13th-note 数学A

（**2013** 年度卒業生まで）

Ver1.73(2012-7-21)

目次

第4章　平面図形

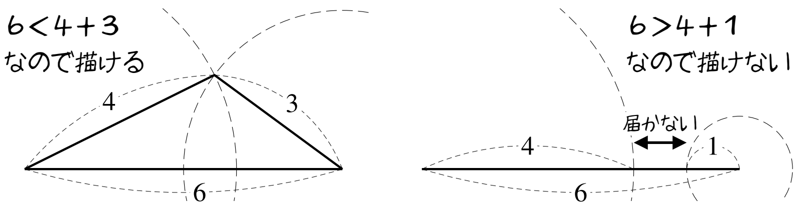
この章では，三角形・四角形・円などの平面図形について成り立つ重要な法則について学ぶ.

4.1　三角形の性質（1）

1.　三角形の成立条件

A.　描ける三角形・描けない三角形

3 辺が 6 cm，4 cm，3 cm の三角形は描けるが，3 辺が 6 cm，4 cm，1 cm の三角形を描くことはできない.



一番長い辺（6 cm）を底辺にして書いてみよう．すると，一番長い辺は，他の 2 辺の和より短くないといけない.

【例題 1】 3 辺が以下で与えられる三角形が，存在するか，存在しないか，答えなさい.

a) 5, 3, 3　　b) 7, 4, 3　　c) 8, 5, 2　　d) 9, 6, 4

B.　三角形の成立条件

3 辺が a, b, c である三角形が存在する条件は，以下のようにまとめられる．

三角形の成立条件

3 辺が a, b, c である三角形が存在する条件は

$c < a+b$, $b < c+a$, $a < b+c$ を全て満たすこと[*1]

である．特に，c が一番長い場合は，$c < a+b$ が成り立てば十分である．

【練習 2：三角形の成立する条件】

(1) 3 辺が $x-2$, x, $x+2$ である三角形を考えよう．最大辺は $\boxed{\text{ア}}$ の辺なので，三角形が存在するには $\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ でないといけない．これを解いて，$\boxed{\text{ウ}} < x$ のときに三角形が存在する．

(2) 3 辺が 3, 5, $x+1$ である三角形を考えよう．三角形が成立する条件は，

連立不等式 $\begin{cases} 3 < \boxed{\text{エ}} \\ 5 < \boxed{\text{オ}} \\ x+1 < \boxed{\text{カ}} \end{cases}$ の解であるから，$\boxed{\text{キ}} < x < \boxed{\text{ク}}$ のときに三角形が存在する．

(3) 3 辺が 5, $x+2$, $2x+1$ である三角形が成立するための x の条件を求めよ．

[*1] 「この 3 条件を同時に満たす」ことの必要十分条件として「不等式 $|a-b| < c < a+b$ を満たす」ことを考えてもよい．ただし，絶対値が含まれる分，計算は少しややこしいことがある．

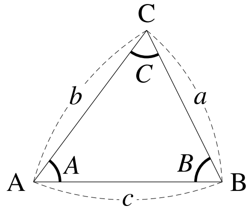
2.　三角形の辺と角

A.　辺と角の名前

△ABC において，以下のように略すことが多い．

∠A，∠B，∠C の大きさ　$\longrightarrow$　それぞれ A，B，C

辺 BC，CA，AB の長さ　$\longrightarrow$　それぞれ a，b，c



たとえば，角 A の向かい側にある辺 BC を a と表すことになる．

今後，特に断りのない限りこの記法にしたがうこととする．

B.　辺と角の大小関係

たとえば，$A = 45°$，$B = 60°$，$c = 6$ を描くと $a < b$ になる．

また，$a = 3$，$b = 4$，$c = 6$ の △ABC を描くと，角の大きさは $A < B < C$ になる．

一般に，次のような関係が成り立つ．

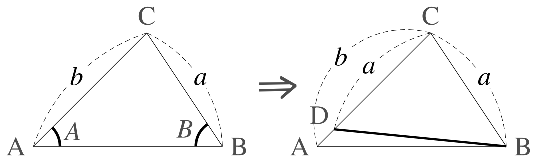
三角形の辺と角

△ABC について，辺の大小と，向かいの角の大小は，一致する．

（証明）$a > b \iff A > B$ を示せばよい．

$a < b$ のとき，辺 AC 上に，CD = a となるよう D をとる．すると

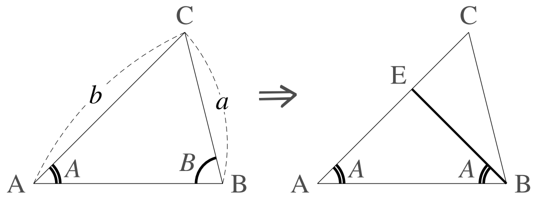
$B > \angle \mathrm{CBD} = \angle \mathrm{CDB} = A + \angle \mathrm{DBA} > A$



から，$A < B$ が示される．

逆に，$A < B$ であったとする．このとき，∠ABE = A となるよう，辺 AC 上に E をとる．すると，△EAB は二等辺三角形であるから

$b = \mathrm{AE} + \mathrm{EC} = \mathrm{BE} + \mathrm{EC} > \mathrm{CB} = a$



から，$a < b$ である．

上の定理は，定理の内容の分かりやすさに比べると，証明が難しい．

【例題 3】　次の三角形について，一番長い辺・短い辺はそれぞれどこか．

1. $A = 50°$，$B = 60°$　　2. $A = 100°$，$B = 30°$　　3. $B = 45°$，$C = 40°$

【発展 4：辺の大小と角の大小】

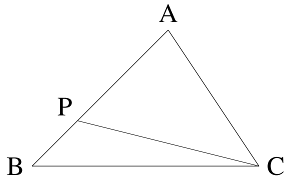
辺 BC が最大である △ABC の辺 AB 上に P をとるとき，PC < BC ……… ①を示そう．

「三角形の辺と角の大小関係」から，①を示すには

$\angle\boxed{\text{ア}} < \angle\boxed{\text{イ}}$ ……… ②を示せばよい．ここで，△ABC において

は辺 BC が最大であるので，$\angle\boxed{\text{ア}} < \angle\boxed{\text{ウ}}$ であるから，

$$\angle\boxed{\text{イ}} - \angle\boxed{\text{ア}} > \angle\boxed{\text{イ}} - \angle\boxed{\text{エ}} = \angle\boxed{\text{オ}} > 0$$



よって，②が成立することが分かったから，よって，①が示せた． ■

3.　辺の内分・外分

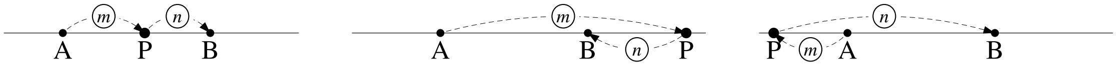
A.　内分とは・外分とは

線分 AB を考え，P を直線 AB 上のどこか（A，B 除く）にとる．

P を線分 AB 内にとるとき「P は線分 AB を**内分** (interior devision) する」という．線分の長さの比 AP : PB = $m : n$ となるとき「P は線分 AB を $m : n$ に内分する」という．

P を線分 AB 外にとるとき「P は線分 AB を**外分** (exterior division) する」という．線分の長さの比 AP : PB = $m : n$ となるとき「P は線分 AB を $m : n$ に外分する」という．

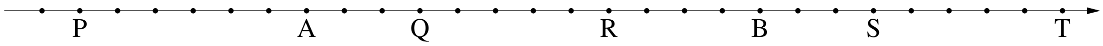
m：nに内分　　m：nに外分（m＞nのとき）　　m：nに外分（m＜nのとき）



上の図のように「A から P へ，P から B へ」の矢印 2 つで考えると，内分も外分も分かりやすい．
また，P が線分 AB を 1 : 1 に内分するとき，P は中点になる．

【例題 5】

以下の目盛りが等間隔であるとき，$\boxed{}$に数値を，（　）に「内」「外」のいずれかを入れよ．



- P は AB を $\boxed{\text{ア}}$: $\boxed{\text{イ}}$ に（ **ウ** ）分している
- Q は AB を $\boxed{\text{エ}}$: $\boxed{\text{オ}}$ に（ **カ** ）分している
- R は AB を $\boxed{\text{キ}}$: $\boxed{\text{ク}}$ に（ **ケ** ）分している
- S は AB を $\boxed{\text{コ}}$: $\boxed{\text{サ}}$ に（ **シ** ）分している
- T は AB を $\boxed{\text{ス}}$: $\boxed{\text{セ}}$ に（ **ソ** ）分している

【例題 6】　線分 XY の長さを 12 とし，線分 XY を 1 : 2 に内分する点を A，5 : 1 に内分する点を B，1 : 2 に外分する点を C，3 : 2 に外分する点を D とする．

1. XA，XB，XC，XD の長さをそれぞれ求めよ．
2. 比 XA : AB : BY を求めよ．

【暗記 7 : 3 分割された線分の長さ】

線分 AB を 3 : 5 に内分した点を P，5 : 1 に内分した点を Q とするとき，比 AP : PQ : QB を求めよ．

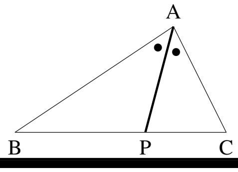
B. 内角の二等分線の定理

三角形の内角を二等分する線は，以下の性質を持つ．

内角の二等分線の定理

$\triangle$ABC について，$\angle$A を二等分する線と辺 BC が P で交わるとき（$\angle$BAP = $\angle$PAC のとき），次が成り立つ．

