13th-note 数学II

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 II で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π，ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ，ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω

Ver1.521(2012-7-27)

目次

第4章　三角関数

身の回りには，一定時間ごとに同じことを繰り返す現象は数多く存在する．

- 波立った後の水面に浮かぶ物体の上下の揺れ
- ばねにつるされた重りの，自然な上下運動
- 音のうなり（空気の圧力（もしくは気圧）の周期的な変化）

これらの現象を解析するためには，この章で学ぶ三角関数が様々な分野で用いられる．

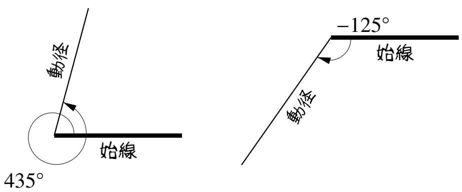
4.1　弧度法と一般角

ここでは，単位円を用い，新たな角度の表現である「弧度法」を学ぶ．

1.　角度の拡張

これまで，0° から 360° しか考えてこなかった．しかし，右のようにしてそれ以外の大きさの角を考える．

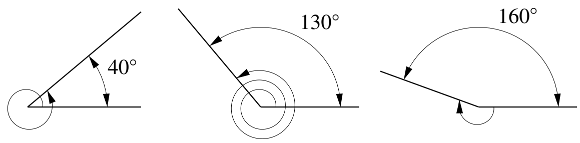
つまり，動径が 1 周以上回転すれば 360° 以上になり，反対方向（時計回り）に回転すれば，0° より小さい負の角になる．



【例題 1】

1. 右の図の角の大きさをそれぞれ答えなさい．
2. 次の大きさの角を図示しなさい．

   460°，− 420°，1200°

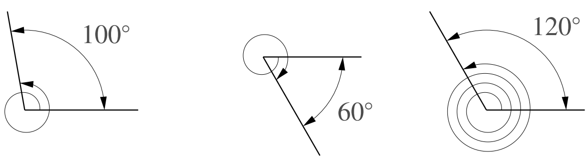


【解答】

1. 左から順に，360° + 40° = **400°**

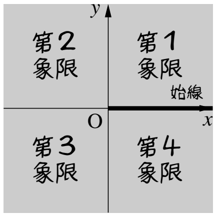
   2 × 360° + 130° = **850°**，− 360° + 160° = **−200°**

2.



◀ 460° = 360° + 100°
−420° = −360° − 60°
1200 ÷ 360 = 3 · · · 120 なので
1200° = 3 × 360° + 120°

【練習 2：角度の拡張】



(1) 右図のように，座標平面は 4 つの象限に分れていた．以下の角のとき動径は第何象限にあるか．ただし，始線は x 軸の正の部分にとる．

1) 390°　2) 700°　3) −220°　4) −500°

(2) 上の 1) から 4) のうち，500° と動径の位置が一致するものを選べ．

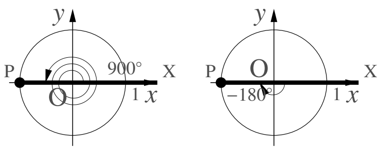
(3) 右の座標平面を用い，900°，− 180° を図示しなさい．

【解答】

(1) 1) **第 1 象限**　2) **第 4 象限**　3) **第 2 象限**　4) **第 3 象限**

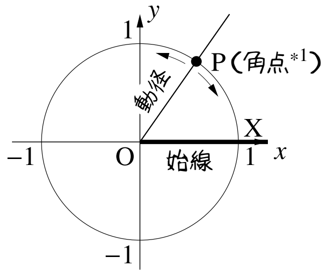
(2) 500° − (−220°) = 720° となり，ちょうど 2 周異なるから **3)**.

(3)



2. 弧度法

A. 単位円と動径・角点



数学 I で学んだように，座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を**単位円** (unit circle) という．また，P が X(1, 0) から単位円周上を動き，動径 OP を作ると考える．このとき，この動く P を**角点** (angular point) という[*1].

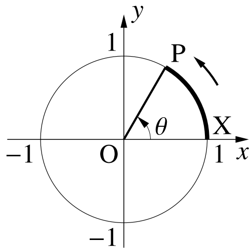
B. 弧度法とは

ラジアン (radian) という単位で角度を表す方法を**弧度法** (radian system) といい[*2]，単位円と動径・角点を用いて，次のようにして定義される．

弧度法の定義

角点 P が X(1, 0) から反時計回りに単位円周上を動くと ∠POX ができる．このとき ∠POX を

$\theta = \angle\mathrm{POX} = \overset{\frown}{\mathrm{XP}}$ の長さ (rad) = 角点 P の動いた長さ



で定義し，単位を「ラジアン (rad)」で表す．ほとんどの場合，単位「ラジアン (rad)」は省略され，書かれない[*3].

半径 1 の円の円周の長さは 2π なので，次の関係が成り立つ．

（1 周）= 2π ラジアン = 2π (rad) = 2π = 360° ……………………… ①

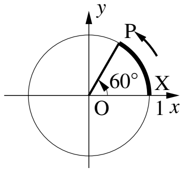
[*1] 「角点」という用語は，13th-note 数学教科書独自の用語であるので注意すること．

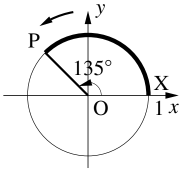
[*2] これまでの，単位「度」を用いて角度を表す方法を**度数法**という．度数法では，1 周が「360」度と決められているが，この「360」が採用された理由として，1 年が 360 日に近い（そのため，天体の星の位置が 1 日でほぼ 1 度ずれることになる）こと，360 は約数を多く持つこと，の 2 点が考えられている．紀元前から使われたきたほどに歴史の古い度数法であるが，度数法で表われた角の値はどんな図形の長さとも関係がないため，近代以降の数学を学ぶにあたっては不便が生じる．たとえば，数学 III で学ぶ三角関数の微分・積分においては，弧度法を用いないと煩雑な計算が起こる．

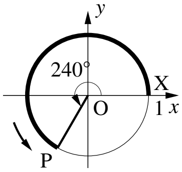
[*3] 厳密な弧度法の定義は，半径 r，弧の長さ l のおうぎ形の中心角を θ として，$\theta = \dfrac{l}{r}$ =（半径 1 あたりの弧の長さ）で与えられる．つまり，弧度法による角度の値は「2 つの長さの比」であり，通常，比には単位をつけない．これが，単位をしばしば省略

弧度法の場合，単位円において「中心角の大きさの値」と「弧の長さの値」が一致する．

【例題 3】 次の単位円において，角点 P が動いた長さを求めよ．また，∠POX の大きさを弧度法で答えよ．

1.


2.


3.


【解答】

1. 角点 P は $2\pi \times \frac{60}{360} = \frac{1}{3}\pi$ 動いた． $\angle\mathbf{POX} = \frac{1}{3}\pi\ (\mathbf{rad})$

◀ つまり，$60^\circ = \frac{1}{3}\pi$ (rad)

2. 角点 P は $2\pi \times \frac{135}{360} = \frac{3}{4}\pi$ 動いた． $\angle\mathbf{POX} = \frac{3}{4}\pi\ (\mathbf{rad})$

◀ つまり，$135^\circ = \frac{3}{4}\pi$ (rad)

3. 角点 P は $2\pi \times \frac{240}{360} = \frac{4}{3}\pi$ 動いた． $\angle\mathbf{POX} = \frac{4}{3}\pi\ (\mathbf{rad})$

◀ つまり，$240^\circ = \frac{4}{3}\pi$ (rad)

C. 度数法と弧度法との間の変換

度数法と弧度法の間の変換

度数法から弧度法へ

p.146 の式①の両辺を 360 または 2 で割って

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ (rad),　　$180^\circ = \pi$ (rad)

（例） $60^\circ = \cancel{60} \times \frac{\pi}{\cancel{180}^{\,3}} = \frac{\pi}{3}$

$240^\circ = 180^\circ + 60^\circ = \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$

弧度法から度数法へ

p.146 の式①の両辺を 2 で割って

π (rad) $= 180^\circ$

（例） $\frac{1}{4}\pi = \frac{\cancel{180^\circ}^{\,45^\circ}}{\cancel{4}} = 45^\circ$

$\frac{5}{4}\pi = \pi + \frac{1}{4}\pi = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

【例題 4】 次の角度を弧度法で表しなさい．

1. 30°　　2. 120°　　3. 150°　　4. 180°　　5. $210^\circ = 180^\circ + \boxed{\text{ア}}^\circ = \pi + \boxed{\text{イ}} = \boxed{\text{ウ}}$

6. $390^\circ = 360^\circ + \boxed{\text{エ}}^\circ = 2\pi + \boxed{\text{オ}} = \boxed{\text{カ}}$　　7. $330^\circ = 360^\circ - \boxed{\text{キ}}^\circ = 2\pi - \boxed{\text{ク}} = \boxed{\text{ケ}}$

8. $1110 \div 180$ は商$\boxed{\text{コ}}$，余り$\boxed{\text{サ}}$であるから，$1110^\circ = 180^\circ \times \boxed{\text{コ}} + \boxed{\text{サ}}^\circ = \boxed{\text{シ}}$

【解答】

1. $30^\circ = \cancel{30} \times \frac{\pi}{\cancel{180}^{\,6}} = \frac{\pi}{6}$

2. $120^\circ = \cancel{120}^{\,2} \times \frac{\pi}{\cancel{180}^{\,3}} = \frac{2}{3}\pi$

◀ $180^\circ - 60^\circ = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ と計算してもよい．

3. $150^\circ = \cancel{150}^{\,5} \times \frac{\pi}{\cancel{180}^{\,6}} = \frac{5}{6}\pi$

4. π

5. ア : **30**，イ : $\frac{\pi}{6}$，ウ : $\frac{7}{6}\pi$

6. エ : **30**，オ : $\frac{\pi}{6}$，カ : $\frac{13}{6}\pi$

7. キ : **30**，ク : $\frac{\pi}{6}$，ケ : $\frac{11}{6}\pi$

8. コ : **6**，サ : **30**，シ : $\frac{37}{6}\pi$

30°, 45°, 60° が，それぞれ $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ であることを用い，$\pi = 180^\circ$, $2\pi = 360^\circ$, $\cdots$ とどれだけ違うか考えると，度数法と弧度法の変換は考えやすい．

する理由である．このように，比によって定義されて単位が不要な数は無名数といわれる．

【例題 5】 次の角度を度数法で表しなさい.

1. $\dfrac{\pi}{3}$　　2. $\dfrac{\pi}{2}$　　3. $\dfrac{2}{3}\pi$　　4. $\dfrac{5}{6}\pi$　　5. 4π　　6. $\dfrac{7}{6}\pi = \pi + \boxed{ア} = 180° + \boxed{イ}° = \boxed{ウ}°$

7. $\dfrac{4}{3}\pi = \pi + \boxed{エ} = 180° + \boxed{オ}° = \boxed{カ}°$　　8. $\dfrac{11}{6}\pi = 2\pi - \boxed{キ} = 360° - \boxed{ク}° = \boxed{ケ}°$

9. $\dfrac{21}{4}$ を帯分数にすると $\boxed{コ}$ であるから, $\dfrac{21}{4}\pi = 5\pi + \boxed{サ} = \boxed{シ}° + \boxed{ス}° = \boxed{セ}°$

【解答】

1. $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\cancel{180°}^{60°}}{\cancel{3}} = \mathbf{60°}$

2. $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\cancel{180°}^{90°}}{\cancel{2}} = \mathbf{90°}$

3. $\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{2}{\cancel{3}} \times \cancel{180°}^{60°} = \mathbf{120°}$

4. $\dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{5}{\cancel{6}} \times \cancel{180°}^{30°} = \mathbf{150°}$

5. $4\pi = 4 \times 180° = \mathbf{720°}$

6. ア : $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$, イ : **30**, ウ : **210**

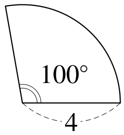
7. エ : $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$, オ : **60**, カ : **240**

8. キ : $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$, ク : **30**, ケ : **330**

9. コ : $\boldsymbol{5\dfrac{1}{4}}$, サ : $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$, シ : **900**, ス : **45**, セ : **945**

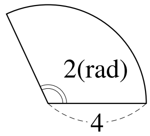
D. 弧度法とおうぎ形

たとえば, 半径 4, 中心角 100° のおうぎ形の面積は, 次のようにして計算できた.



$$4^2\pi \times \frac{100°}{360°} = \cancel{4^2}^{4} \times \frac{\cancel{100}^{10}}{\cancel{360}\,\cancel{90}^{9}} = \frac{40}{9}\pi$$

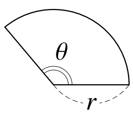
弧度法の場合, 1 周が 2π ラジアンなので, 半径 4, 中心角 2(rad) のおうぎ形の面積は次のようになる[*4].



$$4^2\pi \times \frac{2}{2\pi} = 16$$

【暗記 6 : 弧度法とおうぎ形】

$0 < \theta < 2\pi$ とする. 半径 r, 中心角 θ のおうぎ形の面積を S, 弧の長さを l とするとき, S と l を r, θ で表せ.



【解答】 半径 r の円の面積, 円周は πr^2, $2\pi r$ であるから

$$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = \boldsymbol{r\theta}, \qquad S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{2}r^2\theta}$$

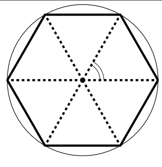
◂ l は, 半径 1, 中心角 θ のおうぎ形を中心について r 倍して, $l = \theta \times r = r\theta$ とも計算できる.

結果的に $S = \dfrac{1}{2}lr$ であるので, おうぎ形を, 底辺 l, 高さ r の三角形とみなして面積を求めることができる.

【発展 7 : 正多角形と弧度法】

次の正多角形の中心角(例として, 右図に正六角形の中心角を載せてある)の大きさを, 弧度法で答えよ.

① 正六角形　　② 正八角形　　③ 正十二角形



[*4] おうぎ形の面積に π が無いのは, 中心角の値に π が含まれないためである.

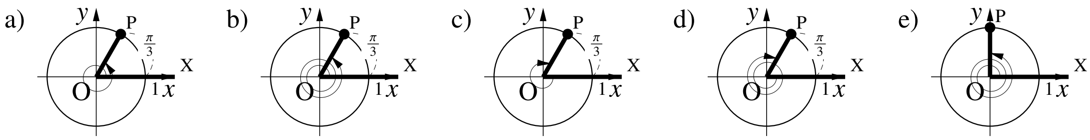
3.　一般角

A.　弧度法における角度の拡張

角点 P が 1 周以上動けば 2π より大きな角度となり，角点 P が反時計回りに動けば負の角度となる．

【例題 8】

1. 以下の単位円において，$\angle$POX を求めよ．



2. 以下の角が第何象限にあるか，答えなさい（象限は p.146) を参照）．

　a) $\dfrac{9}{4}\pi$　　b) $\dfrac{13}{4}\pi$　　c) $\dfrac{11}{3}\pi$　　d) $-\dfrac{8}{3}\pi$

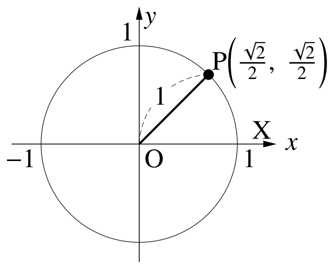
【解答】

1. a) $2\pi+\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{7}{3}\pi}$　　b) $2\cdot2\pi+\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{13}{3}\pi}$　　c) $-2\pi+\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{-\dfrac{5}{3}\pi}$

　d) $(-2)\cdot2\pi+\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{-\dfrac{11}{3}\pi}$　　e) $2\cdot2\pi+\dfrac{\pi}{2}=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}\pi}$

2. a) **第 1 象限**　　b) **第 3 象限**　　c) **第 4 象限**　　d) **第 3 象限**

B.　一般角とは



右の単位円において，$\angle$POX の大きさは

$$\cdots,\quad \frac{\pi}{4}+(-4\pi),\quad \frac{\pi}{4}+(-2\pi),\quad \frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{4}+2\pi,\quad \frac{\pi}{4}+4\pi,\quad \cdots$$

のいずれとも考えられる．そのため，

$$\angle\mathrm{POX}=\frac{\pi}{4}+2n\pi\ (n\ \text{は整数})$$

と表すことがある．このような表し方を**一般角** (general angle) とよぶ．

一般角として「$\theta+2n\pi$ (n は整数)」のように表すときは，θ の値は $0\leqq\theta<2\pi$ となるようにとる．

【例題 9】

1. $\dfrac{11}{2}\pi$ から 2π を $\boxed{\text{ア}}$ 回引くと，0 以上 2π 未満の値 $\boxed{\text{イ}}$ になる．つまり，$\dfrac{11}{2}\pi$ を一般角で表すと $\boxed{\text{ウ}}$ と書ける．
2. $-\dfrac{8}{3}\pi$ に 2π を $\boxed{\text{エ}}$ 回足すと，0 以上 2π 未満の値 $\boxed{\text{オ}}$ になる．つまり，$-\dfrac{8}{3}\pi$ を一般角で表すと $\boxed{\text{カ}}$ と書ける．

【解答】

1. ア : **2**，イ : $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\pi}$，ウ : $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\pi+2n\pi}$（$n$ は整数）
2. エ : **2**，オ : $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi}$，カ : $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi+2n\pi}$（$n$ は整数）

【練習 10：一般角】

以下の角を一般角 $\theta + 2n\pi$（n は整数，$0 \leqq \theta < 2\pi$）の形で表せ．

(1) 13π　(2) $\frac{11}{3}\pi$　(3) -5π　(4) $-\frac{7}{2}\pi$　(5) $-\frac{11}{3}\pi$

【解答】　0 から 2π の間になるよう，2π の整数倍を引いて

(1) $13\pi - 12\pi = \pi$，つまり，$\pi + 2n\pi = \boldsymbol{(2n+1)\pi}$（$\boldsymbol{n}$ **は整数**）．

(2) $\frac{11}{3}\pi - 2\pi = \frac{5}{3}\pi$，つまり，$\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi + 2n\pi}$（$\boldsymbol{n}$ **は整数**）．

0 から 2π の間になるよう，2π の整数倍を足して

(3) $-5\pi + 6\pi = \pi$，つまり，$\pi + 2n\pi = \boldsymbol{(2n+1)\pi}$（$\boldsymbol{n}$ **は整数**）．

(4) $-\frac{7}{2}\pi + 4\pi = \frac{\pi}{2}$，つまり，$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$（$\boldsymbol{n}$ **は整数**）．

(5) $-\frac{11}{3}\pi + 4\pi = \frac{\pi}{3}$，つまり，$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + 2n\pi}$（$\boldsymbol{n}$ **は整数**）．

◀ (5) は，(2) と値が異なることに注意

4.2　三角比から三角関数へ

1.　三角比の拡張

A.　任意の角での cos，sin，tan の定義

数学 I の**三角比** (trigonometric ratio) の定義において，動径（または角点）の動きを任意に許せば，自然に次の定義を得る．任意の角へ拡張された三角比は，**三角関数** (trigonometric function) とよばれる．

三角関数の定義

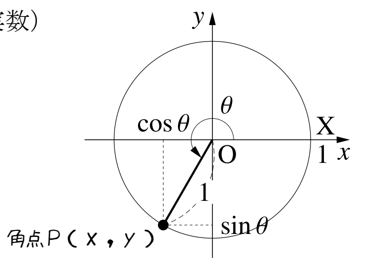
単位円周上の角点を P，X(1, 0) とする．$\angle POX = \theta$（θ は任意の実数）とするとき

$\cos\theta =$（角点 P の x 座標）

$\sin\theta =$（角点 P の y 座標）

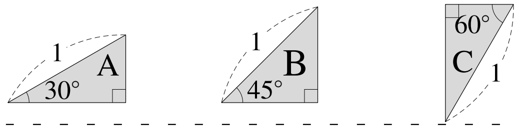
$$\tan\theta = \frac{(\text{角点 P の } y \text{ 座標})}{(\text{角点 P の } x \text{ 座標})} = (\text{動径 OP の傾き})$$

とする．ただし，角点 P の x 座標が 0 のとき，つまり $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$（$n$ は整数）のときは $\tan\theta$ は定義されない．

