13th-note 数学A

目次

Ver0.50(2010-8-28)

第4章　平面図形

この章では，三角形・四角形・円などの平面図形について成り立つ重要な法則について学ぶ.

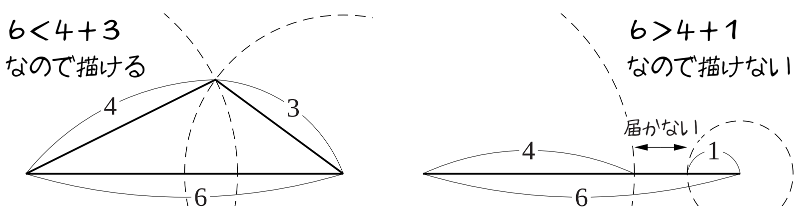
4.1　三角形の性質（１）

1.　三角形の辺と角

A.　描ける三角形・描けない三角形

3 辺が 6 cm，4 cm，3 cm の三角形は描けるが，3 辺が 6 cm，4 cm，1 cm の三角形を描くことはできない.

一番長い辺（6 cm）を底辺にして書いてみよう．すると，一番長い辺は，他の 2 辺の和より短くないといけない.



【例題 1】　3 辺が以下で与えられる三角形が，存在するか，存在しないか，答えなさい.

1. 5, 3, 3　　2. 7, 4, 3　　3. 8, 5, 2　　4. 9, 6, 4

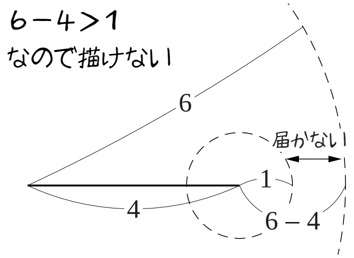
【解答】

1. 存在する　　2. 存在しない　　3. 存在しない　　4. 存在する

次に，3 辺が 6 cm，4 cm，1 cm の三角形について，底辺を 4 cm にして考えてみよう．

すると，1 cm が 6 cm − 4 cm より小さいため，描けないと見ることもできる．実際，$6 > 4 + 1$ を移項して $6 - 4 > 1$ になるので，一方を満たせば他方も満たさない．

以上から，次のようにまとめられる．



三角形の成立条件

3 辺が a, b, c である三角形が存在するには，次が成り立たないといけない．

c が一番長いならば $c < a + b$　　　c が一番長くないならば $|a - b| < c$

c が一番長いかどうか分からないときは，$|a - b| < a < a + b$ を満たせばよい．

$a < b < c$ としたとき，3 つの式 $c < a + b$，$|c - a| < b$，$|c - b| < a$ は同じ式を表わしている（$|c - a| = c - a$ に注意）．

【練習 2：三角形の成立する条件】

(1) 3 辺が $x - 2$，x，$x + 2$ である三角形を考えよう．最大辺は $\boxed{\text{ア}}$ の辺なので，三角形が存在するには $\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ でないといけない．これを解いて，$\boxed{\text{ウ}} < x$ のときに三角形が存在する．

(2) 3 辺が 3，5，$x + 1$ である三角形を考えよう．三角形が成立する条件は $\boxed{\text{エ}} < x + 1 < \boxed{\text{オ}}$ になる[*1]．これを解いて，$\boxed{\text{カ}} < x < \boxed{\text{キ}}$ のときに三角形が存在する．

(3) 発展　3 辺が 5，$x + 2$，$2x + 1$ である三角形が成立するための x の条件を求めよ．

【解答】

(1) 最大辺は $\underline{\mathbf{x + 2}}_{(\text{ア})}$ であるから，$_{(\text{ア})}\underline{\mathbf{x + 2}} < \underline{\mathbf{(x - 2) + x}}_{(\text{イ})}$ でないといけない．これを解いて

$$x + 2 < 2x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < \underline{\mathbf{4}}_{(\text{ウ})}$$

(2) $5 > 3$ なので，$_{(\text{エ})}\underline{\mathbf{5 - 3}} < x + 1 < \underline{\mathbf{5 + 3}}_{(\text{オ})}$ であればよい．解くと

$$2 < x + 1 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad _{(\text{カ})}\underline{\mathbf{1}} < x < \underline{\mathbf{7}}_{(\text{キ})}$$

(3) $|(2x + 1) - (x + 2)| < 5 < (2x + 1) + (x + 2)$ であればよい．つまり，

連立不等式 $\begin{cases} |(2x - 1) - (x + 2)| < 5 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 5 < (2x + 1) + (x + 2) & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ を解けばよい．

①を解くと $|x - 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 1 < 5 \Leftrightarrow -4 < x < 6$

一方，②を解くと $5 < 3x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2}{3} < x$

になる．これらを連立して，$\mathbf{\dfrac{2}{3} < x < 6}$ を得る．

◀ このとき，$x + 2$ も $2x + 1$ も正であることが確認できる．

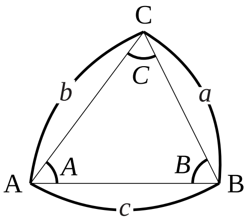
*1　最大辺がどれか分からないため，$|b - c| < a$ だけや，$x < b + c$ だけでは不十分である．

B.　辺と角の名前

$\triangle$ABC において，以下のように略すことが多い．

$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C の大きさ　$\longrightarrow$　それぞれ A，B，C

辺 BC，CA，AB の長さ　$\longrightarrow$　それぞれ a，b，c



たとえば，角 A の向かい側にある辺 BC を a と表すことになる．

今後，特に断りのない限りこの記法にしたがうこととする．

C.　辺と角の大小関係

たとえば，$A = 45^\circ$，$B = 60^\circ$，$c = 6$ を描くと $a < b$ になる．

また，$a = 3$, $b = 4$, $c = 6$ の $\triangle$ABC を描くと，角の大きさは $A < B < C$ になる．

一般に，次のような関係が成り立つ．

三角形の辺と角

> $\triangle$ABC について，辺の大小と，向かいの角の大小は，一致する．式で表わせば
>
> $a > b \iff A > B$
>
> が成り立つ．

（証明）$a < b$ のとき，辺 AC 上に，CD $= a$ となるよう D をとる．すると

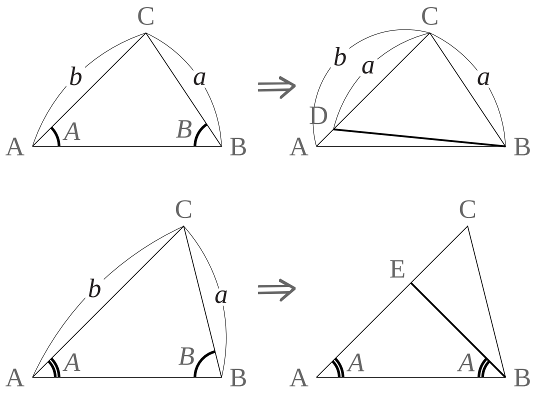
$B > \angle\text{CBD} = \angle\text{CDB} = A + \angle\text{DBA} > A$

から，$A < B$ が示される．

逆に，$A < B$ であったとする．このとき，$\angle$ABE $=$ A となるよう，辺 AC 上に E をとる．すると，$\triangle$EAB は二等辺三角形であるから

$b = \text{AE} + \text{EC} = \text{BE} + \text{EC} > \text{CB} = a$

から，$a < b$ である．



上の定理は，定理の内容の分かりやすさに比べると，証明が難しい．

【例題 3】　次の三角形について，一番長い辺・短い辺はそれぞれどこか．

1. $A = 50^\circ$，$B = 60^\circ$　　2. $A = 100^\circ$，$B = 30^\circ$　　3. $B = 45^\circ$，$C = 40^\circ$