BP : PC = BA : AC



「A から P へ」二等分線を引いて，BA : AC $\xrightarrow[\text{代えても同じ}]{\text{AをPに}}$ BP : PC と覚えても良い．

（証明）CA // PD となるよう，辺 AB 上に D をとる．このとき

$\angle$APD = $\angle$PAC　　（CA // PD より）

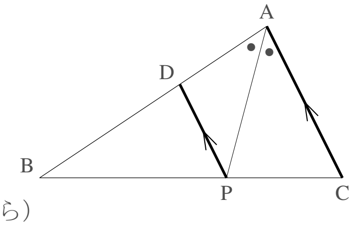
　　　= $\angle$PDA　　（AP は $\angle$A を二等分するから）

であるから，$\triangle$DAP はDA = DP ……… ① の二等辺三角形．よって

AB : AC = DB : DP　　（CA // PD より $\triangle$BDP ∽ $\triangle$BAC であるから）

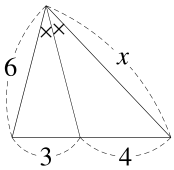
　　　= DB : DA　　（①から）

　　　= BP : PC　　（CA // PD より）　■

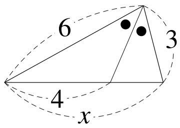


【例題 8】 以下の図について，x の値を求めなさい．

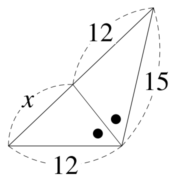
1.



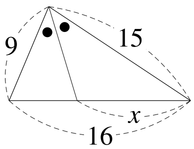
2.



3.



4.



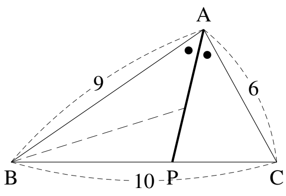
【練習 9：内角の二等分線】

右の $\triangle$ABC について，次の問いに答えよ．

(1) BP，PC の長さを求めよ．

(2) $\angle$B の二等分線と AP の交点を Q とする．AQ : QP を求めよ．

(3) $\angle$C の二等分線と AP の交点を R とする．AR : RP を求めよ．

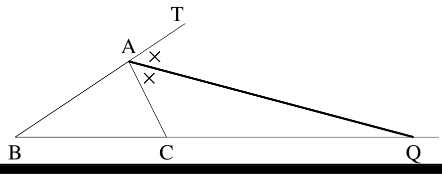


C. 外角の二等分線の定理

外角の二等分線の定理

$\triangle$ABC について，$\angle$A の外角を二等分する線と辺 BC が Q で交わるとき（$\angle$CAQ = $\angle$QAT のとき），次が成立する．

BQ : QC = AB : AC



「A から Q へ」二等分線を引いて，BA : AC $\xrightarrow[\text{代えても同じ}]{\text{AをQに}}$ BQ : QC と覚えても良い．

【発展 10：外角の二等分線の定理の証明】

「外角の二等分線の定理」を証明せよ．

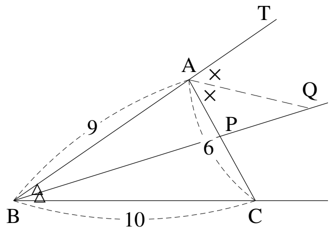
【練習 11：内角・外角の二等分線】

右の $\triangle$ABC について，次の問いに答えよ．

(1) AP，PC の長さを求めよ．

(2) BQ : QP を求めよ．

(3) $\angle$C の外角二等分線と直線 BP の交点を R とする．
BR : RP を求めよ．

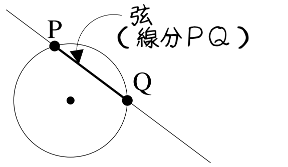
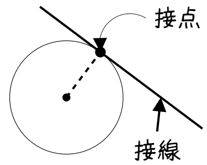
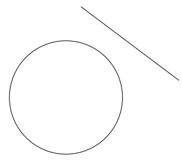


4.2　円の性質（１）〜円の弦・接線

次に学ぶ内心・外心の準備として，円の弦・接線について学ぶ.

A.　円と直線の共有点

円と直線の関係は，共有点の個数によって右の表のようにまとめられる.

円と直線の関係	交わっている	接している	離れている
			
共有点の個数	**2** 個	**1** 個	**0** 個

B.　円の弦ー共有点が２つのとき

弦の垂直二等分線について，次のことが成り立つ.

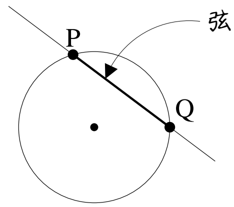
弦の垂直二等分線

円 O と直線 PQ が右のように交わっているとする．このとき

1. 弦 PQ の垂直二等分線は，必ず円の中心を通る.

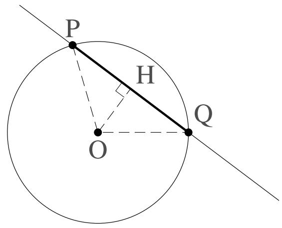
また，逆に，以下も成り立つ.

2. 円の中心を通り弦 PQ に垂直な線は，PQ の中点を通る.
3. 円の中心と弦 PQ の中点を通る直線は，弦 PQ と直交する.



（1. の証明）PQ の垂直二等分線は，P からも Q からも等間隔にある点の集まりであるが，OP = OQ =（円の半径）であるから，O は PQ の垂直二等分線上にある.

（2. の証明）O から PQ へ垂線を引き，その足を H とする.
直角三角形 △OPH と △OQH について，OM は共通，OP = OQ であるから，斜辺ともう 1 辺が等しいので △OPH ≡ △OQH である．つまり，PH = HQ であるから，垂線 PH は弦 PQ の中点を通る.　■



直感的には，直線 OH について線対称であるから，H が弦 PQ の中点になっている.

【練習 12：弦の垂直二等分線】

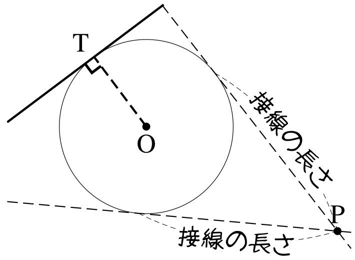
上の【弦の垂直二等分線】の 3. を証明しなさい.

C. 円の接線－共有点が１つのとき

円の接線

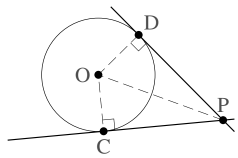
円とその接線について，次のことが成り立つ．

1. 円 O と直線が接点 T で接しているとき，線分 OT は接線と垂直に交わる．
2. 円外の点 P から円へ接線を引くとき，P から接点までの距離を**接線の長さ**という．P からの接線は 2 本引けるが，どちらの接線の長さも等しい．



（1. の証明）接線と OT が垂直に交わらないと仮定する（ ········ ①）．
O から接線へ垂線を引き，その足を H とする．H と T は異なるので，H は円周より外側にある．つまり，OT > OH であるが，直角三角形 OTH について斜辺 OH が一番長くないことになり，矛盾である．
よって，仮定①は誤りであり，接線と OT は垂直に交わる． ■

（2. の証明）右図において，PC = PD を示せばよい．
$\triangle$POC と $\triangle$POD について，$\angle$POC = $\angle$POD = 90°，PO は共通，OC = OD から直角三角形の斜辺と他の 1 辺が等しいと分かるので，$\triangle$POC ≡ $\triangle$POD になる．よって，PC = PD が示された． ■



直観的には，上の図の直線 OP について線対称であるから，接線の長さは等しい．

【練習 13：円と直線】

中心が O である半径 2 の円へ，OP = 5 となる P から接線を 2 本引き，接点を A，B とする．

(1) AB と OP の交点を C とする．$\triangle$OAP と合同な三角形を 1 つ，相似な三角形を 4 つ答えよ．
（ただし，三角形の頂点は，A，B，C，O，P のいずれかのみを考える）

(2) AC，OC の長さをそれぞれ求めよ．

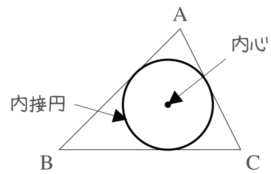
円の中心と接点を結ぶと，円の半径と，直角が図の中に現れる．

4.3 三角形の性質（２）〜三角形の五心

1. 三角形の内心

A. 内心とは

三角形の 3 つの辺すべてに接する円を，その三角形の**内接円** (inscribed circle) といい，内接円の中心を**内心** (inner center) という



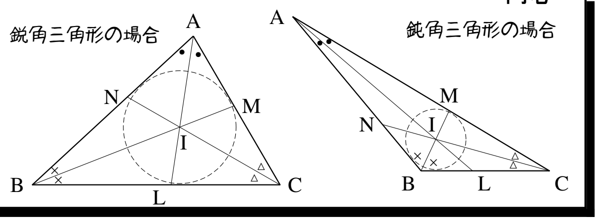
B. 三角形の内心〜角の二等分線の交点

たとえば，辺 AC からも辺 BC からも等距離にあるのは，∠C の二等分線上の点である．同じように考えると，3 辺から等距離にある三角形の内心は，角の二等分線によって決まる．

