頂上を見上げると  $30^\circ$  の高さであった。この山の高さは何 km か。

## B. 正多面体

空間図形において、全ての面が合同な正多角形からなり、各頂点に集まる辺の数が全て等しい多面体のことを**正多面体** (regular polyhedron) という\*23.

正多面体は、次の5つしかない.

正四面体, 正六面体(立方体), 正八面体, 正十二面体, 正二十面体

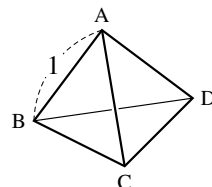


正多面体にはたくさんの二等辺三角形がある. それを上手に生かした切り口を考えよう.

### 【練習 79 : 正四面体の計量】

右下図のように、1 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD について以下の間に答えよ.

- (1)  $\triangle BCD$  の面積  $S$  を求めよ.
- (2) 頂点 A から  $\triangle BCD$  に下ろした垂線の長さを求めよ.
- (3) ~~(発)~~(展) 正四面体 ABCD に内接する球の半径を求めよ.
- (4) ~~(発)~~(展) 正四面体 ABCD に外接する球の半径を求めよ.



\*23 たとえば、正四面体は正多面体であるが、正四面体 2 つを重ねてできる六面体は、頂点に集まる辺の数が 3 つの場合と 4 つの場合があるので、正多面体ではない.





### C. 正多角錐

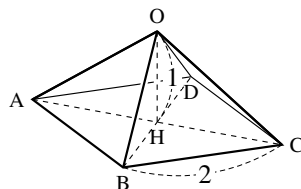
角錐のうち、底面が正多角形で、側面が二等辺三角形で作られ、側面の頂点が一点に集まっている多面体のことを**正多角錐** (regular pyramid) という (正角錐ともいう)。底面が正  $n$  角形の正多角錐のことを正  $n$  角錐といい、 $n$  は 3 以上の自然数をとる。

正多角錐においては、頂点からの垂線の足が、底面の中心(対角線の交点)にくる。よって、底面の対角線を通る平面などに着目するとよい。

#### 【練習 80 : 正四角錐の計量】

右図のように、底面の 1 辺の長さが 2、高さ  $\text{OH}$  が 1 である正四角錐  $\text{OABCD}$  について以下の問に答えよ。

- (1)  $\text{AB}$  の中点を  $\text{M}$  とするとき、 $\angle\text{OMH}$  を求めよ。
- (2)  $\text{A}$  から辺  $\text{OB}$  に下ろした垂線  $\text{AE}$  の長さを求めよ。
- (3) 辺  $\text{OB}$  の中点を  $\text{E}$  とするとき、 $\angle\text{AEC}$  を求めよ。



(1) の  $\angle\text{OMH}$  は底面と側面のなす角に、(3) の  $\angle\text{AEC}$  は側面と側面のなす角に一致している。

#### D. 球を含んだ空間図形

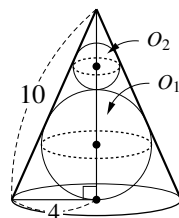
空間図形に球を含む場合は、「球の中心と、球と他の図形の共有点」を結んだ平面に着目するとよい。

##### 【練習 81：円錐と内接球】

底面の半径が 4，母線の長さが 10 の円錐がある。

- (1) この円錐に内接する球  $O_1$  の半径を求めよ。
- (2) 球  $O_1$  の上に外接し，さらに円錐に内接する球  $O_2$  の半径を求めよ。

ただし，球  $O_1$ ， $O_2$  とも，半径はできるだけ大きくなるようにする。



別解では断面が相似であることを使っているが，2つの断面図のもとになる立体をそれぞれ考えても，やはり互いに相似である。

## 1. 36°, 72° などの三角比

### A. 36°, 72°, 72° の三角形を考える

18° に関する三角比を考えるため、まず、右図の二等辺三角形 ABC について BC, AC の長さを求めよう\*24。

ここで、右図の奥のように ∠A の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする。このとき、

$$\angle DAC = \angle DCA = 36^\circ$$

より △DAC は二等辺三角形になる。また

$$\angle ADB = \angle ABD = 72^\circ$$

より △ABD も二等辺三角形になる。これらより、 $CD = AD = AB = 1$  が成り立つ。

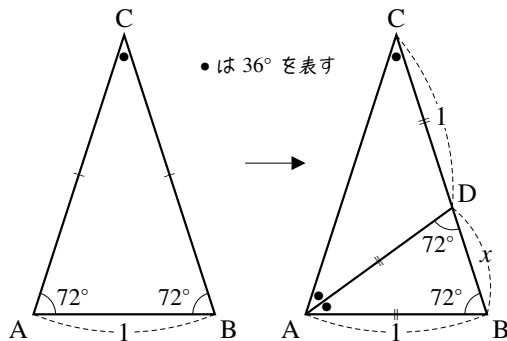
さらに、△CAB の △ABD であるから、 $CB : AB = AB : BD$  が成り立つ。よって、 $AB^2 = CB \times BD$  であるので、 $BD = x$  とおくと

