平方根

目次

1 準備

どのような数が, ある数の 2 乗になっているか, ある程度分かっておこう.

1. 次の計算をしなさい.

- $1^2 = \mathbf{1}$
- $2^2 = \mathbf{4}$
- $(-3)^2 = \mathbf{9}$
- $(-4)^2 = \mathbf{16}$
- $5^2 = \mathbf{25}$
- $6^2 = \mathbf{36}$
- $7^2 = \mathbf{49}$
- $(-8)^2 = \mathbf{64}$
- $(-9)^2 = \mathbf{81}$
- $10^2 = \mathbf{100}$
- $11^2 = \mathbf{121}$
- $12^2 = \mathbf{144}$
- $(-13)^2 = \mathbf{169}$
- $(-14)^2 = \mathbf{196}$
- $15^2 = \mathbf{225}$
- $16^2 = \mathbf{256}$

エラトステネスのふるい

— 100 までの素数を全て求める —

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

まず 1 を消す（1 は素数ではない）.
次に 2 以外の 2 の倍数を消す.
次に 3 以外の 3 の倍数を消す.
次に 5 以外の 5 の倍数を消す.
次に 7 以外の 7 の倍数を消す.

これで 100 までの素数だけ残る. 上の図では 3 の倍数まで消してある.
このようにして素数を見つける方法を, エラトステネスのふるいという.
(エラトステネスはギリシアの数学者, 275 ? B.C. - 195 B.C.)

ちなみに, 100 までの素数を求めるためだけなら, 11 の倍数は消す必要が無い. なぜなら, $22, 33, \cdots, 99$ はいずれも既に消されているから.

10 ページ以降に備え, 素因数分解を練習しよう.

2.

- 15 は 3 で {割り切れる / 割り切れない}. よって, 3 は 15 の {倍数 / 約数} である.
- どんな数も, 必ず $\boxed{\mathbf{1}}$ で割り切れる. また, その数自身で {割り切れる / 割り切れない}.
- 約数を $\boxed{\mathbf{2}}$ つしか持たない数を**素数**という（1 は素数ではない）.

3. 次の中から**素数**を選び, ○をつけなさい.

$$5,\quad 8,\quad 14,\quad 19,\quad 25,\quad 31$$

素因数分解の方法

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$24 = 2^3 \times 3$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 75 \\ \hline 5 & 15 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$75 = 5^2 \times 3$

> 整数を **素数だけの積（掛け算）** で表すことを**素因数分解**という.
> **どの整数の素因数分解も, 一通りに決まる.**

4. 次の数を素因数分解しなさい.

(1) 12　(2) 18　(3) 48　(4) 60　(5) 90　(6) 198

$\mathbf{2^2 \times 3}$　$\mathbf{3^2 \times 2}$　$\mathbf{2^4 \times 3}$　$\mathbf{2^2 \times 3 \times 5}$　$\mathbf{2 \times 3^2 \times 5}$　$\mathbf{2 \times 3^2 \times 11}$

2 平方根 — 2 乗する前はいくつ？

2.1 平方根とは何か、根号とは何か

■平方根の定義 — 2 乗のもと

1. (1) $\left(\mathbf{2} \right)$ も $\left(\mathbf{-2} \right)$ も 2 乗すると 4 になる.

(2) $\left(\mathbf{5} \right)$ も $\left(\mathbf{-5} \right)$ も 2 乗すると 25 になる.

(3) 2 乗すると 9 になる数は $\left(\mathbf{3} \right)$, $\left(\mathbf{-3} \right)$ の 2 つある.

(4) 2 乗すると $\dfrac{1}{4}$ になる数は $\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \right)$, $\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \right)$ の 2 つある.

2 乗すると 25 になる数を **25 の平方根**という.

2. 25 の平方根を全て答えなさい. $\left(\mathbf{5, -5} \right)$

2 乗すると 49 になる数を **49 の平方根**という.

3. 49 の平方根を全て答えなさい. $\left(\mathbf{7, -7} \right)$

平方 $\Longleftrightarrow$ 2 乗　根 $\Longleftrightarrow$ ねっこ, もと つまり**平方根** $\Longleftrightarrow$ **2 乗（される前）のもと**

4. (1) 36 の平方根を全て書くと $\left(\mathbf{6, -6} \right)$ である.