内心

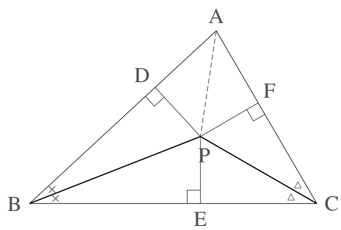
△ABC の 3 本の角の二等分線 AL，BM，CN について，次のことが成り立つ．

・AL，BM，CN は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の内心 I に一致する．



一般に，内接円と辺の接点は L，M，N のいずれにも一致しないので注意すること．
（△ABC が二等辺三角形のときにだけ，一致することがある）

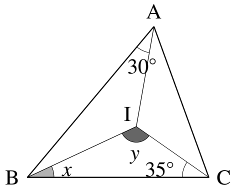
（証明）∠B，∠C の二等分線の交点を P とおく．また，P から辺 AB，辺 BC，辺 CA へ垂線 PD，PE，PF をそれぞれ引く．
まず，△PBD ≡ △PBE である（PB 共通，∠PBD = ∠PBE から斜辺と 1 角が等しい直角三角形になる）から PD = PE ········ ① とわかる．
同様に，△PCE ≡ △PCF から，PE = PF ········ ② である．



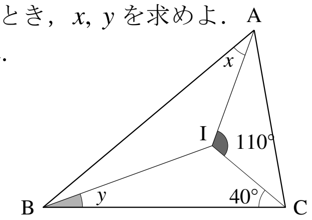
△PAD と △PAF について PA 共通，①，②から PD = PF から斜辺と他の 1 辺が等しい直角三角形と分かるので △PAD ≡ △PAF．つまり，∠PAD = ∠PAF となって AP は ∠A の二等分線と分かる．
以上より，3 本の角の二等分線は 1 点 P で交わり，①，②から P はどの辺からも等距離にあるとわかるので，三角形の内心 I と P は一致していることがわかる． ■

【例題 14】 I が △ABC の内心であるとき，x, y を求めよ．

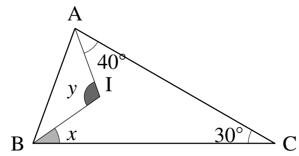
1.



2.

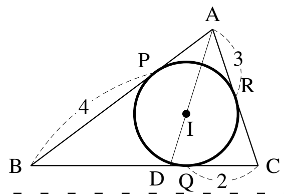


3.



【例題 15】 右の図において，P，Q，R は内接円と辺の接点であり，D は直線 AI 上にある．

1. 3 辺の長さを全て求めよ．
2. BD の長さを求めよ．
3. AI : ID を求めよ．



C. 内接円の半径を求める

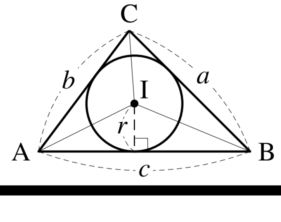
内接円の半径を求めるには，数学 I(p.187) で学ぶ次の公式を用いる．

三角形の内接円と面積の関係

三角形の面積 S は，内接円の半径 r を用いて

$$S = \triangle\mathrm{BCI} + \triangle\mathrm{CAI} + \triangle\mathrm{ABI} = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

と表すことができる．ここで a，b，c は各辺の長さを表す．



この公式は，必要なときに導くことができれば十分である．ただし，三角形とその内接円を見たら「三角形の面積は計算できる」と連想できるようにしよう．

【練習 16：内心と内接円の性質】

$AB = 7$, $AC = 8$ である $\triangle ABC$ の点 A から辺 BC へ垂線 AH を引くと，$AH = 4\sqrt{3}$ であったという．また，内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする．

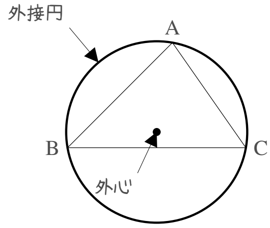
(1) 内接円の半径 r を求めよ．　(2) 線分 BD の長さを求めよ．　(3) 線分 AI の長さを求めよ．

【暗記 17：接線の長さ】

$AB = 8$, $BC = 7$, $CA = 9$ である $\triangle ABC$ の内接円が，辺 AB，BC，CA と P，Q，R で接している．このとき，AP，BQ，CR の長さを求めよ．

2. 三角形の外心

A. 外心とは



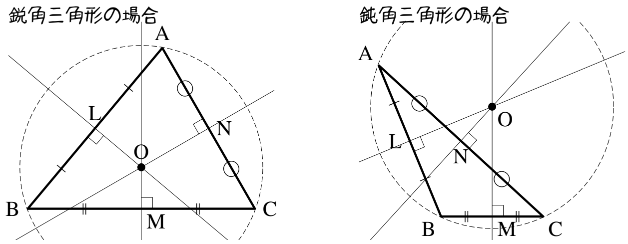
三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円** (circumscribed circle) といい，外接円の中心を**外心** (circumcenter) という．

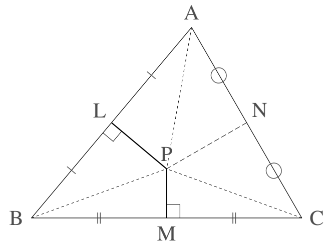
B. 三角形の外心〜垂直二等分線の交点

辺の垂直二等分線上のどの点も，その両側の頂点からの距離が等しい．そのため，三角形の外心は辺の垂直二等分線によって決まる．

外心

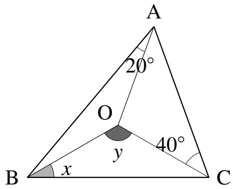
△ABC の 3 本の垂直二等分線について，次のことが成り立つ．
- 3 本は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の外心 O に一致する．

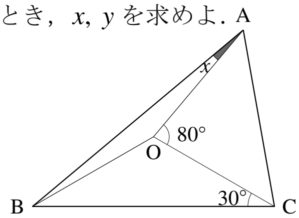


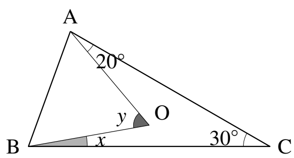


（証明）辺 AB の垂直二等分線，辺 BC の垂直二等分線の交点を P とおく．
△PAL と △PBL は PL 共通，AL = LB，∠PLA = ∠PLB = 90° から 2 辺とその間の角が等しい．よって，△PAL ≡ △PBL であるから，AL = BL．同様に △PBM ≡ △PCM から BL = CL．
△PAN と △PCN について，PN 共通，AN = NC，PA = PC から 3 辺が等しいので △PAN ≡ △PCN になる．よって ∠PNA = ∠PNC となり，∠PNA = ∠PNC = 90° である．つまり，PN は辺 AC の垂直二等分線に一致し，3 本の垂直二等分線は 1 点 P で交わる．
さらに，PA = PB = PC から P は △ABC の外心に一致する． ■

【例題 18】 O が △ABC の外心であるとき，x, y を求めよ．

1.


2.


3.


外心を含む問題では，必ず外接円を書き込むようにしよう．

C. 直角三角形の外心

【暗記 19：直角三角形の外心】
$\angle C = 90^\circ$ の直角三角形において，辺 CA，CB の二等分線は辺 AB の中点を通ることを示せ.

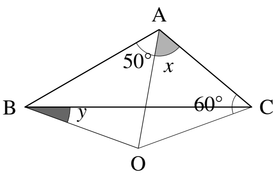
直角三角形の外心

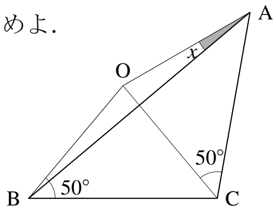
直角三角形の外心は，斜辺の中点に一致する．結果，外接円の半径は斜辺の半分に一致する.

D. 鈍角三角形の外心

鈍角三角形の外心は，必ず三角形の外になる．詳しくは「円周角の定理の逆」で学ぶ.

【例題 20】 O が $\triangle ABC$ の外心であるとき，x, y を求めよ.

1.


2.


E. 外接円の半径を求める

外接円の半径を求めるには，数学 I で学ぶ**正弦定理** (sine theorem) を用いる.

正弦定理

$\triangle ABC$ の外接円の半径 R について $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ が成り立つ.

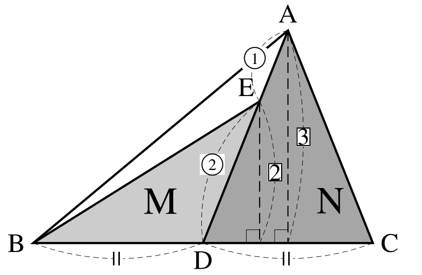
ただし，直角三角形の場合は外接円の半径は斜辺の半分に一致し，正弦定理は必要ない.

