13th-note 数学A

（2013 年度卒業生まで）

Ver1.73(2012-7-21)

目次

第4章　平面図形

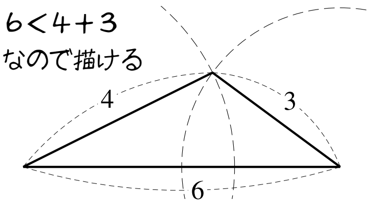
この章では，三角形・四角形・円などの平面図形について成り立つ重要な法則について学ぶ.

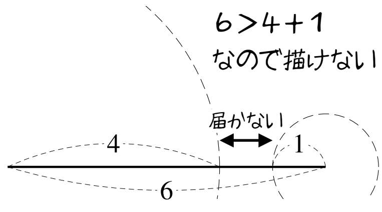
4.1　三角形の性質（１）

1.　三角形の成立条件

A.　描ける三角形・描けない三角形

3 辺が 6 cm，4 cm，3 cm の三角形は描けるが，3 辺が 6 cm，4 cm，1 cm の三角形を描くことはできない．





一番長い辺（6 cm）を底辺にして書いてみよう．すると，一番長い辺は，他の 2 辺の和より短くないといけない．

【例題 1】　3 辺が以下で与えられる三角形が，存在するか，存在しないか，答えなさい．

a) 5，3，3　　b) 7，4，3　　c) 8，5，2　　d) 9，6，4

【解答】

a) 存在する　　b) 存在しない　　c) 存在しない　　d) 存在する

B. 三角形の成立条件

3 辺が a, b, c である三角形が存在する条件は，以下のようにまとめられる．

三角形の成立条件

3 辺が a, b, c である三角形が存在する条件は

$c < a + b$, $b < c + a$, $a < b + c$ を全て満たすこと[*1]

である．特に，c が一番長い場合は，$c < a + b$ が成り立てば十分である．

【練習 2：三角形の成立する条件】

(1) 3 辺が $x - 2$, x, $x + 2$ である三角形を考えよう．最大辺は $\boxed{\text{ア}}$ の辺なので，三角形が存在するには $\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ でないといけない．これを解いて，$\boxed{\text{ウ}} < x$ のときに三角形が存在する．

(2) 3 辺が 3, 5, $x + 1$ である三角形を考えよう．三角形が成立する条件は，

連立不等式 $\begin{cases} 3 < \boxed{\text{エ}} \\ 5 < \boxed{\text{オ}} \\ x + 1 < \boxed{\text{カ}} \end{cases}$ の解であるから，$\boxed{\text{キ}} < x < \boxed{\text{ク}}$ のときに三角形が存在する．

(3) 3 辺が 5, $x + 2$, $2x + 1$ である三角形が成立するための x の条件を求めよ．

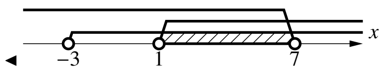
【解答】

(1) 最大辺は $\underline{\boldsymbol{x+2}}_{(\text{ア})}$ であるから，$_{(\text{ア})}\underline{\boldsymbol{x+2}} < \underline{\boldsymbol{(x-2)+x}}_{(\text{イ})}$ でないといけない．これを解いて

$$x + 2 < 2x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad {}_{(\text{ウ})}\underline{\boldsymbol{4}} < x$$

(2) 三角形の成立条件となる連立不等式を解くと

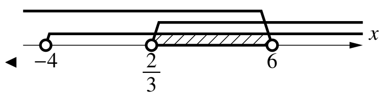
$$\begin{cases} 3 < \underline{\boldsymbol{5+(x+1)}}_{(\text{エ})} \\ 5 < \underline{\boldsymbol{(x+1)+3}}_{(\text{オ})} \\ x + 1 < \underline{\boldsymbol{5+3}}_{(\text{カ})} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \\ 1 < x \\ x < 7 \end{cases}$$



これらを連立して ${}_{(\text{キ})}\underline{\boldsymbol{1}} < x < \underline{\boldsymbol{7}}_{(\text{ク})}$ を得る．

(3) 三角形の成立条件となる連立不等式を解くと

$$\begin{cases} 5 < (x+2) + (2x+1) \\ x + 2 < (2x+1) + 5 \\ 2x + 1 < 5 + (x+2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < 3x \\ -4 < x \\ x < 6 \end{cases}$$



以上を連立して，$\boldsymbol{\dfrac{2}{3} < x < 6}$ を得る．

◀ このとき，$x+2$ も $2x+1$ も正であることが確認できる．

*1 「この 3 条件を同時に満たす」ことの必要十分条件として「不等式 $|a - b| < c < a + b$ を満たす」ことを考えてもよい．ただし，絶対値が含まれる分，計算は少しややこしいことがある．

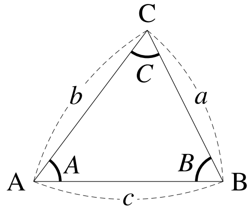
2.　三角形の辺と角

A.　辺と角の名前

$\triangle$ABC において，以下のように略すことが多い．

$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C の大きさ　$\longrightarrow$　それぞれ A，B，C

辺 BC，CA，AB の長さ $\longrightarrow$　それぞれ a，b，c



たとえば，角 A の向かい側にある辺 BC を a と表すことになる．

今後，特に断りのない限りこの記法にしたがうこととする．

B.　辺と角の大小関係

たとえば，$A = 45°$，$B = 60°$，$c = 6$ を描くと $a < b$ になる．

また，$a = 3$，$b = 4$，$c = 6$ の $\triangle$ABC を描くと，角の大きさは $A < B < C$ になる．

一般に，次のような関係が成り立つ．

三角形の辺と角

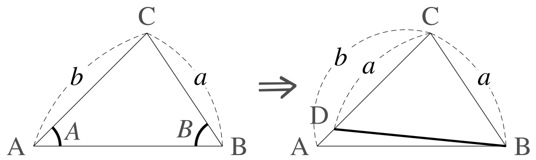
$\triangle$ABC について，辺の大小と，向かいの角の大小は，一致する．

（証明）$a > b \iff A > B$ を示せばよい．

$a < b$ のとき，辺 AC 上に，CD = a となるよう D をとる．すると

$B > \angle$CBD $= \angle$CDB $= A + \angle$DBA $> A$

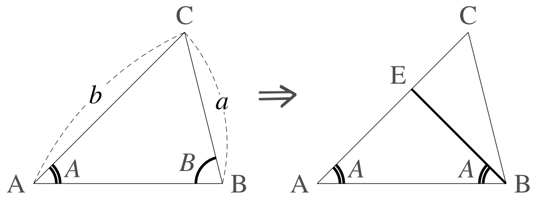
から，$A < B$ が示される．



逆に，$A < B$ であったとする．このとき，$\angle$ABE $= A$ となるよう，辺 AC 上に E をとる．すると，$\triangle$EAB は二等辺三角形であるから

$b =$ AE + EC = BE + EC > CB $= a$

から，$a < b$ である．



上の定理は，定理の内容の分かりやすさに比べると，証明が難しい．

【例題 3】　次の三角形について，一番長い辺・短い辺はそれぞれどこか．

1. $A = 50°$，$B = 60°$　　2. $A = 100°$，$B = 30°$　　3. $B = 45°$，$C = 40°$

【解答】

1. $C > B > A$ なので，**AB（= $\boldsymbol{c}$）**が一番長く，**BC（= $\boldsymbol{a}$）**が一番短い
2. $A > C > B$ なので，**BC（= $\boldsymbol{a}$）**が一番長く，**AC（= $\boldsymbol{b}$）**が一番短い
3. $A > B > C$ なので，**BC（= $\boldsymbol{a}$）**が一番長く，**AB（= $\boldsymbol{c}$）**が一番短い

【発展 4：辺の大小と角の大小】

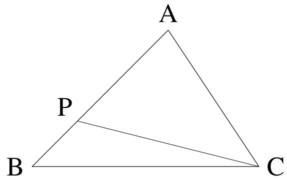
辺 BC が最大である $\triangle$ABC の辺 AB 上に P をとるとき，$PC < BC$ ········ ①を示そう．

「三角形の辺と角の大小関係」から，①を示すには

$\angle\boxed{\text{ア}} < \angle\boxed{\text{イ}}$ ········ ②を示せばよい．ここで，$\triangle$ABC において

は辺 BC が最大であるので，$\angle\boxed{\text{ア}} < \angle\boxed{\text{ウ}}$ であるから，

$\angle\boxed{\text{イ}} - \angle\boxed{\text{ア}} > \angle\boxed{\text{イ}} - \angle\boxed{\text{エ}} = \angle\boxed{\text{オ}} > 0$



よって，②が成立することが分かったから，よって，①が示せた． ■

【解答】 $\triangle$PBC について「三角形の辺と角の大小関係」から，

$PC < BC$（①）$\Leftrightarrow \angle\underline{\mathbf{PBC}}_{(\text{ア})} < \angle\underline{\mathbf{BPC}}_{(\text{イ})}$（②）を示せばよい．

辺 BC が $\triangle$ABC の最大辺なので $\angle PBC < \angle\underline{\mathbf{BAC}}_{(\text{ウ})}$ が成り立つので

$\angle BPC - \angle PBC > \angle BPC - \angle\underline{\mathbf{BAC}}_{(\text{エ})}$ ······················ ③

$\triangle$APC について，$\angle BAC + \angle ACP = \angle BPC$ であるから ③ $= \angle\underline{\mathbf{ACP}}_{(\text{オ})} > 0$

よって，$\angle BPC - \angle PBC > 0 \Leftrightarrow PC < BC$ が示せた． ■

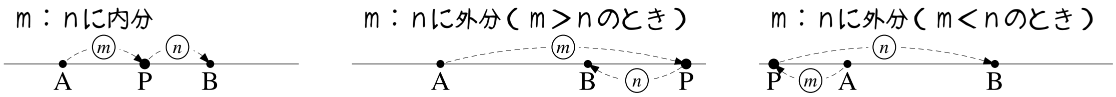
3.　辺の内分・外分

A.　内分とは・外分とは

線分 AB を考え，P を直線 AB 上のどこか（A，B 除く）にとる．

P を線分 AB 内にとるとき「P は線分 AB を**内分** (interior devision) する」という．線分の長さの比 $AP : PB = m : n$ となるとき「P は線分 AB を $m : n$ に内分する」という．

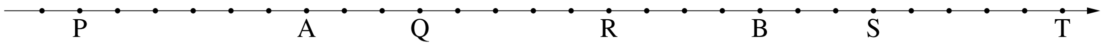
P を線分 AB 外にとるとき「P は線分 AB を**外分** (exterior division) する」という．線分の長さの比 $AP : PB = m : n$ となるとき「P は線分 AB を $m : n$ に外分する」という．



上の図のように「A から P へ，P から B へ」の矢印 2 つで考えると，内分も外分も分かりやすい．
また，P が線分 AB を 1 : 1 に内分するとき，P は中点になる．

【例題 5】

以下の目盛りが等間隔であるとき，$\boxed{}$に数値を，（　）に「内」「外」のいずれかを入れよ．



- P は AB を $\boxed{\text{ア}}:\boxed{\text{イ}}$ に（ ウ ）分している
- Q は AB を $\boxed{\text{エ}}:\boxed{\text{オ}}$ に（ カ ）分している
- R は AB を $\boxed{\text{キ}}:\boxed{\text{ク}}$ に（ ケ ）分している
- S は AB を $\boxed{\text{コ}}:\boxed{\text{サ}}$ に（ シ ）分している
- T は AB を $\boxed{\text{ス}}:\boxed{\text{セ}}$ に（ ソ ）分している

【解答】　線分 AB 上にある Q，R は内分，他は外分である．

- $\mathrm{AP}=6$，$\mathrm{PB}=18$ より，$6:18={}_{(\text{ア})}\underline{\mathbf{1}}:\underline{\mathbf{3}}_{(\text{イ})}$ に$_{(\text{ウ})}$<u>外</u>分している
- $\mathrm{AQ}=3$，$\mathrm{QB}=9$ より，$3:9={}_{(\text{エ})}\underline{\mathbf{1}}:\underline{\mathbf{3}}_{(\text{オ})}$ に$_{(\text{カ})}$<u>内</u>分している
- $\mathrm{AR}=8$，$\mathrm{RB}=4$ より，$8:4={}_{(\text{キ})}\underline{\mathbf{2}}:\underline{\mathbf{1}}_{(\text{ク})}$ に$_{(\text{ケ})}$<u>内</u>分している
- $\mathrm{AS}=15$，$\mathrm{SB}=3$ より，$15:3={}_{(\text{コ})}\underline{\mathbf{5}}:\underline{\mathbf{1}}_{(\text{サ})}$ に$_{(\text{シ})}$<u>外</u>分している
- $\mathrm{AT}=20$，$\mathrm{TB}=8$ より，$20:8={}_{(\text{ス})}\underline{\mathbf{5}}:\underline{\mathbf{2}}_{(\text{セ})}$ に$_{(\text{ソ})}$<u>外</u>分している

【例題 6】　線分 XY の長さを 12 とし，線分 XY を $1:2$ に内分する点を A，$5:1$ に内分する点を B，$1:2$ に外分する点を C，$3:2$ に外分する点を D とする．

1. XA，XB，XC，XD の長さをそれぞれ求めよ．
2. 比 XA : AB : BY を求めよ．

【解答】

1. $\mathrm{XA}=12\times\dfrac{1}{1+2}=\mathbf{4}$，$\mathrm{XB}=12\times\dfrac{5}{5+1}=\mathbf{10}$，
   C，D は右欄外のようになるので
   $\mathrm{XC}=\mathrm{XY}=\mathbf{12}$，$\mathrm{XD}=12\times\dfrac{3}{3-2}=\mathbf{36}$
2. $\mathrm{AB}=10-4=6$，$\mathrm{BY}=12-10=2$ より，$\mathrm{XA}:\mathrm{AB}:\mathrm{BY}=4:6:2=$ $\mathbf{2:3:1}$.