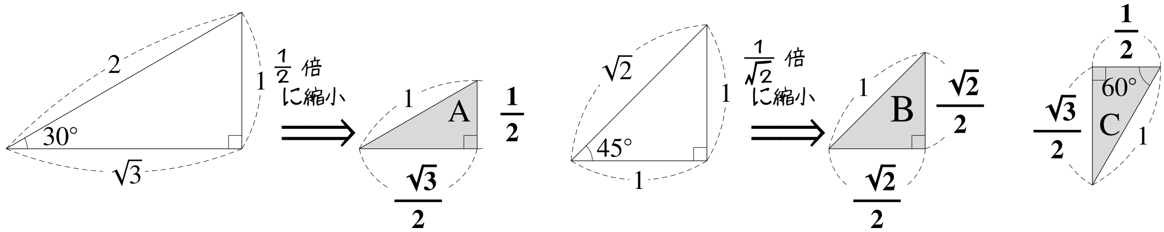


$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$，$\frac{y}{x} = \tan\theta$

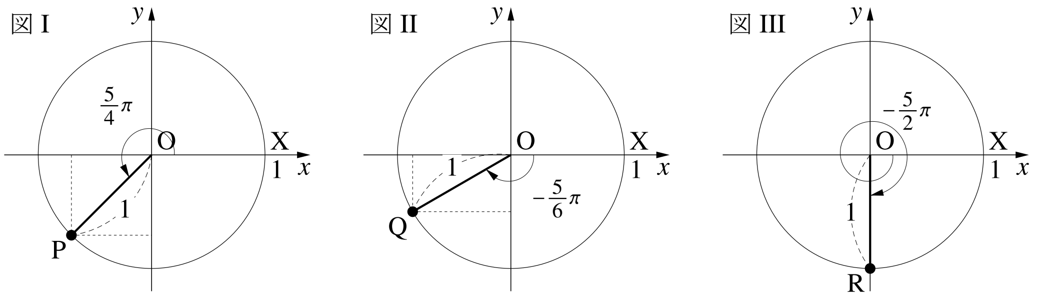
【例題 11】 右図の，斜辺が 1 の直角三角形 A, B, C について，斜辺以外の 2 辺の長さをそれぞれ求めなさい．



【解答】



【 暗記 12：一般の三角関数〜その１〜】



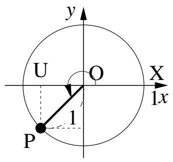
1. 図 I の角点 P の座標を求め，$\cos\frac{5}{4}\pi$，$\sin\frac{5}{4}\pi$，$\tan\frac{5}{4}\pi$[*5] の値を求めなさい．
2. 図 II の角点 Q の座標を求め，$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right), \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right), \tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$[*5] の値を求めなさい．
3. 図 III の角点 R の座標を求め，$\cos\left(-\frac{5}{2}\pi\right), \sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right), \tan\left(-\frac{5}{2}\pi\right)$ の値を求めなさい．

【解答】

1. △OPU は 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の直角三角形だから，$\mathbf{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ であるので

$$\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \tan\frac{5}{4}\pi = 1$$

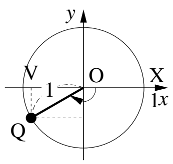
◀



2. △OQV は 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ の直角三角形だから，$\mathbf{Q}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ であるので

$$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2},\ \tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

◀



3. $\mathbf{R(0, -1)}$ であるので

$$\cos\left(-\frac{5}{2}\pi\right) = 0,\ \sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right) = -1,\ \tan\left(-\frac{5}{2}\pi\right)$$ は定義できない

[*5] 正の角度に対する三角関数では，$\cos\frac{5}{4}\pi$ のように括弧をつけないことが多い．一方，$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ のように，負の角度に対する三角関数では，必ず括弧をつける．

【暗記 13：一般の三角関数〜その２〜】

図 I

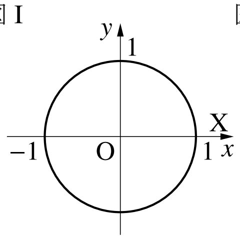


図 II

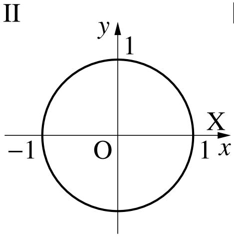


図 III

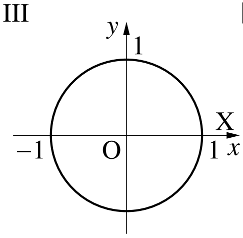
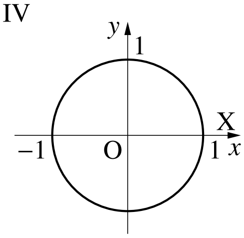


図 IV

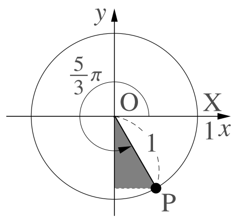


1. $\angle\mathrm{POX} = \frac{5}{3}\pi$ となる角点 P を図 I に書き込み，$\cos\frac{5}{3}\pi$，$\sin\frac{5}{3}\pi$，$\tan\frac{5}{3}\pi$ の値を求めよ．
（図に書き込む点は**およその位置**でよい，これは以下の問題でも同様である.）
2. $\angle\mathrm{QOX} = \frac{7}{6}\pi$ となる角点 Q を図 II に書き込み，$\cos\frac{7}{6}\pi$，$\sin\frac{7}{6}\pi$，$\tan\frac{7}{6}\pi$ の値を求めよ．
3. $\angle\mathrm{ROX} = \frac{23}{3}\pi$ となる角点 R を図 III に書き込み，$\cos\frac{23}{3}\pi$，$\sin\frac{23}{3}\pi$，$\tan\frac{23}{3}\pi$ の値を求めよ．
4. $\angle\mathrm{SOX} = -\frac{15}{4}\pi$ となる角点 S を図 IV に書き込み，$\cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$，$\sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$，$\tan\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$ の値を求めよ．

【解答】

1. $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であるので

$$\cos\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2},\quad \sin\frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan\frac{5}{3}\pi = -\sqrt{3}$$



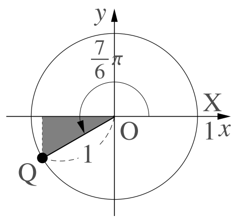
◀ 3 辺の長さが 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ の直角三角形を用いた

◀ cos は P の x 座標
sin は P の y 座標

◀ tan は OP の傾きに等しく，$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$ で求められる.

2. $\mathrm{Q}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ であるので

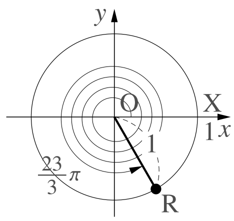
$$\cos\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2},$$
$$\tan\frac{7}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



◀ tan は OQ の傾きに等しく，$\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ で求められる.

3. $\mathrm{R}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であるので

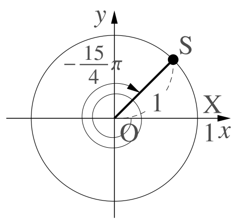
$$\cos\frac{23}{3}\pi = \frac{1}{2},\quad \sin\frac{23}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan\frac{23}{3}\pi = -\sqrt{3}$$



◀ $\frac{5}{3}\pi$ の三角関数に等しい.

4. $\mathrm{S}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ であるので

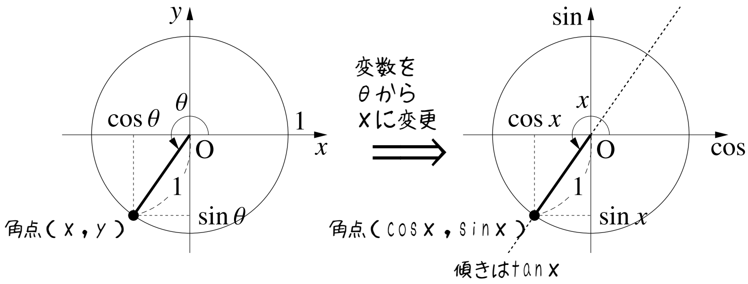
$$\cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\tan\left(-\frac{15}{4}\pi\right) = 1$$



B.　三角関数の性質

「ある値を決めれば，ただ 1 つの値を定める式」のことを，関数とよんだ（数学 I p.69）．この意味で，$\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ はいずれも（θ の）関数であり，θ の代わりに x を用いることがある．

θ の代わりに x を用いるとき，単位円の横軸を cos 軸，縦軸を sin 軸で表す[*6]ことにする．



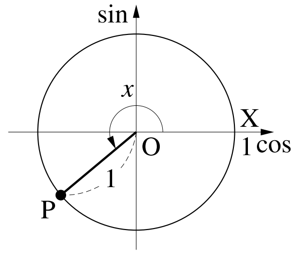
関数 cos, sin, tan の性質を以下にまとめる．

	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
値	角点の cos 座標の値	角点の sin 座標の値	動径の傾き
三角関数の定義域	x は任意の実数をとる		$\dfrac{\pi}{2} + n\pi$（n は整数）を除く任意の実数
三角関数の値域	-1 以上 1 以下の値のみをとる		$\tan x$ は任意の実数をとる
周期[*7]	x が 2π 増えるごとに同じ値をとる		x が π 増えるごとに同じ値をとる

【練習 14：角の大きさと三角関数の符号】

単位円周上に角点 P があり，$\angle\mathrm{POX} = x$ とする．

(1) P が第 3 象限にあるとき，$\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ の符号を答えよ．
(2) $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき，$\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ の符号を答えよ．
(3) $\sin x < 0$ のとき，P は第何象限にあるか．
(4) $\cos x < 0$, $\sin x < 0$ のとき，P は第何象限にあるか．
(5) $\sin x < 0$, $\tan x < 0$ のとき，P は第何象限にあるか．
(6) $\tan x$ が存在しないとき，$\cos x$ はいくつか．



【解答】

(1) P が第 3 象限にあるとき，P は cos 座標，sin 座標とも負であるので，
$\cos x < 0$, $\sin x < 0$, $\tan x > 0$.
(2) $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき，P は cos 座標が負，sin 座標が正であるので，
$\cos x < 0$, $\sin x > 0$, $\tan x < 0$.
(3) P の sin 座標が負であればよいので，**P は第 3 象限，第 4 象限にある**．
(4) P の cos 座標も sin 座標も負であればよいので，**P は第 3 象限にある**．
(5) P の sin 座標が負，OP の傾きは負であればよいので，**P は第 4 象限にある**．
(6) $\tan x$ が存在しないとき，P が $(0,\ 1)$, $(0, -1)$ のいずれかなので
$\cos x = 0$.

[*6] 横軸を x 軸で表すと，変数の x と文字がかぶってしまう．ただし，13th-note 以外のテキストでは，単位円の横軸を x 軸，縦軸を y 軸で表すことも多いので，注意すること．
[*7] 周期については，p.161 でも詳しく学ぶ．

C. 三角関数を含む方程式・不等式

【練習 15：三角関数を含む方程式】

(1) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ を満たす x をすべて求めよ．

(2) $0 \leqq x < 4\pi$ のとき，$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ を満たす x をすべて求めよ．

(3) x を任意の実数とする．$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ を満たす x をすべて求めよ．

(4) $-\pi \leqq x < \pi$ のとき，$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ を満たす x をすべて求めよ．

【解答】（角点の y 座標の値）$= -\dfrac{1}{2}$ であればよいので，求める x は，右欄外の図の $\angle$POX, $\angle$P'OX に等しい．

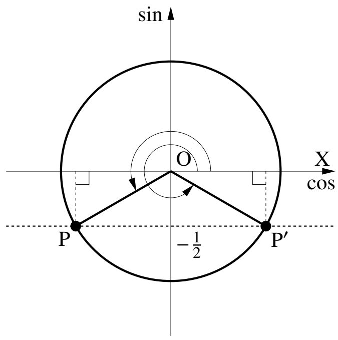
(1) $0 \leqq x < 2\pi$ では $\angle\mathrm{POX} = \dfrac{7}{6}\pi$，$\angle\mathrm{P'OX} = \dfrac{11}{6}\pi$ となる．つまり，$\boldsymbol{x = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$.

(2) $0 \leqq x < 4\pi$ では $\angle\mathrm{POX} = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi + 2\pi$，$\angle\mathrm{P'OX} = \dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi + 2\pi$ となる．つまり，$\boldsymbol{x = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{19}{6}\pi,\ \dfrac{23}{6}\pi}$.

(3) x は任意であるので，$\boldsymbol{x = \dfrac{7}{6}\pi + 2n\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi + 2n\pi}$ **（n は整数）**．

(4) $-\pi \leqq x < \pi$ では $\angle\mathrm{POX} = \dfrac{7}{6}\pi - 2\pi$，$\angle\mathrm{P'OX} = \dfrac{11}{6}\pi - 2\pi$ となる．つまり，$\boldsymbol{x = -\dfrac{5}{6}\pi,\ -\dfrac{1}{6}\pi}$.

◀



【練習 16：三角関数を含む不等式】

(1) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\cos x < \dfrac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよ．

(2) $0 \leqq x < 4\pi$ のとき，$\cos x < \dfrac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよ．

(3) x を任意の実数とする．$\cos x < \dfrac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよ．

(4) $-\pi \leqq x < \pi$ のとき，$\cos x < \dfrac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよ．

【解答】（角点の x 座標の値）$< \dfrac{1}{2}$ であればよい．そのためには，角点が右欄外の太線部分にあればよい．

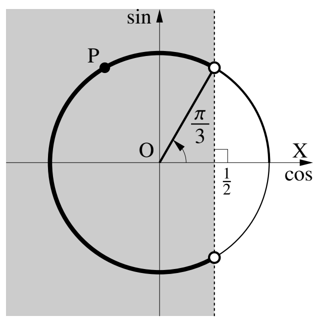
(1) $0 \leqq x < 2\pi$ では，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi}$.

(2) $0 \leqq x < 4\pi$ では，1. に加えて $\dfrac{1}{3}\pi + 2\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi + 2\pi$ も満たすので，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi < x < \dfrac{11}{3}\pi}$.

(3) x は任意であるので，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\pi + 2n\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi + 2n\pi}$**（$n$ は整数）**

(4) $-\pi \leqq x < \pi$ では $-\pi \leqq x < \dfrac{5}{3}\pi - 2\pi$，$\dfrac{1}{3}\pi < x < \pi$ となる．つまり，$\boldsymbol{-\pi \leqq x < -\dfrac{1}{3}\pi,\ \dfrac{1}{3}\pi < x < \pi}$.

◀



【発展 17：範囲をもつ変数の置き換え】

① $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，式 $2x - \dfrac{\pi}{3}$ の値がとりうる範囲を求めよ．

② $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解きなさい．

③ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解きなさい．

2. 三角関数の間の相互関係

A. 拡張された sin，cos，tan の間の関係

三角関数においても，数学 I(p.157) で学んだ三角比の相互関係が成り立つ．

（拡張された）三角関数の相互関係

任意の実数 x について，次の式が成り立つ．（分母が 0 となる場合は考えない.）

1. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$　2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$　3. $\dfrac{1}{\tan^2 x} + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$　4. $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

1., 2. は定義より明らか．2. の両辺を $\sin^2 x$，$\cos^2 x$ で割れば，3., 4. がそれぞれ導かれる．

【例題 18】

1.（a）$\cos x = \dfrac{1}{3}$ とする．$0 < x < \pi$ のとき，$\sin x$，$\tan x$ の値を求めなさい．

（b）$\cos x = \dfrac{1}{3}$ とする．$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x$，$\tan x$ の値を求めなさい．

2. $\pi < x < 2\pi$，$\tan x = 2$ のとき，$\cos x$，$\sin x$ の値を求めなさい．

【解答】

1. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \dfrac{8}{9}$ より，$\sin x = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

（a）$0 < x < \pi$ より，$\sin x > 0$ であるので

$$\boldsymbol{\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}}.\ \text{また，}\tan x = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}} \times \cancel{3}}{\frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3}} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}.$$

◀『三角関数の相互関係 1.』(p.155)

（b）$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin x = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ はどちらも適する．よって

$$\boldsymbol{(\sin x,\ \tan x) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\ 2\sqrt{2}\right),\ \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\ -2\sqrt{2}\right)}.$$

◀ $(\sin x,\ \tan x) = \left(\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \pm 2\sqrt{2}\right)$（複号同順）としてもよい．

2. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 5$ より，$\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}}$．

◀『三角関数の相互関係 4.』(p.155)

ここで，$\pi < x < 2\pi$，$\tan x > 0$ より x は第 3 象限の角であるから，$\cos x < 0$．よって，$\boldsymbol{\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$．

また，$\sin x = \tan x \cos x = 2 \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$．

◀『三角関数の相互関係 1.』(p.155)

【暗記 19：三角関数の相互関係の利用～その１～】

1. 等式 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ をどう変形すれば，等式 $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ が導かれるか.

2. $\cos^2 x - \sin^2 x = \boxed{\text{ア}}\cos^2 x - 1 = 1 - \boxed{\text{イ}}\sin^2 x$ の $\boxed{}$ に当てはまる数値を答えなさい.

【解答】

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ の両辺を $\cos^2 x$ で割ればよい．そうすれば

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

となって，導かれる.

◀ $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$ に注意.

2. まず，$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = {}_{(ア)}\underline{\mathbf{2}}\cos^2 x - 1$.

また，$\cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - {}_{(イ)}\underline{\mathbf{2}}\sin^2 x$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

【練習 20：三角関数の相互関係の利用～その２～】

(1) $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi$，$\sin x = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos x$，$\tan x$ の値を求めなさい.

(2) $-\pi < x < 0$，$\tan x = -3$ のとき，$\cos x$，$\sin x$ の値を求めなさい.

【解答】

(1) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \dfrac{9}{25}$ より，$\cos x = \pm\dfrac{3}{5}$．$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi$ より

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

$\cos x < 0$ であるから $\boldsymbol{\cos x = -\dfrac{3}{5}}$，$\tan x = \dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \boldsymbol{-\dfrac{4}{3}}$.

(2) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 10$ より，$\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{10}}$.

◀『三角関数の相互関係 4.』(p.155)

ここで，$-\pi < x < 0$，$\tan x < 0$ より x は第 4 象限の角であるから，$\cos x > 0$．よって，$\boldsymbol{\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}}$.

また，$\sin x = \tan x \cos x = (-3) \times \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$.

◀『三角関数の相互関係 1.』(p.155)

【発展 21：三角関数の相互関係の利用～その３～】

① 等式 $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 = 1$ を証明しなさい.

② 等式 $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$ を示しなさい.

【発展 22：$\cos x + \sin x$ と $\cos x - \sin x$ と $\cos x \sin x$ の関係】

① (a) $\cos x + \sin x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos x \sin x$，$\cos x - \sin x$ の値を求めなさい.

(b) さらに，$0 < x < \pi$ であるとき，$\cos x$，$\sin x$ の値を求めなさい.

② $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$，$\cos x \sin x = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos x$，$\sin x$ の値を求めなさい.

B.　三角関数を含む関数・方程式・不等式〜その１〜

【練習 23：三角関数を含む関数・方程式・不等式〜その１〜】

(1) 関数 $y = \cos^2 x - 2\sin x + 1$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ．

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin^2 x = \cos x + 1$ を解きなさい．

(3) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $2\cos^2 x + \sin x > 2$ を解きなさい．

【解答】

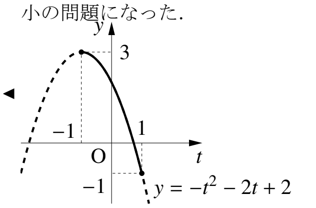
(1)
$$\begin{aligned} y &= \cos^2 x - 2\sin x + 1 \\ &= (1 - \sin^2 x) - 2\sin x + 1 \end{aligned}$$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155) を用いて $\sin x$ にそろえた．

$\sin x = t$ とおく．$0 \leqq x < 2\pi$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ なので

$$\begin{aligned} y &= -t^2 - 2t + 2 \\ &= -(t+1)^2 + 3 \ \ (-1 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$

◀ t についての 2 次関数の最大・最小の問題になった．

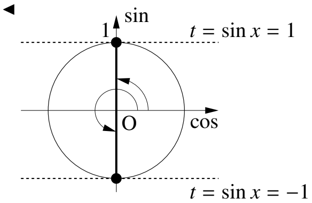


右欄外の図より，y は

$t = -1$ のとき最大値 3，$t = 1$ のとき最小値 -1

をとる．$t = \sin x$ であるので

$\sin x = -1$ のとき $x = \dfrac{3}{2}\pi$，$\sin x = 1$ のとき $x = \dfrac{1}{2}\pi$

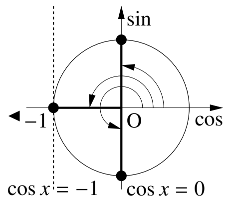


であるから

$x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最大値 3，$x = \dfrac{1}{2}\pi$ のとき最小値 -1

(2)
$$\begin{aligned} \sin^2 x = \cos x + 1 &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = \cos x + 1 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x = 0, -1 \end{aligned}$$

$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で $\cos x = 0, -1$ を満たす x は，右欄外の図より **$x = \dfrac{\pi}{2}, \ \pi, \ \dfrac{3}{2}\pi$**.