(2) 64 の $\left(\textbf{平方根} \right)$ のうち, 正の値は 8, 負の値は -8 である.

(3) 100 の平方根のうち, 正の値は $\boxed{\mathbf{10}}$, 負の値は $\boxed{\mathbf{-10}}$ である.

(4) $\dfrac{1}{9}$ の平方根のうち, 正の値は $\boxed{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}$, 負の値は $\boxed{-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}$ である.

(5) 16 の正の $\left(\textbf{平方根} \right)$ は 4 である. 25 の負の平方根は $\boxed{\mathbf{-5}}$ である.

(6) $\dfrac{1}{16}$ の正の平方根は $\boxed{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}}$ である. $\dfrac{4}{25}$ の負の平方根は $\boxed{-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}$ である.

(7) 面積 49cm^2 の正方形の 1 辺は $\boxed{\mathbf{7}}$ cm である.

(8) 面積 64m^2 の正方形の 1 辺は $\boxed{\mathbf{8}}$ m, 面積 $\dfrac{4}{9}\text{cm}^2$ の正方形の 1 辺は $\boxed{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}$ cm である.

(9) 121 の平方根は $\boxed{\mathbf{11}}$, $\boxed{\mathbf{-11}}$ であり, 196 の平方根は $\boxed{\mathbf{14}}$, $\boxed{\mathbf{-14}}$ である.

■$\sqrt{}$（根号）の定義 — 正の平方根を表す記号

$\boxed{\sqrt{x} \text{ で } x \text{ の 正の 平方根を表す.（負の平方根は } -\sqrt{x}\text{）}}$

$\sqrt{}$ のことを,「**根号**」という.

5. **例 1**　$\sqrt{16}$ とは「16 の正の平方根」のこと, つまり $\sqrt{16} = 4$.

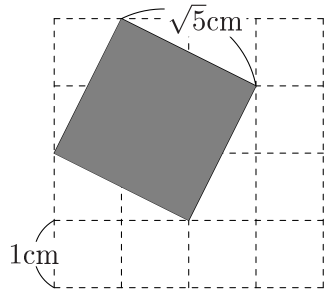
(1) $\sqrt{49} = \mathbf{7}$　　(2) $\sqrt{36} = \mathbf{6}$　　(3) $\sqrt{\dfrac{1}{9}} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(4) $\sqrt{1} = \mathbf{1}$　　(5) $-\sqrt{4} = \mathbf{-2}$　　(6) $-\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \mathbf{-\dfrac{3}{2}}$

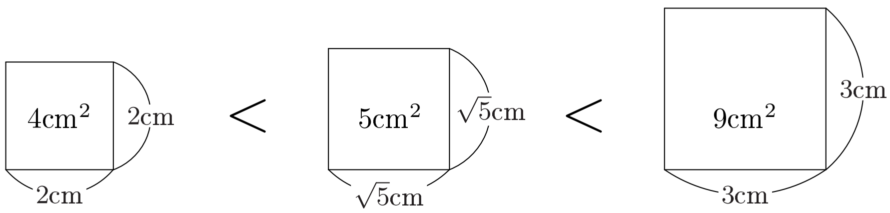
(7) 100 に（ **根号** ）をつけた $\sqrt{100}$ は, 100 の（ **正の平方根** ）を意味し, $\boxed{\mathbf{10}}$ に等しい.

■$\sqrt{5}$ — 2 乗すると 5 になる数？　$\boxed{\sqrt{5}\text{ はどんな数？}}$

2 乗すると 5 になる数は「**ある**」



右の図の正方形は面積が 5 cm^2 なので（四角の数を数えてみよう）,
1 辺の長さは「2 乗すると 5 になる数（単位 cm）」$= \sqrt{5}$ cm である.
では, $\sqrt{5}$cm とは, どれくらいの長さだろうか？



上の図より, $\sqrt{5}$cm は 2cm より長く 3cm より短い, つまり $2 < \sqrt{5} < 3$

6. (1) 1 辺 $\sqrt{3}$cm の正方形の面積は（ **3** ）cm^2 であり, 1 辺が 2cm の正方形の面積より $\left\{\begin{array}{l}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{array}\right\}$.