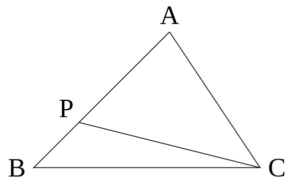
【解答】

1. $C > B > A$ なので，**AB（= c）が一番長く，BC（= a）が一番短い**
2. $A > C > B$ なので，**BC（= a）が一番長く，AC（= b）が一番短い**
3. $A > B > C$ なので，**BC（= a）が一番長く，AB（= c）が一番短い**

【練習 4：辺の大小と角の大小】

辺 BC が最大である △ABC の辺 AB 上に P をとるとき，PC < BC ········ ①を示そう．

「三角形の辺と角の大小関係」から，①を示すには



$\angle\boxed{\text{ア}} < \angle\boxed{\text{イ}}$ ········ ②を示せばよい．ここで，△ABC においては辺 BC が最大であるので，$\angle\boxed{\text{ア}} < \angle\boxed{\text{ウ}}$ であるから，

$$\angle\boxed{\text{イ}} - \angle\boxed{\text{ア}} > \angle\boxed{\text{イ}} - \angle\boxed{\text{エ}} = \angle\boxed{\text{オ}} > 0$$

よって，②が成立することが分かったから，よって，①が示せた． ■

【解答】 △PBC について「三角形の辺と角の大小関係」から，

PC < BC（①） ⇔ ∠<u>**PBC**</u>（ア） < ∠<u>**BPC**</u>（イ） （②） を示せばよい．

辺 BC が △ABC の最大辺なので ∠PBC < ∠<u>**BAC**</u>（ウ） が成り立つので

$\angle BPC - \angle PBC > \angle BPC - \angle$<u>**BAC**</u>（エ） ······················ ③

△APC について，∠BAC + ∠ACP = ∠BPC であるから ③ = ∠<u>**ACP**</u>（オ） > 0

よって，∠BPC − ∠PBC > 0 ⇔ PC < BC が示せた． ■

2. 辺の内分・外分

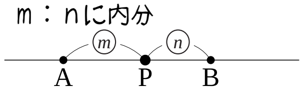
A. 内分とは・外分とは

線分 AB を考え，P を直線 AB 上のどこか（A，B 除く）にとる．

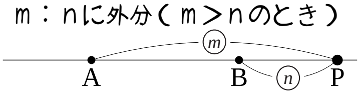
P を線分 AB 内にとるとき「P は線分 AB を**内分** (interior devision) する」という．線分の長さの比 AP : BP = $m : n$ となるとき「P は線分 AB を $m : n$ に内分する」という．

P を線分 AB 外にとるとき「P は線分 AB を**外分** (exterior division) する」という．線分の長さの比 AP : BP = $m : n$ となるとき「P は線分 AB を $m : n$ に外分する」という．

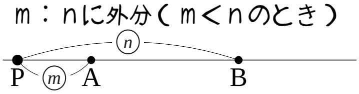
m：nに内分



m：nに外分（m＞nのとき）



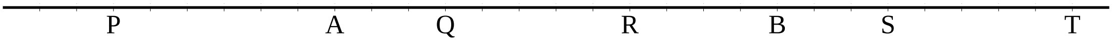
m：nに外分（m＜nのとき）



P が線分 AB を 1 : 1 に内分するとき，P は中点になる．

【例題 5】

以下の目盛りが等間隔であるとき，$\boxed{}$ に数値を，（　）に「内」「外」のいずれかを入れよ．



··· P は AB を $\boxed{\text{ア}}$: $\boxed{\text{イ}}$ に（ **ウ** ）分している　··· Q は AB を $\boxed{\text{エ}}$: $\boxed{\text{オ}}$ に（ **カ** ）分している

··· R は AB を $\boxed{\text{キ}}$: $\boxed{\text{ク}}$ に（ **ケ** ）分している　··· S は AB を $\boxed{\text{コ}}$: $\boxed{\text{サ}}$ に（ **シ** ）分している

··· T は AB を $\boxed{\text{ス}}$: $\boxed{\text{セ}}$ に（ **ソ** ）分している

【解答】　線分 AB 上にある Q，R は内分，他は外分である．

- AP = 6，PB = 18 より，6 : 18 = (ア)**1** : **3**(イ) に (ウ)**外**分している
- AQ = 3，QB = 9 より，　3 : 9 = (エ)**1** : **3**(オ) に (カ)**内**分している
- AR = 8，RB = 4 より，　8 : 4 = (キ)**2** : **1**(ク) に (ケ)**内**分している
- AS = 15，SB = 3 より，15 : 3 = (コ)**5** : **1**(サ) に (シ)**外**分している
- AT = 20，TB = 8 より，20 : 8 = (ス)**5** : **2**(セ) に (ソ)**外**分している

【例題 6】　線分 XY の長さを 12 とし，線分 XY を 1 : 2 に内分する点を A，5 : 1 に内分する点を B，1 : 2 に外分する点を C，3 : 2 に外分する点を D とする．

1. XA，XB，XC，XD の長さをそれぞれ求めよ．
2. 比 XA : AB : BY を求めよ．

【解答】

1. $XA = 12 \times \dfrac{1}{1+2} = \mathbf{4}$，$XB = 12 \times \dfrac{5}{5+1} = \mathbf{10}$，
   C，D は右欄外のようになるので
   $XC = XY = \mathbf{12}$，$XD = 12 \times \dfrac{3}{3-2} = \mathbf{36}$
2. AB = 10 − 4 = 6，BY = 12 − 10 = 2 より，XA : AB : BY = 4 : 6 : 2 = **2 : 3 : 1**.

【 暗記 7 : 3 分割された線分の長さ】

線分 AB を 3 : 5 に内分した点を P，5 : 1 に内分した点を Q とするとき，比 AP : PQ : QB を求めよ．

【解答】　3 + 5 = 8 と 5 + 1 = 6 の最小公倍数は 24 なので，
AP : PB = 3 : 5 = 9 : 15，AQ : QB = 5 : 1 = 20 : 4 と変形して
AP : PQ : QB = 9 : (20 − 9) : 4 = **9 : 11 : 4** と分かる．

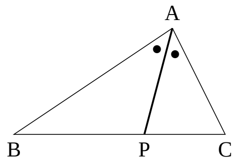
B.　内角の二等分線の定理

三角形の内角を二等分する線は，以下の性質を持つ．

内角の二等分線の定理

$\triangle$ABC について，$\angle$A を二等分する線と辺 BC が P で交わるとき（$\angle$BAP = $\angle$PAC のとき），次が成り立つ．

BP : PC = BA : AC



「A から P へ」二等分線を引いて，BA : AC $\xrightarrow[\text{代えても同じ}]{\text{AをPに}}$ BP : PC と覚えても良い．

（証明）CA // PD となるよう，辺 AB 上に D をとる．このとき

$\angle$APD = $\angle$PAC　　（CA // PD より）

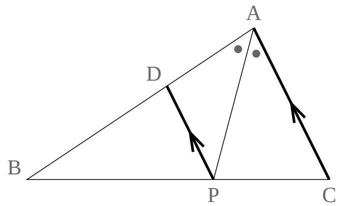
　　　= $\angle$PAD　　（AP は $\angle$A を二等分するから）

であるから，$\triangle$DAP はDA = DP ……… ① の二等辺三角形．よって

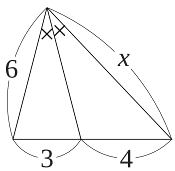
AB : AC = DB : DP　　（CA // PD より $\triangle$BDP ∽ $\triangle$BAC であるから）

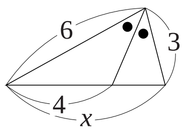
　　　　= DB : DA　　（①から）

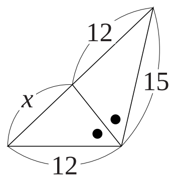
　　　　= BP : PC　　（CA // PD より） ■

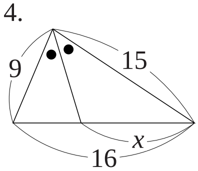


【例題 8】　以下の図について，x の値を求めなさい．

1.