【 暗記 7 : 3 分割された線分の長さ】

線分 AB を $3:5$ に内分した点を P，$5:1$ に内分した点を Q とするとき，比 AP : PQ : QB を求めよ．

【解答】　$3+5=8$ と $5+1=6$ の最小公倍数は 24 なので，
$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=3:5=9:15$，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=5:1=20:4$ と変形して
$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}:\mathrm{QB}=9:(20-9):4=\mathbf{9:11:4}$ と分かる．

◂【別解】$\mathrm{AB}=a$ とおくと
$\mathrm{AP}=\dfrac{3}{3+5}\mathrm{AB}=\dfrac{3}{8}a$
$\mathrm{AQ}=\dfrac{5}{6}a$, $\mathrm{PQ}=\mathrm{AQ}-\mathrm{AP}=\dfrac{11}{24}a$
$\mathrm{QB}=\mathrm{AB}-\mathrm{AQ}=\dfrac{1}{6}a$，後は比を取ればよい．

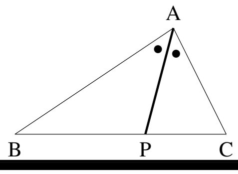
B. 内角の二等分線の定理

三角形の内角を二等分する線は，以下の性質を持つ．

内角の二等分線の定理

$\triangle$ABC について，$\angle$A を二等分する線と辺 BC が P で交わるとき（$\angle$BAP = $\angle$PAC のとき），次が成り立つ．

BP : PC = BA : AC



「A から P へ」二等分線を引いて，BA : AC $\xrightarrow[\text{代えても同じ}]{\text{AをPに}}$ BP : PC と覚えても良い．

（証明）CA // PD となるよう，辺 AB 上に D をとる．このとき

$\angle$APD = $\angle$PAC　　（CA // PD より）

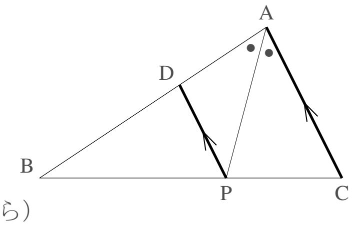
　　= $\angle$PDA　　（AP は $\angle$A を二等分するから）

であるから，$\triangle$DAP はDA = DP ……… ① の二等辺三角形．よって

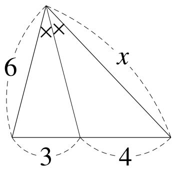
AB : AC = DB : DP　　（CA // PD より $\triangle$BDP ∽ $\triangle$BAC であるから）

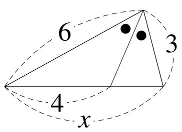
　　= DB : DA　　（①から）

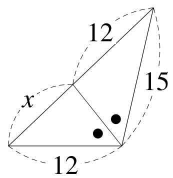
　　= BP : PC　　（CA // PD より）■

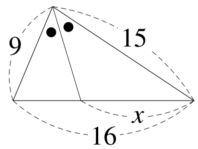


【例題 8】 以下の図について，x の値を求めなさい．

1.


2.


3.


4.


【解答】

1. $6 : x = 3 : 4$ であるから，$\boldsymbol{x = 8}$
2. $6 : 3 = 4 : 2$ であるから，$x = 4 + 2 = \mathbf{6}$
3. $15 : 12 = 12 : x$ であるから，$12^2 = 15x$ を解いて $\boldsymbol{x = \dfrac{48}{5}}$
4. 底辺は $9 : 15 = 3 : 5$ で内分されるので，$x = 16 \times \dfrac{5}{3+5} = \mathbf{10}$

◀ $9 : 15 = (16 - x) : x$ を解いてもよい．

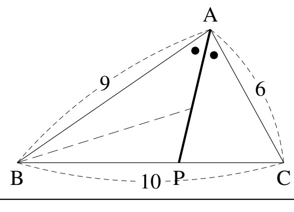
【練習 9：内角の二等分線】

右の $\triangle$ABC について，次の問いに答えよ．

(1) BP，PC の長さを求めよ．

(2) $\angle$B の二等分線と AP の交点を Q とする．AQ : QP を求めよ．

(3) $\angle$C の二等分線と AP の交点を R とする．AR : RP を求めよ．



【解答】

(1) BP : PC = BA : AC = 9 : 6 = 3 : 2 なので，

　BP = BC $\times \dfrac{3}{3+2} = \mathbf{6}$，PC = BC $\times \dfrac{2}{3+2} = \mathbf{4}$

(2) AQ : QP = AB : BP = 9 : 6 = **3 : 2**

(3) AR : RP = AC : CP = 6 : 4 = **3 : 2**

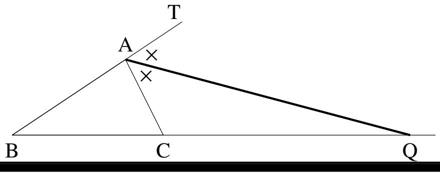
◀QとRは一致し，内心と呼ばれる．詳しくは p.112 を参照のこと．

C. 外角の二等分線の定理

外角の二等分線の定理

△ABC について，∠A の外角を二等分する線と辺 BC が Q で交わるとき（∠CAQ = ∠QAT のとき），次が成立する．

BQ : QC = AB : AC



「A から Q へ」二等分線を引いて，BA : AC $\xrightarrow[\text{代えても同じ}]{\text{AをQに}}$ BQ : QC と覚えても良い．

【発展 10：外角の二等分線の定理の証明】

「外角の二等分線の定理」を証明せよ．

【解答】 QA // CD となるよう，辺 AB 上に D をとる．このとき

∠ACD = ∠QAC　(QA // CD より)

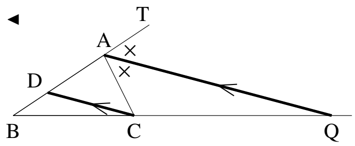
　　= ∠QAT　(AP は ∠A の外角を二等分するから)

　　= ∠CDA　(QA // CD より)

であるから，△CAD はAC = AD ……… ①の二等辺三角形．よって

AB : AC = AB : AD　(①より)

　　= QB : QC　(CA // PD より)　■

◀


（別解）として，直線 AB 上に，CA // QD となるよう D をとる，などの補助線でも証明できる．

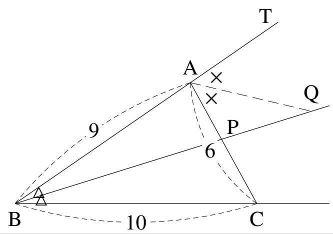
【練習 11：内角・外角の二等分線】

右の △ABC について，次の問いに答えよ．

(1) AP，PC の長さを求めよ．

(2) BQ : QP を求めよ．

(3) ∠C の外角二等分線と直線 BP の交点を R とする．
BR : RP を求めよ．



【解答】

(1) AP : PC = AB : BC = 9 : 10 なので，

$$\text{BP} = \text{AC} \times \frac{9}{9+10} = \mathbf{\frac{54}{19}},\quad \text{PC} = \text{AC} \times \frac{10}{9+10} = \mathbf{\frac{60}{19}}$$

(2) $\text{BQ} : \text{QP} = \text{BA} : \text{AP} = \cancel{9}^{1} : \frac{\cancel{54}^{6}}{19} = \mathbf{19 : 6}$

(3) $\text{BR} : \text{RP} = \text{BC} : \text{CP} = \cancel{10}^{1} : \frac{\cancel{60}^{6}}{19} = \mathbf{19 : 6}$

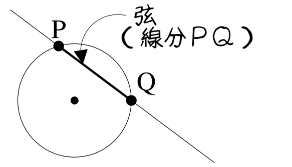
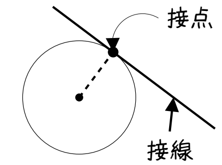
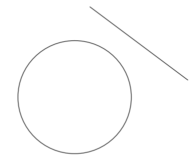
◀QとRは一致し，傍心と呼ばれる．詳しくは p.120 を参照のこと．

4.2　円の性質（１）～円の弦・接線

次に学ぶ内心・外心の準備として，円の弦・接線について学ぶ.

A.　円と直線の共有点

円と直線の関係は，共有点の個数によって右の表のようにまとめられる.

円と直線の関係	交わっている	接している	離れている
			
共有点の個数	**2** 個	**1** 個	**0** 個

B.　円の弦ー共有点が２つのとき

弦の垂直二等分線について，次のことが成り立つ.

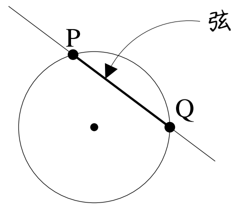
弦の垂直二等分線

円 O と直線 PQ が右のように交わっているとする．このとき

1. 弦 PQ の垂直二等分線は，必ず円の中心を通る.

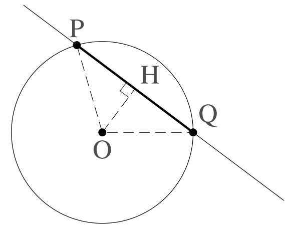
また，逆に，以下も成り立つ.

2. 円の中心を通り弦 PQ に垂直な線は，PQ の中点を通る.
3. 円の中心と弦 PQ の中点を通る直線は，弦 PQ と直交する.



（1. の証明）PQ の垂直二等分線は，P からも Q からも等間隔にある点の集まりであるが，OP = OQ =（円の半径）であるから，O は PQ の垂直二等分線上にある.

（2. の証明）O から PQ へ垂線を引き，その足を H とする.
直角三角形 △OPH と △OQH について，OM は共通，OP = OQ であるから，斜辺ともう 1 辺が等しいので △OPH ≡ △OQH である．つまり，PH = HQ であるから，垂線 PH は弦 PQ の中点を通る.　■

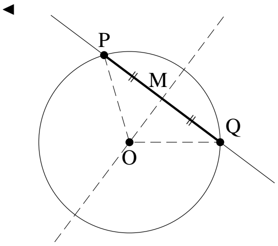


直感的には，直線 OH について線対称であるから，H が弦 PQ の中点になっている.

【練習 12：弦の垂直二等分線】

上の【弦の垂直二等分線】の 3. を証明しなさい.

【解答】　PQ の中点を M とする.
△OPM と △OQM について，OM は共通，OP = OQ，PM = MQ より 3 辺が等しいので △OPM ≡ △OQM，つまり ∠OMP = ∠OMQ である.
よって，OM は PQ の垂直二等分線になっている.

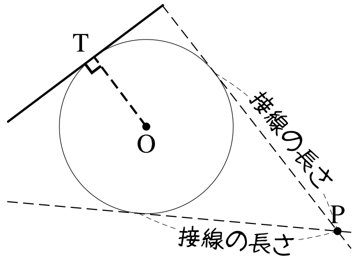


C. 円の接線－共有点が１つのとき

円の接線

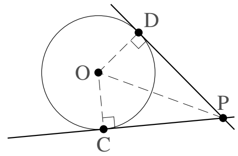
円とその接線について，次のことが成り立つ．

1. 円 O と直線が接点 T で接しているとき，線分 OT は接線と垂直に交わる．
2. 円外の点 P から円へ接線を引くとき，P から接点までの距離を**接線の長さ**という．P からの接線は 2 本引けるが，どちらの接線の長さも等しい．



（1. の証明）接線と OT が垂直に交わらないと仮定する（ $\cdots\cdots$ ①）．
O から接線へ垂線を引き，その足を H とする．H と T は異なるので，H は円周より外側にある．つまり，$OT > OH$ であるが，直角三角形 OTH について斜辺 OH が一番長くないことになり，矛盾である．
よって，仮定①は誤りであり，接線と OT は垂直に交わる． ■

（2. の証明）右図において，$PC = PD$ を示せばよい．
$\triangle POC$ と $\triangle POD$ について，$\angle POC = \angle POD = 90^\circ$，PO は共通，$OC = OD$ から直角三角形の斜辺と他の 1 辺が等しいと分かるので，$\triangle POC \equiv \triangle POD$ になる．よって，$PC = PD$ が示された． ■



直観的には，上の図の直線 OP について線対称であるから，接線の長さは等しい．

【練習 13：円と直線】

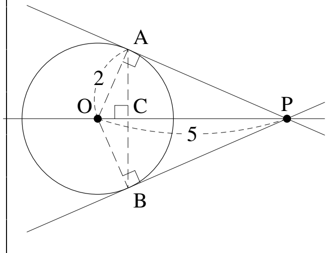
中心が O である半径 2 の円へ，$OP = 5$ となる P から接線を 2 本引き，接点を A，B とする．
(1) AB と OP の交点を C とする．$\triangle OAP$ と合同な三角形を 1 つ，相似な三角形を 4 つ答えよ．
（ただし，三角形の頂点は，A，B，C，O，P のいずれかのみを考える）
(2) AC，OC の長さをそれぞれ求めよ．

【解答】

(1) OP 共通，$OA = OB$，$PA = PB$ から，合同な三角形は $\boldsymbol{\triangle OBP}$.
相似な三角形は，すべて，2 角が等しいことから導かれ
直角と $\angle APC$ 共通から $\boldsymbol{\angle OAP \backsim \triangle ACP}$,
直角と $\angle AOC$ 共通から $\boldsymbol{\angle OAP \backsim \triangle OCA}$,
直角と $\angle OPA = \angle BPC$ から $\boldsymbol{\angle OAP \backsim \triangle BCP}$,
直角と $\angle AOP = \angle COB$ から $\boldsymbol{\angle OAP \backsim \triangle OCB}$.

(2) $\triangle OAP$ について，三平方の定理より $PA = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$
$\triangle OAP \backsim \triangle OCA$ において，$PO : AO = 5 : 2$ であるから
$AC = PA \times \dfrac{2}{5} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}\sqrt{21}}$，$OC = OA \times \dfrac{2}{5} = \boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$.

◀ 図は必ず描こう．

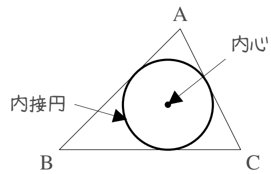


円の中心と接点を結ぶと，円の半径と，直角が図の中に現れる．

4.3　三角形の性質（2）～三角形の五心

1.　三角形の内心

A.　内心とは



三角形の 3 つの辺すべてに接する円を，その三角形の**内接円** (inscribed circle) といい，内接円の中心を**内心** (inner center) という

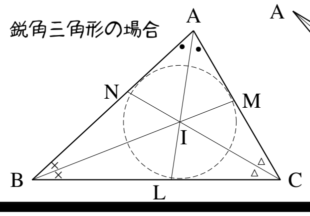
B.　三角形の内心～角の二等分線の交点

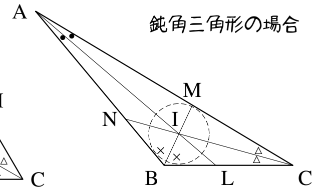
たとえば，辺 AC からも辺 BC からも等距離にあるのは，∠C の二等分線上の点である．同じように考えると，3 辺から等距離にある三角形の内心は，角の二等分線によって決まる．

内心

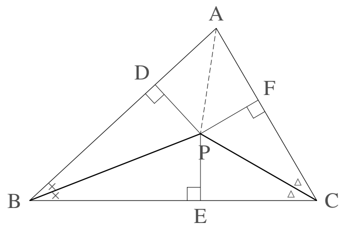
△ABC の 3 本の角の二等分線 AL，BM，CN について，次のことが成り立つ．

- AL，BM，CN は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の内心 I に一致する．





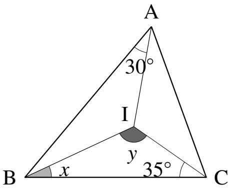
一般に，内接円と辺の接点は L，M，N のいずれにも一致しないので注意すること．
（△ABC が二等辺三角形のときにだけ，一致することがある）



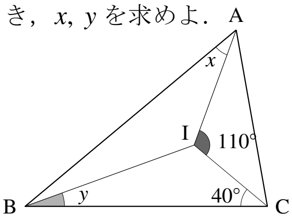
（証明）∠B，∠C の二等分線の交点を P とおく．また，P から辺 AB，辺 BC，辺 CA へ垂線 PD，PE，PF をそれぞれ引く．
まず，△PBD ≡ △PBE である（PB 共通，∠PBD = ∠PBE から斜辺と 1 角が等しい直角三角形になる）から PD = PE ……… ① とわかる．
同様に，△PCE ≡ △PCF から，PE = PF ……… ② である．
△PAD と △PAF について PA 共通，①，②から PD = PF から斜辺と他の 1 辺が等しい直角三角形と分かるので △PAD ≡ △PAF．つまり，∠PAD = ∠PAF となって AP は ∠A の二等分線と分かる．
以上より，3 本の角の二等分線は 1 点 P で交わり，①，②から P はどの辺からも等距離にあるとわかるので，三角形の内心 I と P は一致していることがわかる．■

【例題 14】 I が △ABC の内心であるとき，x, y を求めよ．

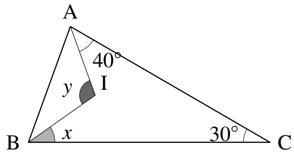
1.