$$1 \times 1 = (1 + x) \times x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$x > 0$  であるから、解の公式より  $BD = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  と求められる。これより

$$BC = BD + 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

となる。また、 $AC = BD = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$  である。



### B. 36° の三角比とその周辺

△ACD に着目し、右図のように、点 D から辺 AC へ垂線 DH を引く。直角三角形 DCH に、余弦の定義を用いて

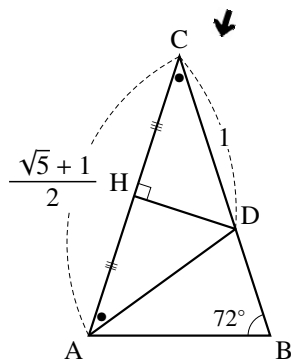
$$\cos 36^\circ = \frac{CH}{DC} = \frac{\frac{1}{2}CA}{1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

さらに、三角比の相互関係  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  を用いて

$$\sin^2 36^\circ = 1 - \cos^2 36^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$$

であり、 $\sin 36^\circ > 0$  であるから、 $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$  である。

また、これらより  $\tan 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}} = (\text{計算省略}) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$  である。



\*24 18° に関する三角比を求めるためには、AB の長さはいくつでもよい。ここでは、考えやすくするため 1 とした。

【練習 82 : 36° とその周辺の三角比】

$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ,  $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ,  $\tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$  を利用して次の三角比の値を求めよ.

(1)  $\sin 54^\circ$ ,  $\cos 54^\circ$ ,  $\tan 54^\circ$

(2)  $\sin 126^\circ$ ,  $\cos 126^\circ$ ,  $\tan 126^\circ$

(3)  $\sin 144^\circ$ ,  $\cos 144^\circ$ ,  $\tan 144^\circ$

### C. $72^\circ$ の三角比とその周辺

今度は  $\triangle ABD$  に着目し、右図のように、点 A から辺 BD へ垂線  $AH'$  を引く。直角三角形  $ABH'$  に、余弦の定義を用いて

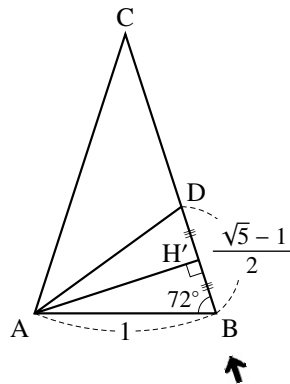
$$\cos 72^\circ = \frac{BH'}{AB} = \frac{\frac{1}{2}BD}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

さらに、三角比の相互関係  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  を用いて

$$\sin^2 72^\circ = 1 - \cos^2 72^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

であり、 $\sin 72^\circ > 0$  であるから、 $\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$  である。

また、これらより  $\tan 72^\circ = \frac{\sin 72^\circ}{\cos 72^\circ} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} = (\text{計算省略}) = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$  である。



#### 【練習 83 : $72^\circ$ とその周辺の三角比】

$\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ ,  $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ,  $\tan 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$  を利用して次の三角比を求めよ。

(1)  $\sin 18^\circ$ ,  $\cos 18^\circ$ ,  $\tan 18^\circ$

(2)  $\sin 108^\circ$ ,  $\cos 108^\circ$ ,  $\tan 108^\circ$

(3)  $\sin 162^\circ$ ,  $\cos 162^\circ$ ,  $\tan 162^\circ$

## 2. 第1余弦定理

三角形の2つの角と2辺の長さの間に次の関係式が成り立つ.

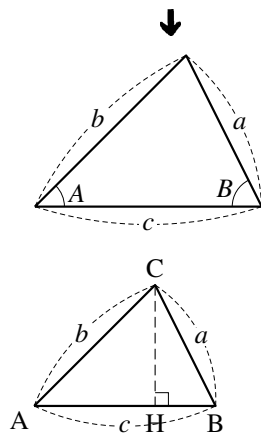
$$c = b \cos A + a \cos B$$

これを、**第1余弦定理** (first cosine theorem) という.