2.


3.


4.


【解答】

1. 6 : x = 3 : 4 であるから，$\boldsymbol{x = 8}$
2. 6 : 3 = 4 : 2 であるから，$x = 4 + 2 = \mathbf{6}$
3. 15 : 12 = 12 : x であるから，$12^2 = 15x$ を解いて $\boldsymbol{x = \dfrac{48}{5}}$
4. $\boldsymbol{x = 10}$

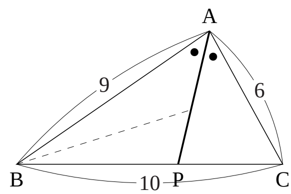
【練習 9：内角の二等分線】

右の $\triangle$ABC について，次の問いに答えよ．

(1) BP，PC の長さを求めよ．

(2) $\angle$B の二等分線と AP の交点を Q とする．AQ : QP を求めよ．

(3) $\angle$C の二等分線と AP の交点を R とする．AR : RP を求めよ．



【解答】

(1) BP : PC = BA : AC = 9 : 6 = 3 : 2 なので，

$\mathrm{BP} = \mathrm{BC} \times \dfrac{3}{3+2} = \mathbf{6}$，$\mathrm{PC} = \mathrm{BC} \times \dfrac{2}{3+2} = \mathbf{4}$

(2) AQ : QP = AB : BP = 9 : 6 = **3 : 2**

(3) AR : RP = AC : CP = 6 : 4 = **3 : 2**

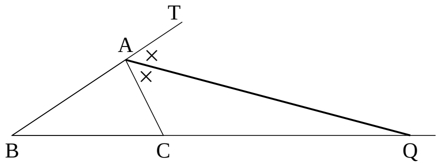
◀ Q と R は一致し，内心と呼ばれる．詳しくは p.14 を参照のこと．

C. 外角の二等分線の定理

外角の二等分線の定理

△ABC について，∠A の外角を二等分する線と辺 BC が Q で交わるとき（∠CAQ = ∠QAT のとき），次が成立する．

BQ : QC = AB : AC



「A から Q へ」二等分線を引いて，BA : AC $\xrightarrow[\text{代えても同じ}]{\text{AをQに}}$ BQ : QC と覚えても良い．

【練習 10：外角の二等分線の定理の証明】

「外角の二等分線の定理」を証明せよ．

【解答】 QA // CD となるよう，辺 AB 上に D をとる．このとき

∠ACD = ∠QAC （QA // CD より）

= ∠QAT （AP は ∠A の外角を二等分するから）

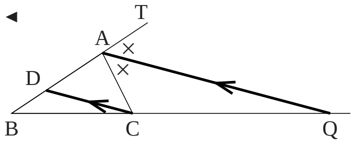
= ∠CAD （QA // CD より）

であるから，△CAD はAC = AD ……… ①の二等辺三角形．よって

AB : AC = AB : AD （①より）

= QB : QC （CA // PD より） ■

◀



（別解）として，直線 AB 上に，CA // QD となるよう D をとる，などの補助線でも証明できる．

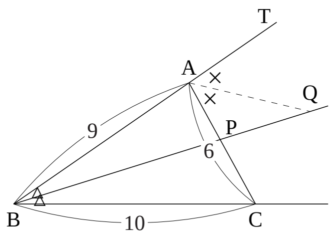
【練習 11：内角・外角の二等分線】

右の △ABC について，次の問いに答えよ．

(1) AP，PC の長さを求めよ．

(2) BQ : QP を求めよ．

(3) ∠C の外角二等分線と直線 BP の交点を R とする．BR : RP を求めよ．



【解答】

(1) AP : PC = AB : BC = 9 : 10 なので，

$BP = AC \times \dfrac{9}{9+10} = \mathbf{\dfrac{54}{19}}$，$PC = AC \times \dfrac{10}{9+10} = \mathbf{\dfrac{60}{19}}$

(2) $BQ : QP = BA : AP = \cancel{9}^{1} : \dfrac{\cancel{54}^{6}}{19} = \mathbf{19 : 6}$

(3) $BR : RP = BC : CP = \cancel{10}^{1} : \dfrac{\cancel{60}^{6}}{19} = \mathbf{19 : 6}$

◀ Q と R は一致し，傍心と呼ばれる．詳しくは p.20 を参照のこと．

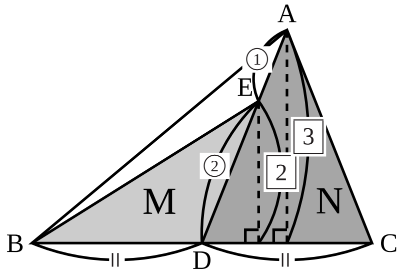
3.　平面図形の面積比

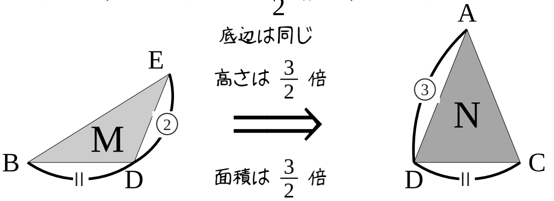
A.　相似でない２つの三角形の面積比

面積比を求めるときには，どこを底辺におくかが重要である．

まず，右の三角形 M，N の面積比を考えてみよう．

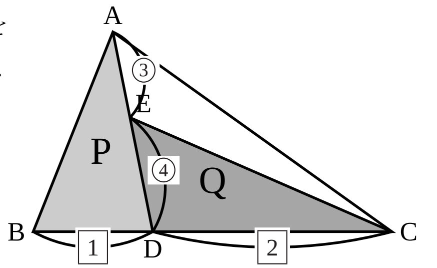
M の底辺を BD，N の底辺を CD とおけば，M，N の底辺の長さは等しく，M の高さの $\frac{3}{2}$ 倍が，N の高さになる．

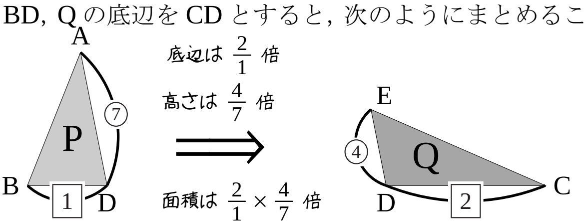




つまり，M の面積を $\frac{3}{2}$ 倍すると N の面積に等しいと分かるから，M，N の面積比は $2:3$ である．

次に，右の三角形 P，Q の面積比を考えてみよう．P の底辺を BD，Q の底辺を CD とすると，次のようにまとめることができる．





P の面積を $\frac{2}{1}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{7}$ 倍すると Q の面積に等しいと分かるから，P，Q の面積比は $8:7$ である．

【練習 12：平面図形の線分の比】

▱ABCD において，辺 BC 上に E を，辺 CD 上に F をとり，BE : EC = 1 : 2，DF : FC = 2 : 1 とする（▱は「平行四辺形」を表す）．