つまり, $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{3}\text{cm は 2cm より長い}\\ \sqrt{3}\text{cm は 2cm より短い}\end{array}\right\}$.

(2) 1 辺 $\sqrt{7}$cm の正方形の面積は（ **7** ）cm^2 であり, 1 辺が 3cm の正方形の面積より $\left\{\begin{array}{l}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{array}\right\}$.

つまり, $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{7}\text{cm は 3cm より長い}\\ \sqrt{7}\text{cm は 3cm より短い}\end{array}\right\}$ であり, $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{7} > 3\\ \sqrt{7} < 3\end{array}\right\}$.

(3) 1 辺（ $\boldsymbol{\sqrt{29}}$ ）cm の正方形の面積は, 29cm^2 であり, 1 辺が 5cm の正方形の面積より $\left\{\begin{array}{l}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{array}\right\}$.

7. 大きさ・長さの大きい方に ○ を付けなさい.

(1) $\left\{\begin{array}{l}\text{1 辺 3cm の正方形の面積}\\ \text{1 辺 }\sqrt{6}\text{cm の正方形の面積}\end{array}\right\}$　　(2) $\left\{\begin{array}{l}3\\ \sqrt{6}\end{array}\right\}$　　(3) $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{20}\\ 5\end{array}\right\}$　　(4) $\left\{\begin{array}{l}6\\ \sqrt{30}\end{array}\right\}$

2.2 平方根の大きさ比べ

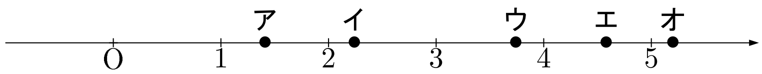
1.

- $\sqrt{5}$ は $\sqrt{6}$ よりも $\left\{\begin{array}{l}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{array}\right\}$. $\sqrt{13}$ は $\sqrt{11}$ よりも $\left\{\begin{array}{l}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{array}\right\}$. $\sqrt{204}$ は $\sqrt{203}$ よりも $\left\{\begin{array}{l}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{array}\right\}$.
- 3 は $\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}$ に等しいので, $\sqrt{10}$ よりも $\left\{\begin{array}{l}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{array}\right\}$. また, $\sqrt{11}$ よりも $\left\{\begin{array}{l}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{array}\right\}$.
- 5 は $\sqrt{\boxed{\mathbf{25}}}$ に等しいので, $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{26}\\ \sqrt{23}\end{array}\right\}$ よりも大きく, $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{27}\\ \sqrt{24}\end{array}\right\}$ よりも小さい.
- 3 は $\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}$ に等しく, 4 は $\sqrt{\boxed{\mathbf{16}}}$ に等しい. だから, $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{7}\\ \sqrt{13}\end{array}\right\}$ と $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{17}\\ \sqrt{15}\end{array}\right\}$ は 3 より大きく 4 より小さい.

2. 値の大きい方に ○ を付けなさい.

(1) $\left\{\begin{array}{c}\sqrt{18}\\ \sqrt{13}\end{array}\right\}$ (2) $\left\{\begin{array}{c}\sqrt{10}\\ 3\end{array}\right\}$ (3) $\left\{\begin{array}{c}4\\ \sqrt{18}\end{array}\right\}$ (4) $\left\{\begin{array}{c}\sqrt{7}\\ 3\end{array}\right\}$ (5) $\left\{\begin{array}{c}6\\ \sqrt{34}\end{array}\right\}$ (6) $\left\{\begin{array}{c}\sqrt{24}\\ 5\end{array}\right\}$

3. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{21}$ は, 数直線上のアからオのどれかと一致する. 次の $\boxed{}$ に, **アからオで答え**なさい.



- $\sqrt{5}$ は 2 より大きく 3 より小さいので, 数直線の $\boxed{\text{イ}}$ に一致する.
- $\sqrt{2}$ は数直線の $\boxed{\text{ア}}$ に一致し, $\sqrt{21}$ は数直線の $\boxed{\text{エ}}$ に一致する.

4.

(1) $\left\{\begin{array}{l}a=6\\ a=3\end{array}\right\}$ のとき, $\sqrt{a}$ は 2 より大きい. $1<\sqrt{a}<2$ となる a の値には $\left\{\begin{array}{l}a=3\\ a=5\end{array}\right\}$ がある.