$A$  が鋭角のときは、線分  $AB$  上に垂線  $CH$  をひいて ( $A$  が直角の時は  $H$  と  $A$  が一致する)

$$(\text{右辺}) = b \cos A + a \cos B = AH + BH = AB = c = (\text{左辺})$$

となり成立する ( $A$  が直角の時は  $a \cos A = 0$  なので  $AH = 0$ ).



### 【暗記 84 : 第1余弦定理の導出】

上の続きとして、 $A$  が鈍角のときも第1余弦定理が成り立つことを証明せよ.

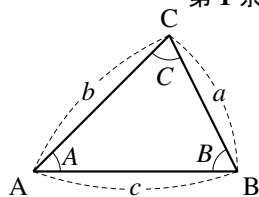
### 第1余弦定理

$\triangle ABC$  において次の等式が成り立つ.

$$c = b \cos A + a \cos B$$

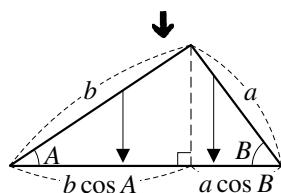
$$b = a \cos C + c \cos A$$

$$a = c \cos B + b \cos C$$



この定理は、ある角から見たときに左右2つの辺を向かいの辺に押しつぶす感じで覚えると良い.

また、上の暗記例題のように自分で垂線の引けるならば、公式を覚えなくてもよい.



### 3. ヘロンの公式の証明

【発展 85 : ヘロンの公式の導出】

3 辺の長さが  $a, b, c$  である三角形について、以下の問いに答えなさい。

- ① 長さ  $c$  の辺の対角  $C$  について、 $\sin C$  を  $a, b, c$  で表せ。式は整頓しなくてよい。
- ②  $s = \frac{a+b+c}{2}$  としたとき、三角形の面積  $S$  が  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  に等しいことを示せ。



## 三角比の表

0°	1.0000	0.0000	0.0000	角	cos	sin	tan
1°	0.9998	0.0175	0.0175	46°	0.6947	0.7193	1.0355
2°	0.9994	0.0349	0.0349	47°	0.6820	0.7314	1.0724
3°	0.9986	0.0523	0.0524	48°	0.6691	0.7431	1.1106
4°	0.9976	0.0698	0.0699	49°	0.6561	0.7547	1.1504
5°	0.9962	0.0872	0.0875	50°	0.6428	0.7660	1.1918
6°	0.9945	0.1045	0.1051	51°	0.6293	0.7771	1.2349
7°	0.9925	0.1219	0.1228	52°	0.6157	0.7880	1.2799
8°	0.9903	0.1392	0.1405	53°	0.6018	0.7986	1.3270
9°	0.9877	0.1564	0.1584	54°	0.5878	0.8090	1.3764
10°	0.9848	0.1736	0.1763	55°	0.5736	0.8192	1.4281
11°	0.9816	0.1908	0.1944	56°	0.5592	0.8290	1.4826
12°	0.9781	0.2079	0.2126	57°	0.5446	0.8387	1.5399
13°	0.9744	0.2250	0.2309	58°	0.5299	0.8480	1.6003
14°	0.9703	0.2419	0.2493	59°	0.5150	0.8572	1.6643
15°	0.9659	0.2588	0.2679	60°	0.5000	0.8660	1.7321
16°	0.9613	0.2756	0.2867	61°	0.4848	0.8746	1.8040
17°	0.9563	0.2924	0.3057	62°	0.4695	0.8829	1.8807
18°	0.9511	0.3090	0.3249	63°	0.4540	0.8910	1.9626
19°	0.9455	0.3256	0.3443	64°	0.4384	0.8988	2.0503
20°	0.9397	0.3420	0.3640	65°	0.4226	0.9063	2.1445
21°	0.9336	0.3584	0.3839	66°	0.4067	0.9135	2.2460
22°	0.9272	0.3746	0.4040	67°	0.3907	0.9205	2.3559
23°	0.9205	0.3907	0.4245	68°	0.3746	0.9272	2.4751
24°	0.9135	0.4067	0.4452	69°	0.3584	0.9336	2.6051
25°	0.9063	0.4226	0.4663	70°	0.3420	0.9397	2.7475
26°	0.8988	0.4384	0.4877	71°	0.3256	0.9455	2.9042
27°	0.8910	0.4540	0.5095	72°	0.3090	0.9511	3.0777
28°	0.8829	0.4695	0.5317	73°	0.2924	0.9563	3.2709
29°	0.8746	0.4848	0.5543	74°	0.2756	0.9613	3.4874
30°	0.8660	0.5000	0.5774	75°	0.2588	0.9659	3.7321
31°	0.8572	0.5150	0.6009	76°	0.2419	0.9703	4.0108
32°	0.8480	0.5299	0.6249	77°	0.2250	0.9744	4.3315
33°	0.8387	0.5446	0.6494	78°	0.2079	0.9781	4.7046
34°	0.8290	0.5592	0.6745	79°	0.1908	0.9816	5.1446
35°	0.8192	0.5736	0.7002	80°	0.1736	0.9848	5.6713
36°	0.8090	0.5878	0.7265	81°	0.1564	0.9877	6.3138
37°	0.7986	0.6018	0.7536	82°	0.1392	0.9903	7.1154
38°	0.7880	0.6157	0.7813	83°	0.1219	0.9925	8.1443
39°	0.7771	0.6293	0.8098	84°	0.1045	0.9945	9.5144
40°	0.7660	0.6428	0.8391	85°	0.0872	0.9962	11.4301
41°	0.7547	0.6561	0.8693	86°	0.0698	0.9976	14.3007
42°	0.7431	0.6691	0.9004	87°	0.0523	0.9986	19.0811
43°	0.7314	0.6820	0.9325	88°	0.0349	0.9994	28.6363
44°	0.7193	0.6947	0.9657	89°	0.0175	0.9998	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	0.0000	1.0000	なし
角	cos	sin	tan	角	cos	sin	tan