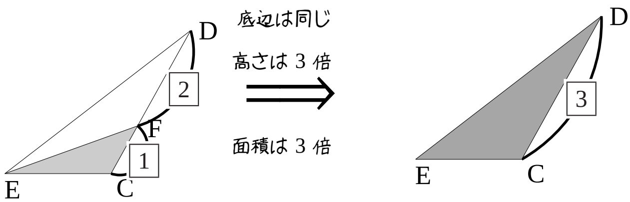
(1) △FEC と △DEC の面積比を求めよ．

(2) △FBC と △DEC の面積比を求めよ．

(3) △FEC と ▱ABCD の面積比を求めよ．

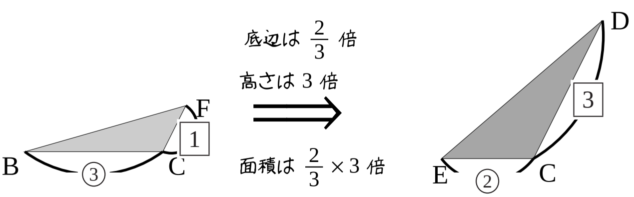
【解答】

(1) 問題文を図示すれば，右欄外のようになる．底辺を EC とすれば

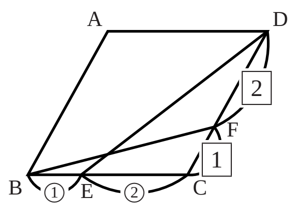


なので，面積比は **1 : 3** である．

(2) △FBC の底辺を BC，△DEC の底辺を EC とすれば，



◂ DC と EC を底辺と考えた場合は，高さが等しくなる．



◂ △FBC の底辺を FC，△DEC の底辺を DC としてもよい．

なので，面積比は **1 : 2** である．

(3)　$\triangle\mathrm{FEC} \xrightarrow{3\text{倍}} \triangle\mathrm{DEC}$　　((2) より)

$\xrightarrow{\frac{3}{2}\text{倍}} \triangle\mathrm{DBC}$　　(底辺を EC，BC にとれば，底辺は $\dfrac{3}{2}$ 倍，高さは等しい)

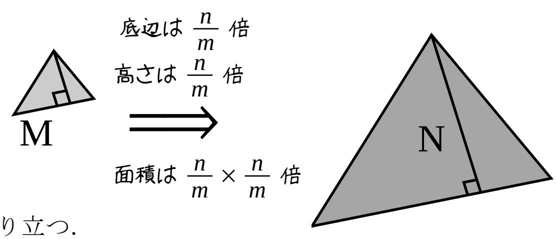
$\xrightarrow{2\text{倍}}$ ▱ABCD

よって △FEC の $3 \times \dfrac{3}{2} \times 2 = 9$ 倍が ▱ABCD の面積になるので，△FEC と ▱ABCD の面積比は **1 : 9** である．

◀　$\triangle\mathrm{FEC} \xrightarrow{\frac{3}{2}\text{倍}} \triangle\mathrm{FBC} \xrightarrow{3\text{倍}} \triangle\mathrm{DBC} \xrightarrow{2\text{倍}}$ ▱ABCD でもよい．

B.　相似な平面図形の面積比

相似比が $m : n$ である，2 つの三角形の面積比を考えると右のようになる．つまり，M の面積を $\dfrac{n}{m} \times \dfrac{n}{m} = \left(\dfrac{n}{m}\right)^2$ 倍すると N の面積に等しいと分かり，M，N の面積比は $1 : \left(\dfrac{n}{m}\right)^2 = m^2 : n^2$ である．



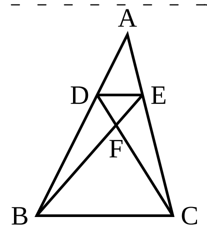
一般に，どんな平面図形においても，次のことが成り立つ．

相似な平面図形の面積比

相似比が $m : n$ である 2 つの平面図形について，その面積比は $m^2 : n^2$ である．

【例題 13】　右の図において，AD : DB = 1 : 2，AE : EC = 1 : 2 であるとする．

1. 相似な三角形の組を 2 つ見つけ（証明は無くてよい），それぞれについて面積の比を求めよ．
2. △DEF と △DBF の面積比を求めよ．
3. △DEF と △ABC の面積比を求めよ．



【解答】

1. AD : AB = AE : AC = 1 : 3，∠A は共通から，**△ADE ∽ △ABC**.
   相似比は 1 : 3，面積比は $1^2 : 3^2 =$ **1 : 9** である．
   また，△ADE ∽ △ABC より ∠ADE = ∠ABC であるので DE // BC，
   ここから **△FDE ∽ △FBC**.
   相似比は DE : BC = 1 : 3，面積比は $1^2 : 3^2 =$ **1 : 9** である．
2. EF，FB を底辺として考えると EF : FB = 1 : 3 で高さは等しいので △DEF と △ABC の面積比は **1 : 3** になる．
3. △DEF の面積を S とおく．このとき，1. より △FBC = $9S$，2. より △DFB = $3S$ である．また，DF : FC = 1 : 3 より △EFC = $3S$ であるので，四角形 DECB = $S + 3S + 3S + 9S = 16S$.
   ここで，1. より △ADE : △ABC = 1 : 9 なので
   　　四角形 DECB : △ABC = 8 : 9
   となるので，△ABC = $16S \times \dfrac{9}{8} = 18S$.
   よって，△DEF と △ABC の面積比は $S : 18S =$ **1 : 18**.

◀ 念のため，略証をつけておく．
◀ 相似比が $m : n$ のとき，面積比は $m^2 : n^2$
◀ △ADE ∽ △ABC　を証明せず AD : DB = AE : EC から DE // BC を導いても構わない．

どんな三角形にも，重心・内心・外心という特別な点が存在することを学ぶ.

1.　三角形の重心

三角形の面積は，中線によって二等分される.

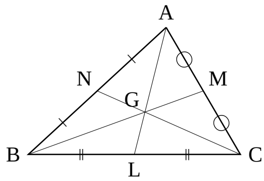
そして，3 本の中線は 1 点で交わる．これを**重心** (center of gravity) という[*2].

重心

$\triangle$ABC の 3 本の中線 AL，BM，CN について，次のことが成り立つ.

(1) AL，BM，CN は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の重心 G に一致する.

(2) AG : GL = 2 : 1, BG : GM = 2 : 1, CG : GN = 2 : 1 である.



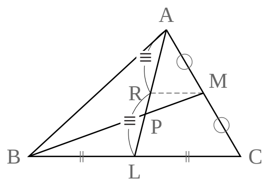
（証明）まず，AL と BM の交点を P，AL と CN の交点を Q とおき，P と Q が一致することを示す.

AL の中点を R とする．$\triangle$ALC について中点連結定理から

MR // BC ……… ②，RM : LC = 1 : 2 ……… ③ になる.

②より，二角相等から $\triangle$MRP ∽ $\triangle$BLP と分かるので

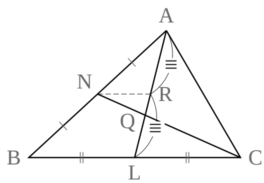
　RP : PL = RM : BL = 1 : 2　　（②と BL = LC より）　　………④



である．次に，$\triangle$ABL について中点連結定理から

NR // BC ……… ⑤，NR : BL = 1 : 2 ……… ⑥ である.

⑤から $\triangle$NRQ ∽ $\triangle$CLQ と分かるので，やはり RQ : QL = 1 : 2 になる．④とあわせて，P と Q は一致することが分かる.



つまり，AL，BM，CN は 1 点で交わる．これを G とおく.

さらに，⑤，④から GL = AL $\times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$AL と分かるので，AG : GL = 2 : 1 と分かる.

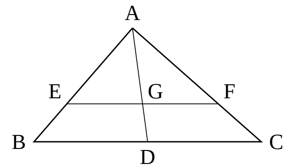
[*2] 直感的には，重さの中心，つり合いの中心が重心である．たとえば，重さが一様な三角形の板を重心で支えると，板は地面に平行になってつり合う.