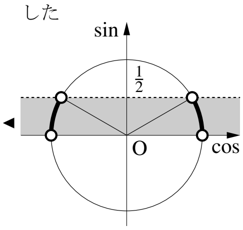


◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155) を用いて $\cos x$ にそろえた．

(3)
$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + \sin x > 2 &\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + \sin x > 2 \\ &\Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x > 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < \sin x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

◀ $\sin^2 x$ の係数を正にするため，両辺を -1 で割ってから因数分解した

$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で上の不等式を満たす x の範囲は，右欄外の図の太線部分である．すなわち



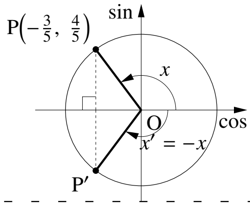
$0 < x < \dfrac{\pi}{6}, \ \dfrac{5}{6}\pi < x < \pi$

3.　$-x$，$\pi + x$，$2\pi - x$ の三角関数

この節で学ぶ式については，暗記するのではなく，図を描いて導けるようにしよう．また，後に学ぶ『三角関数の加法定理』を用いて，p.172 のように求めることもできる．

A.　$-x$ の三角関数

【例題 24】　右の単位円において，$x' = -x$，$P\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ とする．
このとき，P′ の座標と，$\cos x'$，$\sin x'$，$\tan x'$ の値をすべて求めよ．



【解答】　P と P′ は cos 軸について対称なので $\mathbf{P'\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)}$ となり

$$\cos x' = -\frac{3}{5},\quad \sin x' = -\frac{4}{5},\quad \tan x' = \frac{4}{3}$$

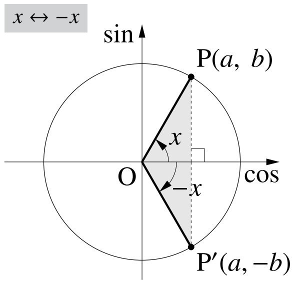
◀ $\tan x' = \dfrac{\sin x'}{\cos x'} = \dfrac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}$

$-x$ の三角関数

任意の角 x において次の等式が成り立つ．

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$

ただし，$\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ (n は整数) は考えない．



（証明）右上図のように，単位円周上に角 x の動径 OP と角 $-x$ の動径 OP′ をとると，$\triangle OPQ \equiv \triangle OP'Q$ である．よって，点 P の座標を $(a,\ b)$ とすると，点 P′ の座標は $(a, -b)$ となるから

$$\cos(-x) = a = \cos x$$
$$\sin(-x) = -b = -\sin x$$
$$\tan(-x) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} = -\tan x$$

【例題 25】　『$-x$ の三角関数』を用いて，以下の $\boxed{}$ に 0 から π までの値を入れなさい．

$\cos\left(-\frac{1}{9}\pi\right) = \cos\ \boxed{ア}$，　$\sin\left(-\frac{7}{10}\pi\right) = -\sin\ \boxed{イ}$，　$\tan\left(-\frac{3}{20}\pi\right) = -\tan\ \boxed{ウ}$

【解答】　$\cos\left(-\frac{1}{9}\pi\right) = \cos \underline{\boldsymbol{\frac{1}{9}\pi}}_{(ア)}$，　$\sin\left(-\frac{7}{10}\pi\right) = -\sin \underline{\boldsymbol{\frac{7}{10}\pi}}_{(イ)}$

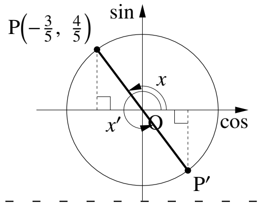
$\tan\left(-\frac{3}{20}\pi\right) = -\tan \underline{\boldsymbol{\frac{3}{20}\pi}}_{(ウ)}$

B.　$\pi + x$ の三角関数

【例題 26】

右の単位円において，$x' = x + \pi$，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ とする．

このとき，P′ の座標と，$\cos x'$，$\sin x'$，$\tan x'$ の値をすべて求めよ．



【解答】　P と P′ は原点 O について対称なので $\mathbf{P'}\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$ となり

$\cos x' = \dfrac{3}{5}$，$\sin x' = -\dfrac{4}{5}$，$\tan x' = -\dfrac{4}{3}$

$\pi + x$ の三角関数

任意の角 x において次の等式が成り立つ．

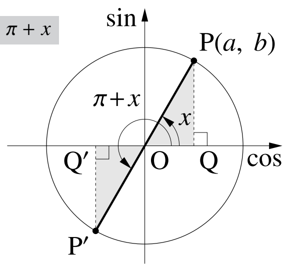
$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\tan(\pi + x) = \tan x$

ただし，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$（$n$ は整数）は考えない．

$x \leftrightarrow \pi + x$



（証明）右上図のように，単位円周上に角 x の動径 OP と角 $\pi + x$ の動径 OP′ をとると，$\triangle\mathrm{OPQ} \equiv \triangle\mathrm{OP'Q'}$ である．よって，点 P の座標を $(a,\ b)$ とすると，点 P′ の座標は $(-a, -b)$ となるから

$\cos(\pi + x) = -a = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = -b = -\sin x$

$\tan(\pi + x) = \dfrac{-b}{-a} = \dfrac{b}{a} = \tan x$

【例題 27】　『$\pi + x$ の三角関数』を用いて，以下の $\boxed{}$ に 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ までの値を入れなさい．

$\cos\dfrac{10}{9}\pi = -\cos\boxed{\text{ア}}$，　$\sin\dfrac{11}{8}\pi = -\sin\boxed{\text{イ}}$，　$\tan\dfrac{4}{3}\pi = \tan\boxed{\text{ウ}}$

【解答】　$\cos\dfrac{10}{9}\pi = \cos\left(\pi + \dfrac{1}{9}\pi\right) = -\cos\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{9}\pi}}_{(\text{ア})}$

$\sin\dfrac{11}{8}\pi = \sin\left(\pi + \dfrac{3}{8}\pi\right) = -\sin\underline{\boldsymbol{\dfrac{3}{8}\pi}}_{(\text{イ})}$

$\tan\dfrac{4}{3}\pi = \tan\left(\pi + \dfrac{1}{3}\pi\right) = \tan\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\pi}}_{(\text{ウ})}$

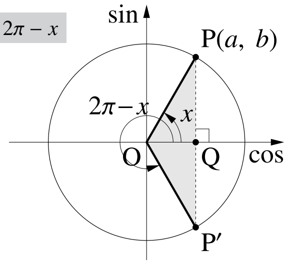
C. $2\pi - x$ の三角関数

$2\pi - x$ の三角関数

任意の角 x において次の等式が成り立つ.

$\cos(2\pi - x) = \cos x$
$\sin(2\pi - x) = -\sin x$
$\tan(2\pi - x) = -\tan x$

ただし, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$ (n は整数) は考えない.



(証明) 角 $2\pi - x$ と角 $-x$ では, ちょうど 2π だけ大きさが異なるので, 『$-x$ の三角関数』(p.158) のときと同じになることから分かる.

【練習 28 : 三角関数の値】

p.201 の表を用いて, $\cos\dfrac{13}{10}\pi$, $\sin\dfrac{16}{9}\pi$, $\tan\left(-\dfrac{1}{10}\pi\right)$ の値を求めよ.

【解答】 $\cos\dfrac{13}{10}\pi = \cos\left(\pi + \dfrac{3}{10}\pi\right) = -\cos\dfrac{3}{10}\pi = -\cos 54^\circ = \mathbf{-0.5878}$

$\sin\dfrac{16}{9}\pi = \sin\left(2\pi - \dfrac{2}{9}\pi\right) = -\sin\dfrac{2}{9}\pi = -\sin 40^\circ = \mathbf{-0.6428}$

$\tan\left(-\dfrac{1}{10}\pi\right) = -\tan\dfrac{\pi}{10} = -\tan 18^\circ = \mathbf{-0.3249}$

◀『$2\pi - x$ の三角関数』
◀『$\pi + x$ の三角関数』
◀『$-x$ の三角関数』

【発展 29 : $\dfrac{\pi}{2} + x$ の三角関数】

以下の $\boxed{}$ に当てはまる式を, 1. から 8. から選びなさい.

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \boxed{ア}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \boxed{イ}$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \boxed{ウ}$

1. $\cos x$ 2. $\sin x$ 3. $\tan x$ 4. $\dfrac{1}{\tan x}$ 5. $-\cos x$ 6. $-\sin x$ 7. $-\tan x$ 8. $-\dfrac{1}{\tan x}$

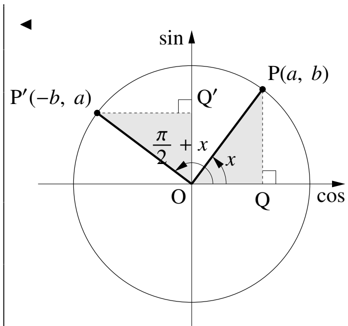
【解答】 右図のように, 単位円周上に角 x の動径 OP と角 $\dfrac{\pi}{2} + x$ の動径 OP′ をとると, $\triangle\mathrm{OPQ} \equiv \triangle\mathrm{OP'Q}$ である. よって, 点 P の座標を (a, b) とすると, 点 P′ の座標は $(-b, a)$ となるから

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -b = -\sin x$ より, **6.**(ア)

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = a = \cos x$ より, **1.**(イ)

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{\tan x}$ より, **8.**(ウ)

◀



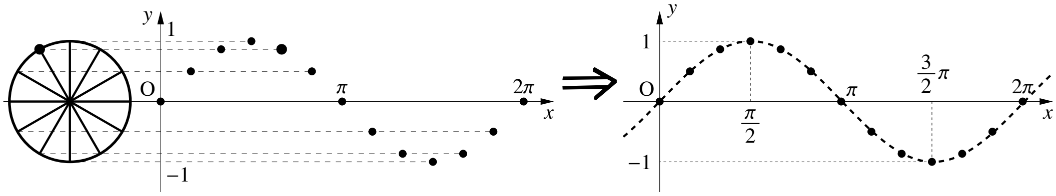
1. $y = \sin x$ のグラフ

A. $y = \sin x$ のグラフ

関数 $y = \sin x$ について，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で x と y の関係を表にすると，以下のようになる．

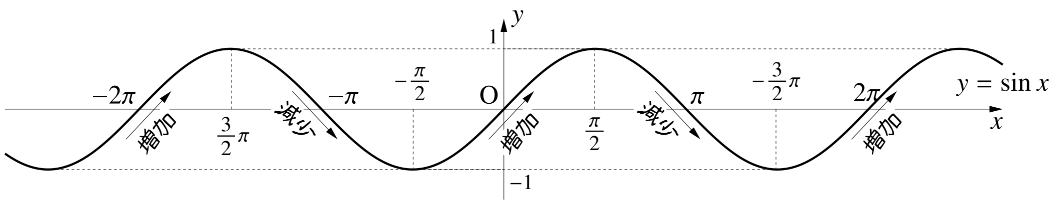
x	$\cdots$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	$\cdots$
$y(=\sin x)$	$\cdots$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\cdots$

座標平面上にとると，次のようになる．ここで描かれる曲線を，**正弦曲線** (sine curve) という．



定義域を任意の実数とすれば，上のグラフを繰り返し，次のようになる．

$y = \sin x$ のグラフの特徴



- y の値は 0 の上下を 1 の幅で動く（これを**振幅** (amplitude) という）．
- 周期が 2π の**周期関数** (periodic function) [*8]である，つまり，2π ごとに同じ値を繰り返す．
- x の値の増加に対し，y の値は増加と減少を交互に繰り返す，**正弦曲線**である．

【例題 30】

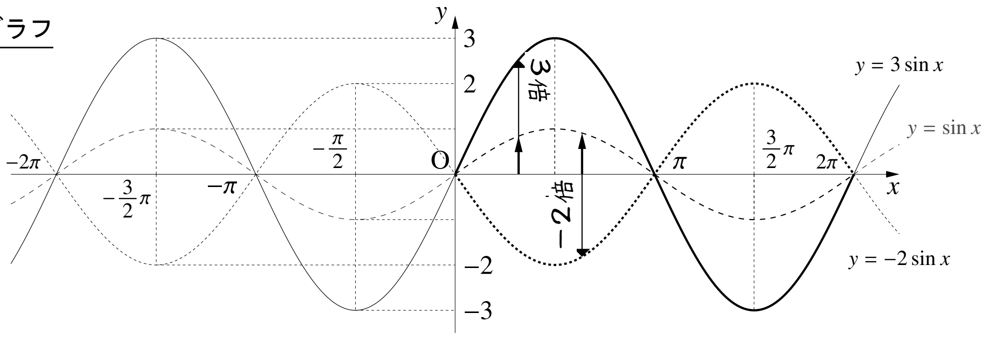
1. 次の範囲では，$y = \sin x$ のグラフは増加しているか，減少しているか，答えなさい．
   (a) $4\pi < x < \frac{9}{2}\pi$　(b) $-\frac{9}{2}\pi < x < -4\pi$　(c) $\frac{13}{2}\pi < x < \frac{15}{2}\pi$
2. $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ \boxed{ア}\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{5}{6}\pi,\ \boxed{イ}\right)$，$\mathrm{C}\left(\frac{11}{3}\pi,\ \boxed{ウ}\right)$ が $y = \sin x$ のグラフ上にあるとき，$\boxed{}$ に当てはまる値を答えよ．

【解答】

1. (a) 増加している　(b) 減少している　(c) 減少している
2. ア：$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，　イ：$\sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$，　ウ：$\sin\frac{11}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

[*8] ある正の実数 p に対して「どんな実数 x に対しても $f(x) = f(x+p)$ が成立する」とき，$f(x)$ は周期関数であるという．また，この条件を満たす実数 p のうち「最小の正の値」を，$f(x)$ の**周期** (period) という．
たとえば，$y = f(x) = \sin x$ は，$f(x) = f(x+4\pi)$，$f(x) = f(x-2\pi)$ なども成り立つが，2π のみを周期とよぶ．

B.　$y = A\sin x$ のグラフ



たとえば，$y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に 3 倍すると $y = 3\sin x$ のグラフになり，振幅は 3 になる．

また，$y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に -2 倍すると $y = -2\sin x$ のグラフになり，振幅は 2 になる．

$y = A\sin x$ のグラフの特徴

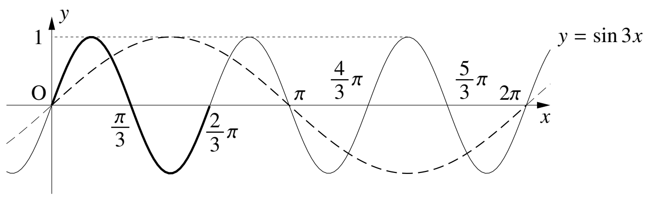
- $y = \sin x$ のグラフを，y 軸方向に A 倍したグラフである，
- 振幅は $|A|$，周期は関数 $y = \sin x$ と同じ 2π である．

C.　$y = \sin bx$ のグラフ

たとえば，関数 $y = f(x) = \sin 3x$[*9] のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを，y 軸に対して x 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍したグラフになる．これは

$$f(0) = \sin 0 = 0,\quad f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin 2\pi = 0$$
$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sin 4\pi = 0,\ f(2\pi) = \sin 6\pi = 0$$

となり，x が 0 から 2π まで増加する間に，y は 3 度同じ値を繰り返すことからも分かる．



（破線 − − − は $y = \sin x$ のグラフ）

$y = \sin bx$ のグラフ

$y = \sin bx$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを「x 軸方向に $\frac{1}{b}$ 倍」したものであり，
周期は $\frac{2\pi}{|b|}$，振幅は 1 である．

【例題 31】

1. $y = 4\sin x$ のグラフ上に A$\left(\frac{\pi}{3},\ \boxed{ア}\right)$，B$\left(\frac{5}{6}\pi,\ \boxed{イ}\right)$，C$\left(\frac{11}{3}\pi,\ \boxed{ウ}\right)$ があるとき，$\boxed{}$ に当てはまる値を答えよ．
2. $y = f(x) = \sin 2x$ のグラフを描きなさい．また，$y = f(x)$ のグラフ上に A$\left(\frac{\pi}{3},\ \boxed{エ}\right)$，B$\left(\frac{5}{6}\pi,\ \boxed{オ}\right)$，C$\left(\frac{11}{3}\pi,\ \boxed{カ}\right)$ があるとき，$\boxed{}$ に当てはまる値を答えよ．

【解答】

1. ア：$4\sin\frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2\sqrt{3}}$,　　イ：$4\sin\frac{5}{6}\pi = 4 \times \frac{1}{2} = \mathbf{2}$

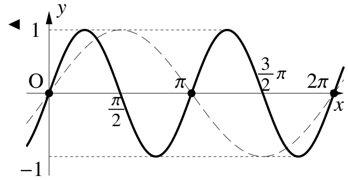
[*9] $\sin 3x$ と書いて，$\sin(3x)$ のことを意味する．つまり，角 $3x$ の sin は $\sin 3x$ と表され，普通，括弧は省略される．

ウ： $\sin\frac{11}{3}\pi = 4\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathbf{-2\sqrt{3}}$

2. 右欄外の実線のグラフが，$y = f(x) = \sin 2x$ のグラフになる．

エ： $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，　オ： $f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\frac{5}{3}\pi = \mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

カ： $f\left(\frac{11}{3}\pi\right) = \sin\frac{22}{3}\pi = \sin\frac{4}{3}\pi = \mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$



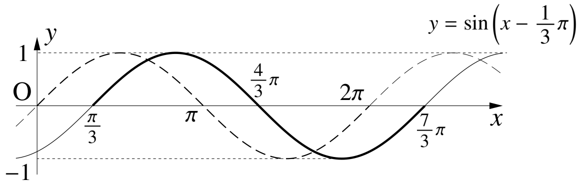
（破線 −−− は $y = \sin x$ のグラフ）

D.　$y = \sin(x - c)$ のグラフ

数学 I で学んだように，「x を $x - \frac{1}{3}\pi$ に置き換える」ことは「グラフを x 軸方向に $\frac{1}{3}\pi$ 平行移動する」ことに一致する．だから，関数 $y = f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ のグラフは，右図のようになる．このことは

$$f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sin 0 = 0,\quad f\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \sin 2\pi = 0$$

であることからも確かめられる．



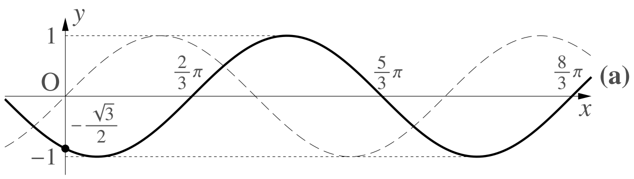
（破線 −−− は $y = \sin x$ のグラフ）

$y = \sin(x - c)$ のグラフ

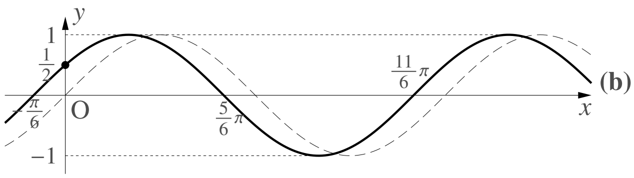
$y = \sin(x - c)$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを「x 軸方向に c 平行移動」したグラフになる．
周期と振幅はそれぞれ 2π，1 であり，$y = \sin x$ と同じになる．