2.



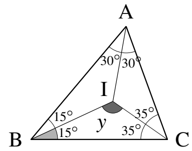
3.



【解答】

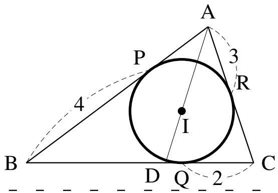
1. △ABC について，$2(30° + x + 35°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 25°}$，△IBC について，$25° + y + 35° = 180°$ であるから $\boldsymbol{y = 120°}$．
2. △IAC について，$110° + x + 40° = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 30°}$．△ABC について，$2(30° + y + 40°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{y = 20°}$，
3. △ABC について，$2(40 + x) + 30° = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 35°}$，△IAB について，$y + 40° + 35° = 180°$ であるから $\boldsymbol{y = 105°}$．

◀1. の場合，結局次のようになる．



【例題 15】 右の図において，P，Q，R は内接円と辺の接点であり，D は直線 AI 上にある．

1. 3 辺の長さを全て求めよ．
2. BD の長さを求めよ．
3. AI : ID を求めよ．



【解答】

1. AP = AR = 3，BQ = BP = 4，CR = CQ = 2 であるから，**AB = 7**，**BC = 6**，**CA = 5**．
2. AD は ∠A の二等分線であるから，BD : DC = BA : AC = 7 : 5 となり，$\mathrm{BD} = 6 \times \dfrac{7}{7+5} = \boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$．
3. BI は ∠B の二等分線であるから，$\mathrm{AI : ID = AB : BD} = 7 : \dfrac{7}{2} = \mathbf{2 : 1}$．

C. 内接円の半径を求める

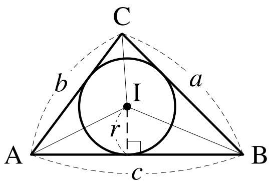
内接円の半径を求めるには，数学 I(p.187) で学ぶ次の公式を用いる．

三角形の内接円と面積の関係

三角形の面積 S は，内接円の半径 r を用いて

$$S = \triangle\mathrm{BCI} + \triangle\mathrm{CAI} + \triangle\mathrm{ABI} = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

と表すことができる．ここで a，b，c は各辺の長さを表す．



この公式は，必要なときに導くことができれば十分である．ただし，三角形とその内接円を見たら「三角形の面積は計算できる」と連想できるようにしよう．

【練習 16：内心と内接円の性質】

AB = 7, AC = 8 である △ABC の点 A から辺 BC へ垂線 AH を引くと，$AH = 4\sqrt{3}$ であったという．また，内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする．

(1) 内接円の半径 r を求めよ．　(2) 線分 BD の長さを求めよ．　(3) 線分 AI の長さを求めよ．

【解答】

(1) 三平方の定理より $BH = \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = 1$，$CH = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$ であるから，BC = 1 + 4 = 5 になる．よって

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 5 \times 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} r \times (7 + 8 + 5)$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{3} = 10r \qquad \therefore \boldsymbol{r = \sqrt{3}}$$

(2) AD は ∠A の二等分線であるから，BD : DC = BA : AC = 7 : 8 となり，

$BD = 5 \times \dfrac{7}{7+8} = \boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$.

(3) $DH = \dfrac{7}{3} - 1 = \dfrac{4}{3}$ であるから，△ADH に三平方の定理を用いると，

$$AD = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{16 + 432}{9}} = \frac{8\sqrt{7}}{3}.$$

一方，BI は ∠B の二等分線なので，$AI : ID = AB : BD = 7 : \dfrac{7}{3} = 3 : 1$.

よって，$AI = \dfrac{8\sqrt{7}}{3} \times \dfrac{3}{3+1} = \boldsymbol{2\sqrt{7}}$.

【暗記 17：接線の長さ】

AB = 8, BC = 7, CA = 9 である △ABC の内接円が，辺 AB，BC，CA と P，Q，R で接している．このとき，AP，BQ，CR の長さを求めよ．

【解答】　$AP = AR = x$, $BQ = BP = y$, $CR = CQ = z$ とおくと

$$\begin{cases} x + y = AB = 8 & \cdots\cdots ① \\ y + z = BC = 7 & \cdots\cdots ② \\ z + x = CA = 9 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

である．① + ② + ③ によって

$2(x + y + z) = 24 \Leftrightarrow x + y + z = 12$ $\cdots\cdots$ ④

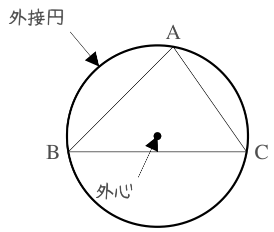
④ − ② から $x = 5$，④ − ③ から $y = 3$，④ − ① から $z = 4$ である．

よって，**AP = 5**，**BQ = 3**，**CR = 4**.

2.　三角形の外心

A.　外心とは

三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円** (circumscribed circle) といい，外接円の中心を**外心** (circumcenter) という．



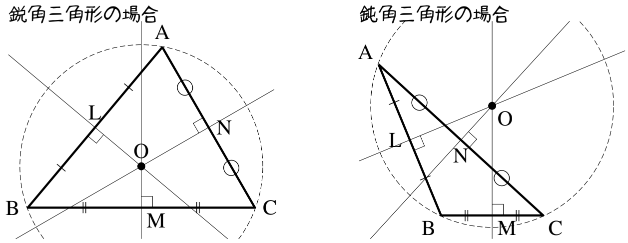
B.　三角形の外心～垂直二等分線の交点

辺の垂直二等分線上のどの点も，その両側の頂点からの距離が等しい．そのため，三角形の外心は辺の垂直二等分線によって決まる．

外心

$\triangle$ABC の 3 本の垂直二等分線について，次のことが成り立つ．

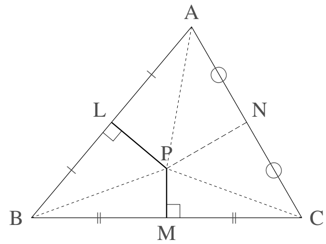
- 3 本は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の外心 O に一致する．



（証明）辺 AB の垂直二等分線，辺 BC の垂直二等分線の交点を P とおく．$\triangle$PAL と $\triangle$PBL は PL 共通，AL = LB，$\angle$PLA = $\angle$PLB = 90° から 2 辺とその間の角が等しい．よって，$\triangle$PAL ≡ $\triangle$PBL であるから，AL = BL．同様に $\triangle$PBM ≡ $\triangle$PCM から BL = CL．

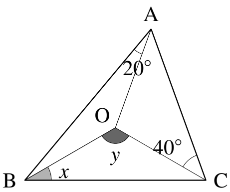
$\triangle$PAN と $\triangle$PCN について，PN 共通，AN = NC，PA = PC から 3 辺が等しいので $\triangle$PAN ≡ $\triangle$PCN になる．よって $\angle$PNA = $\angle$PNC となり，$\angle$PNA = $\angle$PNC = 90° である．つまり，PN は辺 AC の垂直二等分線に一致し，3 本の垂直二等分線は 1 点 P で交わる．

さらに，PA = PB = PC から P は $\triangle$ABC の外心に一致する．■

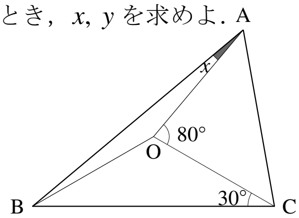


【例題 18】　O が $\triangle$ABC の外心であるとき，x, y を求めよ．

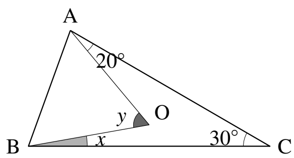
1.



2.



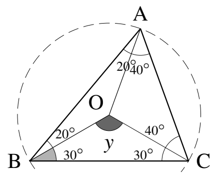
3.



【解答】

1. OA = OC より $\angle$OAC = 40°，OA = OB より $\angle$OBA = 20°，OB = OC より $\angle$OCB = x になる．
   $\triangle$ABC について，$2(20° + x + 40°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 30°}$，
   $\triangle$OBC について，$y + 2 \times 30° = 180°$ であるから $\boldsymbol{y = 120°}$．
2. $\triangle$OAC について，$80° + 2\angle\text{OAC} = 180°$ であるから $\angle\text{OAC} = \angle\text{OCA} = 50°$．よって，$\triangle$ABC について，$2(x + 30° + 50°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 10°}$．
3. $\triangle$OAC について，OA = OC より $\angle$OCA = 20°，よって，$x = \angle\text{OCB} = 30° - 20° = \mathbf{10°}$．$\triangle$ABC について，$2(\angle\text{OAB} + 10° + 20°) = 180°$ であるから $\angle$OAB = 60° であるから，$\boldsymbol{y = 60°}$．

◀ 1. の場合，結局次のようになる．



◀ （別解）円周角の定理より，$y = 2\angle\text{ACB} = 60°$．

外心を含む問題では，必ず外接円を書き込むようにしよう．

C. 直角三角形の外心

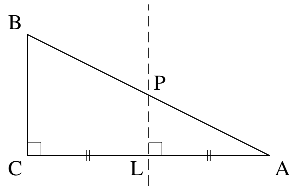
【暗記 19：直角三角形の外心】

$\angle C = 90°$ の直角三角形において，辺 CA，CB の二等分線は辺 AB の中点を通ることを示せ．

【解答】 辺 CA の中点を L とし，辺 CA の垂直二等分線と辺 AB の交点を P とする．$\angle ALP = \angle ACB = 90°$ より $LP \parallel CB$ であるから，$AP : PB = AL : LC = 1 : 1$，よって P は辺 AB の中点である．

同様に，辺 CB の中点を M，辺 CB の垂直二等分線と辺 AB の交点を Q とすると，$MQ \parallel CA$ から Q も辺 AB の中点になる． ■

◂



直角三角形の外心

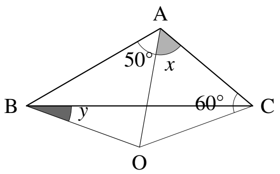
直角三角形の外心は，斜辺の中点に一致する．結果，外接円の半径は斜辺の半分に一致する．

D. 鈍角三角形の外心

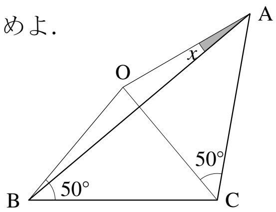
鈍角三角形の外心は，必ず三角形の外になる．詳しくは「円周角の定理の逆」で学ぶ．

【例題 20】 O が △ABC の外心であるとき，x, y を求めよ．

1.



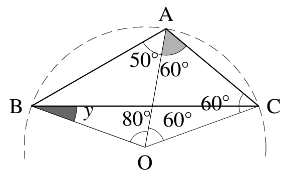
2.



【解答】 △OAB，△OBC，△OCA がすべて二等辺三角形であるから

1. △OAC について，$x = \angle OCA = \mathbf{60°}$，$\angle AOC = 60°$．また，△OAB について，$\angle OAB = 50°$ なので $\angle AOB = 80°$，よって $\angle BOC = 140°$ であり，△OBC を考えて $y = \dfrac{1}{2}(180° - 140°) = \mathbf{20°}$ になる．
2. △OAC について，$\angle AOC = 180° - 50° \times 2 = 80°$，△OBC についても $\angle BOC = 80°$，よって $\angle AOB = 160°$ であり，△OAB を考えて，$\boldsymbol{x = 10°}$．

◂ 1. の場合，結局次のようになる．



E. 外接円の半径を求める

外接円の半径を求めるには，数学 I で学ぶ**正弦定理** (sine theorem) を用いる．

正弦定理

△ABC の外接円の半径 R について $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ が成り立つ．

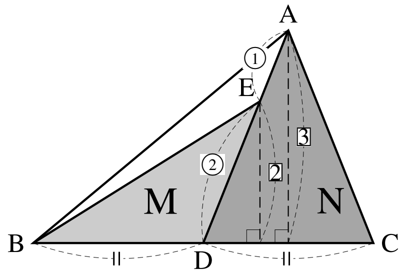
ただし，直角三角形の場合は外接円の半径は斜辺の半分に一致し，正弦定理は必要ない．

3.　三角形の重心

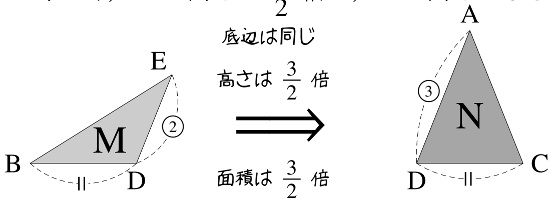
A.　２つの三角形の面積比

面積比を求めるときには，どこを底辺におくかが重要である．

まず，右の三角形 M，N の面積比を考えてみよう．

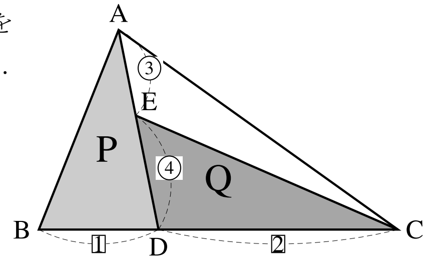


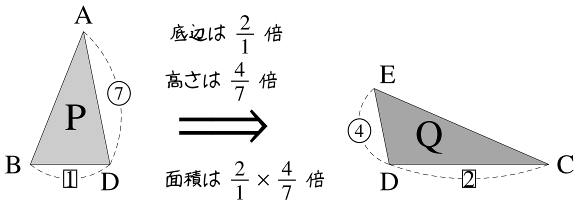
M の底辺を BD，N の底辺を CD とおけば，M，N の底辺の長さは等しく，M の高さの $\dfrac{3}{2}$ 倍が，N の高さになる．



つまり，M の面積を $\dfrac{3}{2}$ 倍すると N の面積に等しいと分かるから，M，N の面積比は 2 : 3 である．

次に，右の三角形 P，Q の面積比を考えてみよう．P の底辺を BD，Q の底辺を CD とすると，次のようにまとめることができる．





P の面積を $\dfrac{2}{1}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{8}{7}$ 倍すると Q の面積に等しいと分かるから，P，Q の面積比は 8 : 7 である．

【練習 21：平面図形の線分の比】

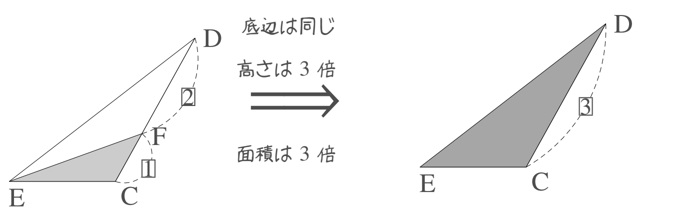
▱ABCD において，辺 BC 上に E を，辺 CD 上に F をとり，BE : EC = 1 : 2，DF : FC = 2 : 1 とする（▱は「平行四辺形」を表す）．