【練習 14：重心と面積比】

△ABC の重心を G とし，直線 AG と辺 BC の交点を D とする．また，G を通り BC に平行な直線が，辺 AB，AC と交わる点を E，F とする．

(1) 相似な三角形の組を 3 組答え，その相似比を答えなさい．

(2) 四角形 EBDG と △ABC の面積比を答えよ．



【解答】

(1) EF // BC から **△AEG ∽ △ABD**，**△AGF ∽ △ADC**，**△AEF ∽ △ABC** であり，AG : AD = 2 : 3 から，相似比はすべて **2 : 3**．

(2) △ABC $= S$ とおくと，△ABD $= \dfrac{1}{2}S$．△ABD : △AEG $= 3^2 : 2^2$ より，△AEG $= \dfrac{4}{9} \times \dfrac{1}{2}S = \dfrac{2}{9}S$ であるから，四角形 EBDG $= \dfrac{1}{2}S - \dfrac{2}{9}S = \dfrac{5}{18}S$．よって，四角形 EBDG : △ABC $= \dfrac{5}{18}S : S =$ **5 : 18**．

【発展 15：重心と面積比〜重心についての別証明】

△ABC の中線 BM，CN の交点を P とする．△ABC の面積を S とすると，△BCM $=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

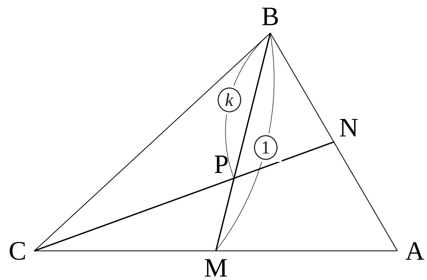
ここで，BM : BP $= 1 : k$ とおくと，△BPC $=$ $\boxed{\text{イ}}$ になる．

同様にして，△BPA $=$ $\boxed{\text{ウ}}$ であり，N は AB の中点であるから △BPN $=$ $\boxed{\text{エ}}$ になる．ここで，

$$\triangle\mathrm{BCN} = \triangle\mathrm{BPC} + \triangle\mathrm{BPN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{エ}}$$

になるから，$k =$ $\boxed{\text{オ}}$ である．

よって，BP : PM $=$ $\boxed{\text{カ}}$: $\boxed{\text{キ}}$ と分かる[*3]．



【解答】 底辺が △ABC の半分だから，△BCM $= \underline{\boldsymbol{\dfrac{S}{2}}}_{(ア)}$ であり，△BPC の底辺を BP と見れば，△BPC $= k$△BCM $= \underline{\boldsymbol{\dfrac{k}{2}S}}_{(イ)}$ になる．

◂ CM を底辺に見る

同様にして，△BPA $= k$△BAM $= \underline{\boldsymbol{\dfrac{k}{2}S}}_{(ウ)}$ であり，△BPN の底辺を BN と見れば，△BPN $= \dfrac{1}{2}$△BPA $= \underline{\boldsymbol{\dfrac{k}{4}S}}_{(エ)}$ になる．ここで

$$\triangle\mathrm{BCN} = \triangle\mathrm{BPC} + \triangle\mathrm{BPN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = \underline{\frac{k}{2}S}_{(イ)} + \underline{\frac{k}{4}S}_{(エ)} = \frac{3k}{4}S$$

$$\Leftrightarrow 2 = 3k \qquad \therefore k = \underline{\boldsymbol{\frac{2}{3}}}_{(オ)}$$

よって，BP : PM $= \dfrac{2}{3} : \left(1 - \dfrac{2}{3}\right) =$ ${}_{(カ)}\underline{\mathbf{2}} : \underline{\mathbf{1}}_{(キ)}$ と分かる．

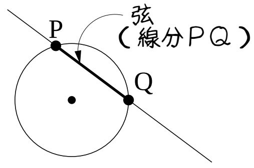
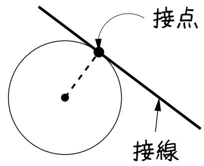
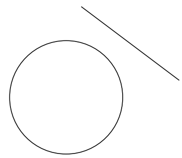
*3 BC の中点を L，BM と AL の交点を P’ とすると，同じように BP’ : P’M $=$ $\boxed{\text{カ}}$: $\boxed{\text{キ}}$ と分かり，P と P’ は一致し，これが重心と分かる．

2.　円の弦・接線

次に学ぶ内心・外心の準備として，円の弦・接線について学ぶ.

A.　円と直線の共有点

円と直線の関係は，共有点の個数によって右の表のようにまとめられる.

円と直線の関係	**交わっている**	**接している**	**離れている**
			
共有点の個数	**2 個**	**1 個**	**0 個**

B.　円の弦－共有点が２つのとき

弦の垂直二等分線について，次のことが成り立つ.

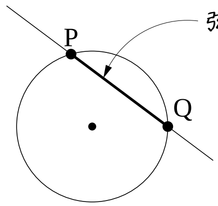
弦の垂直二等分線

円 O と直線 PQ が右のように交わっているとする．このとき

1. 弦 PQ の垂直二等分線は，必ず円の中心を通る.

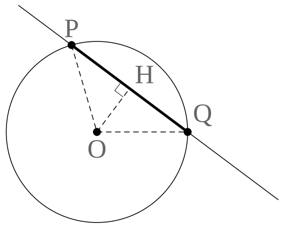
また，逆に，以下も成り立つ.

2. 円の中心を通り弦 PQ に垂直な線は，PQ の中点を通る.
3. 円の中心と弦 PQ の中点を通る直線は，弦 PQ と直交する.



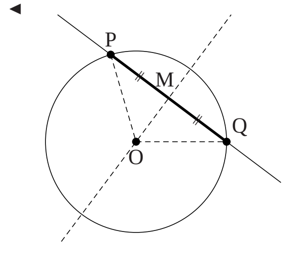
（1. の証明）PQ の垂直二等分線は，P からも Q からも等間隔にある点の集まりであるが，OP = OQ = (円の半径) であるから，O は PQ の垂直二等分線上にある.

（2. の証明）O から PQ へ垂線を引き，その足を H とする.
直角三角形 △OPH と △OQH について，OM は共通，OP = OQ であるから，斜辺ともう 1 辺が等しいので △OPH ≡ △OQH である．つまり，PH = HQ であるから，垂線 PH は弦 PQ の中点を通る.　■



【練習 16：弦の垂直二等分線】
上の【弦の垂直二等分線】の 3. を証明しなさい.

【解答】　PQ の中点を M とする.
△OPM と △OQM について，OM は共通，OP = OQ，PM = MQ より 3 辺が等しいので △OPM ≡ △OQM，つまり ∠OMP = ∠OMQ である.
よって，OM は PQ の垂直二等分線になっている.



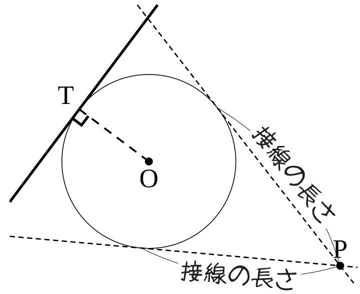
直観的には，直線 OM について線対称であるから，
OM が弦の垂直二等分線になっている.