【例題 32】 (a) $y = \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$，(b) $y = \sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$ のグラフを，それぞれ描きなさい．

【解答】 $y = \sin x$ を x 軸方向に $\frac{2}{3}\pi$ 平行移動して，(a) のグラフを得る．



$y = \sin x$ を x 軸方向に $-\frac{1}{6}\pi$ 平行移動して，(b) のグラフを得る．



◀ a)，b) とも破線 −−− は $y = \sin x$ のグラフ

三角関数のグラフを書くときは，「x 軸との交点」「y 軸との交点」はできるだけ書くようにしよう．また，関数が最大値，最小値をとるときの x 座標も，余裕があれば書き込むとよい．

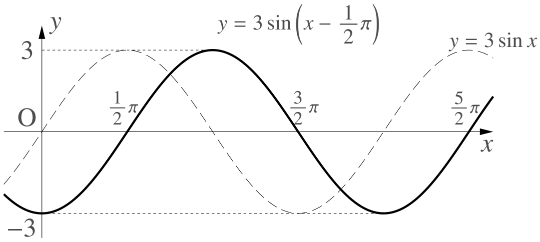
【練習 33：三角関数のグラフ〜その１〜】

以下の関数のグラフを書きなさい．また，周期と振幅を答えなさい．

(1) $y = 3\sin\left(x - \dfrac{1}{2}\pi\right)$　　(2) $y = 2\sin 4x$　　(3) $y = \sin\dfrac{x}{2}$

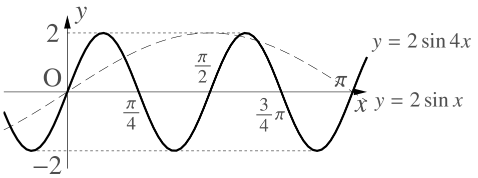
【解答】

(1) 周期は $\boldsymbol{2\pi}$
振幅は **3**



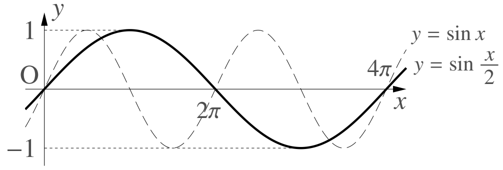
◀ 破線 - - - は $y = 3\sin x$ のグラフ

(2) 周期は
$\dfrac{2\pi}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$
振幅は **2**



◀ 破線 - - - は $y = 2\sin x$ のグラフ

(3) 周期は
$2\pi \div \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{4\pi}$
振幅は **1**

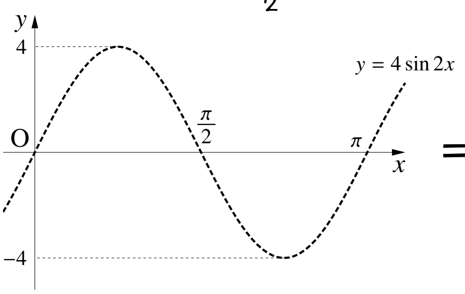


◀ 破線 - - - は $y = \sin x$ のグラフ

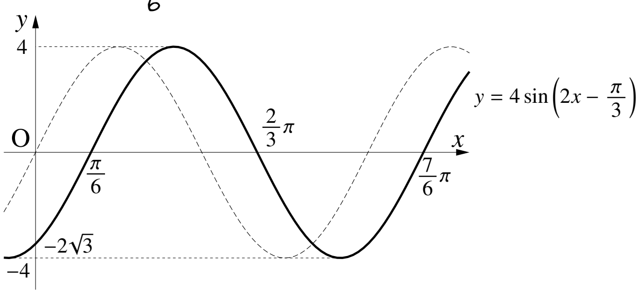
E. $y = A\sin(bx - c)$ のグラフ

たとえば，関数 $y = 4\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y = 4\sin 2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ と変形され[*10]，次のようになる．

$$y = 4\sin x \xrightarrow[\text{（x 軸方向に } \frac{1}{2} \text{ 倍）}]{\text{x を 2x に代える}} y = 4\sin 2x \xrightarrow[\text{（x 軸方向に } \frac{\pi}{6} \text{ 移動）}]{\text{x を } x - \frac{\pi}{6} \text{ に代える}} y = 4\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$



$\Rightarrow$



上のグラフは，次の順序で考えるとわかりやすい．

- $y = \sin 0$ になる $x = \dfrac{1}{6}\pi$ から 1 周期分を始めると，$x = \dfrac{1}{6}\pi + \underbrace{\pi}_{\text{周期}} = \dfrac{7}{6}\pi$ で終わる．
- 振幅は 4 で，y 切片は $4\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 4 \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$

[*10] 厳密には $y = 4\sin\left\{2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ となるが，たいてい，中括弧 { } は省略される．

$y = A\sin(bx - c) = A\sin b\left(x - \dfrac{c}{b}\right)$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを
「原点について，y 軸方向に A 倍，x 軸方向に $\dfrac{1}{b}$ 倍し，x 軸方向に $\dfrac{c}{b}$ 平行移動」
したグラフである．周期は $\dfrac{2\pi}{|b|}$，振幅は A である．

【例題 34】 $y = \sin\left(3x - \dfrac{3}{4}\pi\right)$ のグラフについて以下の問いに答えよ．

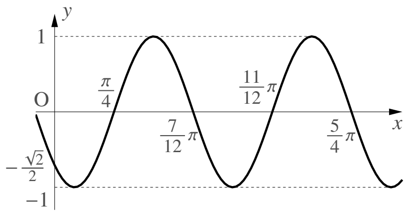
1. $y = \sin 3\left(x - \boxed{\text{ア}}\right)$ であり，周期は $\boxed{\text{イ}}$，振幅は $\boxed{\text{ウ}}$，y 切片は $\boxed{\text{エ}}$ である．
2. $\boxed{\text{ア}} \leqq x \leqq \boxed{\text{オ}}$ で 1 周期分になる．
3. $y = \sin\left(2x - \dfrac{1}{3}\pi\right)$ のグラフを描きなさい．

【解答】 ア： $\sin\left(3x - \dfrac{3}{4}\pi\right) = \sin 3\left(x - \underbrace{\boldsymbol{\frac{1}{4}\pi}}_{(\text{ア})}\right)$

イ：$\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$，ウ：**1**

エ：$\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right) = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

オ：$\dfrac{1}{4}\pi + \dfrac{2}{3}\pi = \boldsymbol{\dfrac{11}{12}\pi}$



【練習 35：三角関数のグラフ〜その２〜】

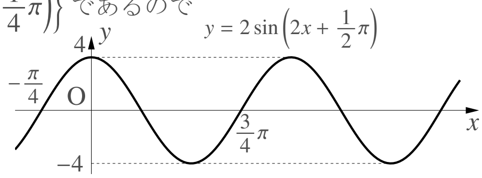
以下の関数のグラフを書きなさい．また，周期と振幅を答えなさい．

(1) $y = 4\sin\left(2x + \dfrac{1}{2}\pi\right)$　　(2) $y = 4\sin(3x - \pi)$

【解答】

(1) $y = 4\sin 2\left\{x - \left(-\dfrac{1}{4}\pi\right)\right\}$ であるので

周期は
$\dfrac{2\pi}{2} = \boldsymbol{\pi}$
振幅は 4

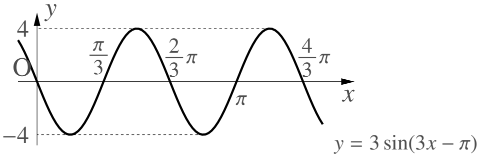


◀ ・$y = \sin 0$ になる $x = -\dfrac{1}{4}\pi$ から 1 周期分を始めると $x = -\dfrac{1}{4}\pi + \pi = \dfrac{3}{4}\pi$ で終わる

・振幅 4，y 切片 $4\sin\dfrac{1}{2}\pi = 4$

(2) $y = 4\sin 3\left(x - \dfrac{1}{3}\pi\right)$ であるので

周期は
$\dfrac{2\pi}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$
振幅は 4



◀ ・$y = \sin 0$ になる $x = \dfrac{1}{3}\pi$ から 1 周期分を始めると，$x = \dfrac{1}{3}\pi + \dfrac{2}{3}\pi = \pi$ で終わる

・振幅は 4 で，y 切片は $4\sin(-\pi) = 0$

【発展 36：三角関数のグラフ〜その３〜】

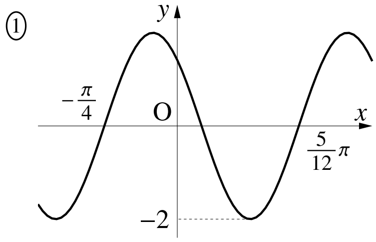
次のグラフを描きなさい．

① $y = \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)$　　② $y = \sin\left(\dfrac{3x}{2} - \pi\right)$

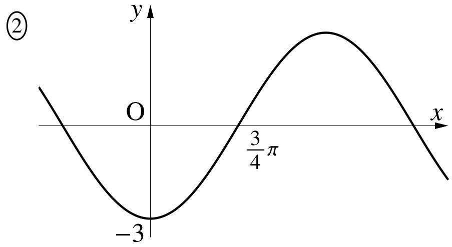
【発展 37：グラフから三角関数を求める】

以下の $y = A\sin(bx + c)$ のグラフ（$A > 0,\ b > 0,\ -\pi < c < \pi$）について，それぞれ $A,\ b,\ c$ を求めよ．

①



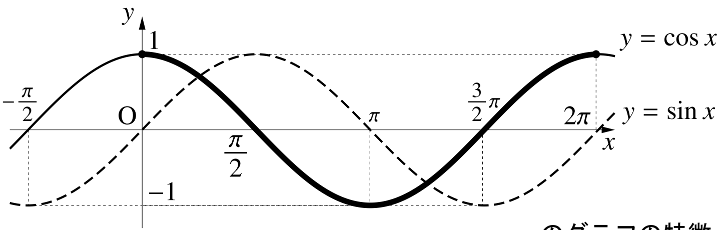
②



2.　$y = \cos x,\ \ y = \tan x$ のグラフ

A.　$y = \cos x$ のグラフ

$\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるので，$y = \cos x$ のグラフも正弦曲線になる．グラフ $y = \cos x$ の 1 周期分は，右の太線である．



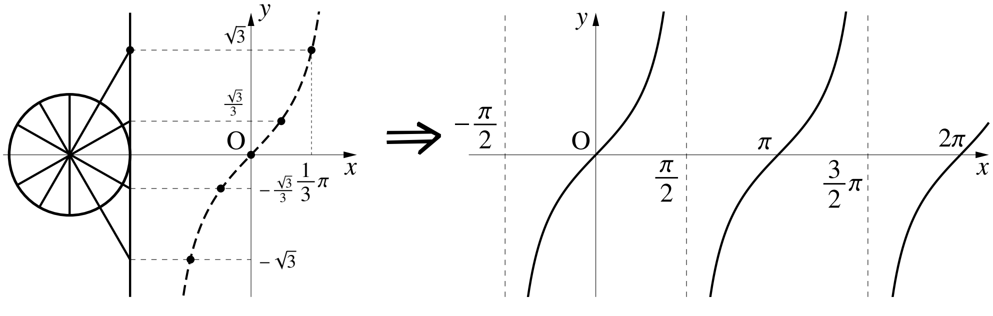
$y = \cos x$ のグラフの特徴

周期が 2π，振幅が 1 の正弦曲線であり，y 切片が 1.

B.　$y = \tan x$ のグラフ

関数 $y = \tan x$ について，$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ におけるグラフは左下のようになる．x の値が π 増えるごとに，tan の値は同じ値を取るので，$y = \tan x$ のグラフは右下のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\cdots$
$\tan x$	$\cdots$	／	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	／	$\cdots$



曲線 C がある直線 l に限りなく近づく[*11]とき，l を C の**漸近線** (asymptotic line) という．
$y = \tan x$ は直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づくので，直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ は曲線 $y = \tan x$ の漸近線になる．

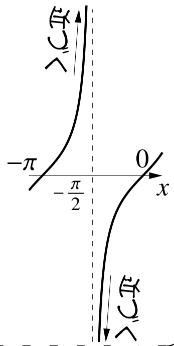
$y = \tan x$ のグラフの特徴

$x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$（$n$ は整数）が漸近線になり，周期が π の曲線である．

[*11] 「限りなく近づく」という表現は厳密性に欠ける．漸近線についての厳密な定義は，数学 III で学ぶ．

【例題 38】 以下の $\boxed{}$ に当てはまる値・文字・式を答えよ.

1. $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \boxed{ア}\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{5}{6}\pi,\ \boxed{イ}\right)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{11}{3}\pi,\ \boxed{ウ}\right)$ は $y = \tan x$ のグラフ上にある.
2. 右のグラフのように，$y = \tan x$ は，$\boxed{エ}$座標が $-\pi$ から $-\dfrac{\pi}{2}$ に向かって増加するほど，グラフの$\boxed{オ}$座標は無限大へ近づき，直線$\boxed{カ}$に限りなく近づく.
   一方，$\boxed{エ}$座標が 0 から $-\dfrac{\pi}{2}$ に向かって小さくなるにつれ，グラフの$\boxed{オ}$座標は負の無限大へ近づき，直線$\boxed{カ}$に限りなく近づく.
   それゆえ，$\boxed{カ}$は曲線 $y = \tan x$ の$\boxed{キ}$である.



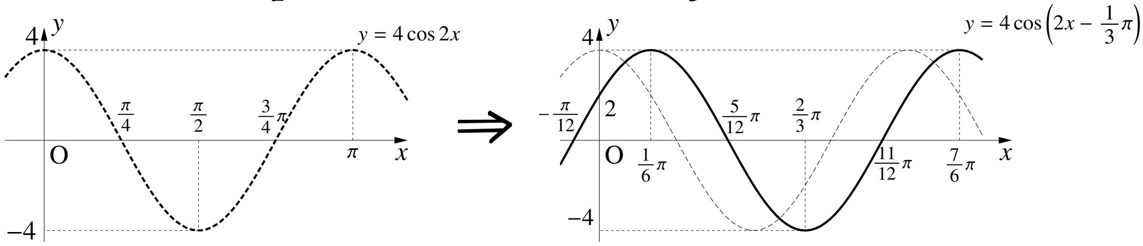
【解答】 ア : $\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, イ : $\tan\dfrac{5}{6}\pi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ウ : $\tan\dfrac{11}{3}\pi = -\sqrt{3}$, エ : x, オ : y, カ : $x = -\dfrac{\pi}{2}$, キ : 漸近線

C. $y = A\cos(bx + \alpha)$, $y = A\tan(bx + \alpha)$ のグラフ

たとえば，関数 $y = 4\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ の場合は，$y = 4\cos 2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ とも表せるので，次のことが分かる.

$$y = 4\cos x \xrightarrow[\text{（x軸方向に }\frac{1}{2}\text{ 倍）}]{\text{xを2xに代える}} y = 4\cos 2x \xrightarrow[\text{（x軸方向に }\frac{\pi}{6}\text{ 移動）}]{\text{xを }x-\frac{\pi}{6}\text{ に代える}} y = 4\cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$



上のグラフは，次の順序で考えるとわかりやすい.

- $y = \cos 0$ になる $x = \dfrac{1}{3}\pi$ から 1 周期分を始めると，$x = \dfrac{1}{3}\pi + \underbrace{\pi}_{\text{周期}} = \dfrac{4}{3}\pi$ で終わる.
- 振幅は 4 で，y 切片は $4\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 2$

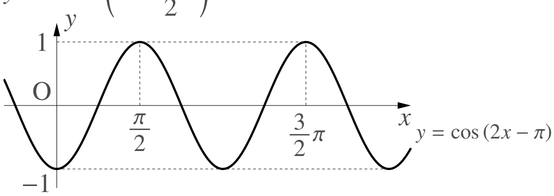
【練習 39：三角関数のグラフ〜その４〜】

以下の関数のグラフを書きなさい．漸近線があればその式を求めなさい.

(1) $y = \cos(2x - \pi)$ (2) $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

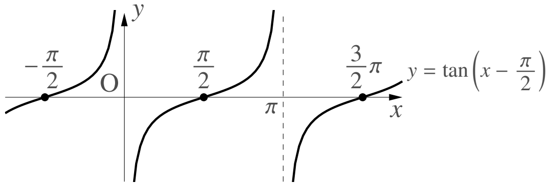
【解答】

(1) $y = \cos 2\left(x - \dfrac{1}{2}\pi\right)$ であるので



◀ ・$y = \cos 0$ は $x = \dfrac{1}{2}\pi$ のとき
・周期は π，$y = \cos 2\pi$ は $x = \dfrac{1}{2}\pi + \pi = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき
・振幅 1，y 切片 $\cos(-\pi) = -1$

(2) 漸近線は直線 $x = n\pi$（n は整数）になる．



◀ ・$y = \tan 0$ は $x = \frac{\pi}{2}$ のとき
・周期は π，$y = \tan\pi$ になるのは $x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$ のとき
・y 切片はなく，y 軸が漸近線，漸近線は，その前後に π ごとにある．

【発展 40：三角関数のグラフ〜その５〜】

以下の関数のグラフを書きなさい．漸近線があればその式を求めなさい．

① $y = 2\cos\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right)$　② $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$　③ $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

4.4　三角関数の加法定理とその応用

この節では，次のような等式が成り立つことを学ぶ．

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

上の等式において $x = \frac{\pi}{3}$ を代入すると，両辺とも 1 になることがわかる．

1.　三角関数の加法定理

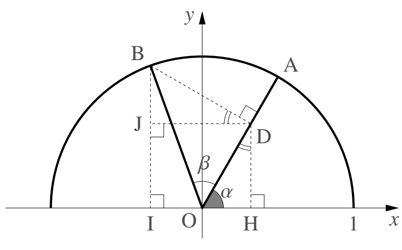
A.　cos，sin の加法定理

$\alpha+\beta$ の余弦の値である $\cos(\alpha+\beta)$，$\alpha+\beta$ の正弦の値である $\sin(\alpha+\beta)$ は，次のようにして $\cos\alpha$，$\sin\alpha$，$\cos\beta$，$\sin\beta$ のみで表すことができる．

$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ の加法定理

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,　　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

（証明）$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする．
（一般の α, β については，『$\alpha+\beta$ の三角関数（一般の場合）』
(p.190) を参照のこと）
まず，BO = 1，OD = BO $\cos\beta = \cos\beta$ であるから



$$\begin{cases} \mathrm{OD}\sin\alpha = \mathrm{DH} = \mathrm{JI} \\ \mathrm{OD}\cos\alpha = \mathrm{OH} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{JI} = \sin\alpha\cos\beta \\ \mathrm{OH} = \cos\alpha\cos\beta \end{cases}$$

である．次に $\angle\mathrm{BDJ} = \frac{\pi}{2} - \angle\mathrm{ODJ} = \angle\mathrm{ODH}$ と $\angle\mathrm{BJD} = \angle\mathrm{OHD} = \frac{\pi}{2}$ より $\triangle\mathrm{BJD} \backsim \triangle\mathrm{OHD}$ となり $\angle\mathrm{DBJ} = \alpha$ とわかるので

$$\begin{cases} \mathrm{BO}\sin\beta\cos\alpha = \mathrm{BJ} \\ \mathrm{BO}\sin\beta\sin\alpha = \mathrm{DJ} = \mathrm{HI} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{BJ} = \cos\alpha\sin\beta \\ \mathrm{HI} = \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

ここで，三角関数の定義より B$(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ であるから，次のようにして求める式を得る．

$$\cos(\alpha+\beta) = \mathrm{OH} - \mathrm{HI} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \mathrm{BJ} + \mathrm{JI} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

この公式を覚えるための語呂合わせを，一つ紹介しておく．特に，cos の加法定理に現れる $\overset{\text{マイナス}}{-}$ に注意して覚えよう．

$$\cos(\alpha+\beta) = \underbrace{\cos\alpha}_{\text{コスモス}}\ \underbrace{\cos\beta}_{\text{コスモス}}\ \underbrace{-}_{\text{毎日}}\ \underbrace{\sin\alpha}_{\text{咲いた}}\ \underbrace{\sin\beta}_{\text{咲いた}}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \underbrace{\sin\alpha}_{\text{咲いた}}\ \underbrace{\cos\beta}_{\text{コスモス}} + \underbrace{\cos\alpha}_{\text{コスモス}}\ \underbrace{\sin\beta}_{\text{咲いた}}$$