(1) △FEC と △DEC の面積比を求めよ．　　(2) △FBC と △DEC の面積比を求めよ．

(3) △FEC と ▱ABCD の面積比を求めよ．

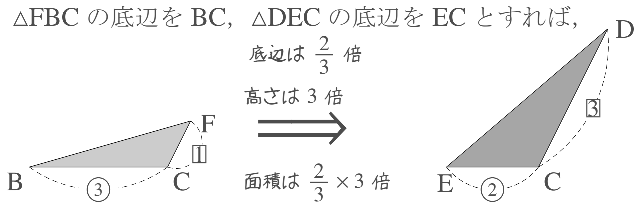
【解答】

(1) 問題文を図示すれば，右欄外のようになる．底辺を EC とすれば

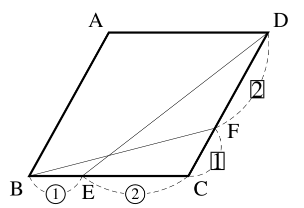


なので，面積比は **1 : 3** である．

(2) △FBC の底辺を BC，△DEC の底辺を EC とすれば，



◀ DC と EC を底辺と考えた場合は，高さが等しくなる．



◀ △FBC の底辺を FC，△DEC の底辺を DC としてもよい．

なので，面積比は **1 : 2** である．

(3)　$\triangle\mathrm{FEC} \xrightarrow{3\,倍} \triangle\mathrm{DEC}$　((2) より)

$\xrightarrow{\frac{3}{2}\,倍} \triangle\mathrm{DBC}$　$\left(\begin{array}{l}底辺を\ \mathrm{EC},\ \mathrm{BC}\ にとれば，底\\ 辺は\ \frac{3}{2}\ 倍，高さは等しい\end{array}\right)$

$\xrightarrow{2\,倍}$ ▱ABCD

よって △FEC の $3 \times \dfrac{3}{2} \times 2 = 9$ 倍が ▱ABCD の面積になるので，△FEC と ▱ABCD の面積比は **1 : 9** である．

◀ $\triangle\mathrm{FEC} \xrightarrow{\frac{3}{2}\,倍} \triangle\mathrm{FBC} \xrightarrow{3\,倍} \triangle\mathrm{DBC} \xrightarrow{2\,倍}$ ▱ABCD でもよい．

B.　三角形の重心〜中線の交点

三角形の面積は，中線によって二等分される．

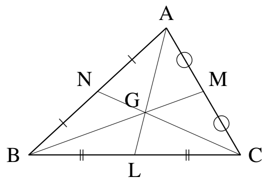
そして，3 本の中線は 1 点で交わる．これを**重心** (centroid, barycenter) という[*2]．

重心

△ABC の 3 本の中線 AL，BM，CN について，次のことが成り立つ．

(1) AL，BM，CN は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の重心 G に一致する．

(2) AG : GL = 2 : 1, BG : GM = 2 : 1, CG : GN = 2 : 1 である．



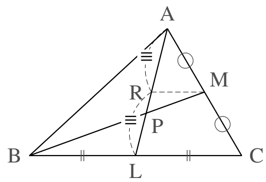
（証明）まず，AL と BM の交点を P，AL と CN の交点を Q とおき，P と Q が一致することを示す．

AL の中点を R とする．△ALC について中点連結定理から

MR // BC ········ ①，RM : LC = 1 : 2 ········ ② になる．

①より，二角相等から △MRP ∽ △BLP と分かるので

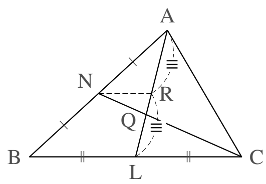
RP : PL = RM : BL = 1 : 2　　（①と BL = LC より）　　·········③



である．次に，△ABL について中点連結定理から

NR // BC ········ ④，NR : BL = 1 : 2 ········ ⑤ である．

④から △NRQ ∽ △CLQ と分かるので，やはり RQ : QL = 1 : 2 になる．③とあわせて，P と Q は一致することが分かる．



つまり，AL，BM，CN は 1 点で交わる．これを G とおく．

さらに，④，③から $\mathrm{GL} = \mathrm{AL} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AL}$ と分かるので，AG : GL = 2 : 1 と分かる．

····　重心についての別証明が，p.140 にある．

[*2] 直感的には，重さの中心，つり合いの中心が重心である．たとえば，重さが一様な三角形の板を重心で支えると，板は地面に平行になってつり合う．

【練習 22：重心と面積比〜その１〜】

$\triangle ABC = S$ とするとき，$\triangle AGB$, $\triangle BGC$, $\triangle CGA$ をそれぞれ S を用いて表わせ.

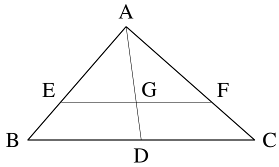
【解答】 直線 AG と BC の交点を M とする．

BM = MC, AG : GM = 2 : 1 より，$\triangle AGB = \dfrac{2}{3}\triangle ABM = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}S}$, $\triangle AGC = \dfrac{2}{3}\triangle ACM = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}S}$ である．

また，$\triangle BGC = S - \dfrac{1}{3}S - \dfrac{1}{3}S = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}S}$ である．

【練習 23：重心と面積比〜その２〜】

$\triangle ABC$ の重心を G とし，直線 AG と辺 BC の交点を D とする．また，G を通り BC に平行な直線が，辺 AB，AC と交わる点を E，F とする．



(1) 相似な三角形の組を 3 組答え，その相似比を答えなさい．

(2) 四角形 EBDG と $\triangle ABC$ の面積比を答えよ．

【解答】

(1) EF // BC から $\boldsymbol{\triangle AEG \backsim \triangle ABD}$，$\boldsymbol{\triangle AGF \backsim \triangle ADC}$，$\boldsymbol{\triangle AEF \backsim \triangle ABC}$ であり，AG : AD = 2 : 3 から，相似比はすべて **2 : 3**.

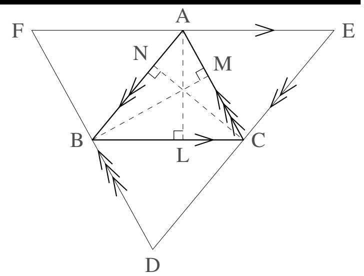
(2) $\triangle ABC = S$ とおくと，$\triangle ABD = \dfrac{1}{2}S$．$\triangle ABD : \triangle AEG = 3^2 : 2^2$ より，$\triangle AEG = \dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{2}S = \dfrac{2}{9}S$ であるから，四角形 EBDG $= \dfrac{1}{2}S - \dfrac{2}{9}S = \dfrac{5}{18}S$．よって，四角形 EBDG : $\triangle ABC = \dfrac{5}{18}S : S = \mathbf{5 : 18}$.

4. 三角形の五心

A. 垂心

垂心

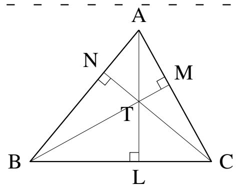
△ABC の 3 本の垂線は必ず 1 点で交わる．その交点を**垂心** (orthocenter) という．



（証明）　（別証明が p.126 にもある）
AB // ED, BC // FE, CA // DF であり，△ABC に外接する △DEF を，右図のように作る．また，点 A，B，C から下ろした垂線の足を，それぞれ L，M，N とおく．
四角形 ABCE，ACBF は平行四辺形になるので BC = AE，BC = AF と分かり，A は線分 EF の中点である．さらに，∠EAL = ∠ALB = 90° から，線分 AL は線分 EF の垂直二等分線になる．
同様に，線分 BM は線分 DF の垂直二等分線，線分 CN は線分 DE の垂直二等分線になっている．
△DEF の 3 本の垂直二等分線は外心で交わるから，AL，BM，CN は 1 点で交わる．■

【例題 24】 右図の三角形について次の問いに答えよ．

1. 右図に相似な三角形を全て書き出しなさい．
（ただし，補助線を引かないものとする）
2. ∠CAL = 25°，∠ABM = 20° のとき，∠TCL を求めよ．



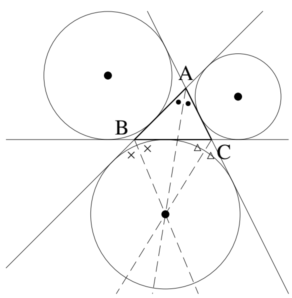
【解答】

1. **△ABM ∽ △ACN ∽ △BTN ∽ △CTM**,
△BCN ∽ △BAL ∽ △ATN ∽ △CTL,
△CAL ∽ △CBM ∽ △BTL ∽ △ATM の 3 組ある．
2. △ABM ∽ △ACN より ∠ACN = ∠ABM = 20° なので，△ACL に着目すれば，∠TCL = 90° − 20° − 25° = **45°**.

B. 三角形の傍心 〜 傍接円の中心

傍心 〜 傍接円の中心

△ABC について，直線 AB，BC，CA のすべてに接する円は，△ABC の外側に 3 つ存在し，これを**傍接円** (escribed circle) という．また，傍接円の中心を**傍心** (excenter) という．
そして，∠B の外角の二等分線，∠C の外角の二等分線と，∠A の（内角の）二等分線は必ず 1 点で交わり，それは傍心の 1 つに一致する．また，A，B，C を入れ替えて考えれば，他の傍心のいずれかに一致する．



証明は p.141 を参照のこと．

C. 三角形の五心

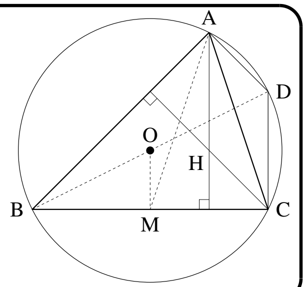
三角形の五心

どんな三角形も次の性質を持ち，重心・内心・外心・垂心・傍心をまとめて三角形の五心[3]という．

- 3 本の中線は 1 点で交わり，それは重心に一致し，重心は中線を 2 : 1 に内分する．
- 3 本の角の二等分線は 1 点で交わり，それは内接円の中心である内心に一致する．
- 3 本の垂直二等分線は 1 点で交わり，それは外接円の中心である外心に一致する．
- 3 本の垂線は 1 点で交わり，それは垂心と定義される．
- 2 本の外角の二等分線と，残り 1 角の内角の二等分線は 1 点で交わり，それは傍接円の中心である傍心に一致する．

【発展 25：オイラー線～外心・重心・垂線を通る線】

鋭角三角形 ABC があり，外心を O，垂心を H，重心を G とする．また，辺 BC の中点を M とし，D を線分 BD が外接円の直径となるようにとる．

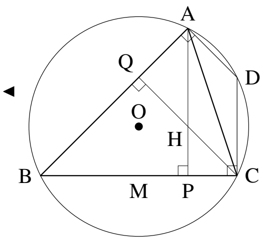


1. 四角形 ADCH は平行四辺形であることを示せ．
2. AH = 2OM を示せ．
3. 3 点 H，G，O は同一直線上にある（この直線を**オイラー線** (Euler's line) という）ことを示し，HG : GO を求めよ．

【解答】 A，C から下ろした垂線の足を，それぞれ P，Q とする．

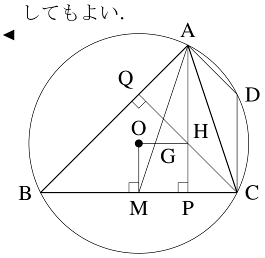
1. BD は直径であるから，$\angle DCB = 90^\circ$ になる．よって
$\angle APB = \angle DCB = 90^\circ$ から同位角が等しいので，AP // DC.
同様に，$\angle DAB = \angle CQB = 90^\circ$ から CQ // DA であり，向かい合う 2 組の辺が平行なので，四角形 ADCH は平行四辺形である．
2. BO = OD，BM = MC から中点連結定理より 2OM = DC．さらに，▱ADCH について AH = DC が成り立つから，AH = 2OM となる．
3. $\angle AGH = \angle MGO$ を示せばよい．
$\triangle AHG$ と $\triangle MOG$ について, まず, G が重心であるから AG : GM = 2 : 1 である．これと2を合わせて，AH : OM = AG : GM = 2 : 1 が成り立つ．
また，AP も OM も辺 BC と垂直に交わるから AP // OM であり，$\angle HAG = \angle OMG$ が分かる．つまり，2 辺の比とその間の角が等しいから $\triangle AHG \backsim \triangle MOG$ である．
よって，$\angle HGA = \angle OGM$ であるから，O，G，H は同一直線上にあると分かる．さらに，相似比から HG : GO = 2 : 1 である．

◂



◂（別解）$\triangle BOM \backsim \triangle BDC$ と，相似比が 1 : 2 であることを直接示してもよい．

◂



[3] このうち，特に重要な重心・内心・外心をまとめて三角形の三心ということもある．

1.　円に内接している四角形

A.　円周角の定理について

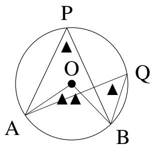
中学校で学んだ円周角の定理は，次のように表すことができる．

円周角の定理

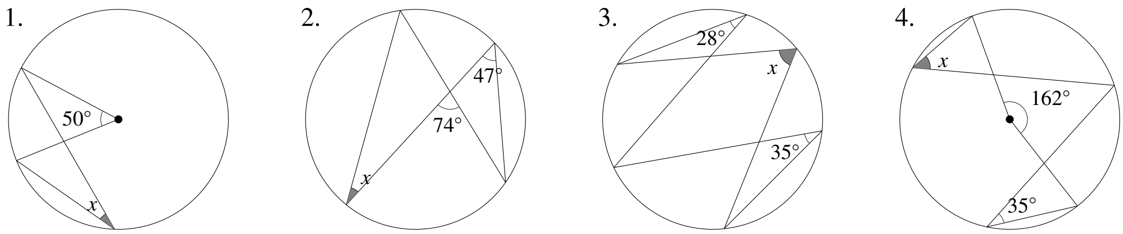
中心が O である円の円周上に，A，B，P が固定されているとき

(1) $\angle AOB = 2\angle APB$ である．

(2) P を含む側の弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上に Q をとるとき，$\angle APB = \angle AQB$ である．



【例題 26】　以下の図について，x, y を求めよ．



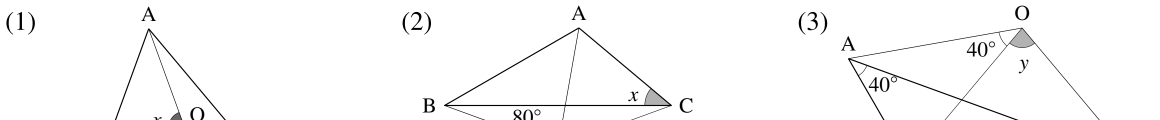
【解答】

1. $2x = 50$ より $\boldsymbol{x = 25°}$　　2. $x + 47° = 74°$ より $\boldsymbol{x = 27°}$

3. $28° + 35° = x$ より $\boldsymbol{x = 63°}$　　4. $2x + 2\times 35° = 162°$ より $\boldsymbol{x = 46°}$

【練習 27：外心と円周角の定理】

O が △ABC の外心であるとき，x を求めよ．



【解答】

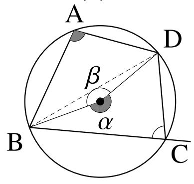
(1) $x = 2\angle ACB = \mathbf{100°}$　　(2) $2x = \angle AOB = 80°$ から $\boldsymbol{x = 40°}$

(3) $2x = 2\angle AOB = 40°$ から $\boldsymbol{x = 20°}$，$y = 2\angle BAC = \mathbf{80°}$

外心が与えられた場合は，図に外接円を書き込むようにしよう．

B. 円に内接する四角形の性質〜四角形の対角の和

四角形 ABCD が円に内接しているとき，右のように α, β をおくと，『円周角の定理』の (1) から



A は右図の $\dfrac{1}{2}\alpha$ と等しく，C は右図の $\dfrac{1}{2}\beta$ と等しい.