(2) $\sqrt{5}<\sqrt{a}<\sqrt{10}$ を満たす整数 a を全て求めなさい.

6, 7, 8, 9

(3) $2<\sqrt{a}<3$ を満たす整数 a を全て求めなさい.

5, 6, 7, 8

(4) $4<\sqrt{a}<5$ を満たす整数 a は何個あるか.

8 個（17 から 24 まで）

(5) $\left\{\begin{array}{l}a=6\\ a=3\end{array}\right\}$ のとき, $\sqrt{2a}$ は 3 より大きい. また, $\left\{\begin{array}{l}a=2\\ a=4\end{array}\right\}$ ならば $2<\sqrt{3a}<3$ を満たす.

(6) $5<\sqrt{2a}<6$ を満たす整数 a を全て求めなさい.

13, 14, 15, 16, 17

(7) $3<\sqrt{3a}<5$ を満たす整数 a を全て求めなさい.

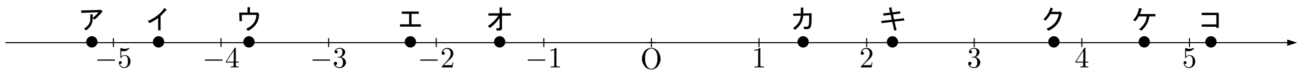
4, 5, 6, 7, 8

2.3　負の平方根

1. (1) $\sqrt{2}$ の値は, $\left\{\begin{array}{l}1 \text{ と } 2\\ 2 \text{ と } 3\end{array}\right\}$ の間にある．だから, $-\sqrt{2}$ の値は $\left\{\begin{array}{l}-2 \text{ と } -1\\ -3 \text{ と } -2\end{array}\right\}$ の間にある．

(2) $\sqrt{7}$ は 2 より $\left\{\begin{array}{l}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{array}\right\}$．だから, $-\sqrt{7}$ は -2 より $\left\{\begin{array}{l}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{array}\right\}$．

2. $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{21}$ は, 数直線上のアからコのどれかと一致する．次の $\boxed{}$ に, アからコで答えなさい．



- $\sqrt{5}$ は 2 と 3 の間なので, $-\sqrt{5}$ は -3 と -2 の間, つまり $-\sqrt{5}$ は数直線の $\boxed{\text{エ}}$ に一致する．
- $-\sqrt{2}$ は数直線の $\boxed{\text{オ}}$ に一致し, $-\sqrt{21}$ は数直線の $\boxed{\text{イ}}$ に一致する．

−(マイナス) をつけると大小が逆転する, つまり, $\boldsymbol{a > b \Rightarrow -a < -b}$

3. 値の大きい方に ○ を付けなさい．

(1) $\left\{\begin{array}{l}-\sqrt{18}\\ -\sqrt{13}\end{array}\right\}$　(2) $\left\{\begin{array}{l}-\sqrt{42}\\ -\sqrt{53}\end{array}\right\}$　(3) $\left\{\begin{array}{l}-3\\ -\sqrt{8}\end{array}\right\}$　(4) $\left\{\begin{array}{l}-5\\ -\sqrt{27}\end{array}\right\}$　(5) $\left\{\begin{array}{l}-4\\ -\sqrt{14}\end{array}\right\}$　(6) $\left\{\begin{array}{l}-6\\ -\sqrt{34}\end{array}\right\}$

4. (1) $\left\{\begin{array}{l}a=6\\ a=3\end{array}\right\}$ のとき, $-\sqrt{a}$ は -2 より大きい．$-2<-\sqrt{a}<-1$ となる a の値には $\left\{\begin{array}{l}a=2\\ a=5\end{array}\right\}$ がある．

(2) 整数 a のうち, $-3<-\sqrt{a}<-2$ となる a を全て求めなさい．

$\boldsymbol{8, 7, 6, 5}$

(3) 整数 a のうち, $-2<-\sqrt{a}<0$ となる a を全て求めなさい．

$\boldsymbol{3, 2, 1}$

5. 例に倣って, 根号を含む式を簡単にしなさい．

例 2　$\sqrt{(-4)^2}=\sqrt{16}=4$,　$-\left(\sqrt{\dfrac{1}{9}}\right)^2=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=-\dfrac{1}{9}$　（実は, 計算するまでもない）