【例題 41】 $\dfrac{5}{12}\pi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$ に注意して，$\cos\dfrac{5}{12}\pi$，$\sin\dfrac{5}{12}\pi$ を計算しなさい．

【解答】

$$\cos\frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

◀ 度数法で表せば $\sin 75^\circ$ の値である．

B. tan の加法定理

tan(α + β) の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

（証明）p.155『三角形の相互関係』i) を用いれば

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

この公式を覚えるための語呂合わせを，一つ紹介しておく．

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\overbrace{\tan\alpha}^{\text{タン}}\ \overbrace{+}^{\text{プラ}}\ \overbrace{\tan\beta}^{\text{タンの}}}{1\ \underbrace{-}_{\text{マイ}}\ \underbrace{\tan\alpha\tan\beta}_{\text{タンタン}}}$$

【例題 42】 $\dfrac{5}{12}\pi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$ に注意して，$\tan\dfrac{5}{12}\pi$ を計算せよ．

【解答】

$$\tan\frac{5}{12}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$

◀『tan の加法定理』(p.169)

$$= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)} = \boldsymbol{2+\sqrt{3}}$$

◀ 分母・分子に 3 を掛けた後，分母を有理化した．

【練習 43：cos, sin の加法定理】

(1) $\dfrac{7}{12}\pi=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ に注意して，$\cos\dfrac{7}{12}\pi$，$\sin\dfrac{7}{12}\pi$ を計算せよ．

(2) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos x=\dfrac{2}{3}$ のとき，以下の値を求めなさい．

i) $\sin x$　　ii) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(3) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ とする．

このとき，$\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha+\beta)$ を計算せよ．

【解答】

(1)
$$\cos\frac{7}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

◀ 度数法で表せば $\cos 75^\circ$ の値である．

$$\sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

(2) i) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin x>0$ であるので

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

ii)
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{15}}{6}}$$

◀『cos の加法定理』(p.168)

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6}}$$

◀『sin の加法定理』(p.168)

(3) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，$\cos\alpha>0$，$\cos\beta<0$ であるので

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

以上より

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{-2\sqrt{10}-2}{9}}$$

◀『cos の加法定理』(p.168)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{-4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}}$$

◀『sin の加法定理』(p.168)

【練習 44：tan の加法定理】

(1) $\frac{7}{12}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ に注意して，$\tan\frac{7}{12}\pi$ を計算せよ．

(2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$，$\cos\alpha = \frac{2}{3}$，$\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\tan(\alpha+\beta)$ を計算せよ．

【解答】

(1)
$$\tan\frac{7}{12}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$$

◀『tan の加法定理』(p.169)

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)} = \mathbf{-2-\sqrt{3}}$$

◀ 分母を有理化した．

(2) $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$,

◀『三角関数の相互関係 4.』(p.155)

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より，$\tan\alpha > 0$ であるので $\tan\alpha = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

同様に, $1+\tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \tan^2\beta = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{3}} - 1 = 3-1 = 2$,

$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より，$\tan\beta < 0$ であるので $\tan\beta = -\sqrt{2}$.

以上より
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{10}}$$

◀『tan の加法定理』(p.169) を用いた後，分母・分子に 2 を掛けた．

$$= \frac{\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{10}\right)}{\left(2+\sqrt{10}\right)\left(2-\sqrt{10}\right)} = \mathbf{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{2}}$$

◀ 分母を有理化して整頓した．

C. 三角関数の加法定理のまとめ

三角関数の加法定理のまとめ

任意の角 α, β について，以下の式が成り立つ（複号同順）．

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,　　$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

証明は p.191 を参照のこと．

……　$\alpha+\beta$ を $\alpha-\beta$ に代えるときは，記号 $+$ を $-$ に，記号 $-$ を $+$ に代える，と覚えるとよい．

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

＋を－に
－を＋に
かえる
$\Longrightarrow$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

【練習 45：三角関数の加法定理】

α, β は鋭角，$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\sin\beta = \dfrac{1}{7}$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ．

【解答】 α, β は鋭角より，$\cos\alpha > 0$，$\cos\beta > 0$ であるので

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \qquad \tan\beta = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} = \mathbf{\frac{13}{14}}\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{7} = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{14}}\\ \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{12}}{1+\frac{1}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{13}{12}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{13}}\end{aligned}$$

◀【別解】

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{13}{14}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{13}}$$

【暗記 46：$\pi - x$ の三角関数】

$\cos(\pi-x)$，$\sin(\pi-x)$，$\tan(\pi-x)$ を，$\cos x$，$\sin x$，$\tan x$ で表せ．

【解答】

$$\cos(\pi-x) = \cos\pi\cos x + \sin\pi\sin x = \mathbf{-\cos x}$$

$$\sin(\pi-x) = \sin\pi\cos x - \cos\pi\sin x = \mathbf{\sin x}$$

$$\tan(\pi-x) = \frac{\tan\pi - \tan x}{1+\tan\pi\tan x} = \mathbf{-\tan x}$$

◀『cos の加法定理』(p.171)

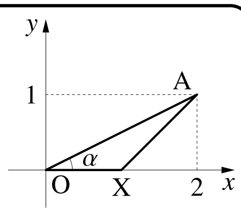
……p.158 における $2\pi - x$, $\pi + x$ などの三角関数についても同様のことができる．

【発展 47：三角関数の加法定理と平面図形】

右図のように X(1, 0) と A(2, 1) があり，$\angle\text{AOX} = \alpha$ とする．

① $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ の値を求めよ．

② $\triangle$AOX を O を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ 回転移動し $\triangle$A’OX’ になったとする．このとき，$\angle$X’OX, $\angle$A’OX を求めよ．また，X′，A′ の座標を求めよ．



2.　倍角の公式・半角の公式 — 加法定理の応用（1）

A.　倍角の公式

倍角の公式

任意の角 x について，以下の式が成り立つ．

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,\qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x,\qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

これらの式をまとめて，**倍角の公式** (formula of double angle) という．

（証明）『cos の加法定理』(p.171) において $\alpha = \beta = x$ を代入すれば，右のようにして導かれる．

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\cdot\cos x + \cos x\cdot\sin x = 2\sin x\cos x$$

$$\tan 2x = \tan(x+x) = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x\cdot\tan x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

【暗記 48：倍角の公式】

上の証明を参考に，$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ を示せ．

さらに，この式を $\cos x$ だけの式で表せ．また，$\sin x$ だけの式で表せ．

【解答】

$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ であるので $\cos 2x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = \mathbf{2\cos^2 x - 1}$

また，$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ から

$\cos 2x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = \mathbf{1 - 2\sin^2 x}$

◀『cos の加法定理』(p.171)

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

【例題 49】　$0 < x < \pi$，$\cos x = \dfrac{1}{3}$ のとき，以下の問いに答えよ．

1. $\sin x$，$\tan x$ の値を求めよ．
2. $\cos 2x$，$\sin 2x$，$\tan 2x$ の値を求めよ．

【解答】

1. $0 < x < \pi$ から $\sin x > 0$ となるので

$$\sin x = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}},\quad \tan x = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

2.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \mathbf{-\frac{7}{9}}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{1-(2\sqrt{2})^2} = \mathbf{-\frac{4\sqrt{2}}{7}}$$

◀【別解】 $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{-\frac{7}{9}}{\frac{4\sqrt{2}}{9}} = \mathbf{-\frac{4\sqrt{2}}{7}}$

【練習 50：倍角の公式】

(1) 以下の式を $\cos x$ のみの式か $\sin x$ のみの式で表し，降べきの順に整理しなさい．

(a) $\cos 2x - \sin x$　　(b) $\cos x \sin 2x$

(2) α, β は鋭角とし，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan\beta = 2$ とする．$\cos 2\alpha$，$\tan 2\beta$ を求めなさい．

(3) (2) の α, β について，$\sin 2\alpha$，$\tan 2\alpha$，$\cos 2\beta$，$\sin 2\beta$ を求めなさい．

【解答】

(1) (a)（与式）$= (1 - 2\sin^2 x) - \sin x$

$= \mathbf{-2\sin^2 x - \sin x + 1}$

(b)（与式）$= \cos x \cdot (2\sin x \cos x) = 2\sin x \cos^2 x$

$= 2\sin x(1 - \sin^2 x) = \mathbf{-2\sin^3 x + 2\sin x}$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

(2) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1 = \mathbf{-\dfrac{1}{3}}$

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} = \frac{2\cdot 2}{1 - 2^2} = \mathbf{-\frac{4}{3}}$$

(3) $0 \leqq 2\alpha < \pi$ より $\sin 2\alpha > 0$ であるので，

$\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \mathbf{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$.

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

さらに，$\tan 2\alpha = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = \mathbf{-2\sqrt{2}}$.

一方，$0 \leqq 2\beta < \pi$，$\tan 2\beta < 0$ より 2β は第 2 象限の角であり $\cos 2\beta < 0$，$\sin 2\beta > 0$．ここで

$$1 + \tan^2 2\beta = \frac{1}{\cos^2 2\beta} \iff 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 2\beta}$$

$$\iff \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 2\beta}$$

◀『三角関数の相互関係 4.』(p.155)

よって，$\cos 2\alpha = -\sqrt{\dfrac{9}{25}} = \mathbf{-\dfrac{3}{5}}$．また

$$\tan 2\beta = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} \iff \sin 2\beta = \tan 2\beta \cos 2\beta$$

$$= \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \mathbf{\frac{4}{5}}$$

◀『三角関数の相互関係 1.』(p.155)

B. 半角の公式

半角の公式

任意の角 x について，以下の式が成り立つ．

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2},\qquad \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},\qquad \tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

これらをまとめて，**半角の公式** (formula of half angle) という．

（証明）『倍角の公式』(p.173) の一つ $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ において，x に $\frac{x}{2}$ を代入すれば

$$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$$

となる．これを $\sin^2\frac{x}{2}$ について解けば

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x\quad\Leftrightarrow\quad \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$$

【暗記 51：半角の公式】

1. 上の証明を参考に，等式 $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$ を導け．
2. 等式 $\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ を示せ．

【解答】

1. 『倍角の公式』(p.173) の一つ $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ において，x に $\frac{x}{2}$ を代入して

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1\Leftrightarrow 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\quad\blacksquare$$

2. $\tan^2\frac{x}{2}=\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{1+\cos x}{2}}=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

◀ 分母・分子に 2 を掛けた

【例題 52】 以下の四角に当てはまる，x の定数倍を答えよ．

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos\boxed{\text{ア}}}{2},\quad \sin^2\boxed{\text{イ}}=\frac{1-\cos 3x}{2},\quad 2\cos^2 2x=1+\cos\boxed{\text{ウ}}$$

【解答】 アの半分が x なので**アは $2x$**，$3x$ の半分が **イ $=\frac{3}{2}x$**，

$\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$ なので **ウ $=4x$**.

【練習 53：半角の公式】

$0 < x < \pi$，$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ とする．このとき，$\cos\dfrac{x}{2}$，$\sin\dfrac{x}{2}$，$\tan\dfrac{x}{2}$ を計算せよ．

【解答】

$0 < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\dfrac{x}{2}$，$\sin\dfrac{x}{2}$，$\tan\dfrac{x}{2}$ はすべて正．

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}}$$

◀ $\sqrt{3+\sqrt{3}}$ の二重根号を外すことはできない．

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{6}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$$

【暗記 54：加法定理から導く】

三角関数の加法定理の３つの式

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

から，倍角の公式・半角の公式をすべて導きなさい．

【解答】　（導出は省略）「倍角の公式」は p.173 のように導かれ，「半角の公式」は cos の 2 倍角の公式を用いて，p.175 のように求められる．

加法定理からよい計算練習になるうえ，倍角の公式・半角の公式も自然に覚えられる．

【発展 55：tan の半角で表す】

$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，$\cos x$，$\sin x$，$\tan x$ を t の式で表せ．

C.　三角関数を含む関数・方程式・不等式〜その２〜

【練習 56：三角関数を含む関数・方程式・不等式〜その２〜】

(1) 関数 $y = -\cos 2\theta - 2\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 2\theta = \cos\theta$ を解きなさい．

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos^2\dfrac{\theta}{2} \geqq \cos\theta + 1$ を解きなさい．

【解答】

(1) $y = -\cos 2\theta - 2\sin\theta$

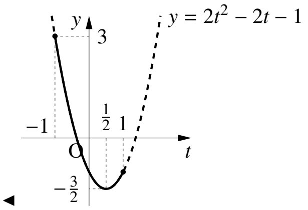
$\quad = -(1 - 2\sin^2\theta) - 2\sin\theta$

『倍角の公式』(p.173) を用いて $\sin\theta$ にそろえた.

$\sin\theta = t$ とおく．$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ なので

$y = 2t^2 - 2t - 1$

$\quad = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\ (-1 \leqq t \leqq 1)$



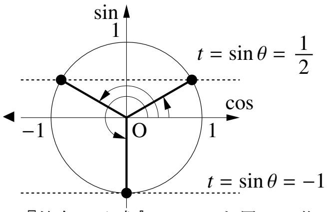
右欄外の図より，y は

$t = -1$ のとき最大値 3，$t = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{2}{3}$

をとる．$t = \sin\theta$ であるので

$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{2}\pi}$ **のとき最大値 3**

$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-\frac{2}{3}}$

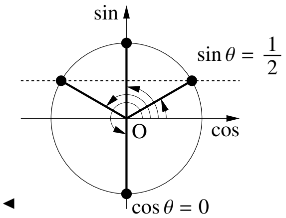


(2) $\sin 2\theta = \cos\theta \Leftrightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

$\Leftrightarrow \cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\theta = 0,\ \sin\theta = \frac{1}{2}$

『倍角の公式』(p.173) を用いて共通因数を作った.



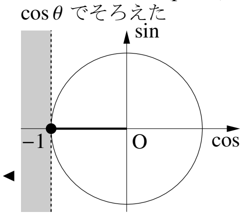
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = 0, \sin\theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ は，右欄外の図より $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi}$.

(3) $\cos^2\frac{\theta}{2} \geqq \cos\theta + 1 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos\theta}{2} \geqq \cos\theta + 1$

$\Leftrightarrow 1 + \cos\theta \geqq 2\cos\theta + 2$

$\Leftrightarrow \cos\theta \leqq -1$

『半角の公式』(p.175) を用いて $\cos\theta$ でそろえた



$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で上の不等式を満たす θ の範囲は，右欄外の図の太線部分である．すなわち $\boldsymbol{\theta = \pi}$.

【発展 57：方程式の解の個数】

$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\cos 2x$（$0 \leqq x < 2\pi$）とする.

1. この関数の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ.
2. 方程式 $f(x) = a$ が 4 つの解を持つような a の範囲，3 つの解を持つような a の値を求めよ.

【発展 58：3 倍角の公式】

1. $\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ だけの式で表せ．また，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ だけの式で表せ.
2. $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，方程式 $\cos 3\theta + 2\cos\theta = 0$ を解きなさい.

上の例題の1で求めた等式を，**3 倍角の公式**という.

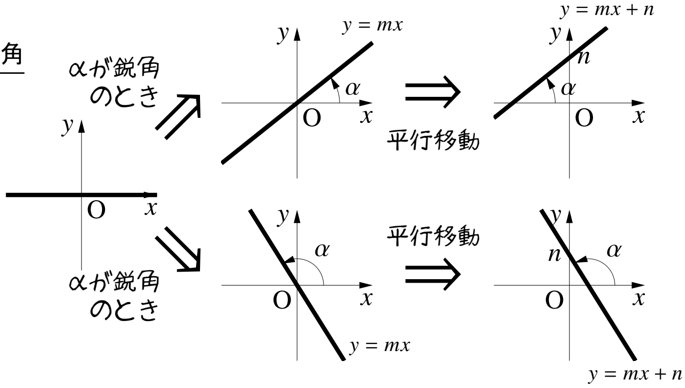
3.　2 直線のなす角 — 加法定理の応用（2）

A.　直線 $y = mx + n$ が x 軸の正の向きとなす角

x 軸を，正の向きへ α 回転させて直線 $y = mx$ になったとする．このとき，tan の定義 (p.150) から $m = \tan\alpha$ が成り立つ．

さらに，$y = mx$ を平行移動すれば，直線 $y = mx + n$ が x 軸の正の向きとなす角 α についても，$m = \tan\alpha$ が成り立つと分かる．

(p.192 も参照のこと)

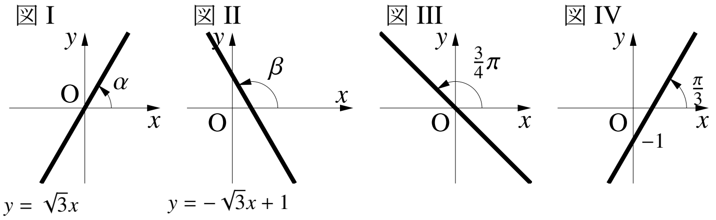


上の事実は，x 軸を α 回転させると直線 $y = (\tan\alpha)x +$ (y 切片の値) になる，とも表現できる．

【例題 59】

次の値・式を求めなさい．

1. 図 I の角 α の値
2. 図 II の角 β の値
3. 図 III の直線の式
4. 図 IV の直線の式

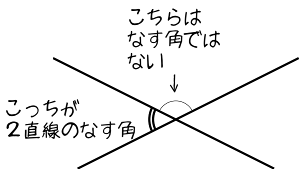


【解答】

1. $\tan\alpha = \sqrt{3}$ になるので，$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}}$.
2. $\tan\beta = -\sqrt{3}$ になるので，$\boldsymbol{\beta = \frac{2}{3}\pi}$.
3. 原点を通り，傾きが $\tan\frac{3}{4}\pi = -1$ になるので，$\boldsymbol{y = -x}$.
4. 切片が -1，傾きが $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ になるので，$\boldsymbol{y = \sqrt{3}x - 1}$.

B.　2 直線のなす角

右図のように，座標平面上の 2 直線が交わってできる角のうち，$\frac{\pi}{2}$ より小さい方の角を，「2 直線のなす角[*12]」または「2 直線のつくる角」という．



[*12] 「なす角」と「つくる角」は同じ意味である．「つくる角」と言う方が分かりやすいが，「なす角」「角をなしている」などの表現で，しばしば用いられる．

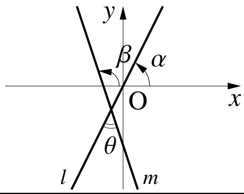
【練習 60：2 直線のなす角】

直線 $l : y = 2x$，$m : y = -3x - 2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) θ を α, β で表せ．

(2) $\tan\alpha$，$\tan\beta$ を求めよ．

(3) $\tan\theta$ を計算し，θ の値を求めよ．



【解答】

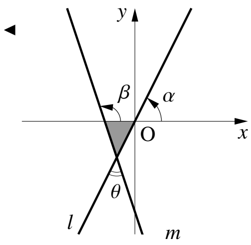
(1) 右欄外の図において，三角形の内角の和は π なので

$$\alpha + \theta + (\pi - \beta) = \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{\theta = \beta - \alpha}$$

(2) $\boldsymbol{\tan\alpha = 2}$，$\boldsymbol{\tan\beta = -3}$

(3) $\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \dfrac{-3 - 2}{1 + (-3)\cdot 2} = 1$

よって，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ である．



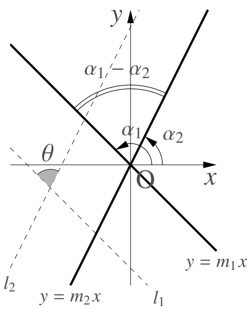
2 直線のなす角

平行・垂直でない 2 直線 $l_1 : y = m_1x + n_1$，$l_2 : y = m_2x + n_2$ のなす角 θ について

$$\tan\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right|$$（ただし，$\theta \neq \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow m_1m_2 \fallingdotseq -1 \Leftrightarrow$ 「2 直線が直交しない」とする．）

（証明）$0 < \alpha_1 < \pi$，$0 < \alpha_2 < \pi$ とし，$\tan\alpha_1 = m_1$，$\tan\alpha_2 = m_2$ とする．$0 < \alpha_1 - \alpha_2 < \dfrac{\pi}{2}$ の場合は右図のようになる（詳しくは p.192 を参照のこと）．θ は $y = m_1x$，$y = m_2x$ のなす角と等しいので，右図から $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ になる．α_1, α_2 の大小をまとめるため絶対値をつけて

$$\begin{aligned}\tan\theta &= |\tan(\alpha_1 - \alpha_2)| \\ &= \left| \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1\tan\alpha_2} \right| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right|\end{aligned}$$



【例題 61】

1. 2 直線 $y = 2x - 1$，$y = -x + 3$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．
2. 2 直線 $y = \dfrac{1}{2}x - 1$，$y = -\dfrac{2}{3}x + 3$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

【解答】

1. それぞれ傾きは 2，-1 であるので

$$\tan\theta = \left| \frac{2 - (-1)}{1 + 2\cdot(-1)} \right| = |-3| = \mathbf{3}$$

2. それぞれ傾きは $\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{2}{3}$ であるので

$$\tan\theta = \left| \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \right| = \left| \frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}} \right| = \boldsymbol{\frac{7}{4}}$$

【練習 62：2 直線のなす角〜その２〜】

直線 $y = 2x + 3$ とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ である直線の傾き m を求めよ.