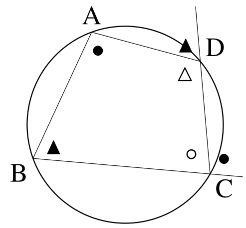
よって，$A + C = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^\circ$ とわかる.

また，変形して $A = 180^\circ - C$ となるので，A は角 C の外角に等しい.

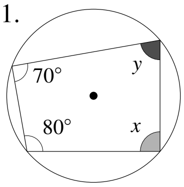
円に内接する四角形の対角

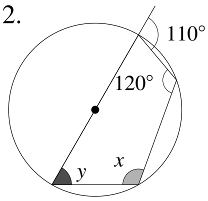
円に内接する四角形において，以下が成立する.

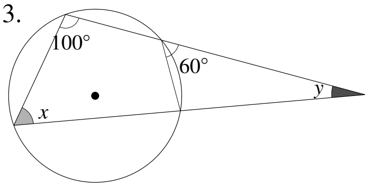
- 向かい合う角（対角）どうしを足すと 180° になる．つまり
  $A + C = 180^\circ$,　　　$B + D = 180^\circ$
- どの角も，向かいの頂点の外角に等しい，たとえば
  $A =$（∠C の外角）$= \bullet$，$B =$（∠D の外角）$= \blacktriangle$

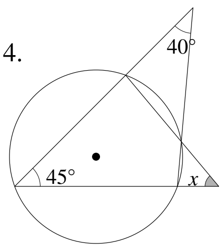


【例題 28】 以下の図について，x, y を求めよ.

1.


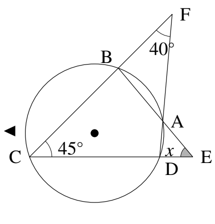
2.


3.


4.


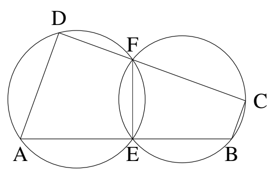
【解答】

1. $x = 180^\circ - 70^\circ = \mathbf{110^\circ}$，$y = 180^\circ - 80^\circ = \mathbf{100^\circ}$
2. $\boldsymbol{x = 110^\circ}$，$y = 180^\circ - 120^\circ = \mathbf{60^\circ}$
3. $\boldsymbol{x = 60^\circ}$，$y = 180^\circ - 100^\circ - 60^\circ = \mathbf{20^\circ}$
4. 右のように A から F までとると，△FCD から ∠FDE $= 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ$，∠DAE $=$ ∠C $= 45^\circ$ なので，$x = 180^\circ - 85^\circ - 45^\circ = \mathbf{50^\circ}$

◀


【練習 29：円に内接する四角形】

右図において，AD // BC を示せ.
ただし，D, F, C は一直線上にあり，
A, E, B も一直線上にあるとする.



【解答】 辺 BC を C の方へ伸ばし，伸ばした線上に G をとる.

四角形 ADFE は円に内接するので，∠D = ∠FEB，四角形 FEBC は円に内接するので，∠FEB = ∠FCG であるから，∠D = ∠FCG になる．つまり，錯角が等しいから，AD // BC になる. ■

◀ 別解として，以下を示してもよい.
- ∠D + ∠C = 180°
- ∠A = ∠B の外角
- ∠A + ∠B = 180°

2.　四角形が円に内接する条件

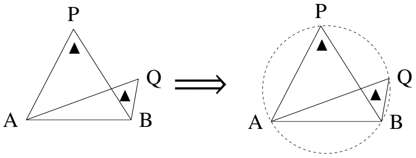
前ページで学んだことは逆も成立し，そのまま四角形が円に内接する条件となる．

A.　円周角の定理の逆

円周角の定理の (2) は「(仮定) P を含む側の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上に Q がある ⇒（結論）$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{AQB}$」となるが，この命題は逆も成立する．

円周角の定理の逆

P，Q は線分 AB に対して同じ側にあり，
$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{AQB}$ であったとする．
このとき，A，B，P，Q は同一円周上にある[*4]．
（四角形 ABPQ は円に内接する）



（証明）は p.142 を参照のこと．

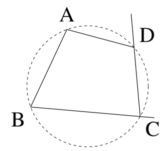
B.　「四角形の対角の和」の逆

「円に内接する四角形の対角」(p.123) も逆が成立する．

四角形が内接する条件（4 点が同一円周上にある）

次のいずれかが成り立てば，四角形 ABCD は円に内接し（4 点 A，B，C，D は同一円周上にあり），他の 3 つも成り立つ．

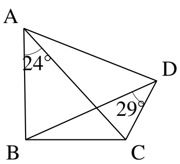
- $\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{C} = 180°$，　$\angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{D} = 180°$（対角の和が 180°）
- $\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{C}$ の外角，　$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{D}$ の外角（対角の外角と等しい）

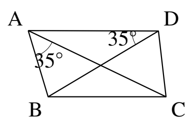


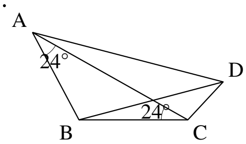
（証明）は p.142 を参照のこと．

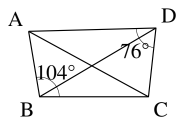
【例題 30】

次の四角形のうち，円に内接するものを 1 つ選べ．

1. 

2. 

3. 

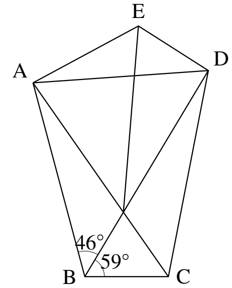
4. 

【解答】　円に内接するのは **4.**

1. 円周角の定理の逆が不成立
2. 等しい角は円周角の定理の逆に対応しない　　3. 2. と同じ
4.「四角形の対角の和」の逆が成り立つ

*4 「A，B，P，Q は同じ一つの円の周上にある」という意味

【例題 31】



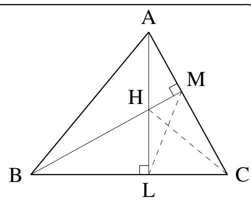
1. $\angle ACD = 46^\circ$ のとき，円に内接する四角形はどれか．また，その根拠を答えよ．
2. $\angle AED = 134^\circ$ のとき，円に内接する四角形はどれか．また，その根拠を答えよ．
3. AC と BD の交点を F とする．四角形 ABCD，四角形 AFDE がどちらも円に内接するとき，59° に等しい角をすべて求めよ．ただし，右図に補助線を引かずに得られる角のみを答えること．

【解答】

1. **円周角の定理の逆**により，**四角形 ABCD** が円に内接する．
2. **四角形の対角の和の逆**により，**四角形 ABDE** が円に内接する．
3. 四角形 ABCD が円に内接するから $\angle DAC = \angle DBC = 59^\circ$，四角形 AFDE が円に内接するから $\angle DAC = \angle DBF = 59^\circ$，よって，59° に等しいのは **∠DAC**，**∠DBF** の２つ．

◂ ∠DAC は ∠DAF でもよい．

【練習 32：四角形の内接】



△ABC の A，B から垂線 AL，BM を引き，交点を H とする．

(1) A，B，C，H，L，M のいずれかを頂点とする四角形のうち，円に内接するもの 2 つを答えなさい．

(2) $\angle CAL = 15^\circ$，$\angle ABM = 25^\circ$ のとき，∠ALM，∠HCL の大きさを求めよ．

【解答】

(1) $\angle CMH + \angle CLH = 180^\circ$ から，**C，M，H，L は同一円周上にある．**

◂『円周角の定理の逆』(p.124)

また，$\angle AMB = \angle ALB$ から，**A，M，L，B は同一円周上にある．**

◂『四角形の対角の和の逆』(p.124)

(2) 四角形 AMLB について，円周角の定理より $\angle ALM = \angle ABM =$ **25°**．
また，$\angle HCL = \angle HML = \angle BAL$ である．△ABM に着目して，$\angle BAL = 90^\circ - 15^\circ - 25^\circ = 50^\circ$ であるから，$\boldsymbol{\angle HCL = 50^\circ}$．

◂順に，四角形 CMHL，四角形 AMLB について，円周角の定理を用いた）

直角が向かい合う四角形を見たら，円に内接することを連想できるようにしよう．

【暗記 33：円周角の定理の逆】

線分 AB があり，線分 AB を直径とする円の円周を K とする．以下の□に「内部」「周上」「外部」のいずれかを入れよ．

- ∠APB が鋭角ならば，P は K の［タ］にある．
- ∠APB が直角ならば，P は K の［チ］にある．
- ∠APB が鈍角ならば，P は K の［ツ］にある．

【解答】 タ：外部，　チ：周上，　ツ：内部

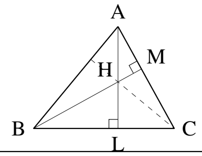
上の 3 点の証明は p.142 を参照のこと．

【練習 34：垂心についての別証明】

$\triangle$ABC の A，B から垂線 AL，BM を引き，交点を H とする．

(1) $\angle$HCL = $\angle$LAB を証明せよ．

(2) 直線 CH と辺 AB の交点を N とする．CN $\perp$ AB を示せ．



【解答】

(1) $\angle$CMH + $\angle$CLH = 180° から，四角形 CMHL は同一円周上にある．また，$\angle$AMB = $\angle$ALB から，四角形 AMLB は同一円周上にあるので

$\angle$HCL = $\angle$HML　（四角形 CMHL について，円周角の定理より）

　　= $\angle$BAL　（四角形 AMLB について，円周角の定理より）

(2) (1) より $\angle$HCL = $\angle$LAB，対頂角より $\angle$AHN = $\angle$CHL から，2 角が等しいので $\triangle$AHN $\backsim$ $\triangle$CHL，よって，$\angle$ANH = $\angle$CLH = 90°．■

【練習 35：垂心と内心】

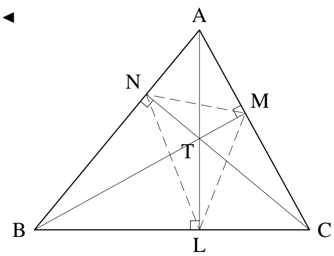
鋭角三角形 ABC の各頂点から，垂線 AL，BM，CN を引く．$\triangle$ABC の垂心が，$\triangle$LMN の内心であることを示せ．

【解答】　NT，LT，MT がすべて，$\triangle$LMN の内角二等分線になることを示せばよい．

◀ 実際には，このうち 2 つを示せば十分である．

まず，$\angle$ANT + $\angle$AMT = 90° + 90° = 180° であるから，四角形 ANTM は円に内接する．同様にして，四角形 BNTL，CMTL も円に内接する．また，$\angle$AMB = $\angle$ALB = 90° から四角形 AMLB は円に内接する．同様にして，四角形 BNMC，CLNA も円に内接する．以上より，

◀



$\angle$MNT = $\angle$MAT　　（四角形 ANTM について，円周角の定理より）

　　= $\angle$LBT　　（四角形 AMLB について，円周角の定理より）

　　= $\angle$TML　　（四角形 BNTL について，円周角の定理より）

であるから，NT は $\angle$LNM の二等分線になる．また

$\angle$NLT = $\angle$NBT　　（四角形 BNTL について，円周角の定理より）

　　= $\angle$MCT　　（四角形 BMMC について，円周角の定理より）

　　= $\angle$MLT　　（四角形 CMTL について，円周角の定理より）

$\angle$LMT = $\angle$LCT　　（四角形 CMTL について，円周角の定理より）

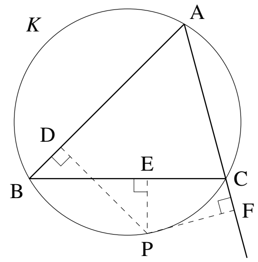
　　= $\angle$NAT　　（四角形 CLNA について，円周角の定理より）

　　= $\angle$NMT　　（四角形 ANTM について，円周角の定理より）

であるから，LT，MT は $\angle$NLM，$\angle$LMN の二等分線になる．よって，T は $\triangle$LMN の内心である．

【発展 36：シムソン線】

△ABC と外接円 K を考える．A を含まない弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 上に P をとり，P から直線 AB，BC，CA へ引いた垂線の足を D，E，F とする．ただし，線分 AP が円 K の直径でないように，P をとる．



① A，B，C，D，E，F，P のいずれかを頂点とする四角形のうち，円に内接するものは 4 つある．そのうち 1 つは四角形 ABPC であるが，他の 3 つを答えなさい．

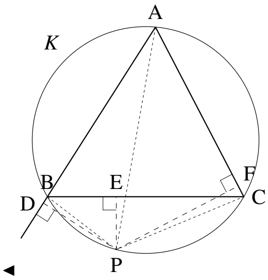
② D か F の一方は △ABC の辺上にあり，他方は辺上にないことを示せ．

③ 3 点 D，E，F は同一直線上にあることを示せ（この直線を**シムソン線** (Simson line) という）．

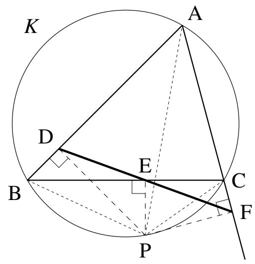
【解答】

① **四角形 ADPF** （$\angle\mathrm{ADP} + \angle\mathrm{AFP} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ より）
四角形 BDEP （$\angle\mathrm{BDP} = \angle\mathrm{BEP} = 90^\circ$ より）
四角形 CEPF （$\angle\mathrm{PEC} + \angle\mathrm{PFC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ より）

② $\angle\mathrm{PBA} < 90^\circ$ のとき D は辺 AB 上にある．このとき，$\angle\mathrm{PBA} + \angle\mathrm{PCA} = 180^\circ$ から $\angle\mathrm{PCA} > 90^\circ$ となり，F は辺 AC 上にはないと分かる．
AP は直径でないので，$\angle\mathrm{PBA} = 90^\circ$ にはならない．
$\angle\mathrm{PBA} > 90^\circ$ のとき D は辺 AB 上にない．このとき，$\angle\mathrm{PBA} + \angle\mathrm{PCA} = 180^\circ$ から $\angle\mathrm{PCA} < 90^\circ$ になって，F は辺 AC 上にはあると分かる．
以上より，題意は示された．



