13th-note 数学A

目次

第 4 章　　平面図形

三角形

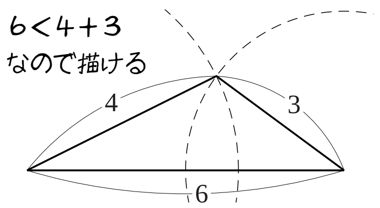
4.1　三角形の性質（１）

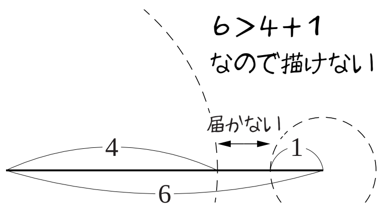
1.　三角形の辺と角

A.　描ける三角形・描けない三角形

3 辺が 6 cm、4 cm、3 cm の三角形は描けるが、3 辺が 6 cm、4 cm、1 cm の三角形を描くことはできない。

一番長い辺（6 cm）を底辺にして書いてみよう。すると、一番長い辺は、他の 2 辺の和より短くないといけない。





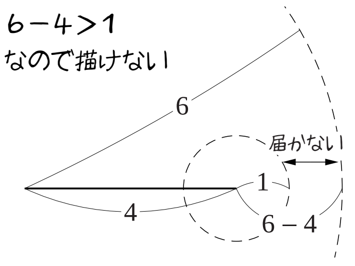
【例題 1】 3 辺が以下で与えられる三角形が、存在するか、存在しないか、答えなさい。

1. 5, 3, 3　　2. 7, 4, 3　　3. 8, 5, 2　　4. 9, 6, 4

【解答】

1. 存在する　　2. 存在しない　　3. 存在しない　　4. 存在する

次に、3 辺が 6 cm、4 cm、1 cm の三角形について、底辺を 4 cm にして考えてみよう。



すると、1 cm が 6 cm − 4 cm より小さいため、描けないと見ることもできる。実際、$6 > 4 + 1$ を移項して $6 - 4 > 1$ になるので、一方を満たせば他方も満たさない。

以上から、次のようにまとめられる。

三角形の成立条件

3 辺が $a,\ b,\ c$ である三角形が存在するには、次が成り立たないといけない。

c が一番長いならば $c < a + b$　　　c が一番長くないならば $|a - b| < c$

c が一番長いかどうか分からないときは、$|a - b| < a < a + b$ を満たせばよい。

…… $a < b < c$ としたとき、$c < a + b$ も、$|c - a| < b$ も、$|c - b| < a$ も、同じ式を表わしている（$|c - a| = c - a$ に注意）。

【練習 2：三角形の成立する条件】

(1) 3 辺が $x - 2,\ x,\ x + 2$ である三角形を考えよう。最大辺は $\boxed{\text{ア}}$ の辺なので、三角形が存在するには $\boxed{\text{ア}}$ < $\boxed{\text{イ}}$ でないといけない。これを解いて、$\boxed{\text{ウ}}$ < x のときに三角形が存在する。

(2) 3 辺が $3,\ 5,\ x + 1$ である三角形を考えよう。三角形が成立する条件は $\boxed{\text{エ}}$ < $x + 1$ < $\boxed{\text{オ}}$ になる[*1]。これを解いて、$\boxed{\text{カ}}$ < x < $\boxed{\text{キ}}$ のときに三角形が存在する。

(3) 発展　3 辺が $5,\ x + 2,\ 2x + 1$ である三角形が成立するための x の条件を求めよ。

【解答】

(1) 最大辺は $\underline{\mathbf{x + 2}}_{(ア)}$ であるから、$_{(ア)}\underline{\mathbf{x + 2}} < \underline{\mathbf{(x - 2) + x}}_{(イ)}$ でないといけない。これを解いて

$$x + 2 < 2x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < \underline{\mathbf{4}}_{(ウ)}$$

(2) $5 > 3$ なので、$_{(エ)}\underline{\mathbf{5 - 3}} < x + 1 < \underline{\mathbf{5 + 3}}_{(オ)}$ であればよい。解くと

$$2 < x + 1 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad _{(カ)}\underline{\mathbf{1}} < x < \underline{\mathbf{7}}_{(キ)}$$