3. 三角形の重心

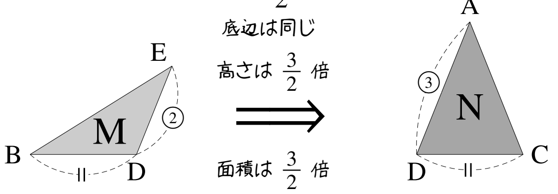
A. ２つの三角形の面積比

面積比を求めるときには，どこを底辺におくかが重要である．

まず，右の三角形 M，N の面積比を考えてみよう．

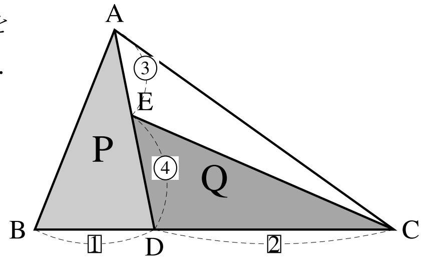


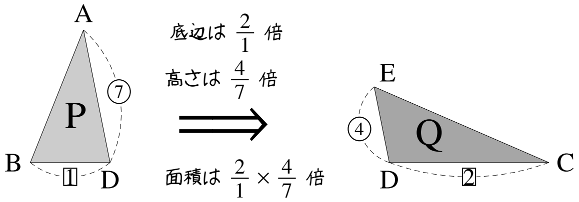
M の底辺を BD，N の底辺を CD とおけば，M，N の底辺の長さは等しく，M の高さの $\dfrac{3}{2}$ 倍が，N の高さになる．



つまり，M の面積を $\dfrac{3}{2}$ 倍すると N の面積に等しいと分かるから，M，N の面積比は 2 : 3 である．

次に，右の三角形 P，Q の面積比を考えてみよう．P の底辺を BD，Q の底辺を CD とすると，次のようにまとめることができる．





P の面積を $\dfrac{2}{1} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{8}{7}$ 倍すると Q の面積に等しいと分かるから，P，Q の面積比は 8 : 7 である．

【練習 21：平面図形の線分の比】

▱ABCD において，辺 BC 上に E を，辺 CD 上に F をとり，BE : EC = 1 : 2，DF : FC = 2 : 1 とする（▱は「平行四辺形」を表す）．

(1) △FEC と △DEC の面積比を求めよ．

(2) △FBC と △DEC の面積比を求めよ．

(3) △FEC と ▱ABCD の面積比を求めよ．

B. 三角形の重心〜中線の交点

三角形の面積は，中線によって二等分される．

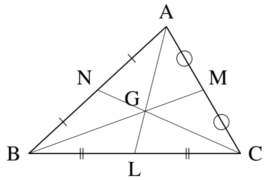
そして，3 本の中線は 1 点で交わる．これを**重心** (centroid, barycenter) という[*2]．

重心

$\triangle$ABC の 3 本の中線 AL，BM，CN について，次のことが成り立つ．

(1) AL，BM，CN は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の重心 G に一致する．

(2) AG : GL = 2 : 1, BG : GM = 2 : 1, CG : GN = 2 : 1 である．



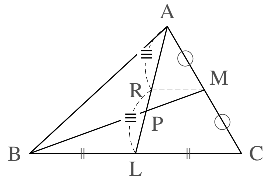
（証明）まず，AL と BM の交点を P，AL と CN の交点を Q とおき，P と Q が一致することを示す．

AL の中点を R とする．$\triangle$ALC について中点連結定理から

MR // BC ········ ①，RM : LC = 1 : 2 ········ ② になる．

①より，二角相等から $\triangle$MRP ∽ $\triangle$BLP と分かるので

RP : PL = RM : BL = 1 : 2 （①と BL = LC より） ·········③

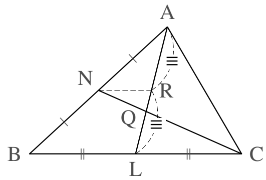


である．次に，$\triangle$ABL について中点連結定理から

NR // BC ········ ④，NR : BL = 1 : 2 ········ ⑤ である．

④から $\triangle$NRQ ∽ $\triangle$CLQ と分かるので，やはり RQ : QL = 1 : 2 になる．③とあわせて，P と Q は一致することが分かる．

つまり，AL，BM，CN は 1 点で交わる．これを G とおく．



さらに，④，③から GL = AL $\times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$AL と分かるので，AG : GL = 2 : 1 と分かる．

重心についての別証明が，p.140 にある．

[*2] 直感的には，重さの中心，つり合いの中心が重心である．たとえば，重さが一様な三角形の板を重心で支えると，板は地面に平行になってつり合う．

【練習 22：重心と面積比〜その１〜】

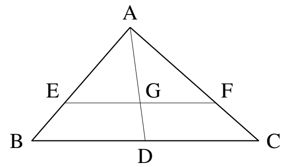
$\triangle$ABC $= S$ とするとき，$\triangle$AGB，$\triangle$BGC，$\triangle$CGA をそれぞれ S を用いて表わせ．

【練習 23：重心と面積比〜その２〜】

$\triangle$ABC の重心を G とし，直線 AG と辺 BC の交点を D とする．また，G を通り BC に平行な直線が，辺 AB，AC と交わる点を E，F とする．

(1) 相似な三角形の組を 3 組答え，その相似比を答えなさい．

(2) 四角形 EBDG と $\triangle$ABC の面積比を答えよ．

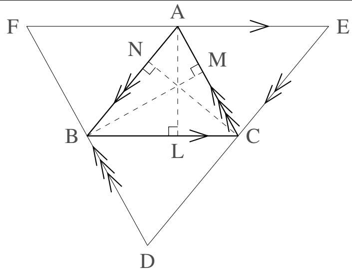


4. 三角形の五心

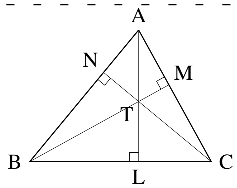
A. 垂心

垂心

$\triangle$ABC の 3 本の垂線は必ず 1 点で交わる．その交点を**垂心** (orthocenter) という．



（証明）　（別証明が p.126 にもある）
AB // ED, BC // FE, CA // DF であり，$\triangle$ABC に外接する $\triangle$DEF を，右図のように作る．また，点 A，B，C から下ろした垂線の足を，それぞれ L，M，N とおく．
四角形 ABCE，ACBF は平行四辺形になるので BC = AE，BC = AF と分かり，A は線分 EF の中点である．さらに，$\angle$EAL = $\angle$ALB = 90° から，線分 AL は線分 EF の垂直二等分線になる．
同様に，線分 BM は線分 DF の垂直二等分線，線分 CN は線分 DE の垂直二等分線になっている．
$\triangle$DEF の 3 本の垂直二等分線は外心で交わるから，AL，BM，CN は 1 点で交わる．■

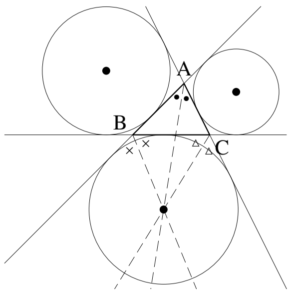


【例題 24】 右図の三角形について次の問いに答えよ．
1. 右図に相似な三角形を全て書き出しなさい．
   （ただし，補助線を引かないものとする）
2. $\angle$CAL = 25°，$\angle$ABM = 20° のとき，$\angle$TCL を求めよ．

B. 三角形の傍心 ～ 傍接円の中心

傍心 ～ 傍接円の中心

$\triangle$ABC について，直線 AB，BC，CA のすべてに接する円は，$\triangle$ABC の外側に 3 つ存在し，これを**傍接円** (escribed circle) という．また，傍接円の中心を**傍心** (excenter) という．
そして，$\angle$B の外角の二等分線，$\angle$C の外角の二等分線と，$\angle$A の（内角の）二等分線は必ず 1 点で交わり，それは傍心の 1 つに一致する．また，A，B，C を入れ替えて考えれば，他の傍心のいずれかに一致する．



証明は p.141 を参照のこと．

C. 三角形の五心

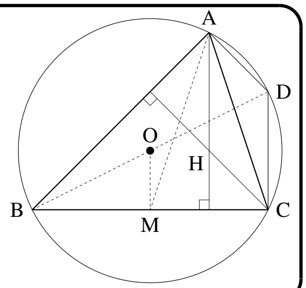
三角形の五心

どんな三角形も次の性質を持ち，重心・内心・外心・垂心・傍心をまとめて三角形の五心[*3]という.

- 3 本の中線は 1 点で交わり，それは重心に一致し，重心は中線を 2 : 1 に内分する.
- 3 本の角の二等分線は 1 点で交わり，それは内接円の中心である内心に一致する.
- 3 本の垂直二等分線は 1 点で交わり，それは外接円の中心である外心に一致する.
- 3 本の垂線は 1 点で交わり，それは垂心と定義される.
- 2 本の外角の二等分線と，残り 1 角の内角の二等分線は 1 点で交わり，それは傍接円の中心である傍心に一致する.

【発展 25 : オイラー線〜外心・重心・垂線を通る線】

鋭角三角形 ABC があり，外心を O，垂心を H，重心を G とする．また，辺 BC の中点を M とし，D を線分 BD が外接円の直径となるようにとる.



(1) 四角形 ADCH は平行四辺形であることを示せ.

(2) AH = 2OM を示せ.

(3) 3 点 H，G，O は同一直線上にある（この直線を**オイラー線** (Euler's line) という）ことを示し，HG : GO を求めよ.

4.4 円の性質（２）

[*3] このうち，特に重要な重心・内心・外心をまとめて三角形の三心ということもある.