C.　円の接線－共有点が１つのとき

円の接線

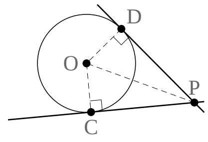
円とその接線について，次のことが成り立つ．

1. 円 O と直線が接点 T で接しているとき，線分 OT は接線と垂直に交わる．
2. 円外の点 P から円へ接線を引くとき，P から接点までの距離を**接線の長さ**という．P からの接線は 2 本引けるが，どちらの接線の長さも等しい．



（1. の証明）接線と OT が垂直に交わらないと仮定する（ ········ ⑦）．
O から接線へ垂線を引き，その足を H とする．H と T は異なるので，H は円周より外側にある．つまり，OT > OH であるが，直角三角形 OTH について斜辺 OH が一番長くないことになり，矛盾である．
よって，仮定⑦は誤りであり，接線と OT は垂直に交わる．■

（2. の証明）右図において，PC = PD を示せばよい．
△POC と △POD について，直線 PC，PD が円 O の接線であることから
∠POC = ∠POD = 90° なので，どちらも直角三角形である．
さらに，PO は共通，OC = OD から斜辺と他の 1 辺が等しいと分かるので，
△POC ≡ △POD になる．よって，PC = PD が示された．■



直観的には，上の図の直線 OP について線対称であるから，接線の長さは等しい．

【練習 17：円と直線】

中心が O である半径 2 の円へ，OP = 5 となる P から接線を 2 本引き，接点を A，B とする．

(1) AB と OP の交点を C とする．△OAP と合同な三角形を 1 つ，相似な三角形を 4 つ答えよ．
（ただし，右図に補助線を引かずに答えること）

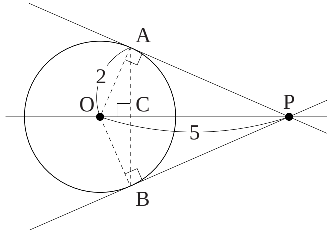
(2) AC，OC の長さをそれぞれ求めよ．

【解答】

(1) OP 共通，OA = OB，PA = PB から，合同な三角形は **△OBP**.
相似な三角形は，すべて，2 角が等しいことから導かれ
直角と ∠APC 共通から **∠OAP ∽ △ACP**,
直角と ∠AOC 共通から **∠OAP ∽ △OCA**,
直角と ∠OPA = ∠BPC から **∠OAP ∽ △BCP**,
直角と ∠AOP = ∠COB から **∠OAP ∽ △OCB**.

(2) △OAP について，三平方の定理より PA = $\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$
△OAP ∽ △OCA において，PO : AO = 5 : 2 であるから
AC = PA × $\frac{2}{5}$ = $\boldsymbol{\frac{2}{5}\sqrt{21}}$，OC = OA × $\frac{2}{5}$ = $\boldsymbol{\frac{4}{5}}$.

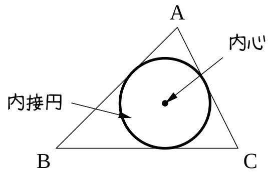
◀ 図は必ず描こう．



円の中心と接点を結ぶと，円の半径と，直角が図の中に現れる．

3.　三角形の内心

A.　内心とは



三角形の 3 つの辺すべてに接する円を，その三角形の**内接円** (inscribed circle) といい，内接円の中心を**内心** (inner center) という

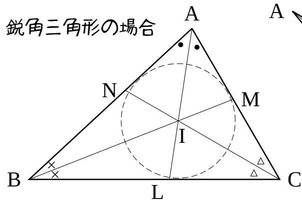
B.　三角形の内心

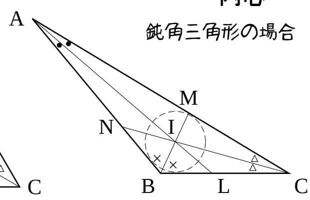
たとえば，辺 AC からも辺 BC からも等距離にあるのは，∠C の二等分線上の点である．同じように考えると，三角形の内心は角の二等分線によって決まる．

内心

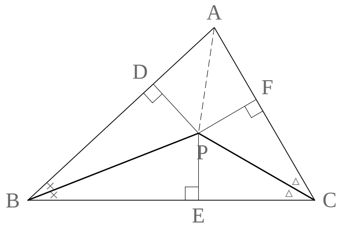
△ABC の 3 本の角の二等分線 AL，BM, CN について，次のことが成り立つ．

- AL，BM，CN は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の内心 I に一致する．





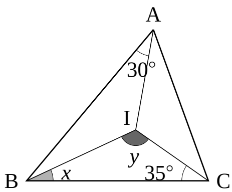
……一般に，内接円と辺の接点は L，M，N のいずれにも一致しないので注意すること．
（△ABC が二等辺三角形のときにだけ，一致することがある）



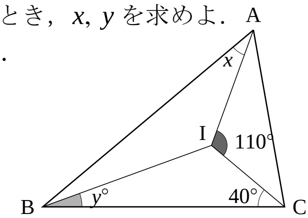
（証明）∠B，∠C の二等分線の交点を P とおく．また，P から辺 AB，辺 BC，辺 CA へ垂線 PD，PE，PF をそれぞれ引く．
まず，△PBD ≡ △PBE である（PB 共通，∠PBD = ∠PBE から斜辺と 1 角が等しい直角三角形になる）から PD = PE ········ ⑧ とわかる．
同様に，△PCE ≡ △PCF から，PE = PF ········ ⑨ である．
△PAD と △PAF について PA 共通，⑧，⑨から PD = PF から斜辺と他の 1 辺が等しい直角三角形と分かるので △PAD ≡ △PAF．つまり，∠PAD = ∠PAF となって AP は ∠A の二等分線と分かる．
以上より，3 本の角の二等分線は 1 点 P で交わり，⑧，⑨から P はどの辺からも等距離にあるとわかるので，三角形の内心 I と P は一致していることがわかる．■

【例題 18】 I が △ABC の内心であるとき，x, y を求めよ．

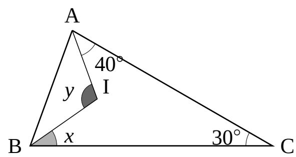
1.



2.



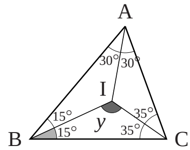
3.



【解答】

1. △ABC について，2(30° + x + 35°) = 180° であるから **x = 15°**，△IBC について，15° + y + 35° = 180° であるから **y = 130°**.
2. △IAC について，110° + x + 40° = 180° であるから **x = 30°**．△ABC について，2(30° + y + 40°) = 180° であるから **y = 20°**,

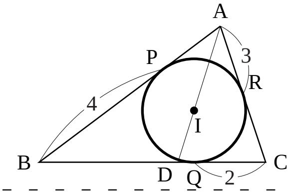
◀ 1. の場合，結局次のようになる．



3. △ABC について，$2(40+x)+30^\circ=180^\circ$ であるから $\boldsymbol{x=35^\circ}$，△IAB について，$y+40^\circ+35^\circ=180^\circ$ であるから $\boldsymbol{y=105^\circ}$.

【例題 19】 右の図において，P，Q，R は内接円と辺の接点であり，D は直線 AI 上にある．

1. 3 辺の長さを全て求めよ．
2. BL の長さを求めよ．
3. AI : IL を求めよ．



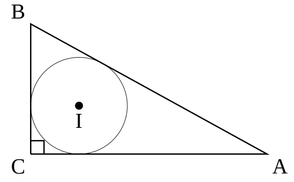
【解答】

1. AP = AR = 3，BQ = BP = 4，CR = CQ = 2 であるから，**AB = 7**，**BC = 6**，**CA = 5**.
2. AD は ∠A の二等分線であるから，BL : LC = BA : AC = 7 : 5 となり，$BL=6\times\dfrac{7}{7+5}=\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$.
3. BI は ∠B の二等分線であるから，AI : IL = AB : BL = $7:\dfrac{7}{2}=\boldsymbol{2:1}$.