(3) $|(2x + 1) - (x + 2)| < 5 < (2x + 1) + (x + 2)$ であればよい。つまり、

連立不等式 $\begin{cases} |(2x - 1) - (x + 2)| < 5 \\ 5 < (2x + 1) + (x + 2) \end{cases}$ を解けばよい。

1 つ目を解くと $|x - 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 1 < 5 \Leftrightarrow -4 < x < 6$

一方、2 つ目を解くと $5 < 3x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2}{3} < x$

になる。これらを連立して、$\mathbf{\dfrac{2}{3} < x < 6}$ を得る。

◀ このとき、$x + 2$ も $2x + 1$ も正であることが確認できる。

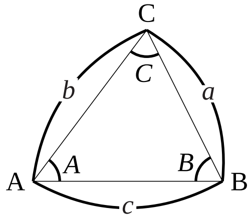
[*1] 最大辺がどれか分からないため、$|b - c| < a$ だけや、$x < b + c$ だけでは不十分である。

B. 辺と角の名前

△ABC において，以下のように略すことが多い．

∠A，∠B，∠C の大きさ　⟶　それぞれ A，B，C

辺 BC，CA，AB の長さ　⟶　それぞれ a，b，c



たとえば，角 A の向かい側にある辺 BC を a と表すことになる．

今後，特に断りのない限りこの記法にしたがうこととする．

C. 辺と角の大小関係

たとえば、$A = 45°$, $B = 60°$, $c = 6$ を描くと $a < b$ になる。

また、$a = 3$, $b = 4$, $c = 6$ の △ABC を描くと、角の大きさは $A < B < C$ になる。

一般に、次のような関係が成り立つ。

三角形の辺と角

△ABC について、辺の大小と、向かいの角の大小は、一致する。式で表わせば

$$a > b \iff A > B$$

が成り立つ.

（証明）$a < b$ のとき、辺 AC 上に、CD = a となるよう D をとる。すると

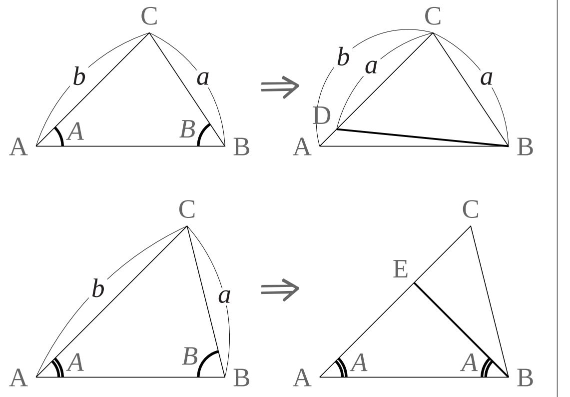
$$B > \angle\mathrm{CBD} = \angle\mathrm{CDB} = A + \angle\mathrm{DBA} > A$$

から、$A < B$ が示される。

逆に、$A < B$ であったとする。このとき、∠ABE = A となるよう、辺 AC 上に E をとる。すると、△EAB は二等辺三角形であるから

$$b = \mathrm{AE} + \mathrm{EC} = \mathrm{BE} + \mathrm{EC} > \mathrm{CB} = a$$

から、$a < b$ である。



上の定理は、定理の内容の分かりやすさに比べると、証明が難しい。

【例題 3】 次の三角形について、一番長い辺・短い辺はそれぞれどこか。

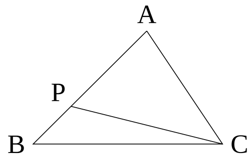
1. $A = 50°$, $B = 60°$　　2. $A = 100°$, $B = 30°$　　3. $B = 45°$, $C = 40°$

【解答】

1. $C > B > A$ なので、**AB（= c）が一番長く、BC（= a）が一番短い**
2. $A > C > B$ なので、**BC（= a）が一番長く、AC（= b）が一番短い**
3. $A > B > C$ なので、**BC（= a）が一番長く、AB（= c）が一番短い**