③ $\angle\mathrm{DEB} = \angle\mathrm{CEF}$ であることを示せばよい．まず，四角形 BDEP，四角形 CEPF は円に内接するので，
$\angle\mathrm{DEB} = \angle\mathrm{DPB}$，$\angle\mathrm{CEF} = \angle\mathrm{CPF}$ ········ ① である．一方，
四角形 ABPC が円に内接するので $\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{BPD} + \angle\mathrm{DPC} = 180^\circ$，
四角形 ADPF が円に内接するので $\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{DPC} + \angle\mathrm{CPF} = 180^\circ$ である．よって，$\angle\mathrm{BPD} = 180^\circ - \angle\mathrm{BAC} - \angle\mathrm{DPC} = \angle\mathrm{CPF}$ とわかる．
これと①を合わせて $\angle\mathrm{DEB} = \angle\mathrm{CEF}$ であるから，D，E，F は同一直線上にあることは示された．



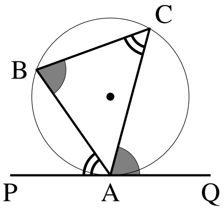
3.　接弦定理

接弦定理

$\triangle$ABC が円に内接し，A で円に接する直線 PQ が引いてある．
このとき，次が成り立つ．

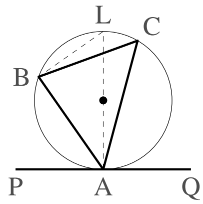
$\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{BCA}$,　　$\angle\mathrm{CAQ} = \angle\mathrm{CBA}$

これを，**接弦定理**という．



（証明・鋭角のとき）直線 AO と円周の交点を L とし，直径 AL を考える．
円周角の定理より $\angle\mathrm{ABL} = 90^\circ$ であるから，$\triangle$ABL について
$\angle\mathrm{BLA} + \angle\mathrm{BAL} = 90^\circ$ ……… ② である．よって

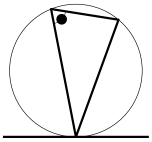
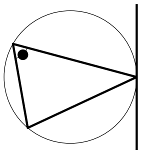
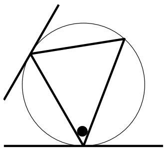
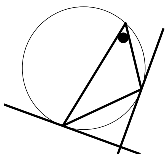
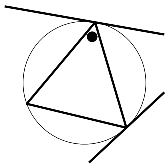
$\angle\mathrm{BAP} = 90^\circ - \angle\mathrm{BAL} = \angle\mathrm{BLA}$　（②より）
$= \angle\mathrm{BCA}$　（円周角の定理より）■

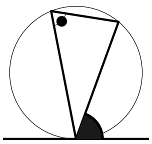
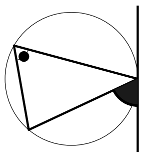
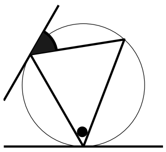
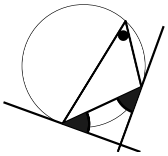
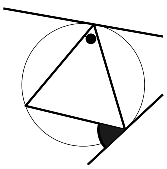


左右を逆に考えれば，$\angle\mathrm{CAQ} = \angle\mathrm{CBA}$ も同様に示される．
（証明・鈍角のとき）$\angle$CBA が鈍角の場合を示す．$\angle$BCA は鋭角なので $\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{BCA}$ であり

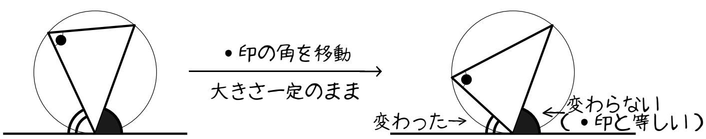
$\angle\mathrm{CBA} = 180^\circ - \angle\mathrm{BCA} - \angle\mathrm{BAC}$　（$\triangle$ABC の内角の和は 180°）
$= 180^\circ - \angle\mathrm{BAP} - \angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{CAQ}$ ■

【例題 37】 以下の図において，接弦定理によって・印と等しい角をすべて選べ．

1.

2.

3.

4.

5.


1.

2.

3.

4.

5.


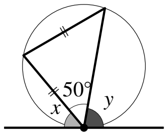
右のように，・印の角を一定に移動しても，大きさの変わらない側の角が・印と等しいと理解するとよい．



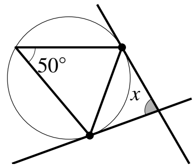
【練習 38：接弦定理〜その１〜】

右の図中の ● はすべて，円と直線の接点である．
それぞれ，x, y, z を求めよ．

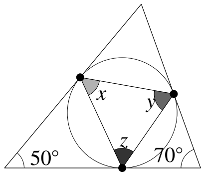
(1)



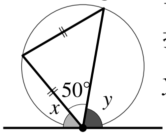
(2)



(3)

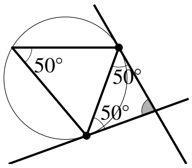


(1)



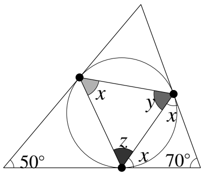
二等辺三角形から $\angle C = 50°$
接弦定理より $x = \angle C =$ **50°**
$y = 180° - (50° + 50°) =$ **80°**

(2)



接弦定理より，2 ヶ所が 50° に等しい．よって
$x = 180° - (50° + 50°) =$ **80°**

(3)



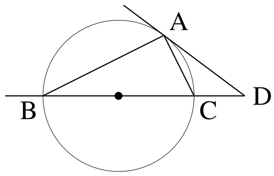
接弦定理より，2 ヶ所が x に等しい．よって
$x = (180° - 70°) \div 2 =$ **55°**
同様にして $y = (180° - 50°) \div 2 =$ **65°**
$\angle A = 60°$ に注意して，同様に $z = (180° - 60°) \div 2 =$ **60°**.

【練習 39：接弦定理〜その２〜】

右図において，線分 BC は円の直径，直線 DA は円の接線である．以下の問いに答えなさい．

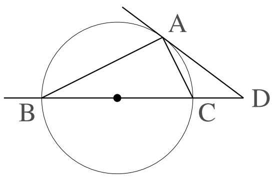
(1) $\angle ABC = 20°$ のとき，$\angle D$ の大きさを求めよ．

(2) $AC = CD = 1$ のとき，$\angle ABC$ と円の直径を求めよ．



【解答】 まず，BC が直径なので $\angle BAC = 90°$ である．

(1)



接弦定理より $\angle DAC = 20°$,
$\angle ACB = 180° - (90° + 20°) = 70°$
よって，$\triangle ACD$ について，
$\angle D = 70° - 20° =$ **50°**

◀ 三角形の 2 角の和は，他の 1 角の外角に等しい．

(2) $\angle ABC = x$ とおくと $\angle DAC = x$, $\angle D = x$ であるから，$\angle ACB = 2x$ になる．$\angle ABC + \angle ACB = 90°$ に代入して，$x + 2x = 90°$，つまり $x =$ **30°**
また，$\triangle ABC$ は 30°, 60°, 90° の直角三角形になり，$AC = 1$ より，**BC = 2 が円の直径**になる．

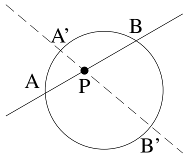
4.　方べきの定理

A.　方べきの定理とは

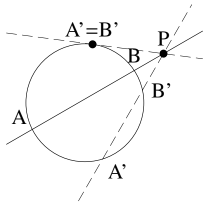
円 C と，1 点 P がある．ただし，P は C の円周上にないとする．

ここで，P を通る直線 l を考え，C の円周と l の交点を A，B とする．**方べきの定理**とは，l をどのように引いても，PA · PB が同じ値になることを言う．

Pが円周の中にあるとき



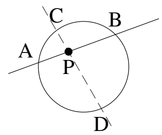
Pが円周の外にあるとき



B.　P が円周の中にあるとき

方べきの定理（P が円周の中にあるとき）

弦 AB と弦 CD が，円の中の P で交わっているとき
- $\triangle$PAD ∽ $\triangle$PCB であり
- PA · PB = PC · PD が成り立つ（方べきの定理）．



【暗記 40：方べきの定理～その１～】
上の定理を証明せよ．

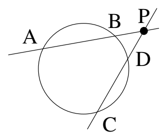
【解答】　$\triangle$PAD と $\triangle$PCB について，円周角の定理より $\angle$PAD = $\angle$PCB，$\angle$PDA = $\angle$PBC であるので，2 角が等しいから $\triangle$PAD ∽ $\triangle$PCB になる．よって，PA : PC = PD : PB ⇔ PA · PB = PC · PD ■

◀ $\triangle$PAC ∽ $\triangle$PDB を示しても良い．

C.　P が円周の外にあるとき

方べきの定理（P が円周の外にあるとき）

弦 AB と弦 CD が，円の中の P で交わっているとき
- $\triangle$PAD ∽ $\triangle$PCB であり
- PA · PB = PC · PD が成り立つ（方べきの定理）．



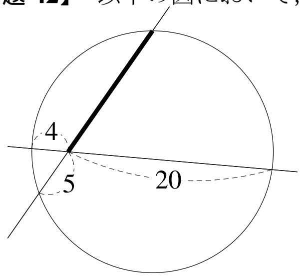
【暗記 41：方べきの定理～その２～】
上の定理を証明せよ．

【解答】　$\triangle$PAD と $\triangle$PCB について，$\angle$P は共通，円周角の定理より $\angle$PAD = $\angle$PCB であるので，2 角が等しいから $\triangle$PAD ∽ $\triangle$PCB になる．よって，PA : PC = PD : PB ⇔ PA · PB = PC · PD ■

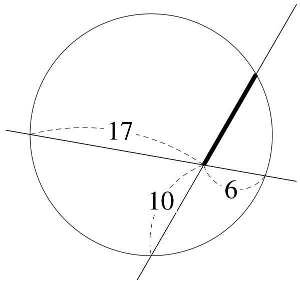
◀ $\triangle$PAC ∽ $\triangle$PDB を示しても良い．この場合，四角形 ABCD が円に内接することを用いる．

【例題 42】 以下の図において，太線の長さを求めよ．

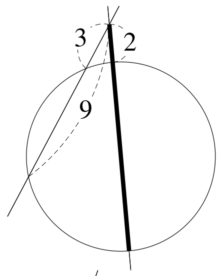
1.



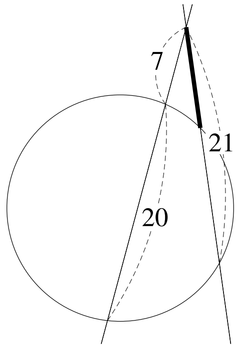
2.



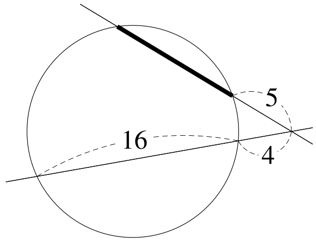
3.



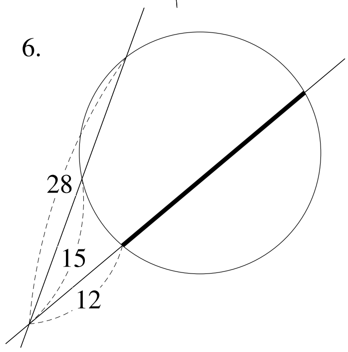
4.



5.



6.



【解答】 いずれも，求める長さを x とおく．

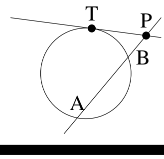
1. $4 \cdot \cancel{20}^4 = \cancel{5}x$ より，$\boldsymbol{x = 16}$.
2. $17 \cdot \cancel{6}^3 = \cancel{10}^5 x$ より，$\boldsymbol{x = \dfrac{51}{5}}$.
3. $3 \cdot 9 = 2x$ より，$\boldsymbol{x = \dfrac{27}{2}}$.
4. $\cancel{7} \cdot (20+7) = \cancel{21}^3 x$ より，$\boldsymbol{x = 9}$.
5. $\cancel{(16+4)}^4 \cdot 4 = (x+5) \cdot \cancel{5}$ より，$x = 16 - 5 = \mathbf{11}$.
6. $\cancel{28}^7 \cdot \cancel{15}^5 = \cancel{12}^{\cancel{3}} \cdot (x+12)$ より，$x = 35 - 12 = \mathbf{23}$.

D. 円周外の点 P から，接線を引いたとき

方べきの定理（P から接線を引いたとき）

接点が T である接線が，弦 AB と点 P で交わっているとき

- $\triangle$PAT ∽ $\triangle$PTB であり
- $\text{PA} \cdot \text{PB} = \text{PT}^2$ が成り立つ（方べきの定理）．



【暗記 43：方べきの定理～その３～】

上の定理を証明せよ．

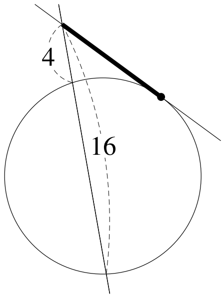
【解答】 $\triangle$PAT と $\triangle$PTB について，$\angle$P は共通，接弦定理より $\angle\text{PAT} = \angle\text{PTB}$ であるので，2 角が等しいから $\triangle$PAT ∽ $\triangle$PTB になる．よって

$\text{PA} : \text{PT} = \text{PT} : \text{PB} \Leftrightarrow \text{PA} \cdot \text{PB} = \text{PT}^2$

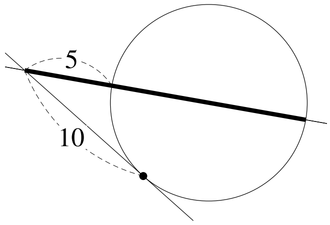
【練習 44：接線を引いたときの方べきの定理】

以下の図において，太線の長さを求めよ．ただし，図の中の“・”は接点とする．

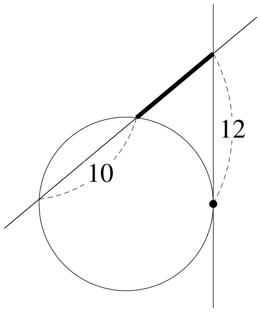
(1)



(2)



(3)



【解答】　求める長さを x とする．

(1) $16 \cdot 4 = x^2$ より，$x = \sqrt{64} = \mathbf{8}$

(2) $5 \cdot x = 10^2$ より，$\boldsymbol{x = 20}$

(3) $x(x+10) = 12^2 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 144 = 0$.

これを解いて $x = 8, -18$ なので，$\boldsymbol{x = 8}$.