これらの値を計算するには、大学で学習することになるテイラー展開（または、マクローリン展開）が必要となる。

# 索引

—の値  
関数, 71

1 次不等式, 56  
因数, 29  
因数分解, 29

$n$  次式, 14

解  
1 次不等式の—, 56  
2 次不等式の—, 124  
2 次方程式の—, 63

外心, 180  
外接円, 180  
解の公式, 65  
開平法, 49  
角点, 163  
関数, 71

既約分数, 3  
共通因数, 29

グラフ, 74

係数, 11

項, 13  
降べきの順, 14  
コサイン, 149

最小値  
関数の, 72  
最大値  
関数の, 72  
サイン, 149  
座標軸, 73  
座標平面, 73  
三角比, 150

軸, 84  
指数, 12  
次数  
多項式の—, 14  
単項式の—, 11

指数法則, 12  
始線, 163  
自然数, 1  
実数, 5  
斜辺, 147

重解, 67  
重根, 67  
循環小数, 4  
象限, 73  
小数, 4  
昇べきの順, 14

数直線, 2

正角錐, 203  
正弦定理, 180  
整式, 13  
整数, 2  
正多角錐, 203  
正多面体, 201  
接する, 115, 122  
接点, 115, 122

相似, 194  
相似比, 194

対辺, 147  
多項式, 13  
たすきがけ, 34  
単位円, 163  
単項式, 11  
タンジェント, 148

値域, 72  
稠密性, 4  
頂点, 84  
直角三角錐, 198

定義域, 72  
定数, 73  
定数項, 13  
底辺, 147  
展開, 16

動径, 163  
同類項, 13  
解く  
1 次不等式を—, 57  
2 次不等式を—, 124  
2 次方程式を—, 63  
連立 3 元 1 次方程式を—, 94  
連立不等式を—, 58

凸, 84

内接円, 189

2 次関数, 84  
2 次不等式, 124  
2 次方程式, 63  
2 重根号, 33

背理法, 6  
繁分数, 151  
判別式  
2 次式の—, 120  
2 次方程式の—, 67

比, 3

複 2 次式, 41  
複分数, 151  
不等号, 54  
不等式, 54  
—の移項, 57  
—の右辺, 54  
—の左辺, 54  
—の両辺, 54

平方, 12  
平方完成, 89  
変数, 71

方程式  
放物線の—, 85  
放物線, 84

無限小数, 4  
無理数, 5

約分, 3

有限小数, 4  
有理化, 19  
有理数, 3

余弦定理, 175  
第 1—, 208  
第 2—, 175

立方, 12

累乗, 12

連続性, 5  
連立 3 元 1 次方程式, 94, 96  
連立不等式, 58