【発展 4：辺の大小と角の大小】

辺 BC が最大である △ABC の辺 AB 上に P をとるとき、PC < BC を示そう。
「三角形の辺と角の大小関係」から、PC < BC を示すには ∠ $\boxed{\text{ア}}$ < ∠ $\boxed{\text{イ}}$ を示せばよいと分かる。ここで、△ABC においては辺 BC が最大であるので、∠ $\boxed{\text{カ}}$ < ∠ $\boxed{\text{ウ}}$ であるから、



$$\angle\boxed{\text{キ}} - \angle\boxed{\text{カ}} > \angle\boxed{\text{キ}} - \angle\boxed{\text{エ}} = \angle\boxed{\text{オ}} > 0$$

よって、∠ $\boxed{\text{カ}}$ < ∠ $\boxed{\text{キ}}$ が成立することが分かったから、よって、PC < BC が示せた。 ■

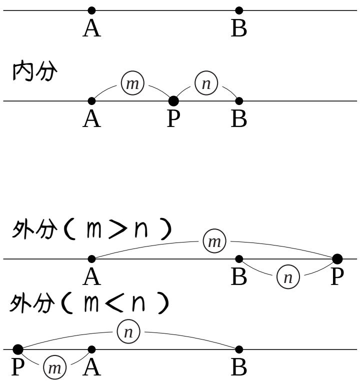
【解答】 △PBC について「三角形の辺と角の大小関係」から、
PC < BC ⇔ ∠**PBC**(カ) < ∠**BPC**(キ) を示せばよい。
辺 BC が △ABC の最大辺なので ∠PBC < ∠**BAC**(ウ) が成り立つので

∠BPC − ∠PBC > ∠BPC − ∠**BAC**(エ) ……………………… ①

△APC について、∠BPC − ∠BAC = ∠ACP であるから、これは正である。
よって、∠BPC − ∠PBC > 0 ⇔ PC < BC が示せた。 ■

2. 辺の内分・外分

A. 内分とは・外分とは



線分 AB を考え、P を直線 AB 上のどこか（A、B 除く）にとる。

P を線分 AB 内にとるとき「P は線分 AB を**内分** (interior devision) する」という。線分の長さの比 AP : BP = m : n となるとき「P は線分 AB を m : n に内分する」という。

P を線分 AB 外にとるとき「P は線分 AB を**外分** (exterior division) する」という。線分の長さの比 AP : BP = m : n となるとき「P は線分 AB を m : n に外分する」という。

内分において、AP = PB のとき、P は線分 AB の中点になる。
一方、外分において AP = PB はありえない。

【例題 5】

以下の目盛りが等間隔であるとき、$\boxed{}$ に数値を、（ ）に「内」「外」のいずれかを入れよ。
（座標メモリ・作成し直し）

・P は AB を $\boxed{\text{ア}}$: $\boxed{\text{イ}}$ に（ ウ ）分している　・Q は AB を $\boxed{\text{エ}}$: $\boxed{\text{オ}}$ に（ カ ）分している
・R は AB を $\boxed{\text{キ}}$: $\boxed{\text{ク}}$ に（ ケ ）分している　・S は AB を $\boxed{\text{コ}}$: $\boxed{\text{サ}}$ に（ シ ）分している
・T は AB を $\boxed{\text{ス}}$: $\boxed{\text{セ}}$ に（ ソ ）分している

【解答】　線分 AB 上にある Q、R は内分、他は外分である。

- AP = 6, PB = 18 より、6 : 18 = (ア)**1** : **3**(イ) に(ウ)**外**分している
- AQ = 3, QB = 9 より、　3 : 9 = (エ)**1** : **3**(オ) に(カ)**内**分している
- AR = 8, RB = 4 より、　8 : 4 = (キ)**2** : **1**(ク) に(ケ)**内**分している
- AS = 15, SB = 3 より、15 : 3 = (コ)**5** : **1**(サ) に(シ)**外**分している
- AT = 20, TB = 8 より、20 : 8 = (ス)**5** : **2**(セ) に(ソ)**外**分している