1. 円に内接している四角形

A. 円周角の定理について

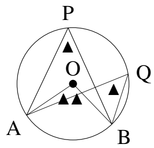
中学校で学んだ円周角の定理は，次のように表すことができる．

円周角の定理

中心が O である円の円周上に，A，B，P が固定されているとき

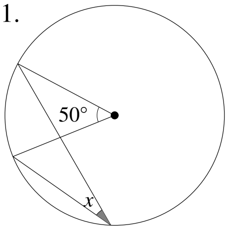
(1) $\angle AOB = 2\angle APB$ である．

(2) P を含む側の弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上に Q をとるとき，$\angle APB = \angle AQB$ である．

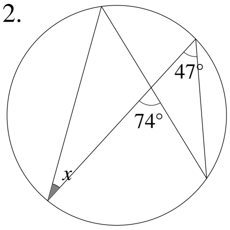


【例題 26】 以下の図について，x, y を求めよ．

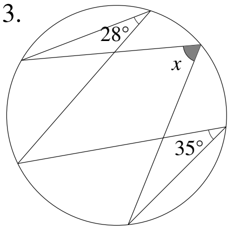
1.



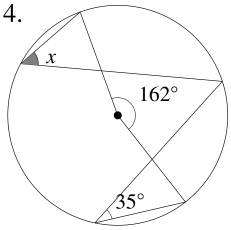
2.



3.



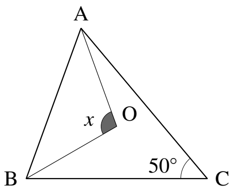
4.



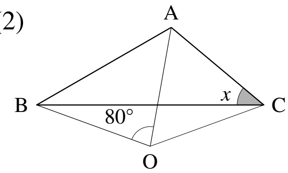
【練習 27：外心と円周角の定理】

O が $\triangle ABC$ の外心であるとき，x を求めよ．

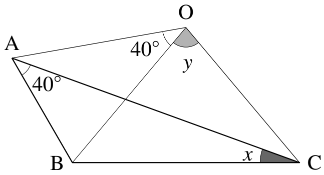
(1)



(2)



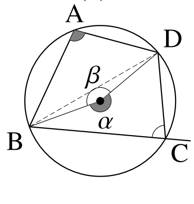
(3)



外心が与えられた場合は，図に外接円を書き込むようにしよう．

B.　円に内接する四角形の性質〜四角形の対角の和

四角形 ABCD が円に内接しているとき，右のように α, β をおくと，『円周角の定理』の (1) から



A は右図の $\dfrac{1}{2}\alpha$ と等しく，C は右図の $\dfrac{1}{2}\beta$ と等しい．

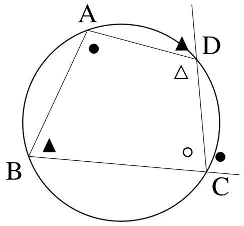
よって，$A + C = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^\circ$ とわかる．

また，変形して $A = 180^\circ - C$ となるので，A は角 C の外角に等しい．

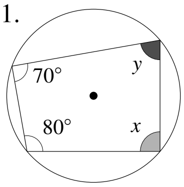
円に内接する四角形の対角

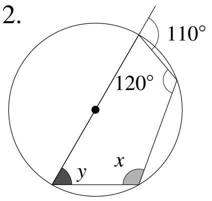
円に内接する四角形において，以下が成立する．

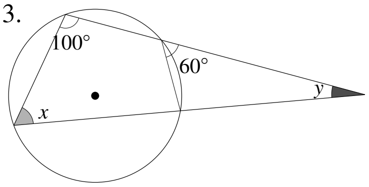
- 向かい合う角（対角）どうしを足すと 180° になる．つまり
  $A + C = 180^\circ$,　　　$B + D = 180^\circ$
- どの角も，向かいの頂点の外角に等しい，たとえば
  $A =$（∠C の外角）$=$ ●，$B =$（∠D の外角）$=$ ▲

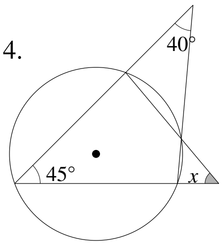


【例題 28】　以下の図について，x, y を求めよ．

1.


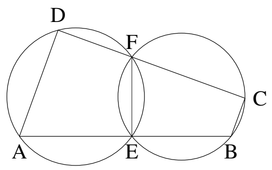
2.


3.


4.


【練習 29：円に内接する四角形】

右図において，AD // BC を示せ．
ただし，D，F，C は一直線上にあり，
A，E，B も一直線上にあるとする．



2. 四角形が円に内接する条件

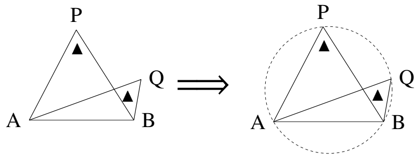
前ページで学んだことは逆も成立し，そのまま四角形が円に内接する条件となる．

A. 円周角の定理の逆

円周角の定理の (2) は「(仮定) P を含む側の弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上に Q がある ⇒（結論）$\angle APB = \angle AQB$」となるが，この命題は逆も成立する．

円周角の定理の逆

P，Q は線分 AB に対して同じ側にあり，
$\angle APB = \angle AQB$ であったとする．
このとき，A，B，P，Q は同一円周上にある[*4]．
（四角形 ABPQ は円に内接する）



（証明）は p.142 を参照のこと．

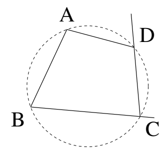
B. 「四角形の対角の和」の逆

「円に内接する四角形の対角」(p.123) も逆が成立する．

四角形が内接する条件（4 点が同一円周上にある）

次のいずれかが成り立てば，四角形 ABCD は円に内接し（4 点 A，B，C，D は同一円周上にあり），他の 3 つも成り立つ．

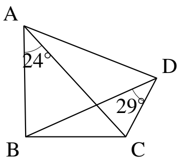
- $\angle A + \angle C = 180°$，　$\angle B + \angle D = 180°$（対角の和が 180°）
- $\angle A = \angle C$ の外角，　$\angle B = \angle D$ の外角（対角の外角と等しい）

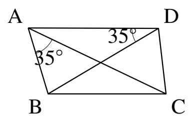


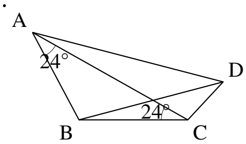
（証明）は p.142 を参照のこと．

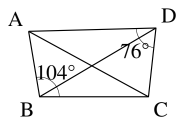
【例題 30】

次の四角形のうち，円に内接するものを 1 つ選べ．

1.


2.


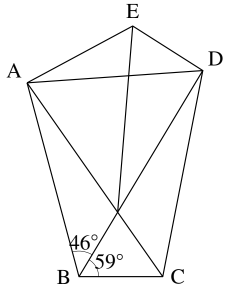
3.


4.


---

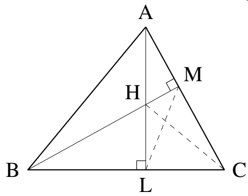
*4 「A，B，P，Q は同じ一つの円の周上にある」という意味

【例題 31】



1. ∠ACD = 46° のとき，円に内接する四角形はどれか．また，その根拠を答えよ．
2. ∠AED = 134° のとき，円に内接する四角形はどれか．また，その根拠を答えよ．
3. AC と BD の交点を F とする．四角形 ABCD，四角形 AFDE がどちらも円に内接するとき，59° に等しい角をすべて求めよ．ただし，右図に補助線を引かずに得られる角のみを答えること．

【練習 32：四角形の内接】



△ABC の A，B から垂線 AL，BM を引き，交点を H とする．

(1) A，B，C，H，L，M のいずれかを頂点とする四角形のうち，円に内接するもの 2 つを答えなさい．

(2) ∠CAL = 15°，∠ABM = 25° のとき，∠ALM，∠HCL の大きさを求めよ．

直角が向かい合う四角形を見たら，円に内接することを連想できるようにしよう．

【暗記 33：円周角の定理の逆】

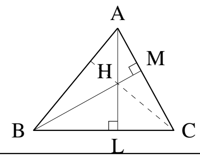
線分 AB があり，線分 AB を直径とする円の円周を K とする．以下の $\boxed{}$ に「内部」「周上」「外部」のいずれかを入れよ．

- ∠APB が鋭角ならば，P は K の $\boxed{\text{タ}}$ にある．
- ∠APB が直角ならば，P は K の $\boxed{\text{チ}}$ にある．
- ∠APB が鈍角ならば，P は K の $\boxed{\text{ツ}}$ にある．

上の 3 点の証明は p.142 を参照のこと．

【練習 34：垂心についての別証明】

$\triangle$ABC の A，B から垂線 AL，BM を引き，交点を H とする．



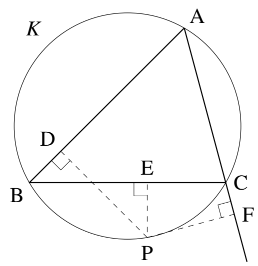
(1) $\angle$HCL = $\angle$LAB を証明せよ．

(2) 直線 CH と辺 AB の交点を N とする．CN $\perp$ AB を示せ．

【練習 35：垂心と内心】

鋭角三角形 ABC の各頂点から，垂線 AL，BM，CN を引く．$\triangle$ABC の垂心が，$\triangle$LMN の内心であることを示せ．

【発展 36：シムソン線】



△ABC と外接円 K を考える．A を含まない弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 上に P をとり，P から直線 AB，BC，CA へ引いた垂線の足を D，E，F とする．ただし，線分 AP が円 K の直径でないように，P をとる．