【解答】 傾きが 2, m である 2 直線のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であるので

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{2-m}{1+2\cdot m}\right| \Leftrightarrow 1 = \left|\frac{2-m}{2m+1}\right|$$
$$\Leftrightarrow 2m+1 = 2-m \text{ または } 2m+1 = -(2-m)$$

それぞれ解いて，$\boldsymbol{m = \dfrac{1}{3},\ -3}$.

【発展 63：直線のなす角】

座標平面上の 3 本の直線 $y = x + 1$, $y = px$, $y = qx$（$p < q$）が交わって正三角形をつくるとき，p, q の値を求めよ.

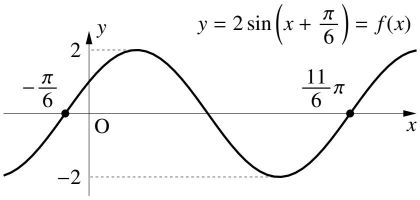
4. 三角関数の合成 — 加法定理の応用（３） — 加法定理の逆変形

A. 加法定理の逆に用いる

関数 $y = f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ のグラフを描くことは難しい[*13].
一方，$y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ に加法定理を用いれば

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin x + \cos x = f(x)$$

となるから，$y = f(x)$ のグラフは右図になる.



【例題 64】

1. 次のうち，$\sin x + \sqrt{3}\cos x$ に一致するものを選べ.
   (a) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　(b) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　(c) $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　(d) $2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$
2. 次のうち，$\sin x - \cos x$ に一致するものを選べ.
   (a) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　(b) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　(c) $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　(d) $2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

【解答】

1. (a), (c) に『三角関数の加法定理』(p.171) を用いれば
   (a) $\sin x\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$
   (c) $2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ なので **(c)**

◀ (b), (d) は符号が異なるので誤り

2. (b), (c), (d) に『三角関数の加法定理』(p.171) を用いれば
   (b) $\sin x\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos x\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x$
   (c) $\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x - \cos x$ なので **(c)**

◀ (a) は符号が異なるので明らかに誤り

◀ (d)$= \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x$

[*13] 数学 III で学ぶ微分を用いれば，描くことができる.

B.　三角関数の合成

一般に，式 $a\sin\theta + b\cos\theta$ は，次のようにして $A\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形できる．この変形のことを，**三角関数の合成** (combination of trigonometric function) という．

三角関数の合成

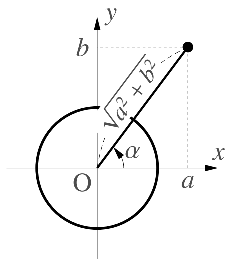
a, b, θ を実数とするとき

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

が成り立つ．ただし，α は $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，　$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす値である．

（証明）$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\times\underbrace{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\alpha} + \cos\theta\times\underbrace{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\alpha}\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

上の等式において $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，　$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす α は存在し，右の図のように α の大きさを図示できる．実際



$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$$

となっており，$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ を満たしている．

結果的には，A$(a,\ b)$, X$(0,\ 1)$ とおくと，$\angle\mathrm{AOX} = \alpha$ となっている．

【暗記 65：sin の加法定理の逆変形】

1. $\sqrt{6}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta$ について，$\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \boxed{\text{ア}}$ であり

$\sqrt{6}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta = \boxed{\text{ア}}\left(\sin\theta\times\underbrace{\boxed{\text{イ}}}_{\cos\boxed{\text{エ}}} + \cos\theta\times\underbrace{\boxed{\text{ウ}}}_{\sin\boxed{\text{エ}}}\right)$　　（ただし，$-\pi < \boxed{\text{エ}} < \pi$.）

となるので，$\sqrt{6}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta = \boxed{\text{ア}}\sin\left(\theta + \boxed{\text{エ}}\right)$ である．

2. $3\sin x - \sqrt{3}\cos x$ について，$\sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \boxed{\text{オ}}$ であり

$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \boxed{\text{オ}}\left(\sin x\times\underbrace{\boxed{\text{カ}}}_{\cos\boxed{\text{ク}}} + \cos x\times\underbrace{\boxed{\text{キ}}}_{\sin\boxed{\text{ク}}}\right)$　　（ただし，$-\pi < \boxed{\text{ク}} < \pi$.）

となるので，$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = \boxed{\text{オ}}\sin\left(x + \boxed{\text{ク}}\right)$ である．

【解答】

1. ア：$\mathbf{2\sqrt{2}}$，イ：$\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，ウ：$\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

エ：$-\pi$ から π の間で cos が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，sin が $\dfrac{1}{2}$ になるのは $\mathbf{\dfrac{\pi}{6}}$

2. オ：$\mathbf{2\sqrt{3}}$，カ：$\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，キ：$\mathbf{-\dfrac{1}{2}}$

ク：$-\pi$ から π の間で cos が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，sin が $-\dfrac{1}{2}$ になるのは $\mathbf{-\dfrac{\pi}{6}}$

【練習 66：三角関数の合成】

次の三角関数の式を合成し，$A\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形しなさい．α の値が求められないときは，α の大きさを図示しなさい．

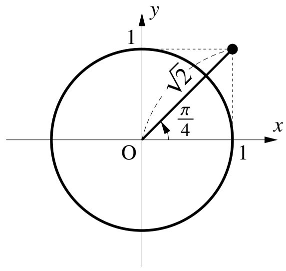
(1) $\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　　(3) $3\sin\theta-4\cos\theta$

【解答】

(1) 座標平面上に A(1, 1) をとると，$\angle\mathrm{AOX}=\dfrac{\pi}{4}$，$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$ であるので，次のように合成できる．

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\sin\theta+\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\cos\theta\right)$$

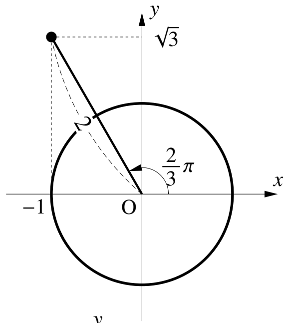
$$=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$



(2) 座標平面上に A$(-1,\sqrt{3})$ をとると，$\angle\mathrm{AOX}=\dfrac{2}{3}\pi$，$\mathrm{OA}=2$ であるので，次のように合成できる．

$$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\cos\frac{2}{3}\pi}\sin\theta+\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\frac{2}{3}\pi}\cos\theta\right)$$

$$=\boldsymbol{2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)}$$

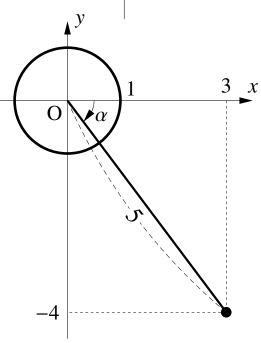


(3) 座標平面上に A(3, −4) をとると，OA = 5 である．つまり

$$3\sin\theta-4\cos\theta=5\left(\underbrace{\frac{3}{5}}_{\cos\alpha}\sin\theta\underbrace{-\frac{4}{5}}_{\sin\alpha}\cos\theta\right)$$

$$=\boldsymbol{5\sin(\theta+\alpha)}$$

ここで α は，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$ を満たす値である．



【練習 67：三角関数を含む関数・方程式・不等式〜その３〜】

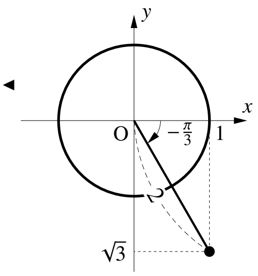
(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$ を解きなさい．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\theta + \cos\theta < 0$ を解きなさい．

(3) 関数 $y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ．

【解答】

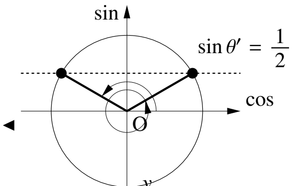
(1) 右欄外の図を書いて考えれば



$$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$$
$$\Leftrightarrow\ 2\left\{\frac{1}{2}\sin\theta + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\theta\right\} = 1$$
$$\Leftrightarrow\ 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

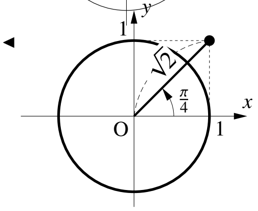
$\theta - \dfrac{\pi}{3} = \theta'$ とおくと $\sin\theta' = \dfrac{1}{2}$.

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta' < \dfrac{5}{3}\pi$ である．この範囲で $\sin\theta' = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ' は，右欄外の図より $\theta' = \dfrac{1}{6}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi$. $\theta = \theta' + \dfrac{\pi}{3}$ なので



$\boldsymbol{\theta = \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi}$.

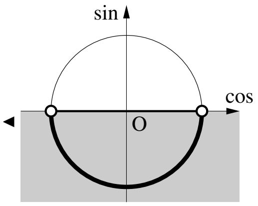
(2) 右欄外の図を書いて考えれば



$$\sin\theta + \cos\theta < 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right) < 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right) < 0$$

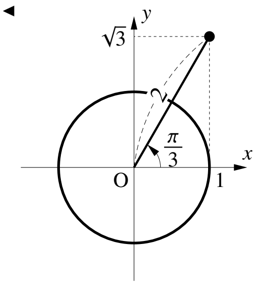
$\theta + \dfrac{1}{4}\pi = \theta'$ とおくと $\sin\theta' < 0$.

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{1}{4}\pi \leqq \theta' < \dfrac{9}{4}\pi$ なので，この範囲で上の不等式を満たす θ' は，右欄外の図の網掛け部分である．すなわち $\pi < \theta' < 2\pi$.



$\theta = \theta' - \dfrac{1}{4}\pi$ なので $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{7}{4}\pi}$.

(3) 右欄外の図を書いて考えれば



$$y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$
$$= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$\theta' = \theta + \dfrac{\pi}{3}$ とおくと，この三角関数は $y = 2\sin\theta'$.

$0 \leqq \theta < 2\theta$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta' < \dfrac{7}{3}\pi$ なので

$\theta' = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 2，$\theta' = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2.

$\theta = \theta' - \dfrac{\pi}{3}$ なので

$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$ **のとき最大値 2**，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{7}{6}\pi}$ **のとき最小値 $\boldsymbol{-2}$**

【発展 68：変数の範囲に気をつける】

関数 $f(\theta) = 2\cos\theta + \sin\theta$ について，以下の問いに答えよ．

① $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$f(\theta)$ の最大値・最小値を求めよ．

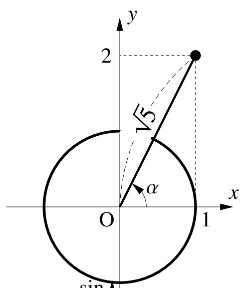
② $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$f(\theta)$ の最大値・最小値を求めよ．

③ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(\theta)$ の最大値・最小値を求めよ．

【解答】　右欄外の図を書いて考えれば

◀『三角関数の合成』(p.181)

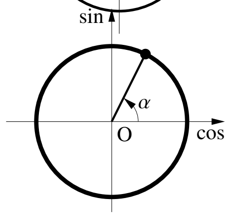
$$y = 2\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{5}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\right\}$$
$$= \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$$



（α は $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす値）

$\theta + \alpha = \theta'$ とおくと $y = \sqrt{5}\sin\theta'$

① $0 \leqq \theta < 2\pi$ より $\alpha \leqq \theta' < 2\pi + \alpha$ なので，この θ' の範囲に対応する角点の範囲は，単位円周上の任意の点である．よって．$-1 \leqq \sin\theta' \leqq 1$ であり，y は，$\theta' = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{5}$ を，$\theta' = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$ をとる．$\theta = \theta' - \alpha$ なので

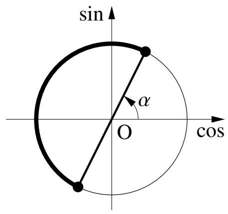


$\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ のとき，最大値 $\sqrt{5}$

$\theta = \dfrac{3}{2}\pi - \alpha$ のとき，最小値 $-\sqrt{5}$

② $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $\alpha \leqq \theta' \leqq \pi + \alpha$.

この θ' の範囲に対応する角点の範囲は，右欄外の太線部分である．つまり



$\sin\theta'$ の最大値は $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

$\sin\theta'$ の最小値は $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

である．よって $y = \sqrt{5}\sin\theta'$ は

$\theta' = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{5}$

$\theta' = \pi + \alpha$ のとき最小値 $\sqrt{5}\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = -2$

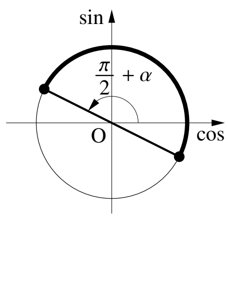
をとる．$\theta = \theta' - \alpha$ なので

$\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ のとき，最大値 $\sqrt{5}$

$\theta = \pi$ のとき，最小値 -2

③ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{2} + \alpha \leqq \theta' < \dfrac{\pi}{2} + \alpha$.

この θ' の範囲に対応する角点の範囲は，右欄外の太線部分である．つまり



$\sin\theta'$ の最大値は $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

$\sin\theta'$ の最小値は

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

である．よって $y = \sqrt{5}\sin\theta'$ は

$\theta' = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{5}$

$\theta' = -\dfrac{\pi}{2} + \alpha$ のとき最小値 $\sqrt{5} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -1$

をとる．$\theta = \theta' - \alpha$ なので

$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

$\boldsymbol{\theta = -\dfrac{\pi}{2}}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-1}$

【発展 69：$t = \sin x + \cos x$ とおく】

関数 $f(x) = \sin x \cos x - \sin x - \cos x \ \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ について以下の問いに答えなさい．

① $t = \sin x + \cos x$ とする．$f(x)$ を t の式で表せ．

② t のとりうる値を求めよ．

③ $f(x)$ の最大値・最小値と，それぞれを与える x の値を求めなさい．

5.　和と積の変換公式 — 加法定理の応用（４）

A.　積を和にする公式

$\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$ の加法定理の式を両辺それぞれ加えて，次の等式を得る．

$$\begin{array}{rl} & \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ \cdots\cdots\cdots ① \\ +) & \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \ \cdots\cdots\cdots ② \\ \hline & \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\} \ \cdots\cdots\cdots ③$$

同様に，① − ② によって，$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$ ⋯⋯⋯ ④ を得る．

【例題 70】　上の③，④を用いて，以下の $\boxed{}$ に適当な数値を入れよ．

$$\sin 2x\cos x = \frac{1}{2}(\sin \boxed{ア} + \sin \boxed{イ}),\quad \cos 3x \sin x = \frac{1}{2}(\sin \boxed{ウ} - \sin \boxed{エ})$$

【解答】

$$\sin 2x\cos x = \frac{1}{2}\{\sin(2x+x) + \sin(2x-x)\} = \frac{1}{2}(\sin \underline{\boldsymbol{3x}}_{(ア)} + \sin \underline{\boldsymbol{x}}_{(イ)})$$

$$\cos 3x\sin x = \frac{1}{2}\{\sin(3x+x) - \sin(3x-x)\} = \frac{1}{2}(\sin \underline{\boldsymbol{4x}}_{(ウ)} - \sin \underline{\boldsymbol{2x}}_{(エ)})$$

【暗記 71：積から和への変換公式】

等式 $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$，　$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$ を導け．

【解答】　$\cos(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の加法定理の式を両辺それぞれ加えて

$$\begin{array}{rl} & \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ +) & \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \end{array}$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\Leftrightarrow\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

また，両辺それぞれ引いて

$$\begin{array}{rl} & \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ -) & \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \end{array}$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$
$$\Leftrightarrow\ \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$ ■

◀ − が残ることに注意

以上の等式をまとめると，以下のようになる．

三角関数の積を和に変換する公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\},\qquad \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\},$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\},\qquad \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

……加法定理から右奥の表を作ると，上の公式のどれか 1 つから，他の 3 つを導くことができる．

$$\begin{cases}\mathbf{sin}(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \mathbf{cos}(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{cases} \Longrightarrow$$

	和	差
sin	sin cos	cos sin
cos	cos cos	−sin sin

たとえば，$\cos A\cos B$ を和にする公式が必要とする．右上の表から cos cos は「cos」の「和」とわかるので右下のように得られる．

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$
coscos ↓　　↓↓ cosの和 ↓↓
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

【練習 72：三角関数の積を和に変換する】

式 $\cos 2x\cos x$，　$\sin 3\alpha\sin 2\alpha$，　$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ から，三角関数の積をなくしなさい．

【解答】

$$\cos 2x\cos x = \frac{1}{2}\{\cos(2x+x)+\cos(2x-x)\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)}$$

$$\sin 3\alpha\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}\{\cos(3\alpha+2\alpha)-\cos(3\alpha-2\alpha)\} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}(\cos 5\alpha-\cos\alpha)}$$

◀ 符号 − がつくことに注意

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left\{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\cos 2x}$$

◀ $\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = x+\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}$

B. 和から積への変換公式

$\begin{cases} \alpha+\beta=A \cdots\cdots ① \\ \alpha-\beta=B \cdots\cdots ② \end{cases}$ とおく．①＋② と ①－② をすると，それぞれ次のようになる．

$$\begin{array}{rl} & \alpha+\beta=A \\ +) & \alpha-\beta=B \\ \hline & 2\alpha=A+B \\ \Leftrightarrow & \alpha=\dfrac{A+B}{2} \cdots\cdots ③ \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \alpha+\beta=A \\ -) & \alpha-\beta=B \\ \hline & 2\beta=A-B \\ \Leftrightarrow & \beta=\dfrac{A-B}{2} \cdots\cdots ④ \end{array}$$

「積から和への変換公式」の一つ，$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ の左辺に①，②を代入し，右辺に③，④を代入すると，次の等式を得る．

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)$$
$$\Leftrightarrow\ \sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \cdots\cdots ⑤$$

【例題 73】 上の⑤を用いて，以下の $\boxed{}$ に適当な数値を入れよ．

$\sin 3x+\sin x=2\sin\boxed{ア}\cos\boxed{イ}$, $\sin 4x+\sin 2x=2\sin\boxed{ウ}\cos\boxed{エ}$

【解答】

$$\sin 3x+\sin x=2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=2\sin\underline{\boldsymbol{2x}}_{(ア)}\cos\underline{\boldsymbol{x}}_{(イ)}$$
$$\sin 4x+\sin 2x=2\sin\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2}=2\sin\underline{\boldsymbol{3x}}_{(ウ)}\cos\underline{\boldsymbol{x}}_{(エ)}$$

⑤と同様に，「積を和に変換する公式」に $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$, $\alpha=\dfrac{A+B}{2}$, $\beta=\dfrac{A-B}{2}$ を代入して以下の公式を得る．

三角関数の和を積に変換する公式

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\qquad \sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$
$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\qquad \cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

左ページと同じように表を作ると，公式のどれか 1 つから，他の 3 つを導くことができる．

	和	差
sin	sin cos	cos sin
cos	cos cos	− sin sin

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

cosの差 ↓↓ ↓↓ −sin×sin ↓↓

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

たとえば，$\cos A-\cos B$ を積にする公式が必要とする．表から「cos」の「差」は $-\sin\sin$ とわかるので必要な公式は右奥のように得られる．

「三角関数の積を和に変換する公式」「三角関数の和を積に変換する公式」をまとめて**和と積の変換公式**（または，**和積公式**）と言う．

【練習 74：三角関数の和を積に変換する】

式 $\cos 3x + \cos x$，$\cos 4x - \cos 2x$，$\sin 2\alpha - \sin\alpha$，$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ から和や差をなくし，三角関数の積で表わしなさい．

【解答】

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = \mathbf{2\cos 2x\cos x}$$

$$\cos 4x - \cos 2x = -2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2} = \mathbf{-2\sin 3x\sin x}$$

$$\sin 2\alpha - \sin\alpha = 2\cos\frac{2\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha-\alpha}{2} = \mathbf{2\cos\frac{3}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}}{2}$$

$$= 2\cos\frac{2x}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \mathbf{\sqrt{2}\cos x}$$

◀ $\dfrac{x+\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

C. 三角関数を含む方程式・不等式〜その４〜

「三角関数の和を積に変換する公式」を用いて，三角関数を含む方程式・不等式を解こう[*14]．

【練習 75：和積公式と方程式】

方程式 $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$（$0 < x < \pi$）について，以下の $\boxed{}$ に適当な式，値を答えなさい．

$\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x\cos\boxed{ア}$ から

$$\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \times \boxed{イ} = 0$$

$$\sin 2x = \boxed{ウ} \quad \text{または} \quad \cos\boxed{ア} = \boxed{エ}$$

である．つまり，$0 < x < \pi$ において解をすべて書き出すと，$x = \boxed{オ}$ になる．

【解答】 $\sin 3x + \sin x = 2\sin\dfrac{3x+x}{2}\cos\dfrac{3x-x}{2} = 2\sin 2x\cos \underline{\mathbf{x}}_{(ア)}$ から

$$\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\left(\underline{\mathbf{2\cos x + 1}}_{(イ)}\right) = 0$$

$$\sin 2x = \underline{\mathbf{0}}_{(ウ)} \quad \text{または} \quad \cos x = \underline{\mathbf{-\frac{1}{2}}}_{(エ)}$$

$0 < x < \pi$ の範囲では，$\sin 2x = 0$ の解は $x = \dfrac{\pi}{2}$，

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$ の解は $x = \dfrac{2}{3}\pi$ なので，$x = \underline{\mathbf{\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi}}_{(オ)}$．

【発展 76：三角関数を含む方程式・不等式〜その４〜】

① $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$ を解け．

② $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos x - \cos 2x + \cos 3x < \cos 4x$ を解け．

[*14] 「三角関数の積を和に変換する公式」は，数学 III で学ぶ積分において必要となる．

【㊣㊤ **77**：三角形の角】

$\triangle$ABC の角 A，B，C について，$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ を示せ.