方べきの定理においては，一方の点のみが円周上にあることに注意しよう．

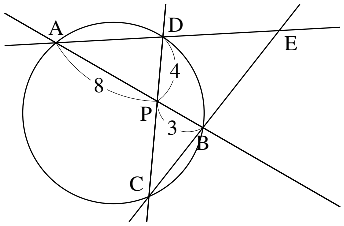
【練習 45：方べきの定理のまとめ】

以下の図において，x の長さを求めよ．ただし，図の中の“・”は接点か円の中心とする．

(1) CP の長さを求めよ．

(2) 図中の相似な三角形を 2 組答え，それぞれの相似比も答えよ．

(3) DE = 5 とするとき，BC の長さを求めよ．



【解答】

(1) 方べきの定理より $8 \cdot 3 = 4 \cdot \mathrm{CP}$ なので，$\mathrm{CP} = \mathbf{6}$

(2) **△PAD ∽ △PCB**，相似比は PD : PB = 6 : 3 = **2 : 1**

△EAB ∽ △ECD，相似比は AB : CD = 6 : 3 = **11 : 10**

(3) BC = x とおく．

△EAB ∽ △ECD，DE = 5 より $\mathrm{BE} = 5 \times \dfrac{11}{10} = \dfrac{11}{2}$

△PAD ∽ △PCB，BC = x より AD = $2x$

よって，方べきの定理より

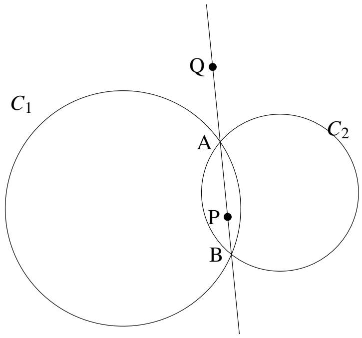
$$5 \cdot (5 + 2x) = \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{11}{2} + x\right) \Leftrightarrow 20(5 + 2x) = 11(11 + 2x)$$
$$\Leftrightarrow 100 + 40x = 121 + 22x$$
$$\Leftrightarrow 18x = 21 \quad \therefore \ \boldsymbol{x = \frac{7}{6}}$$

◀【別解】EA : EC = 11 : 10 より
$(5 + 2x) : \left(\dfrac{11}{2} + x\right) = 11 : 10$
これを解いて $\boldsymbol{x = \frac{7}{6}}$.

方べきの定理と，それを示すために用いた三角形の相似は，セットにして理解しよう．上の【練習】のように，相似を使わないと解けない問題も存在する．

【発展 46：総合問題】

円 C_1 と C_2 が 2 点 A，B と交わっている．直線 AB 上のうち，線分 AB 上に P を，線分 AB の外に Q をとる．



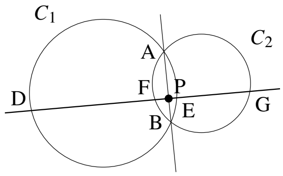
① P を通り，直線 AB とは異なる直線 l を引き，l と円 C_1 の 2 交点を D，E とし，l と円 C_2 の 2 交点を F，G とする．このとき，$PD \cdot PE = PF \cdot PG$ を示せ．

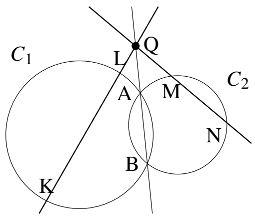
② Q を通り円 C_1 と 2 点 K，L で交わる直線 m_1 を引き，Q を通り円 C_2 と 2 点 M，N で交わる直線 m_2 を引く．このとき，K，L，M，N は同一円周上にあることを示せ．ただし，直線 AB，m_1，m_2 はすべて異なる直線とする．

【解答】

① 円 C_1 について方べきの定理を用いると $PA \cdot PB = PD \cdot PE$，
円 C_2 について方べきの定理を用いると $PA \cdot PB = PF \cdot PG$
である．よって，$PD \cdot PE = PF \cdot PG$ が示された．

② K，L，M，N を右図のようにとる．
円 C_1 について方べきの定理を用いると $QA \cdot QB = QK \cdot QL$，
円 C_2 について方べきの定理を用いると $QA \cdot QB = QM \cdot QN$
である．よって，$QK \cdot QL = QM \cdot QN$ と分かり，
$QK : QN = QM : QL$ ……… ① が成り立つ．
$\triangle QKM$ と $\triangle QNL$ について，$\angle Q$ は共通，①から 2 辺の比とその間の角が等しいので，$\triangle QKM \backsim \triangle QNL$ である．よって，$\angle QKM = \angle QNL$ となるから，四角形 KLNM について，$\angle N$ は向かい合う角の外角に等しいので円に内接する．

◀


◀


◀（別解）「方べきの定理の逆」が成り立つ（13th-note では扱わない）ことを用いれば，$QK \cdot QL = QM \cdot QN$ から直接，K，L，M，N が同一円周上にあると導かれる．

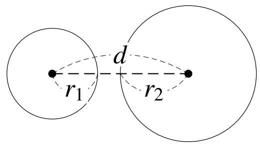
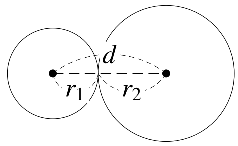
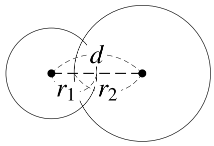
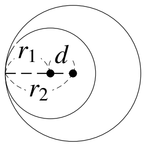
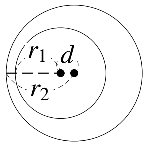
5. 2円の性質

A. 2円の位置関係

2円の位置関係は，2円の半径と中心間の距離で決まり，以下の5つの状態しかない．

2円の位置関係

2円の半径を r_1，r_2 $(r_1 < r_2)$，中心間の距離を d とすると，以下のようになる．

2円の図					
2円の位置関係	離れている	外接している	交わっている	内接している	一方が他方を含む
2円の共有点の個数	0個	1個(外接)	2個	1個(内接)	0個
2円の中心間の距離 d	$\boldsymbol{r_2 + r_1 < d}$	$\boldsymbol{d = r_2 + r_1}$	$\boldsymbol{r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1}$	$\boldsymbol{d = r_2 - r_1}$	$\boldsymbol{d < r_2 - r_1}$

円が複数個あるときは，まず，中心間を線で結んだ図を描こう．そのうえで，上のような条件を考えるとよい．

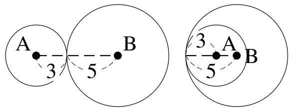
【例題 47】 2点 A, B があり，中心が A で半径 3 の円 C_1 と，中心が B で半径 5 の円 C_2 がある．以下のそれぞれの場合について，C_1 と C_2 の位置関係を答えよ．

1. AB = 9　　2. AB = 5　　3. AB = 2　　4. AB = 1

【解答】 円 C_1 の中心 (0, 0) を O とすると，OA = 5 + 3 = 8 のとき 2円は外接，OA = 5 − 3 = 2 のとき 2円は内接であるので，

- $8 <$ OA のとき 2円は離れている
- $2 <$ OA < 8 のとき 2円は交わっている
- OA < 2 のとき C_2 が C_1 を含む

1. **2円は離れている.**　　2. **2円は交わっている.**
3. **2円は内接している.**　　4. **C_2 が C_1 を含む.**

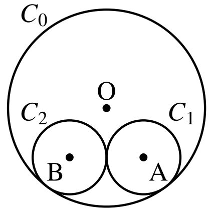
◀ 

【練習 48：複数の円を含む図形】

半径 8 の円 C_0 に，半径 3 の円 C_1, C_2 が右図のように内接している．それぞれの中心を O，A，B とする．

(1) AB，OA の長さをそれぞれ求めよ．

(2) 発展 円 C_0 に内接し，円 C_1, C_2 の両方に外接する円のうち，大きい方の円 C_3 の半径を求めよ．



【解答】

(1) 図より明らかに，**AB = 6**．また，直線 OA を右欄外の図のように引いて，OA = 8 − 3 = **5**.

(2) 円 C_3 の中心を P，半径を x とする．

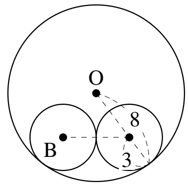
AB の中点を M とすると，M は直線 PO 上にあり，PM ⊥ AB になる．

△OAM は直角三角形なので

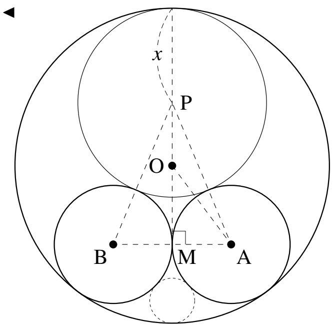
$$5^2 = 3^2 + \mathrm{OM}^2 \qquad \therefore \ \mathrm{OM} = 4$$

また，円 C_3 が円 C_0 と内接することから PO = 8 − x なので，△PAM について

$$\begin{aligned} &\mathrm{PA}^2 = (\mathrm{PO} + \mathrm{OM})^2 + \mathrm{MA}^2 \\ \Leftrightarrow\ &(x+3)^2 = \{(8-x)+4\}^2 + 3^2 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + 6x + 9 = 144 - 24x + x^2 + 9 \\ \Leftrightarrow\ &6x = 144 - 24x \qquad \therefore\ \boldsymbol{x = \frac{24}{5}} \end{aligned}$$



円が接しているときは円の中心と接点を結ぶ習慣をつけよう

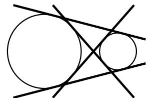
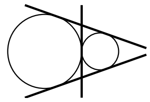
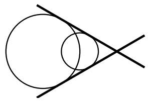
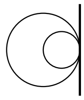
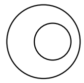


ちなみに，下に小さい円も書ける．こちらの円の半径は $\frac{8}{7}$ になる．

B. 2 円の共通接線

2 つの円にどちらも接する接線を 2 円の**共通接線**と言い，2 円の位置関係によって本数が異なる．

2 円の共通接線

本数	4 本*5	3 本	2 本	1 本	0 本
2 円と共通接線の図					
2 円の位置関係	離れている	外接している	交わっている	内接している	一方が他方を含む
共通外接線	2 本	2 本	2 本	1 本	0 本
共通内接線	2 本	1 本	0 本	0 本	0 本

【例題 49】 2 点 A, B があり，中心が A で半径 3 の円 C_1 と，中心が B で半径 5 の円 C_2 がある．以下の場合について，共通接線の本数を答えよ．

1. AB = 9　　2. AB = 5　　3. AB = 2　　4. AB = 1

【解答】 前ページの答えを利用して

1. 2 円は離れているので **4 本**.
2. 2 円は交わっているので **2 本**.
3. 2 円は内接しているので **1 本**.
4. C_2 が C_1 を含むので **0 本**.

【暗記 50：共通接線の長さ】

O_1 が中心で半径 1 の円 C_1 と，O_2 が中心で半径 2 の円 C_2 があり，$O_1O_2 = 4$ とする．

1. 2 円の共通外接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ A_1，A_2 で接するとき，線分 A_1A_2 の長さを求めよ．
2. 2 円の共通内接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ B_1，B_2 で接するとき，線分 B_1B_2 の長さを求めよ．

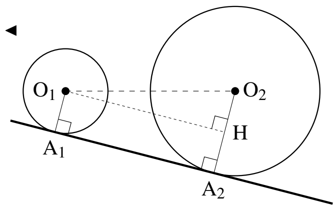
【解答】

1. O_1 から O_2A_2 へ下ろした垂線の足を H とすると

$$A_1A_2 = O_1H = \sqrt{O_1O_2{}^2 - O_2H^2}$$

である．$O_1O_2 = 4$, $O_2H = A_2O_2 - A_2H = 2 - 1 = 1$ なので

$$A_1A_2 = \sqrt{4^2 - 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{15}}$$

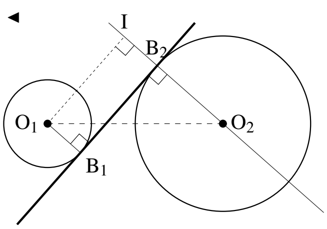


2. O_1 から直線 O_2B_2 へ下ろした垂線の足を I とすると

$$B_1B_2 = O_1I = \sqrt{O_1O_2{}^2 - O_2I^2}$$

である．$O_1O_2 = 4$,　$O_2I = O_2B_2 + B_1O_1 = 2 + 1 = 3$ なので

$$B_1B_2 = \sqrt{4^2 - 3^2} = \boldsymbol{\sqrt{7}}$$



上の問題の 2. の別解として，O_1O_2 と B_1B_2 の交点を C とし，$\triangle O_1B_1C \backsim \triangle O_2B_2C$ と三平方の定理を用いても解くことが出来る．ただし，計算が多少ややこしい．

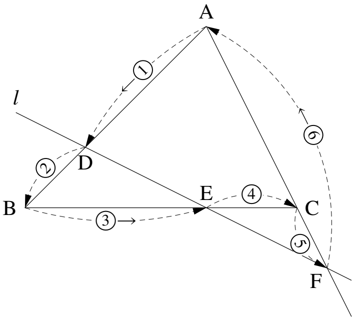
1. メネラウスの定理

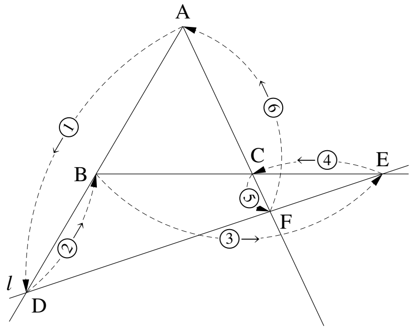
A. メネラウスの定理とは

メネラウスの定理

△ABC と直線 l を考える．l が直線 AB，BC，CA と交わる点を D，E，F とするとき，次の式が成り立つ．

$$\underset{②}{\overset{①}{\frac{AD}{DB}}}\cdot\underset{④}{\overset{③}{\frac{BE}{EC}}}\cdot\underset{⑥}{\overset{⑤}{\frac{CF}{FA}}}=1$$





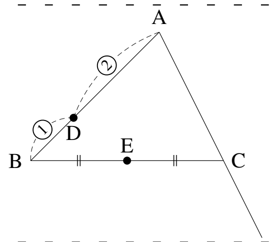
（ただし，D，E，F は △ABC の頂点に一致しないとする．）

（証明）C を通り直線 l に平行な直線と，直線 AB の交点を K とする．このとき，CK // l より
$\frac{BE}{EC}=\frac{BD}{DK}$，$\frac{CF}{FA}=\frac{KD}{DA}$ となる．よって，$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BD}{DK}\cdot\frac{KD}{DA}=1$ ■

・・・・この定理を使うには，上図の矢印のように，線でなぞって考えると良い．
このとき，線でなぞるのは，A から始めなくても，B からでも，C からでもよい．実際に，次のどちらの等式も成り立つからである．

Bから始めた場合→ $\underset{④}{\overset{③}{\frac{BE}{EC}}}\cdot\underset{⑥}{\overset{⑤}{\frac{CF}{FA}}}\cdot\underset{②}{\overset{①}{\frac{AD}{DB}}}=1$，　Cから始めた場合→ $\underset{⑥}{\overset{⑤}{\frac{CF}{FA}}}\cdot\underset{②}{\overset{①}{\frac{AD}{DB}}}\cdot\underset{④}{\overset{③}{\frac{BE}{EC}}}=1$

【例題 51】 △ABC があり，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，辺 BC の中点を E とする．直線 DE と直線 AC の交点を F とするとき，$\frac{CF}{FA}$ を求めよ．また，AC : CF を求めよ．



【解答】 △ABC と直線 DE について，メネラウスの定理より

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1 \iff \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$

よって，$\frac{CF}{FA}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

また，**AC : CF = 1 : 1**

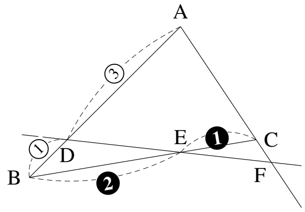
◀ AD : DB = 2 : 1 と $\frac{AD}{DB}=\frac{2}{1}$ は同じことを表わしている．

◀ 両辺を $\frac{1}{2}$ 倍した

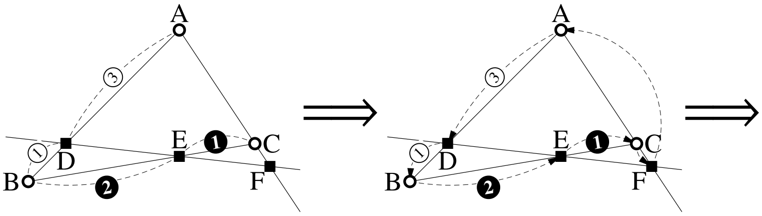
◀ 詳しく書けば，$\frac{CF}{FA}=\frac{1}{2}$ より，CF = k，FA = $2k$ とおけるので AC = k になるから 1 : 1.