① A，B，C，D，E，F，P のいずれかを頂点とする四角形のうち，円に内接するものは 4 つある．そのうち 1 つは四角形 ABPC であるが，他の 3 つを答えなさい．

② D か F の一方は △ABC の辺上にあり，他方は辺上にないことを示せ．

③ 3 点 D，E，F は同一直線上にあることを示せ（この直線を**シムソン線** (Simson line) という）．

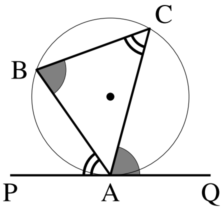
3.　接弦定理

接弦定理

$\triangle$ABC が円に内接し，A で円に接する直線 PQ が引いてある．
このとき，次が成り立つ．

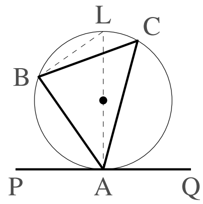
$\angle BAP = \angle BCA$,　　$\angle CAQ = \angle CBA$

これを，**接弦定理**という．



（証明・鋭角のとき）直線 AO と円周の交点を L とし，直径 AL を考える．
円周角の定理より $\angle ABL = 90^\circ$ であるから，$\triangle$ABL について
$\angle BLA + \angle BAL = 90^\circ$ ……… ① である．よって

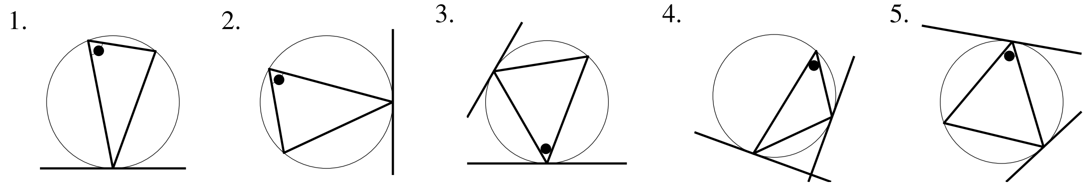
$\angle BAP = 90^\circ - \angle BAL = \angle BLA$　（②より）
$\qquad = \angle BCA$　（円周角の定理より）■



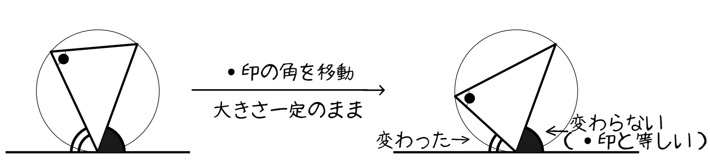
左右を逆に考えれば，$\angle CAQ = \angle CBA$ も同様に示される．
（証明・鈍角のとき）$\angle CBA$ が鈍角の場合を示す．$\angle BCA$ は鋭角なので $\angle BAP = \angle BCA$ であり

$\angle CBA = 180^\circ - \angle BCA - \angle BAC$　（$\triangle$ABC の内角の和は 180°）
$\qquad = 180^\circ - \angle BAP - \angle BAC = \angle CAQ$ ■

【例題 37】 以下の図において，接弦定理によって・印と等しい角をすべて選べ．



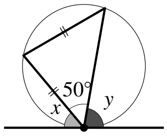
右のように，・印の角を一定に移動しても，大きさの変わらない側の角が・印と等しいと理解するとよい．



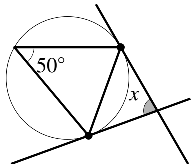
【練習 38：接弦定理〜その１〜】

右の図中の ● はすべて，円と直線の接点である．
それぞれ，x, y, z を求めよ．

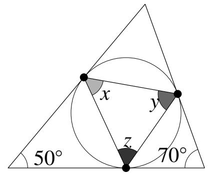
(1)



(2)



(3)

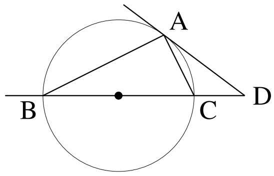


【練習 39：接弦定理〜その２〜】

右図において，線分 BC は円の直径，直線 DA は円の接線である．以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle ABC = 20°$ のとき，$\angle D$ の大きさを求めよ．

(2) $AC = CD = 1$ のとき，$\angle ABC$ と円の直径を求めよ．

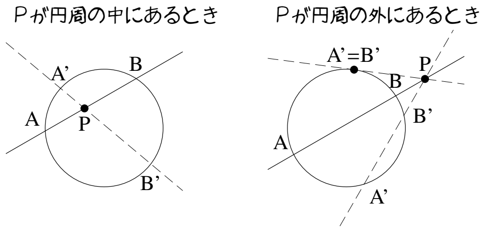


4.　方べきの定理

A.　方べきの定理とは

円 C と，1 点 P がある．ただし，P は C の円周上にないとする．

ここで，P を通る直線 l を考え，C の円周と l の交点を A，B とする．**方べきの定理**とは，l をどのように引いても，PA · PB が同じ値になることを言う．

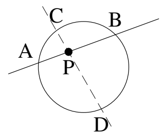


B.　P が円周の中にあるとき

方べきの定理（P が円周の中にあるとき）

弦 AB と弦 CD が，円の中の P で交わっているとき

- △PAD ∽ △PCB であり
- PA · PB = PC · PD が成り立つ（方べきの定理）．



【暗記 40：方べきの定理～その１～】

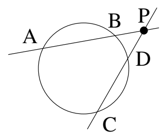
上の定理を証明せよ．

C.　P が円周の外にあるとき

方べきの定理（P が円周の外にあるとき）

弦 AB と弦 CD が，円の中の P で交わっているとき

- △PAD ∽ △PCB であり
- PA · PB = PC · PD が成り立つ（方べきの定理）．

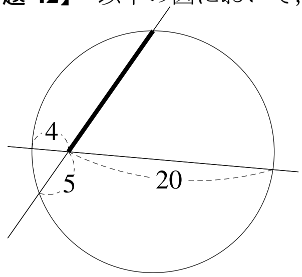


【暗記 41：方べきの定理～その２～】

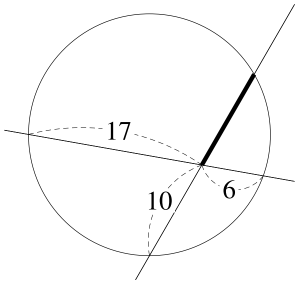
上の定理を証明せよ．

【例題 42】 以下の図において，太線の長さを求めよ．

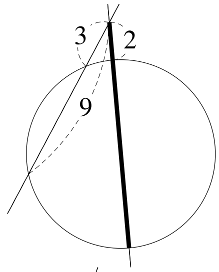
1.



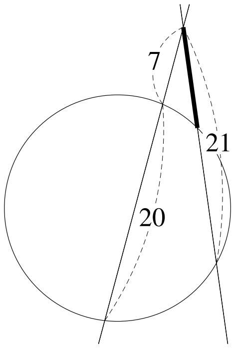
2.



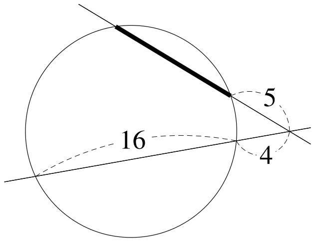
3.



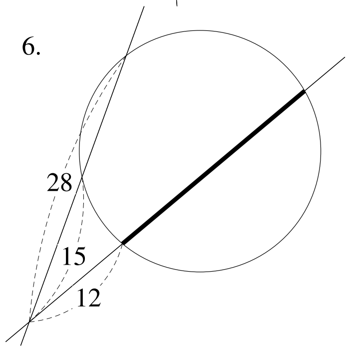
4.



5.



6.

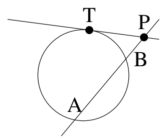


D. 円周外の点 P から，接線を引いたとき

方べきの定理（P から接線を引いたとき）

接点が T である接線が，弦 AB と点 P で交わっているとき

- $\triangle$PAT $\backsim$ $\triangle$PTB であり
- PA $\cdot$ PB = PT^2 が成り立つ（方べきの定理）．



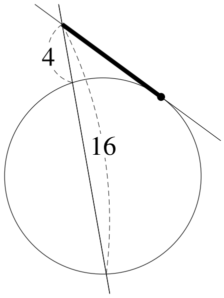
【暗記 43：方べきの定理〜その３〜】

上の定理を証明せよ．

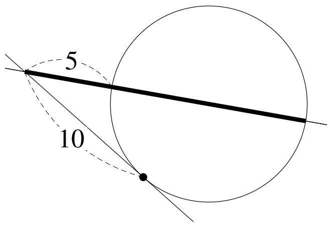
【練習 44：接線を引いたときの方べきの定理】

以下の図において，太線の長さを求めよ．ただし，図の中の“・”は接点とする．

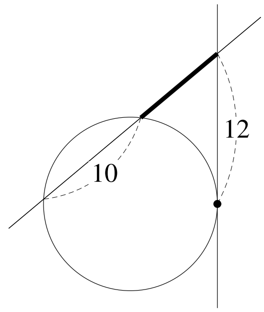
(1)



(2)



(3)