4.5　第4章「三角関数」の補足

1.　三角関数の加法定理のまとめ

三角関数の加法定理を，任意の角に対して証明することは，意外と難しい．加法定理の証明には図形的な要素が必要とされる[*15]が，α, β が鋭角なのか，鈍角なのか，π よりも大きいのか，などで図が大きく異なるため，場合分けがたくさん必要になってしまう．結局，もっとも汎用性の高いベクトルが，加法定理の証明には適している．

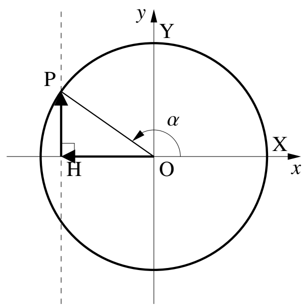
A.　$\alpha+\beta$ の三角関数（一般の場合）の証明

$\alpha+\beta$ の三角関数（一般の場合）

任意の角 α, β について，以下の式が成り立つ．

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,　　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

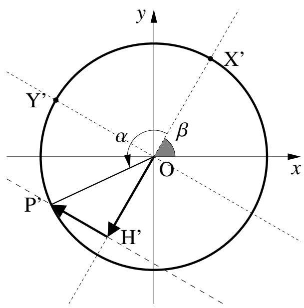
（証明）P$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，O$(0,\ 0)$，X$(1,\ 0)$，Y$(0,\ 1)$，P を通り y 軸に平行な直線と x 軸の交点を H とする．



まず，三角関数の定義を角 α に用いると，次が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\cos\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OX}},\quad \overrightarrow{\mathrm{HP}}=(\sin\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OY}} \quad\cdots\cdots ①$$

次に，この図を，原点を中心にして反時計回りに β 回転させる．この結果，X は X'，Y は Y'，H は H'，P は P' になったとする．三角関数の定義から



$$\overrightarrow{\mathrm{OX'}}=(\cos\beta,\ \sin\beta),\quad \overrightarrow{\mathrm{OY'}}=\left(\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad\cdots\cdots ②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta)) \quad\cdots\cdots ③$$

である．ここで，原点を中心に回転しても①は保たれて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=(\cos\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OX'}},\quad \overrightarrow{\mathrm{H'P'}}=(\sin\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OY'}} \quad\cdots\cdots ④$$

が成り立つ．ここで，②，④から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH'}}+\overrightarrow{\mathrm{H'P'}}=(\cos\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OX'}}+(\sin\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OY'}}=(\cos\alpha\cos\beta,\ \cos\alpha\sin\beta)+(-\sin\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\cos\beta)$$

これと，③を合わせれば，次の等式を得る．

$$(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)$$

1 番目の成分のみを比べて cos の加法定理を，2 番目の成分を比べて sin の加法定理を得る．

数学 III（旧課程では数学 C）で学ぶ極座標の考えを用いている（ただし，極座標を用いることはしない方がよい．$\cos\alpha$，$\sin\alpha$ などの正負によって場合分けが必要になってしまう）．

[*15] 高校数学においては，そもそも cos, sin, tan の定義が図形的であるため

B. $\alpha-\beta$ の三角関数

【暗記 78：$\alpha-\beta$ の三角関数】

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\{\alpha+(-\beta)\}$ から

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

を導け．また，以下の等式も証明しなさい．

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,\qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

【解答】

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\{\alpha+(-\beta)\}\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

◀『三角関数の加法定理』(p.168)

◀『$-x$ の三角関数』(p.158)

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos\{\alpha+(-\beta)\}\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

◀『三角関数の加法定理』(p.168)

◀『$-x$ の三角関数』(p.158)

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\tan\{\alpha+(-\beta)\}=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

◀『三角関数の加法定理』(p.169)

◀『$-x$ の三角関数』(p.158)

2.　2直線のなす角について

A.　「x 軸の正の向きとなす角」と「x 軸となす角」のちがい (p.178)

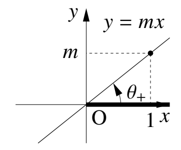
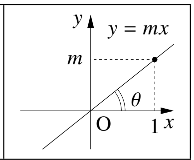
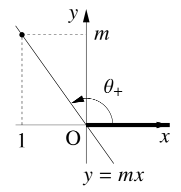
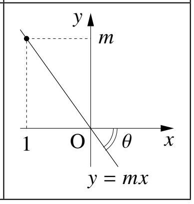
「直線が x 軸の正の向きとなす角」は「直線」が「x 軸の正の向き」と正の向きになす角を表わし，0 から π までの値をとる．

一方，「x 軸となす角」は 0 から $\frac{\pi}{2}$ までの値をとる．

具体的に，直線 $y = mx$ の場合で考えてみよう．

$m > 0$ のときは，「x 軸の正の向きとなす角 θ_+」と「x 軸となす角 θ」は同じ角を指す．また，$\tan\theta_+ = \tan\theta = |m|$ が成り立つ．

$m < 0$ のときは，「x 軸の正の向きとなす角 θ_+」と「x 軸となす角 θ」は異なり，$\theta_+ = \pi - \theta$ である．そのため，$\tan\theta_+ = m$ であるが，$\tan\theta = |m|$ となる．

	x 軸の正の向きとなす角	x 軸となす角
$m > 0$		
$m < 0$		

「x 軸の正の向きとなす角」と「x 軸となす角」

「直線 $y = mx$ が x 軸の正の向きとなす角 θ_+」については $\tan\theta_+ = m$ が成り立つ．
一方，「直線 $y = mx$ が x 軸となす角 θ」については $\tan\theta = |m|$ が成り立つ．

B.　「2 直線のなす角」の公式について

p.192 でみた公式の証明を，すべての場合に分けて行うと，次のようになる．

2 直線のなす角

平行・垂直でない 2 直線 $l_1 : y = m_1x + n_1$，$l_2 : y = m_2x + n_2$ のなす角 θ について

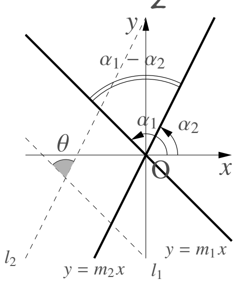
$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right| \quad \left(\text{ただし，}\theta \neq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow m_1m_2 \neq -1 \Leftrightarrow \text{「2 直線が直交しない」とする．}\right)$$

（証明）$0 < \alpha_1 < \pi$, $0 < \alpha_2 < \pi$，$\tan\alpha_1 = m_1$，$\tan\alpha_2 = m_2$ とする．$\alpha_1 > \alpha_2$ としても一般性を失わない．

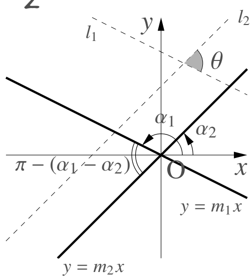
$0 < \alpha_1 - \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ の場合は左側の図のようになる．θ は $y = m_1x$, $y = m_2x$ のなす角と等しく，$\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ になる．$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ に注意すると次が成り立つ．

$$\tan\theta = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = |\tan(\alpha_1 - \alpha_2)|$$

$\alpha_1 - \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ の場合



$\frac{\pi}{2} < \alpha_1 - \alpha_2$ の場合

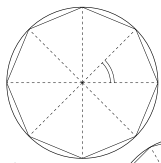


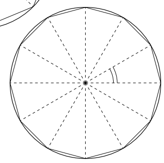
$\frac{\pi}{2} < \alpha_1 - \alpha_2 < \pi$ の場合は右側の図のようになり，$\theta = \pi - (\alpha_1 - \alpha_2)$ になる．$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) < 0$ に注意すると次が成り立つ．

$$\tan\theta = \tan\{\pi - (\alpha_1 - \alpha_2)\} = -\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = |\tan(\alpha_1 - \alpha_2)|$$

つまり，いずれの場合も $\tan\theta = |\tan(\alpha_1 - \alpha_2)| = \left|\frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1\tan\alpha_2}\right| = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$ が成り立つ．

【発展：正多角形と弧度法】(p.148)





① 中心角が 6 つ集まって，1 周，つまり 2π になるので，中心角 1 つの大きさは $2\pi \div 6 = \dfrac{\pi}{3}$

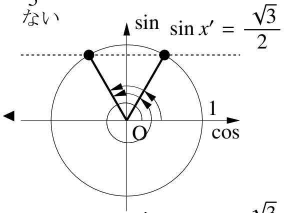
② 2π を 8 等分すればよいので，$2\pi \div 8 = \dfrac{\pi}{4}$ ◀

③ 2π を 12 等分すればよいので，$2\pi \div 12 = \dfrac{\pi}{6}$ ◀

【発展：範囲をもつ変数の置き換え】(p.155)

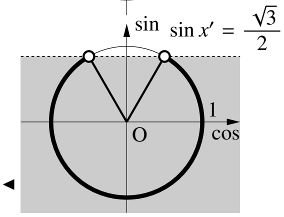
①
$$0 \leqq x < 2\pi \iff 0 \leqq 2x < 4\pi$$
◀ 2 倍しても大小関係は変わらない
$$\iff 0-\frac{\pi}{3} \leqq 2x-\frac{\pi}{3} < 4\pi-\frac{\pi}{3}$$
◀ $\dfrac{\pi}{3}$ を引いても大小関係は変わらない

より $\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{3} \leqq 2x-\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{11}{3}\pi}$ と分かる．



② $x' = 2x-\dfrac{\pi}{3}$ とおいて $\sin x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解く．①より $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x' < \dfrac{11}{3}\pi$ なので，右欄外の図より $x' = \dfrac{1}{3}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi$ となる．$x = \dfrac{x'}{2}+\dfrac{\pi}{6}$ であるので ◀

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi}$$



③ $x' = 2x-\dfrac{\pi}{3}$ とおいて $\sin x' < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解く．①より $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x' < \dfrac{11}{3}\pi$ なので

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x' < \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi < x' < \frac{7}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi < x' < \frac{11}{3}\pi$$
◀

となる．$x' = 2x-\dfrac{\pi}{3}$ を代入して x について解けば

◀ たとえば
$$\frac{2}{3}\pi < 2x-\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$
$$\iff \pi < 2x < \frac{8}{3}\pi \iff \frac{\pi}{2} < x < \frac{4}{3}\pi$$

$$\boldsymbol{0 \leqq x < \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi}$$

【発展：三角関数の相互関係の利用〜その３〜】(p.156)

①
$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \left(\sin^2\alpha\cos^2\beta + \cancel{2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta} + \cos^2\alpha\sin^2\beta\right)\\ &\quad + \left(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \cancel{2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta} + \sin^2\alpha\sin^2\beta\right)\\ &= \left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\cos^2\beta + \left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\sin^2\beta\\ &= \cos^2\beta+\sin^2\beta = 1 = (\text{右辺}) \quad ■\end{aligned}$$

◀ $2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta$ と $2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta$ は，掛け算の順番が違うだけ

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155) を 2 回用いた

② 分母・分子に $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ を用いれば

◀『三角関数の相互関係 1.』(p.155)

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \quad ■$$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155) を 2 回用いた

【発展：cos$x$+ sin$x$ と cos$x$− sin$x$ と cos$x$ sin$x$ の関係】(p.156)

① (a) $\cos x + \sin x = \dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗して

$$1 + 2\cos x\sin x = \frac{1}{4} \iff \boldsymbol{\cos x\sin x = -\frac{3}{8}}$$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

また，この値を代入すれば，$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x\sin x = \dfrac{7}{4}$

よって，$\boldsymbol{\cos x - \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$.

(b) (a) より，次の連立方程式が成立する．

$$\begin{cases} \cos x + \sin x = \dfrac{1}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \cos x - \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ② より $2\sin x = \dfrac{1 \mp \sqrt{7}}{2}$ であるが，$0 < x < \pi$ より $\sin x > 0$ であるので，$\boldsymbol{\sin x = \dfrac{1+\sqrt{7}}{4}}$．よって，②について $\cos x - \sin x = -\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ と分かるので，① + ② より $\boldsymbol{\cos x = \dfrac{1-\sqrt{7}}{4}}$ となる．

② まず，$\cos x \pm \sin x$ の 2 乗をそれぞれ考えて

$$(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\cos x\sin x = \frac{5}{3}$$
$$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x\sin x = \frac{1}{3}$$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

$$\iff \cos x + \sin x = \pm\frac{\sqrt{15}}{3},\quad \cos x - \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

である．ここで，$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos x > 0$．$\cos x\sin x > 0$ であるので $\sin x > 0$ と分かる．

よって，$\cos x > 0$，$\sin x > 0$ から $\cos x + \sin x > 0$.

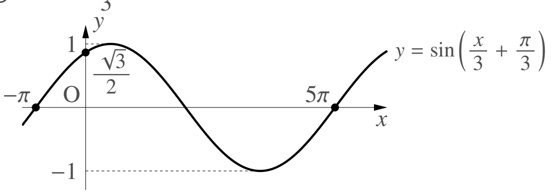
$$\begin{cases} \cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \\ \cos x - \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

この連立方程式を解いて（複号同順）

$$\boldsymbol{(\cos x,\ \sin x) = \left(\frac{\sqrt{15}\pm\sqrt{3}}{6},\ \frac{\sqrt{15}\mp\sqrt{3}}{6}\right)}$$

【発展：三角関数のグラフ～その３～】(p.165)

① $y = \sin\dfrac{1}{3}\{x - (-\pi)\}$ であるので

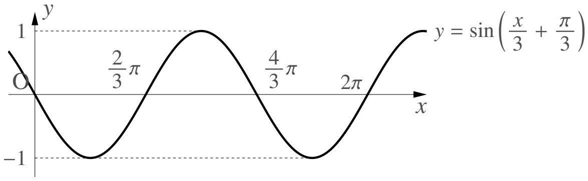


◀・周期は $2\pi \div \dfrac{1}{3} = 6\pi$

・$y = \sin 0$ になる $x = -\pi$ から 1 周期分を始めると $x = -\pi + 6\pi = 5\pi$ で終わる

・振幅 1，y 切片 $\sin\dfrac{1}{3}\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

② $y=\sin\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{2}{3}\pi\right)$ であるので



◀ ・周期は $2\pi\div\dfrac{3}{2}=\dfrac{4}{3}\pi$

・$y=\sin 0$ になる $x=\dfrac{2}{3}\pi$ から
1 周期分を始めると
$x=\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{4}{3}\pi=2\pi$ で終わる

・振幅 1，y 切片 $\sin(-\pi)=0$

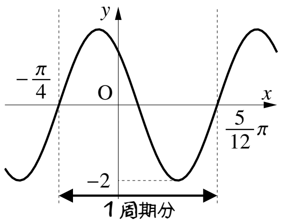
【発展：グラフから三角関数を求める】(p.166)

① 振幅は 2 なので $\boldsymbol{A=2}$．周期は $\dfrac{5}{12}\pi-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{3}\pi$ であるので，$\dfrac{2\pi}{b}=\dfrac{2}{3}\pi$ から $\boldsymbol{b=3}$．さらに，このグラフは $x=-\dfrac{\pi}{4}$ で 1 周期分が始まるので

$$y=2\sin 3\left\{x-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=2\sin\left(3x+\frac{3}{4}\pi\right)$$

がグラフの関数と分かるので，$\boldsymbol{c=\dfrac{3}{4}\pi}$.

◀

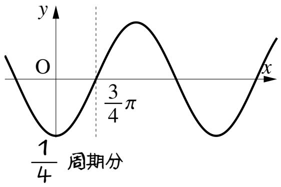


② 振幅は 3 なので $\boldsymbol{A=3}$．$0<x<\dfrac{3}{4}\pi$ で周期の $\dfrac{1}{4}$ になるから，周期は $\dfrac{3}{4}\pi\times 4=3\pi$ になる．つまり $\dfrac{2\pi}{b}=3\pi$ から $\therefore\ \boldsymbol{b=\dfrac{2}{3}}$ になる．さらに，このグラフは $x=\dfrac{3}{4}\pi$ で 1 周期分が始まるので

$$y=3\sin\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)=3\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\pi\right)$$

がグラフの関数と分かるので，$\boldsymbol{c=-\dfrac{1}{2}\pi}$.