C. 内接円の半径を求める

【例題 20】 $b=4,\ c=5$ である右図の三角形について

1. △ABC の面積を求めなさい．
2. △ABC の内接円の半径 r とする．△ABI，△BCI，△CAI の面積は，それぞれ r の何倍か．
3. r を求めなさい．



【解答】

1. 三平方の定理から $a=\sqrt{5^2-4^2}=3$ であるから，$\dfrac{1}{2}\times3\times4=\boldsymbol{6}$
2. △ABI の底辺を AB = 5 とすると，高さは r になるので，△ABI = $\dfrac{1}{2}\times5\times r=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}r}$. 他も同様にして，△BCI = $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}r}$，△CAI = $\boldsymbol{2r}$.
3. △ABC = △BCI + △CAI + △ABI に 1. 2. の結果を代入して

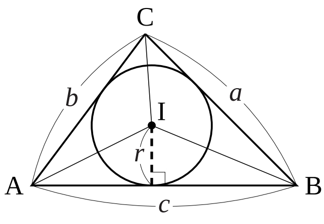
$$6=\frac{5}{2}r+\frac{3}{2}r+2r$$
$$\Leftrightarrow\quad 6=6r\qquad\therefore\ \boldsymbol{r=1}$$

三角形の内接円と面積の関係

三角形の面積 S は，内接円の半径 r を用いて

$$S=\triangle BCI+\triangle CAI+\triangle ABI$$
$$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

と表すことができる．ここで a，b，c は各辺の長さを表す．



この公式は，必要なときに導くことができれば十分である．ただし，三角形とその内接円を見たら「三角形の面積は計算できる」と連想できるようにしよう．

【練習 21：内心と内接円の性質】

AB = 7, AC = 8 である △ABC の点 A から辺 BC へ垂線 AH を引くと，$AH = 4\sqrt{3}$ であったという．また，内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする．

(1) 内接円の半径 r を求めよ．　(2) 線分 BD の長さを求めよ．　(3) 線分 AI の長さを求めよ．

【解答】

(1) 三平方の定理より $BH = \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = 1$, $CH = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$ であるから，BC = 1 + 4 = 5 になる．よって

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 5 \times 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} r \times (7 + 8 + 5)$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{3} = 10r \qquad \therefore \boldsymbol{r = \sqrt{3}}$$

(2) AD は ∠A の二等分線であるから，BD : DC = BA : AC = 7 : 8 となり，$BD = 5 \times \frac{7}{7+8} = \boldsymbol{\frac{7}{3}}$.

(3) $DH = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$ であるから，△ADH に三平方の定理を用いると，

$$AD = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{16 + 432}{9}} = \frac{8\sqrt{7}}{3}.$$

一方，BI は ∠B の二等分線なので，$AI : ID = AB : BD = 7 : \frac{7}{3} = 3 : 1$．よって，$AI = \frac{8\sqrt{7}}{3} \times \frac{3}{3+1} = \boldsymbol{2\sqrt{7}}$.

【暗記 22：接線の長さ】

AB = 8, BC = 7, CA = 9 である △ABC の内接円が，辺 AB，BC，CA と P，Q，R で接している．このとき，AP，BQ，CR の長さを求めよ．

【解答】　AP = AR = x, BQ = BP = y, CR = CQ = z とおくと

$$\begin{cases} x + y = AB = 8 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y + z = BC = 7 & \cdots\cdots\cdots ② \\ z + x = CA = 9 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

である．① + ② + ③ によって

$$2(x + y + z) = 24 \Leftrightarrow x + y + z = 12 \qquad \cdots\cdots ④$$

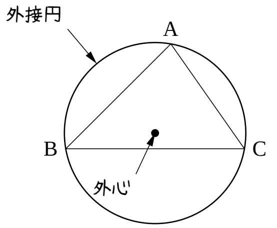
④ − ② から $x = 5$，④ − ③ から $y = 3$，④ − ① から $z = 4$ である．

よって，**AP = 5**，**BQ = 3**，**CR = 4**.

4.　三角形の外心

A.　外心とは

三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円** (circumscribed circle) といい，外接円の中心を**外心** (circumcenter) という．



B. 三角形の外心

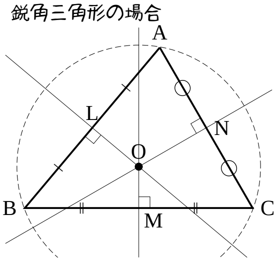
辺の垂直二等分線上のどの点も，その両側の頂点からの距離が等しい．そのため，三角形の外心は辺の垂直二等分線によって決まる．

外心

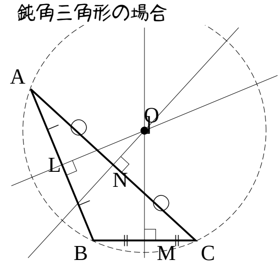
$\triangle$ABC の 3 本の垂直二等分線について，次のことが成り立つ．

· 3 本は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の外心 O に一致する．

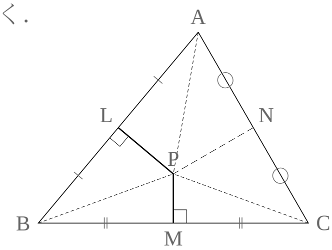
鋭角三角形の場合



鈍角三角形の場合

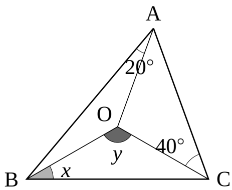


（証明）辺 AB の垂直二等分線，辺 BC の垂直二等分線の交点を P とおく．
$\triangle$PAL と $\triangle$PBL は PL 共通，AL = LB，$\angle$PLA = $\angle$PLB = 90° から 2 辺とその間の角が等しい．よって，$\triangle$PAL $\equiv$ $\triangle$PBL であるから，AL = BL．
同様に $\triangle$PBM $\equiv$ $\triangle$PCM から BL = CL．
$\triangle$PAN と $\triangle$PCN について，PN 共通，AN = NC，PA = PC から 3 辺が等しいので $\triangle$PAN $\equiv$ $\triangle$PCN になる．よって $\angle$PNA = $\angle$PNC となり，$\angle$PNA = $\angle$PNC = 90° である．つまり，PN は辺 AC の垂直二等分線に一致し，3 本の垂直二等分線は 1 点 P で交わる．
さらに，PA = PB = PC から P は $\triangle$ABC の外心に一致する． ■

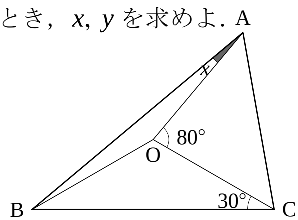


【例題 23】 O が $\triangle$ABC の外心であるとき，x, y を求めよ．

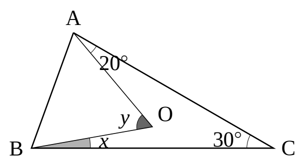
1.



2.



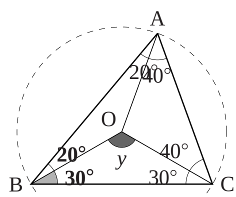
3.