方べきの定理においては，一方の点のみが円周上にあることに注意しよう．

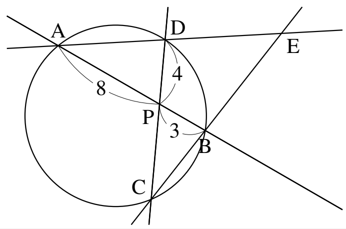
【練習 45：方べきの定理のまとめ】

以下の図において，x の長さを求めよ．ただし，図の中の“・”は接点か円の中心とする．

(1) CP の長さを求めよ．

(2) 図中の相似な三角形を 2 組答え，それぞれの相似比も答えよ．

(3) DE = 5 とするとき，BC の長さを求めよ．



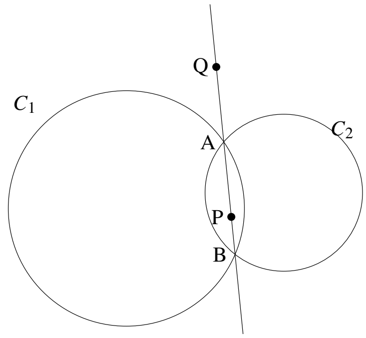
方べきの定理と，それを示すために用いた三角形の相似は，セットにして理解しよう．上の【練習】のように，相似を使わないと解けない問題も存在する．

【㊒㊓ 46：総合問題】

円 C_1 と C_2 が 2 点 A，B と交わっている．直線 AB 上のうち，線分 AB 上に P を，線分 AB の外に Q をとる．

① P を通り，直線 AB とは異なる直線 l を引き，l と円 C_1 の 2 交点を D，E とし，l と円 C_2 の 2 交点を F，G とする．このとき，$\mathrm{PD}\cdot\mathrm{PE}=\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PG}$ を示せ．

② Q を通り円 C_1 と 2 点 K，L で交わる直線 m_1 を引き，Q を通り円 C_2 と 2 点 M，N で交わる直線 m_2 を引く．このとき，K，L，M，N は同一円周上にあることを示せ．ただし，直線 AB，m_1，m_2 はすべて異なる直線とする．



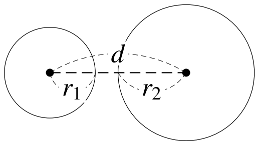
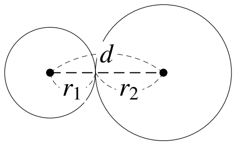
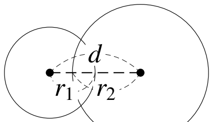
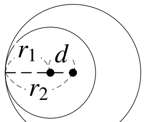
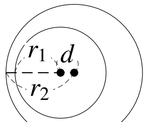
5.　2円の性質

A.　2円の位置関係

2円の位置関係は，2円の半径と中心間の距離で決まり，以下の5つの状態しかない．

2円の位置関係

2円の半径を r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$，中心間の距離を d とすると，以下のようになる．

2円の図					
2円の位置関係	離れている	外接している	交わっている	内接している	一方が他方を含む
2円の共有点の個数	0個	1個(外接)	2個	1個(内接)	0個
2円の中心間の距離 d	$\boldsymbol{r_2 + r_1 < d}$	$\boldsymbol{d = r_2 + r_1}$	$\boldsymbol{r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1}$	$\boldsymbol{d = r_2 - r_1}$	$\boldsymbol{d < r_2 - r_1}$

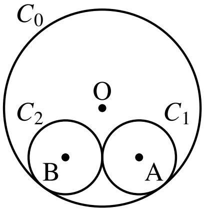
円が複数個あるときは，まず，中心間を線で結んだ図を描こう．そのうえで，上のような条件を考えるとよい．

【例題 47】　2点A, Bがあり，中心がAで半径3の円 C_1 と，中心がBで半径5の円 C_2 がある．以下のそれぞれの場合について，C_1 と C_2 の位置関係を答えよ．

1. AB = 9　　2. AB = 5　　3. AB = 2　　4. AB = 1

【練習 48：複数の円を含む図形】

半径 8 の円 C_0 に，半径 3 の円 C_1, C_2 が右図のように内接している．それぞれの中心を O，A，B とする．



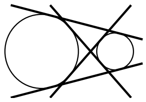
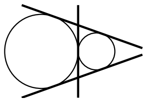
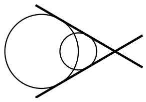
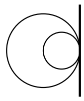
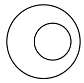
(1) AB，OA の長さをそれぞれ求めよ．

(2) 発展 円 C_0 に内接し，円 C_1, C_2 の両方に外接する円のうち，大きい方の円 C_3 の半径を求めよ．

B. 2 円の共通接線

2 つの円にどちらも接する接線を 2 円の**共通接線**と言い，2 円の位置関係によって本数が異なる．

2 円の共通接線

本数	4 本[*5]	3 本	2 本	1 本	0 本
2 円と共通接線の図					
2 円の位置関係	離れている	外接している	交わっている	内接している	一方が他方を含む
共通外接線	2 本	2 本	2 本	1 本	0 本
共通内接線	2 本	1 本	0 本	0 本	0 本

【例題 49】 2 点 A, B があり，中心が A で半径 3 の円 C_1 と，中心が B で半径 5 の円 C_2 がある．以下の場合について，共通接線の本数を答えよ．

1. AB = 9　　2. AB = 5　　3. AB = 2　　4. AB = 1

【暗記 50：共通接線の長さ】

O_1 が中心で半径 1 の円 C_1 と，O_2 が中心で半径 2 の円 C_2 があり，$O_1O_2 = 4$ とする．

1. 2 円の共通外接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ A_1，A_2 で接するとき，線分 A_1A_2 の長さを求めよ．
2. 2 円の共通内接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ B_1，B_2 で接するとき，線分 B_1B_2 の長さを求めよ．

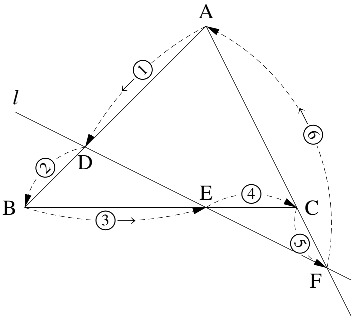
1. メネラウスの定理

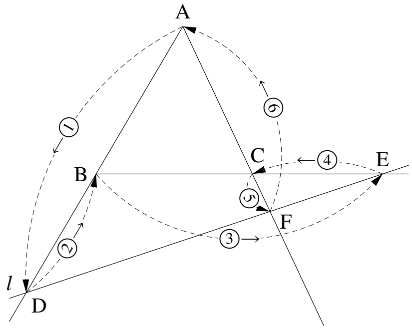
A. メネラウスの定理とは

メネラウスの定理

△ABC と直線 l を考える．
l が直線 AB，BC，CA と交わる点を D，E，F とするとき，次の式が成り立つ．

$$\underset{②}{\overset{①}{\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}}} \cdot \underset{④}{\overset{③}{\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}}} \cdot \underset{⑥}{\overset{⑤}{\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}}} = 1$$





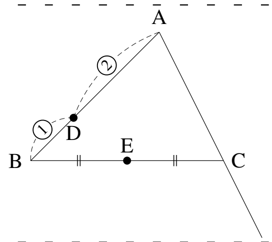
（ただし，D，E，F は △ABC の頂点に一致しないとする．）

（証明）C を通り直線 l に平行な直線と，直線 AB の交点を K とする．このとき，CK // l より
$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DK}}$，$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} = \frac{\mathrm{KD}}{\mathrm{DA}}$ となる．よって，$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} \cdot \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} \cdot \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} \cdot \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DK}} \cdot \frac{\mathrm{KD}}{\mathrm{DA}} = 1$ ■

この定理を使うには，上図の矢印のように，線でなぞって考えると良い．
このとき，線でなぞるのは，A から始めなくても，B からでも，C からでもよい．実際に，次のどちらの等式も成り立つからである．

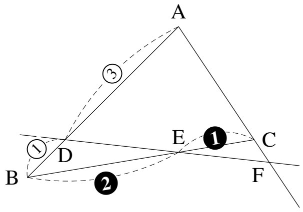
Bから始めた場合→ $\underset{④}{\overset{③}{\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}}} \cdot \underset{⑥}{\overset{⑤}{\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}}} \cdot \underset{②}{\overset{①}{\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}}} = 1$， Cから始めた場合→ $\underset{⑥}{\overset{⑤}{\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}}} \cdot \underset{②}{\overset{①}{\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}}} \cdot \underset{④}{\overset{③}{\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}}} = 1$

【例題 51】 △ABC があり，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，辺 BC の中点を E とする．直線 DE と直線 AC の交点を F とするとき，$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}$ を求めよ．
また，AC : CF を求めよ．

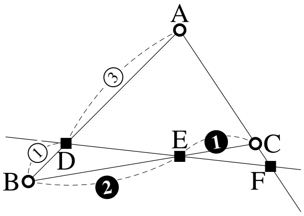


B. 三角形と１本の直線を決める

右の図にメネラウスの定理を使うと，次のように，2 通りの等式を考えることが出来る.