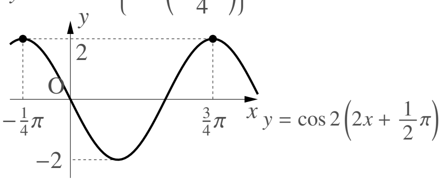
◀



◀ $x=0$ のとき $y=-3$ であることから，$-3=3\sin c$ として求めてもよい．

【発展：三角関数のグラフ〜その５〜】(p.168)

① $y=2\cos 2\left\{x-\left(-\dfrac{1}{4}\pi\right)\right\}$ であるので

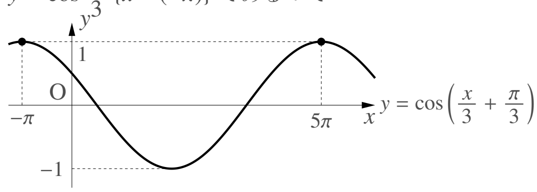


◀ ・周期は $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

・$y=\cos 0$ になる $x=-\dfrac{1}{4}\pi$ から
1 周期分を始めると
$x=-\dfrac{1}{4}\pi+\pi=\dfrac{3}{4}\pi$ で終わる

・振幅 2，y 切片 $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

② $y=\cos\dfrac{1}{3}\{x-(-\pi)\}$ であるので

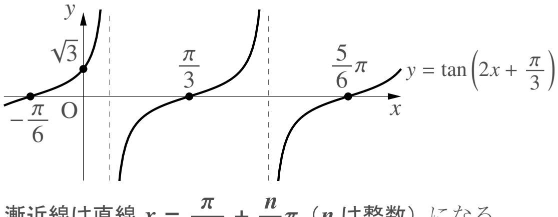


◀ ・周期は $2\pi\div\dfrac{1}{3}=6\pi$

・$y=\cos 0$ になる $x=-\pi$ から
1 周期分を始めると
$x=\pi+6\pi=5\pi$ で終わる

・振幅 1，y 切片 $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

③ $y=\tan 2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるので



漸近線は直線 $\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{n}{2}\pi}$（$\boldsymbol{n}$ は整数）になる．

◀ ・周期は $\dfrac{\pi}{2}$

・$y=\tan 0$ になる $x=-\dfrac{\pi}{6}$ から
1 周期分を始めると
$x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ で終わる

・y 切片は $\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

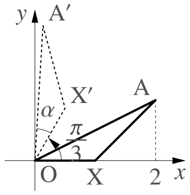
・漸近線は $2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，つまり $x=\dfrac{\pi}{12}$ のときにあり，その前後 $\dfrac{\pi}{2}$ ごとにある．

【発展：三角関数の加法定理と平面図形】(p.172)

① OA $=\sqrt{5}$ より，$\boldsymbol{\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}}$.

◀ (2, 0) を B として，直角三角形 △AOB に着目した.

② 右図のように描くことができ，$\boldsymbol{\angle X'OX=\frac{\pi}{3}}$ から



$X'\left(\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}\right)$ であるので $\boldsymbol{X'\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

右図より $\boldsymbol{\angle A'OX=\alpha+\frac{\pi}{3}}$，OA' $=\sqrt{5}$ から

$A'\left(\sqrt{5}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right),\ \sqrt{5}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right)$ であり，

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

◀『cos の加法定理』(p.171)

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

◀『sin の加法定理』(p.171)

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

より，$\boldsymbol{A'\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)}$.

◀ $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ $\sqrt{5}$ 倍した.

【発展：tan の半角で表す】(p.176)

$t^2=\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ より $(1+\cos x)t^2=1-\cos x$

◀ 両辺 $1+\cos x$ 倍した

$$\Leftrightarrow\ t^2+t^2\cos x=1-\cos x$$

$$\Leftrightarrow\ (t^2+1)\cos x=1-t^2\quad\therefore\ \boldsymbol{\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

また，倍角の公式より $\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\boldsymbol{\frac{2t}{1-t^2}}$ であるので

$$\sin x=\cos x\tan x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1-t^2}=\boldsymbol{\frac{2t}{1+t^2}}$$

◀ $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ でも計算できるが，符号の判別が難しい.

【発展：方程式の解の個数】(p.177)

① $\sin x=t$ とおくと，$\cos 2x=1-2t^2$ であるから

◀ $\cos 2x$ は $\sin x$ で表せる

$$f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x$$

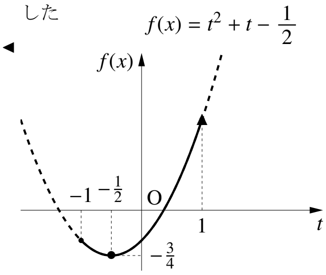
$$=t-\frac{1}{2}(1-2t^2)=t^2+t-\frac{1}{2}$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

◀ 最大・最小を求めるため平方完成した

となる．$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲でグラフを書けば右欄外のようになるので

◀



最大値は $t=1$ のときの $\frac{3}{2}$，最小値は $t=-\frac{1}{2}$ のときの $-\frac{3}{4}$

となる．$t=\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$，$t=\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ なので

最大値は $\boldsymbol{\frac{3}{2}\ \left(x=\frac{\pi}{2}\right)}$，**最小値は** $\boldsymbol{-\frac{3}{4}\ \left(x=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi\right)}$

(2) 右欄外のように $f(x)=a$ を書き込むと

$-\dfrac{3}{4}<a \leqq -\dfrac{1}{2}$ のときに $f(x)=a$ となる t は 2 個

他の場合は，$f(x)=a$ となる t は 1 個，または 0 個

である．一方，$t=\sin x$ であるから，

$-1<t<1$ のときは，t の解 1 つにつき x の解は 2 つ

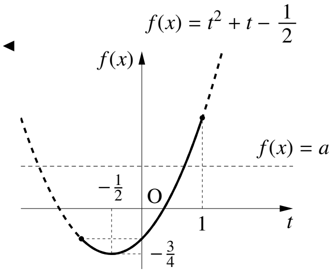
$t=-1,\ 1$ のときは，t の解 1 つにつき x の解は 1 つ

である．以上から，次のように分かる．

$f(x)=a$ となる x が 4 つあるのは $\boldsymbol{-\dfrac{3}{4}<a<-\dfrac{1}{2}}$ のとき

$f(x)=a$ となる x が 3 つあるのは $\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$ のとき

◀



【発展：3 倍角の公式】(p.177)

(1)
$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta \\
&= (2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta-2\sin^3\theta \\
&= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta \\
&= \boldsymbol{3\sin\theta-4\sin^3\theta}
\end{aligned}$$

◀『sin の加法定理』(p.171)

◀『倍角の公式』(p.173)

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta \\
&= (2\cos^2\theta-1)\cos\theta-(2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta \\
&= 2\cos^3\theta-\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= 2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\
&= \boldsymbol{4\cos^3\theta-3\cos\theta}
\end{aligned}$$

◀『cos の加法定理』(p.171)

◀『倍角の公式』(p.173)

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.155)

(2) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ であるので

（与式）$\Leftrightarrow\ 4\cos^3\theta-3\cos\theta+2\cos\theta=0$

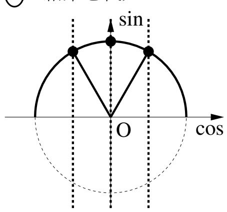
$\Leftrightarrow\ (4\cos^2\theta-1)\cos\theta=0$

$\Leftrightarrow\ \cos\theta=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0$

◀(1)の結果を代入

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲でこれを解いて，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi}$

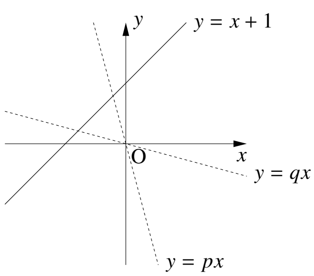
◀



【発展：直線のなす角】(p.180)

右欄外の図から，$y=px,\ y=qx$ はいずれも，直線 $y=x+1$ と $\dfrac{\pi}{3}$ の大きさで交わる．つまり，直線 $y=x+1$ とのなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ である直線の傾きを m とすると $p,\ q$ は m の 2 解である．

◀



$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{3}=\left|\frac{1-m}{1+1\cdot m}\right| &\Leftrightarrow \sqrt{3}=\pm\frac{1-m}{1+m} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{3}(1+m)=1-m \quad \text{または} \quad \sqrt{3}(1+m)=-(1-m) \\
&\Leftrightarrow m=-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \quad \text{または} \quad m=-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \\
&\Leftrightarrow m=-2+\sqrt{3} \quad \text{または} \quad m=-2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$p<q$ であるから，$\boldsymbol{p=-2-\sqrt{3},\ q=-2+\sqrt{3}}$.

【発展：$t=\sin x+\cos x$ とおく】(p.185)

① $t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$ であるので

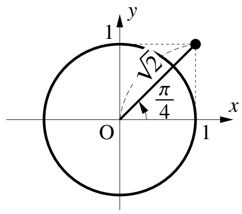
$$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

これを代入すれば

$$f(x)=\frac{t^2-1}{2}-(\sin x+\cos x)=\boldsymbol{\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2}}$$

② 右欄外の図を書いて考えれば

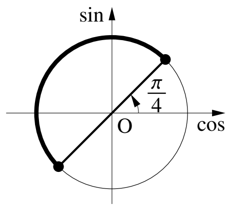
◀『三角関数の合成』(p.181)



$$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq x\leqq\pi$ より，$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるので，右欄外の図より $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ である．

◀



つまり，$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ のとりうる範囲は $\boldsymbol{-1\leqq t\leqq\sqrt{2}}$.

③ ①, ②より

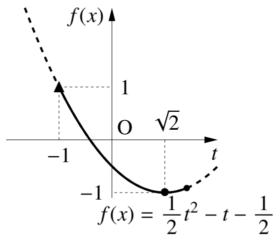
$$f(x)=\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t-1)^2-1\quad\left(-1\leqq t\leqq\sqrt{2}\right)$$

である．右欄外の図より，$f(x)$ は

　$t=-1$ のとき 1 で最大，$t=1$ のとき -1 で最小

となる．それぞれのときの x の値を求めると

◀関数の最大・最小を求めるため，t について平方完成してグラフを描いた．



$$t=-1\iff\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$
$$\iff\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi\quad\therefore\ x=\pi$$
$$t=1\iff\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$
$$\iff\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\quad\therefore\ x=0,\ \frac{\pi}{2}$$

以上をまとめて，$f(x)$ は

　$x=\pi$ のとき 1 で最大，$x=0,\ \frac{\pi}{2}$ のとき -1 で最小

【発展：三角関数を含む方程式・不等式〜その４〜】(p.188)

① （与式）$\iff(\sin 4x+\sin 2x)+(\sin 3x+\sin x)=0$

$$\iff 2\sin\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2}+2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=0$$
$$\iff 2(\sin 3x\cos x+\sin 2x\cos x)=0$$
$$\iff(\sin 3x+\sin 2x)\cos x=0$$
$$\iff\left(2\sin\frac{3x+2x}{2}\cos\frac{3x-2x}{2}\right)\cos x=0$$
$$\iff\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}\cos x=0$$
$$\iff\sin\frac{5}{2}x=0,\ \cos\frac{x}{2}=0,\ \cos x=0$$

$4x-2x=3x-x$ に着目して，『三角関数の和を積に変換する公式』(p.187) を用いる．
$4x+x=3x+2x$ や $4x-3x=2x-x$ に着目しても共通因数を作れるが，分数が出てきて煩雑である．

◀共通因数 $\cos x$ でまとめた

◀『三角関数の和を積に変換する公式』(p.187)

それぞれの方程式を解くと

$0 \leqq \dfrac{5}{2}x < 5\pi$ より, $\sin\dfrac{5}{2}x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$

$\Leftrightarrow\ x = 0,\ \dfrac{2}{5}\pi,\ \dfrac{4}{5}\pi,\ \dfrac{6}{5}\pi,\ \dfrac{8}{5}\pi$

$0 \leqq \dfrac{x}{2} < \pi$ より, $\cos\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \pi$

$0 \leqq x < 2\pi$ より, $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

よって, $\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{2}{5}\pi,\ \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{4}{5}\pi,\ \pi,\ \dfrac{6}{5}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{8}{5}\pi}$.

② (与式) $\Leftrightarrow\ \cos 3x + \cos x < \cos 4x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow\ 2\cos\dfrac{3x+x}{2}\sin\dfrac{3x-x}{2} < \cos\dfrac{4x+2x}{2}\cos\dfrac{4x-2x}{2}$

$\Leftrightarrow\ \cos 2x\cos x < \cos 3x \cos x$

$\Leftrightarrow\ (\cos 3x - \cos 2x)\cos x > 0$

$\Leftrightarrow\ \left(-2\sin\dfrac{3x+2x}{2}\sin\dfrac{3x-2x}{2}\right)\cos x > 0$

$\Leftrightarrow\ \sin\dfrac{5}{2}x\sin\dfrac{x}{2}\cos x < 0$ …………………… ①

> $3x-x=4x-2x$ に着目して,『三角関数の和を積に変換する公式』(p.187) を用いる.
> $4x+x=3x+2x$ や $4x-3x=2x-x$ に着目しても共通因数を作れるが, 分数が出てきて煩雑である.

> ◀ 共通因数 $\cos x$ でまとめた

> ◀『三角関数の和を積に変換する公式』(p.187)

ここで, $0 \leqq \dfrac{x}{2} < \pi$ より $\sin\dfrac{x}{2} \geqq 0$ である.

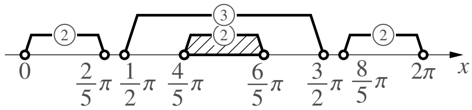
i. $\sin\dfrac{x}{2} = 0$, つまり, $x = 0,\ 2\pi$ のとき①は不適.

ii. $\sin\dfrac{x}{2} > 0$ より, ①は $\sin\dfrac{5}{2}x\cos x < 0$ となる.

- $\sin\dfrac{5}{2}x > 0,\ \cos x < 0$ のとき

$$\begin{cases} 0 < x < \dfrac{2}{5}\pi,\ \dfrac{4}{5}\pi < x < \dfrac{6}{5}\pi,\ \dfrac{8}{5}\pi < x < 2\pi & \cdots\cdots ② \\ \dfrac{1}{2}\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

> ◀ $\sin\dfrac{5}{2}x > 0$ を解くと
> $0 < \dfrac{5}{2}x < \pi,\ 2\pi < \dfrac{5}{2}x < 3\pi,$
> $4\pi < \dfrac{5}{2}x < 5\pi$

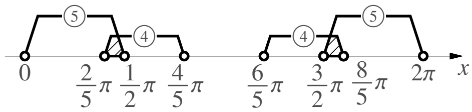


であるので, $\dfrac{4}{5}\pi < x < \dfrac{6}{5}\pi$.

- $\sin\dfrac{5}{2}x < 0,\ \cos x > 0$ のとき

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5}\pi < \theta < \dfrac{4}{5}\pi,\ \dfrac{6}{5}\pi < \theta < \dfrac{8}{5}\pi & \cdots\cdots ④ \\ 0 < \theta < \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

> ◀ $\sin\dfrac{5}{2}x < 0$ を解くと
> $\pi < \dfrac{5}{2}x < 2\pi,\ 3\pi < \dfrac{5}{2}x < 4\pi$



であるので, $\dfrac{2}{5}\pi < x < \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < x < \dfrac{8}{5}\pi$.

以上をまとめて, $\boldsymbol{\dfrac{2}{5}\pi < x < \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{4}{5}\pi < x < \dfrac{6}{5}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < x < \dfrac{8}{5}\pi}$.

【発展：三角形の角】(p.189)

$A+B+C=\pi$ であるので，

$$\text{（左辺）} = (\sin A + \sin B) + \sin\left(2\cdot\frac{C}{2}\right)$$
$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

◀『三角関数の和を積に変換する公式』(p.187),『倍角の公式』(p.173)

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$

◀ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right)$$

◀『三角関数の和を積に変換する公式』(p.187)

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right) = \text{（右辺）} \quad ■$$

【別解その 1：『三角関数の積を和に変換する公式』の利用】

$$\text{（右辺）} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)$$

◀ $C=\pi-(A+B)$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)$$

◀ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

◀『cos の加法定理』(p.171)

$$= \left(2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\right)2\cos^2\frac{B}{2} + 2\cos^2\frac{A}{2}\left(2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$
$$= \sin A(1+\cos B) + (1+\cos A)\sin B$$

◀『倍角の公式』(p.173),『半角の公式』(p.175)

$$= \sin A + \sin B + \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$= \sin A + \sin B + \sin(A+B)$$

◀『sin の加法定理』(p.171)

$$= \sin A + \sin B + \sin(\pi - C) = \text{（左辺）} \quad ■$$

◀ $A+B=\pi-C$, $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

【別解その 2】

$$\text{（右辺）} = 4\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$
$$= 4\left\{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)\right\}\cos\frac{C}{2}$$

◀『三角関数の積を和に変換する公式』(p.187)

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{C}{2} + 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)$$

◀ $A+B=\pi-C$, $C=\pi-(A+B)$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + 2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$

◀ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$$= \sin C + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

◀『倍角の公式』(p.173)

$$= \sin C + \left\{\sin\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right) + \sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)\right\}$$

◀『三角関数の積を和に変換する公式』(p.187)

$$= \sin C + (\sin A + \sin B) = \text{（左辺）} \quad ■$$

4.7　三角関数の値

角	cos	sin	tan	角	cos	sin	tan
0	1.0000	0.0000	0.0000	45	0.7071	0.7071	1.0000
1	0.9998	0.0175	0.0175	46	0.6947	0.7193	1.0355
2	0.9994	0.0349	0.0349	47	0.6820	0.7314	1.0724
3	0.9986	0.0523	0.0524	48	0.6691	0.7431	1.1106
4	0.9976	0.0698	0.0699	49	0.6561	0.7547	1.1504
5	0.9962	0.0872	0.0875	50	0.6428	0.7660	1.1918
6	0.9945	0.1045	0.1051	51	0.6293	0.7771	1.2349
7	0.9925	0.1219	0.1228	52	0.6157	0.7880	1.2799
8	0.9903	0.1392	0.1405	53	0.6018	0.7986	1.3270
9	0.9877	0.1564	0.1584	54	0.5878	0.8090	1.3764
10	0.9848	0.1736	0.1763	55	0.5736	0.8192	1.4281
11	0.9816	0.1908	0.1944	56	0.5592	0.8290	1.4826
12	0.9781	0.2079	0.2126	57	0.5446	0.8387	1.5399
13	0.9744	0.2250	0.2309	58	0.5299	0.8480	1.6003
14	0.9703	0.2419	0.2493	59	0.5150	0.8572	1.6643
15	0.9659	0.2588	0.2679	60	0.5000	0.8660	1.7321
16	0.9613	0.2756	0.2867	61	0.4848	0.8746	1.8040
17	0.9563	0.2924	0.3057	62	0.4695	0.8829	1.8807
18	0.9511	0.3090	0.3249	63	0.4540	0.8910	1.9626
19	0.9455	0.3256	0.3443	64	0.4384	0.8988	2.0503
20	0.9397	0.3420	0.3640	65	0.4226	0.9063	2.1445
21	0.9336	0.3584	0.3839	66	0.4067	0.9135	2.2460
22	0.9272	0.3746	0.4040	67	0.3907	0.9205	2.3559
23	0.9205	0.3907	0.4245	68	0.3746	0.9272	2.4751
24	0.9135	0.4067	0.4452	69	0.3584	0.9336	2.6051
25	0.9063	0.4226	0.4663	70	0.3420	0.9397	2.7475
26	0.8988	0.4384	0.4877	71	0.3256	0.9455	2.9042
27	0.8910	0.4540	0.5095	72	0.3090	0.9511	3.0777
28	0.8829	0.4695	0.5317	73	0.2924	0.9563	3.2709
29	0.8746	0.4848	0.5543	74	0.2756	0.9613	3.4874
30	0.8660	0.5000	0.5774	75	0.2588	0.9659	3.7321
31	0.8572	0.5150	0.6009	76	0.2419	0.9703	4.0108
32	0.8480	0.5299	0.6249	77	0.2250	0.9744	4.3315
33	0.8387	0.5446	0.6494	78	0.2079	0.9781	4.7046
34	0.8290	0.5592	0.6745	79	0.1908	0.9816	5.1446
35	0.8192	0.5736	0.7002	80	0.1736	0.9848	5.6713
36	0.8090	0.5878	0.7265	81	0.1564	0.9877	6.3138
37	0.7986	0.6018	0.7536	82	0.1392	0.9903	7.1154
38	0.7880	0.6157	0.7813	83	0.1219	0.9925	8.1443
39	0.7771	0.6293	0.8098	84	0.1045	0.9945	9.5144
40	0.7660	0.6428	0.8391	85	0.0872	0.9962	11.4301
41	0.7547	0.6561	0.8693	86	0.0698	0.9976	14.3007
42	0.7431	0.6691	0.9004	87	0.0523	0.9986	19.0811
43	0.7314	0.6820	0.9325	88	0.0349	0.9994	28.6363
44	0.7193	0.6947	0.9657	89	0.0175	0.9998	57.2900
45	0.7071	0.7071	1.0000	90	0.0000	1.0000	な　し

これらの値を計算するには，大学で学習することになるテイラー展開（または，マクローリン展開）が必要となる．