【解答】

1. OA = OC より $\angle$OAC = 40°，OA = OB より $\angle$OBA = 20° になる．$\triangle$ABC について，$2(20°+x+40°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 30°}$，$\triangle$OBC について，$y + 2 \times 30° = 180°$ であるから $\boldsymbol{y = 120°}$．
2. $\triangle$OAC について，$80° + 2\angle\text{OAC} = 180°$ であるから $\angle$OAC = $\angle$OCA = 50°．よって，$\triangle$ABC について，$2(x + 30° + 50°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 10°}$．
3. $\triangle$OAC について，OA = OC より $\angle$OCA = 20°，よって，$x = \angle\text{OCB} = 30° - 20° = $ **10°**．$\triangle$ABC について，$2(\angle\text{OAB} + 10° + 20°) = 180°$ であるから $\angle$OAB = 60° であるから，$\boldsymbol{y = 60°}$．

◀ 1. の場合，結局次のようになる．



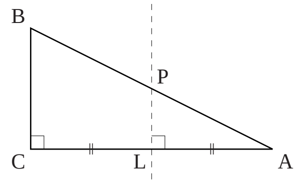
◀ （別解）円周角の定理より，$y = 2\angle\text{ACB} = 60°$．

C.　直角三角形の外心

【暗記 24：直角三角形の外心】
$\angle C = 90^\circ$ の直角三角形において，辺 CA，CB の二等分線は辺 AB の中点を通ることを示せ．

【解答】　辺 CA の中点を L とし，辺 CA の垂直二等分線と辺 AB の交点を P とする．$\angle ALP = \angle ACB = 90^\circ$ より LP // CB であるから，AP : PB = AL : LC = 1 : 1，よって P は辺 AB の中点である．

同様に，辺 CB の中点を M，辺 CB の垂直二等分線と辺 AB の交点を Q とすると，MQ // CA から Q も辺 AB の中点になる．■

◀ 

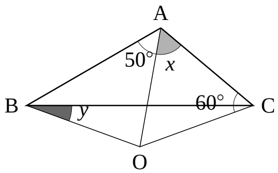
直角三角形の外心

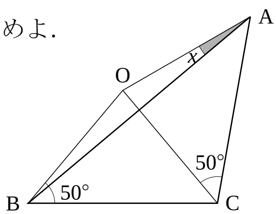
直角三角形の外心は，斜辺の中点に一致する．結果，外接円の半径は斜辺の半分に一致する．

D.　鈍角三角形の外心

鈍角三角形の外心は，必ず三角形の外になる．詳しくは「円周角の定理の逆」で学ぶ．

【例題 25】　O が △ABC の外心であるとき，x, y を求めよ．

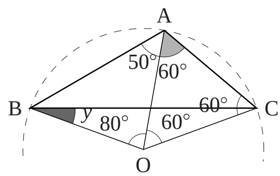
1. 

2. 

【解答】　△OAB，△OBC，△OCA がすべて二等辺三角形であるから

1. △OAC について，$x = \angle OCA =$ **60°**，$\angle AOC = 60^\circ$．また，△OAB について，$\angle OAB = 50^\circ$ なので $\angle AOB = 80^\circ$，よって $\angle BOC = 140^\circ$ であり，△OBC を考えて $y = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 140^\circ) = \mathbf{20^\circ}$ になる．
2. △OAC について，$\angle AOC = 180^\circ - 50^\circ \times 2 = 80^\circ$，△OBC についても $\angle BOC = 80^\circ$，よって $\angle AOB = 160^\circ$ であり，△OAB を考えて，$\boldsymbol{x = 10^\circ}$．

◀ 1. の場合，結局次のようになる．



E.　外接円の半径を求める

外接円の半径を求めるには，数学 I で学ぶ**正弦定理** (sine theorem) を用いる．

正弦定理

△ABC の外接円の半径 R について $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ が成り立つ．

ただし，直角三角形の場合は外接円の半径は斜辺の半分に一致し，正弦定理は必要ない．

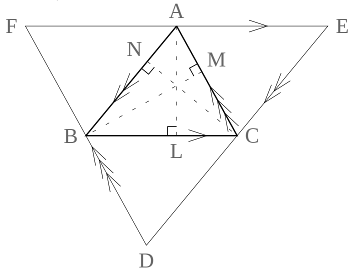
5. 三角形の五心

A. 垂心

垂心

△ABC の 3 本の垂線は必ず 1 点で交わる.，その交点を**垂心** (orthocenter) という.

（証明）点 A，B，C から下ろした垂線の足を，それぞれ L，M，N とおく.



次に，点 A を通り辺 BC に平行な直線，点 B を通り辺 CA に平行な直線，点 C を通り辺 AB に平行な直線を引き，この 3 直線で右図のように △DEF を作る.

すると，四角形 ABCE，ACBF は平行四辺形になるので BC = AE，BC = AF と分かり，A は線分 EF の中点である．さらに，∠EAL = ∠ALB = 90° から，線分 AL は線分 EF の垂直二等分線になる.

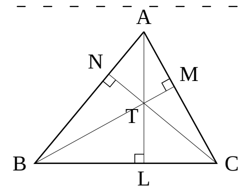
同様に，線分 BM は線分 DF の垂直二等分線，線分 CN は線分 DE の垂直二等分線になっている.

△DEF の 3 本の垂直二等分線は外心で交わるから，AL，BM，CN は 1 点で交わることが示された.

■

「垂線が 1 点で交わること」の別証明を，後に学ぶ.

【例題 26】 右図の三角形について次の問いに答えよ.



1. 右図に相似な三角形は何組あるか.
（ただし，補助線を引かないものとする）
2. ∠CAL = 25°，∠ABM = 20° のとき，∠TLB を求めよ.

【解答】

1. △ABM ∽ △ACN，△BCN ∽ △BAL，△CAL ∽ △CBM，△ATN ∽ △CTL，△BTN ∽ △CTM，△BTL ∽ △ATM の **6** 組ある.
2. △ABM ∽ △ACN より ∠ACN = ∠ABM = 20° なので，△ACL に着目すれば，∠TLB = 90° − 20° − 25° = **45°**.

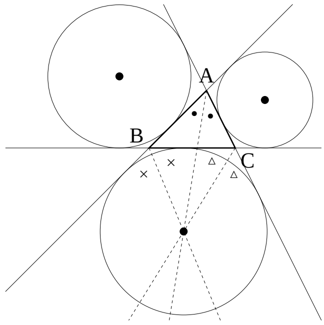
B. 三角形の傍心・傍接円

傍心

△ABC について，∠B の外角の二等分線，∠C の外角の二等分線と，∠A の（内角の）二等分線は必ず 1 点で交わる．これを傍心という．

A，B，C を入れ替えて考えれば，どんな三角形にも**傍心** (excenter) は 3 つ存在する．

さらに，直線 AB，BC，CA のすべてに接する円は，△ABC の外側に 3 つ存在し，これを**傍接円** (escribed circle) という．傍心は，傍接円の中心に一致する．



（証明）は次の例題を参照のこと

【練習 27：傍心と傍接円】

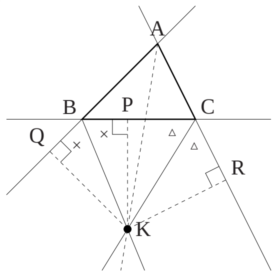
△ABC について，∠B の外角の二等分線，∠C の外角の二等分線の交点を E とする．直線 AE は，∠A の二等分線になることを示せ．

【解答】 E から辺 BC，直線 AB，AC へ引いた垂線の足を，それぞれ P，Q，R とする．

直角三角形 △EQB と △EPB について，EB 共通，∠EBQ = ∠EBP より，斜辺と 1 角が等しいから △EQB ≡ △EPB となって EQ = EP ········ ⑤.

同様に，△ERC ≡ △EPC から ER = EP ········ ⑥ である．

直角三角形 △EAQ と △EAR について，EA 共通，⑤，⑥ より EQ = ER であるから，△EAQ ≡ △EAR になる．よって，∠EAQ = ∠EAR と分かるので，EA は ∠A の二等分線に一致することが示された． ■



また，⑤，⑥から EP = EQ = ER であるので，E を中心に AB，BC，CA と交わる円を描けることも示されている．