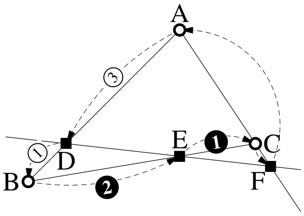


(I) △ABC と直線 DEF で考えた場合



○は三角形の頂点
■は直線と辺の交点

$\Longrightarrow$



Aから始めて
Ⓐ→■→○→■→○→■→Ⓐ

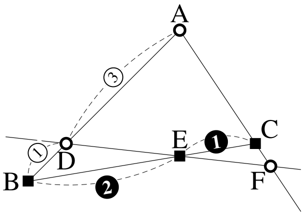
$\Longrightarrow$ $\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1$

よって，$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=\dfrac{1}{6}$ になり，

CF : FA = 1 : 6

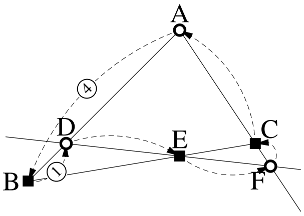
AC : CF = 5 : 1

(II) △ADF と直線 BC で考えた場合



○は三角形の頂点
■は直線と辺の交点

$\Longrightarrow$



Aから始めて
Ⓐ→■→○→■→○→■→Ⓐ

$\Longrightarrow$ $\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}\cdot\dfrac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}=1$

このように，どの三角形と直線で考えるかによって，異なる式を作ることが出来る.

・・・・ 問題を解く際は，上のことに注意して「とりあえずやってみる」とよい.

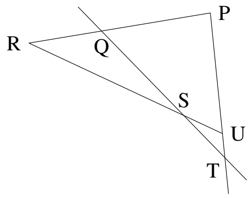
【練習 52：メネラウスの定理】

右図において，PQ : QR = 3 : 2，PU : UT = 4 : 1 である.

以下の問いに答えよ.

(1) RS : SU を求めよ.

(2) QS : ST を求めよ.



2.　チェバの定理

チェバの定理

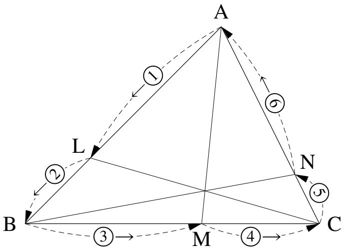
△ABC の辺 AB，BC，CA 上に L，M，N がある．ここで，直線 AM，BN，CL が 1 点で交わるならば，次の式が成り立つ．

①　③　⑤

$$\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}=1$$

②　④　⑥

（ただし，L，M，N は △ABC の頂点に一致しないとする.）

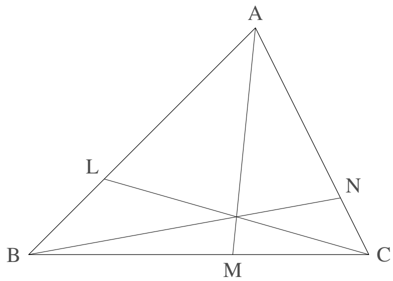


（証明）AM，BN，CL が交わる 1 点を K とする．△ABM と直線 LC についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CM}}\cdot\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{KA}}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

△AMN と直線 BN についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KM}}\cdot\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$



①，②の左辺どうし，右辺どうしを掛け合わせると

$$\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\frac{\cancel{\mathrm{BC}}}{\mathrm{CM}}\cdot\frac{\cancel{\mathrm{MK}}}{\cancel{\mathrm{KA}}}\cdot\frac{\cancel{\mathrm{AK}}}{\cancel{\mathrm{KM}}}\cdot\frac{\mathrm{MB}}{\cancel{\mathrm{BC}}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}=1 \iff \frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{CM}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}=1 \quad ■$$

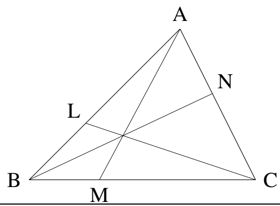
····
チェバの定理も線でなぞると考えやすい．また，A でなく，B や C から始めてもよい．

【練習 53：メネラウスの定理・チェバの定理】

右図の三角形において，L は辺 AB を 5 : 3 に内分し，N は辺 AC を 3 : 4 に内分し，線分 AM，BN，CL は 1 点 G で交わっている．

(1) BM : MC を求めよ．　　(2) AG : GM を求めよ．

(3) BG : GN を求めよ．　　(4) CG : GL を求めよ．



4.6　第４章の補足

1.　重心の別証明

【発展 54：重心と面積比〜重心についての別証明】

$\triangle$ABC の中線 BM，CN の交点を P とする．$\triangle$ABC の面積を S とすると，$\triangle$BCM = $\boxed{\text{ア}}$ である．

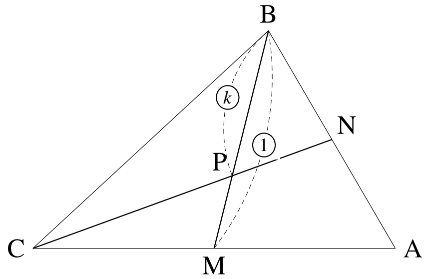
ここで，BM : BP = 1 : k とおくと，$\triangle$BPC = $\boxed{\text{イ}}$ になる．

同様にして，$\triangle$BPA = $\boxed{\text{ウ}}$ であり，N は AB の中点であるから $\triangle$BPN = $\boxed{\text{エ}}$ になる．ここで，

$$\triangle\text{BCN} = \triangle\text{BPC} + \triangle\text{BPN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{エ}}$$

になるから，k = $\boxed{\text{オ}}$ である．

よって，BP : PM = $\boxed{\text{カ}}$: $\boxed{\text{キ}}$ と分かる[*6]．



[*6] BC の中点を L，BM と AL の交点を P’ とすると，同じように BP’ : P’M = $\boxed{\text{カ}}$: $\boxed{\text{キ}}$ と分かり，P と P’ は一致し，これが重心と分かる．

2.　傍心と傍接円についての証明

【㊫㊭ 55：傍心と傍接円】

$\triangle$ABC について，$\angle$B の外角の二等分線，$\angle$C の外角の二等分線の交点を E とする．直線 AE は，$\angle$A の二等分線になることを示せ．また，E が傍心の一つになっていることを示せ．

3.　「四角形が円に内接する条件」の証明

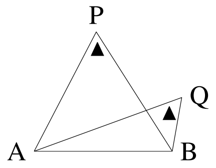
A.　「円周角の定理の逆」の証明

「円周角の定理の逆」は，次の命題の一部として示される．

円周角の定理の逆

$\triangle \mathrm{ABP}$ の外接円を K とし，P，Q は線分 AB に対して同じ側にあるとき，次が成立する．

- $\angle \mathrm{APB} < \angle \mathrm{AQB}$ ならば，Q は K の内部にある．
- $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$ ならば，Q は K の周上にある．
- $\angle \mathrm{APB} > \angle \mathrm{AQB}$ ならば，Q は K の外部にある．



直線 BQ と円周 K の交点のうち，B でない点を R とする．円と直線は最大 2 点でしか交わらないので，R はただ 1 点に定まる．また，円周角の定理より，$\angle \mathrm{ARB} = \angle \mathrm{APB}$ が成り立つ．

(I) $\angle \mathrm{APB} < \angle \mathrm{AQB}$ のとき，Q が K の内部になかったと仮定する．
もし，Q が K の周上にあるならば，Q は R と一致するので $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$ となるがこれは矛盾．
もし，Q が K の外部にあるならば，$\triangle \mathrm{QAR}$ について，$\angle \mathrm{AQB} + \angle \mathrm{QAR} = \angle \mathrm{ARB}$ となるので，$\angle \mathrm{AQB} < \angle \mathrm{ARB} = \angle \mathrm{APB}$ となって矛盾．
つまり，Q は K の内部にないという仮定は誤っているから，背理法によって，Q は K の内部にあることが示された．

(II) $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$ のとき，Q が K の周上になかったと仮定する．
もし，Q が K の内部にあるならば，$\triangle \mathrm{QAR}$ について，$\angle \mathrm{AQB} = \angle \mathrm{ARB} + \angle \mathrm{QAR}$ となるので，$\angle \mathrm{AQB} > \angle \mathrm{ARB} = \angle \mathrm{APB}$ となって矛盾．
Q が K の外部にあるならば，(I) と同様にして $\angle \mathrm{AQB} < \angle \mathrm{APB}$ となって矛盾．
つまり，背理法によって Q は K の周上にある．

(III) $\angle \mathrm{APB} > \angle \mathrm{AQB}$ のとき，Q が K の外部になかったと仮定する．
Q が K の内部にあるならば，(II) と同様にして $\angle \mathrm{AQB} > \angle \mathrm{APB}$ となって矛盾．
Q が K の周上にあるならば，(I) と同様にして $\angle \mathrm{AQB} = \angle \mathrm{APB}$ となって矛盾．
つまり，背理法によって Q は K の外部にある．

ここで，$\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$ とすれば，p.125 の【練習：円周角の定理の逆】の解答の証明になる．

B.　「四角形の対角の和の逆」の証明

B を含まない孤 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 上に，P をとる．ただし，P は直線 CD 上にないとする．
すると，$\angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{D} = 180^\circ$，$\angle \mathrm{B} =$（$\angle \mathrm{D}$ の外角）のどちらの公式も，$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{ADB}$ という条件に一致する．
ここで「円周角の定理の逆」を用いれば，D が $\triangle \mathrm{APB}$ の外接円周上にあると示されるので，「四角形の対角の和の逆」は示されたことになる．

索引