B. 三角形と１本の直線を決める

右の図にメネラウスの定理を使うと，次のように，2 通りの等式を考えることが出来る．



(I) △ABC と直線 DEF で考えた場合



$$\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1$$

よって，$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=\dfrac{1}{6}$ になり，

CF : FA = 1 : 6

AC : CF = 5 : 1

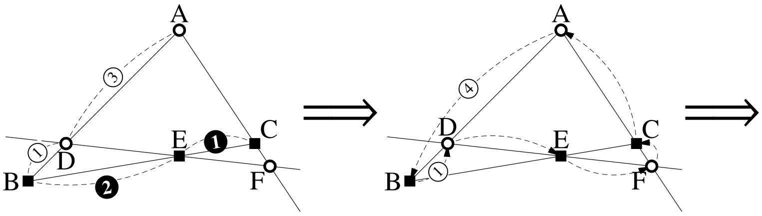
○は三角形の頂点

■は直線と辺の交点

Aから始めて

Ⓐ→■→○→■→○→■→Ⓐ

(II) △ADF と直線 BC で考えた場合



$$\frac{4}{1}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}=1$$

○は三角形の頂点

■は直線と辺の交点

Aから始めて

Ⓐ→■→○→■→○→■→Ⓐ

このように，どの三角形と直線で考えるかによって，異なる式を作ることが出来る．

問題を解く際は，上のことに注意して「とりあえずやってみる」とよい．

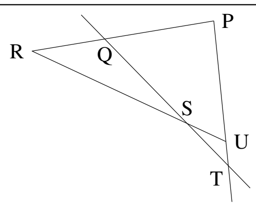
【練習 52：メネラウスの定理】

右図において，PQ : QR = 3 : 2，PU : UT = 4 : 1 である．

以下の問いに答えよ．

(1) RS : SU を求めよ．

(2) QS : ST を求めよ．



【解答】

(1) △PRU と直線 QT についてメネラウスの定理を考えれば

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{SU}}\cdot\frac{1}{5}=1 \iff \frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{SU}}=\frac{10}{3}$$

よって，**RS : SU = 10 : 3**.

(2) △PQT と直線 RU についてメネラウスの定理を考えれば

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{ST}}\cdot\frac{1}{4}=1 \iff \frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{ST}}=\frac{8}{5}$$

よって，**QS : ST = 8 : 5**.

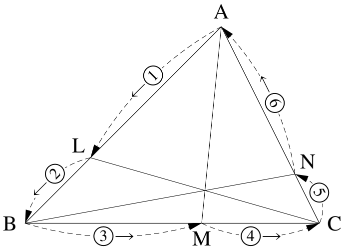
2. チェバの定理

チェバの定理

△ABC の辺 AB，BC，CA 上に L，M，N がある．ここで，直線 AM，BN，CL が 1 点で交わるならば，次の式が成り立つ．

$$\overset{①}{\frac{\text{AL}}{\text{LB}}}_{②}\cdot\overset{③}{\frac{\text{BM}}{\text{MC}}}_{④}\cdot\overset{⑤}{\frac{\text{CN}}{\text{NA}}}_{⑥}=1$$

（ただし，L，M，N は △ABC の頂点に一致しないとする.）



（証明）AM，BN，CL が交わる 1 点を K とする．△ABM と直線 LC についてメネラウスの定理を用いると

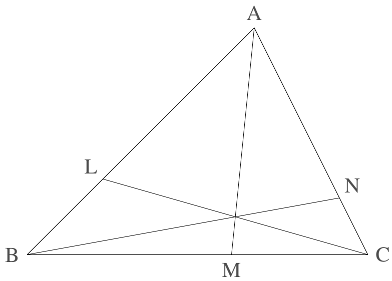
$$\frac{\text{AL}}{\text{LB}}\cdot\frac{\text{BC}}{\text{CM}}\cdot\frac{\text{MK}}{\text{KA}}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

△AMN と直線 BN についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\text{AK}}{\text{KM}}\cdot\frac{\text{MB}}{\text{BC}}\cdot\frac{\text{CN}}{\text{NA}}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

①，②の左辺どうし，右辺どうしを掛け合わせると

$$\frac{\text{AL}}{\text{LB}}\cdot\frac{\cancel{\text{BC}}}{\text{CM}}\cdot\frac{\cancel{\text{MK}}}{\cancel{\text{KA}}}\cdot\frac{\cancel{\text{AK}}}{\cancel{\text{KM}}}\cdot\frac{\text{MB}}{\cancel{\text{BC}}}\cdot\frac{\text{CN}}{\text{NA}}=1 \iff \frac{\text{AL}}{\text{LB}}\cdot\frac{\text{MB}}{\text{CM}}\cdot\frac{\text{CN}}{\text{NA}}=1 \quad ■$$



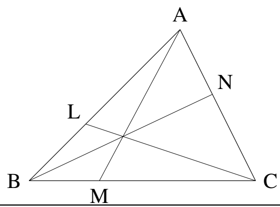
チェバの定理も線でなぞると考えやすい．また，A でなく，B や C から始めてもよい．

【練習 53：メネラウスの定理・チェバの定理】

右図の三角形において，L は辺 AB を 5 : 3 に内分し，N は辺 AC を 3 : 4 に内分し，線分 AM，BN，CL は 1 点 G で交わっている．

(1) BM : MC を求めよ．　　(2) AG : GM を求めよ．

(3) BG : GN を求めよ．　　(4) CG : GL を求めよ．



【解答】

(1) チェバの定理より $\frac{\text{AL}}{\text{LB}}\cdot\frac{\text{BM}}{\text{MC}}\cdot\frac{\text{CN}}{\text{NA}}=1 \iff \frac{5}{3}\cdot\frac{\text{BM}}{\text{MC}}\cdot\frac{4}{3}=1$ より，

$\frac{\text{BM}}{\text{MC}}=\frac{9}{20}$ なので，BM : MC = **9 : 20**

(2) △ABM と直線 LC についてメネラウスの定理を考えれば

$\frac{\text{AL}}{\text{LB}}\cdot\frac{\text{BC}}{\text{CM}}\cdot\frac{\text{MG}}{\text{GA}}=1 \iff \frac{\cancel{5}}{3}\cdot\frac{29}{\cancel{20}^{4}}\cdot\frac{\text{NG}}{\text{GA}}=1 \iff \frac{\text{MG}}{\text{GA}}=\frac{12}{29}$ なので，AG : GM = **29 : 12**

◀ △ACM と直線 BM についてメネラウスの定理を考えても，解くことが出来る．

(3) △ABN と直線 LC についてメネラウスの定理を考えれば

$\frac{\text{AL}}{\text{LB}}\cdot\frac{\text{BG}}{\text{GN}}\cdot\frac{\text{NC}}{\text{CA}}=1 \iff \frac{5}{3}\cdot\frac{\text{BG}}{\text{GN}}\cdot\frac{4}{7}=1 \iff \frac{\text{BG}}{\text{GN}}=\frac{21}{20}$ なので，

BG : GN = **21 : 20**

◀ △BCN と直線 AM についてメネラウスの定理を考えても，解くことが出来る．

(4) △ACL と直線 BN についてメネラウスの定理を考えれば

$\frac{\text{AB}}{\text{BL}}\cdot\frac{\text{LG}}{\text{GC}}\cdot\frac{\text{CN}}{\text{NA}}=1 \iff \frac{8}{3}\cdot\frac{\text{LG}}{\text{GC}}\cdot\frac{4}{3}=1 \iff \frac{\text{LG}}{\text{GC}}=\frac{9}{32}$ なので，

CG : GL = **32 : 9**

◀ △CLB と直線 AM についてメネラウスの定理を考えても，解くことが出来る．

4.6　第４章の補足

1.　重心の別証明

【発展 54：重心と面積比〜重心についての別証明】

△ABC の中線 BM，CN の交点を P とする．△ABC の面積を S とすると，△BCM = $\boxed{\text{ア}}$ である．

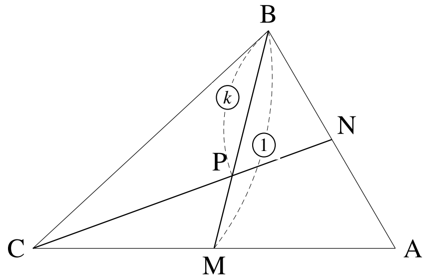
ここで，BM : BP = 1 : k とおくと，△BPC = $\boxed{\text{イ}}$ になる．

同様にして，△BPA = $\boxed{\text{ウ}}$ であり，N は AB の中点であるから △BPN = $\boxed{\text{エ}}$ になる．ここで，

$$\triangle BCN = \triangle BPC + \triangle BPN \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{エ}}$$

になるから，k = $\boxed{\text{オ}}$ である．

よって，BP : PM = $\boxed{\text{カ}}$: $\boxed{\text{キ}}$ と分かる[*6]．



【解答】　底辺が △ABC の半分だから，△BCM = $\underline{\frac{S}{2}}_{(\text{ア})}$ であり，△BPC の底辺を BP と見れば，△BPC = k△BCM = $\underline{\frac{k}{2}S}_{(\text{イ})}$ になる．

◀ CM を底辺に見る

　同様にして，△BPA = k△BAM = $\underline{\frac{k}{2}S}_{(\text{ウ})}$ であり，△BPN の底辺を BN と見れば，△BPN = $\frac{1}{2}$△BPA = $\underline{\frac{k}{4}S}_{(\text{エ})}$ になる．ここで

$$\triangle BCN = \triangle BPC + \triangle BPN \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = \underline{\frac{k}{2}S}_{(\text{イ})} + \underline{\frac{k}{4}S}_{(\text{エ})} = \frac{3k}{4}S$$

$$\Leftrightarrow 2 = 3k \qquad \therefore k = \underline{\frac{2}{3}}_{(\text{オ})}$$

よって，BP : PM = $\frac{2}{3} : \left(1 - \frac{2}{3}\right) = {}_{(\text{カ})}\underline{\mathbf{2}} : \underline{\mathbf{1}}_{(\text{キ})}$ と分かる．

[*6] BC の中点を L，BM と AL の交点を P' とすると，同じように BP' : P'M = $\boxed{\text{カ}}$: $\boxed{\text{キ}}$ と分かり，P と P' は一致し，これが重心と分かる．

2. 傍心と傍接円についての証明

【発展 55：傍心と傍接円】

$\triangle$ABC について，$\angle$B の外角の二等分線，$\angle$C の外角の二等分線の交点を E とする．直線 AE は，$\angle$A の二等分線になることを示せ．また，E が傍心の一つになっていることを示せ．

【解答】 E から辺 BC，直線 AB，AC へ引いた垂線の足を，それぞれ P，Q，R とする．

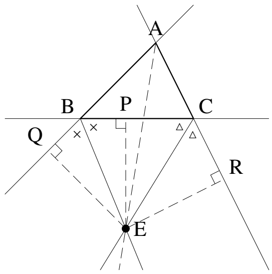
直角三角形 $\triangle$EQB と $\triangle$EPB について，EB 共通，$\angle$EBQ = $\angle$EBP より，斜辺と 1 角が等しいから $\triangle$EQB ≡ $\triangle$EPB となって EQ = EP ……… ①.

同様に，$\triangle$ERC ≡ $\triangle$EPC から ER = EP ……… ② である．

直角三角形 $\triangle$EAQ と $\triangle$EAR について，EA 共通，①，② より EQ = ER であるから，$\triangle$EAQ ≡ $\triangle$EAR になる．よって，$\angle$EAQ = $\angle$EAR と分かるので，EA は $\angle$A の二等分線に一致することが示された．

また，①，②から EP = EQ = ER であるので，E を中心に AB，BC，CA と交わる円を描けることも示されている． ■

◂



3.　「四角形が円に内接する条件」の証明

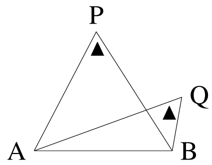
A.　「円周角の定理の逆」の証明

「円周角の定理の逆」は，次の命題の一部として示される．

円周角の定理の逆

$\triangle$ABP の外接円を K とし，P，Q は線分 AB に対して同じ側にあるとき，次が成立する．

- $\angle$APB $<$ $\angle$AQB ならば，Q は K の内部にある．
- $\angle$APB $=$ $\angle$AQB ならば，Q は K の周上にある．
- $\angle$APB $>$ $\angle$AQB ならば，Q は K の外部にある．



直線 BQ と円周 K の交点のうち，B でない点を R とする．円と直線は最大 2 点でしか交わらないので，R はただ 1 点に定まる．また，円周角の定理より，$\angle$ARB $=$ $\angle$APB が成り立つ．

(I) $\angle$APB $<$ $\angle$AQB のとき，Q が K の内部になかったと仮定する．
もし，Q が K の周上にあるならば，Q は R と一致するので $\angle$APB $=$ $\angle$AQB となるがこれは矛盾．
もし，Q が K の外部にあるならば，$\triangle$QAR について，$\angle$AQB $+$ $\angle$QAR $=$ $\angle$ARB となるので，$\angle$AQB $<$ $\angle$ARB $=$ $\angle$APB となって矛盾．
つまり，Q は K の内部にないという仮定は誤っているから，背理法によって，Q は K の内部にあることが示された．

(II) $\angle$APB $=$ $\angle$AQB のとき，Q が K の周上になかったと仮定する．
もし，Q が K の内部にあるならば，$\triangle$QAR について，$\angle$AQB $=$ $\angle$ARB $+$ $\angle$QAR となるので，$\angle$AQB $>$ $\angle$ARB $=$ $\angle$APB となって矛盾．
Q が K の外部にあるならば，(I) と同様にして $\angle$AQB $<$ $\angle$APB となって矛盾．
つまり，背理法によって Q は K の周上にある．

(III) $\angle$APB $>$ $\angle$AQB のとき，Q が K の外部になかったと仮定する．
Q が K の内部にあるならば，(II) と同様にして $\angle$AQB $>$ $\angle$APB となって矛盾．
Q が K の周上にあるならば，(I) と同様にして $\angle$AQB $=$ $\angle$APB となって矛盾．
つまり，背理法によって Q は K の外部にある．

ここで，$\angle$APB $= 90^\circ$ とすれば，p.125 の【練習：円周角の定理の逆】の解答の証明になる．

B.　「四角形の対角の和の逆」の証明

B を含まない孤 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 上に，P をとる．ただし，P は直線 CD 上にないとする．

すると，$\angle$B $+$ $\angle$D $= 180^\circ$，$\angle$B $=$ ($\angle$D の外角）のどちらの公式も，$\angle$APB $=$ $\angle$ADB という条件に一致する．

ここで「円周角の定理の逆」を用いれば，D が $\triangle$APB の外接円周上にあると示されるので，「四角形の対角の和の逆」は示されたことになる．

索引