B.　内角の二等分線の定理

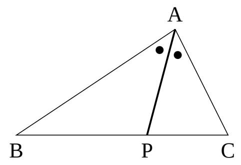
△ABC の角を二等分する線は、以下の性質を持つ。

内角の二等分線の定理

△ABC について、∠BAP = ∠PAC のとき、次が成り立つ。

BP : PC = BA : AC

言い換えれば、∠A の二等分線は、辺 BC を AB : AC に内分する。



（証明）CA // PD となるよう、辺 AB 上に D をとる。このとき

∠APD = ∠PAC　　（CA // PD より）

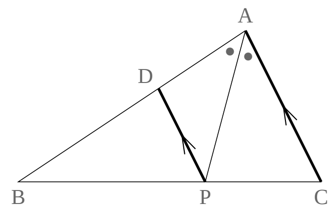
　　= ∠PAD　　（AP は ∠A を二等分するから）

であるから、△DAP は DA = DP の二等辺三角形。よって

AB : AC = DB : DP　　（CA // PD より △BDP ∽ △BAC であるから）

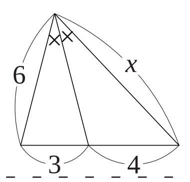
　　= DB : DA　　（DA = DP から）

　　= BP : PC　　（CA // PD より）■

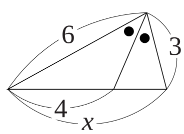


【例題 6】　以下の図について、x の値を求めなさい。

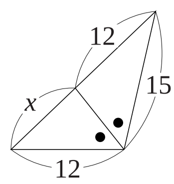
1.



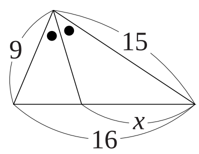
2.



3.



4.



【解答】

1. $6 : x = 3 : 4$ であるから、$\boldsymbol{x = 8}$
2. $6 : 3 = 4 : 4$ であるから、$\boldsymbol{x = 6}$
3. $15 : 12 = 12 : x$ であるから、$12^2 = 15x$ を解いて $\boldsymbol{x = \dfrac{48}{5}}$
4. $\boldsymbol{x = 10}$

【例題 7】 内分・外分長さが 12 の線分 AB がある。

【解答】

【例題 8】 3 分割された線分の長さ長さが 12 の線分 AB がある。

【解答】

【練習 9：内分・外分と線分の長さ】

aaa

【解答】 aaa

ここに、内分の問題

【暗記 10：2 つの内分点と線分比】

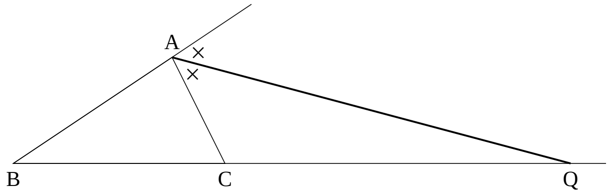
aaa

【解答】 aaa

C. 外角の二等分線の定理

外角の二等分線の定理

$\triangle ABC$ について、$\angle A$ の外角を二等分する線が辺 BC と交わる点を P とするとき、BP : PC = AB : AC になる。
言いかえれば、$\angle A$ の外角の二等分線は、辺 BC を AB : AC に外分する。



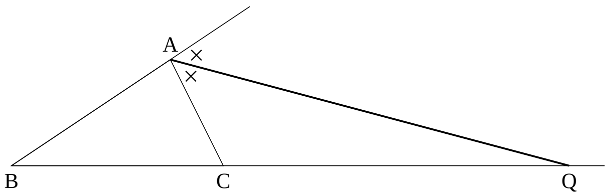
(証明) 発展 を参照のこと。

【発展 11：外角の二等分線の定理の証明】

「外角の二等分線の定理」を証明せよ。

【 解 答 】

CA // PD となるよう、辺 AB 上に D をとる。このとき



$\angle APD = \angle PAC$ (CA // PD より)

$= \angle PAD$ (AP は $\angle A$ を二等分するから)

であるから、$\triangle DAP$ は DA = DP の二等辺三角形。よって、

AB : AC = DB : DP (CA // PD より $\triangle BDP \backsim \triangle BAC$ であるから)

= DB : DA (DA = DP から)

= BP : PC (CA // PD より ■

【練習 12：外角の二等分線と外分】

aaa

【解答】 aaa