(1) $\sqrt{5^2}=\boldsymbol{5}$　(2) $\sqrt{(-2)^2}=\boldsymbol{2}$　(3) $-\sqrt{(-3)^2}=\boldsymbol{-3}$

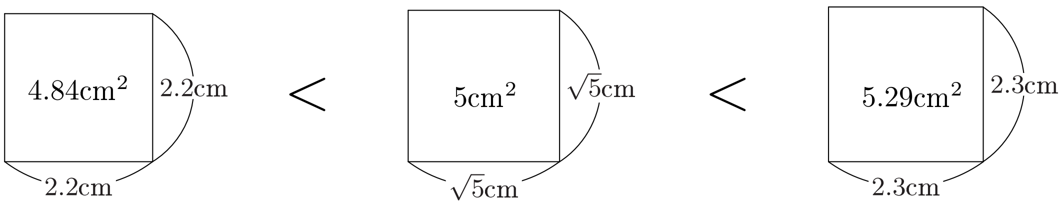
(4) $-\left(\sqrt{9}\right)^2=\boldsymbol{-9}$　(5) $(\sqrt{4})^2=\boldsymbol{4}$　(6) $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

例 3　$\left(\sqrt{5}\right)^2=5$,　$\left(-\sqrt{5}\right)^2=5$　（$\sqrt{5}$ も $-\sqrt{5}$ も, もともと 2 乗すれば 5 になる数．）

(1) $-\left(\sqrt{7}\right)^2=\boldsymbol{-7}$　(2) $\left(-\sqrt{\dfrac{3}{8}}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$　(3) $-\left(-\sqrt{2}\right)^2=\boldsymbol{-2}$

(4) $-\sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2}=\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}}$　(5) $(\sqrt{8})^2=\boldsymbol{8}$　(6) $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

■$\sqrt{5}$ の大きさをもっと正確に　もっと細かく正方形を考えてみよう.



つまり, $2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ であり, $\sqrt{5} = 2.2\cdots$

> このように計算した結果, 次の値になることが知られている.
>
> $\boldsymbol{\sqrt{2} = 1.41421356\cdots}$　「ひとよひとよにひとみごろ（一夜一夜に人見ごろ)」と覚える
>
> $\boldsymbol{\sqrt{3} = 1.7320508\cdots}$　「ひとなみにおごれや（人並みにおごれや)」と覚える
>
> $\boldsymbol{\sqrt{5} = 2.2360679\cdots}$　「ふじさんろくおうむなく（富士山麓オウム鳴く)」と覚える
>
> この 3 つの値は覚えておくと, 大体の値が簡単に計算できて便利.
> また, これらの小数部分は**無限に数字が続き**, **数字は循環しない**. $\dfrac{2}{3} = 0.6666\cdots$ などとは異なる.
> (整数や分数にならない他の平方根も同じ — 例えば $\sqrt{7} = 2.6457513110645905905016157536\cdots$)

(やってみよう) 2.2360679 の 2 乗を, 電卓で計算してみよう.

1. 3.2 は $\sqrt{\boxed{10.24}}$ に等しいので, $\sqrt{10}$ より $\left\{\begin{matrix}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{matrix}\right\}$. 3 は $\sqrt{\boxed{9}}$ に等しいので, $\sqrt{\dfrac{20}{3}}$ より $\left\{\begin{matrix}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{matrix}\right\}$.
また, $\dfrac{3}{2}$ は $\sqrt{\boxed{\dfrac{9}{4}}}$ に等しいので, $\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ より $\left\{\begin{matrix}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{matrix}\right\}$.

2. 大きさ・長さの大きい方に ○ を付けなさい.

(1) $\left\{\begin{matrix}\sqrt{\dfrac{9}{2}}\\ 4\end{matrix}\right\}$　(2) $\left\{\begin{matrix}\dfrac{5}{3}\\ \sqrt{\dfrac{7}{2}}\end{matrix}\right\}$　(3) $\left\{\begin{matrix}\sqrt{3}\\ 3\end{matrix}\right\}$　(4) $\left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{\dfrac{1}{2}}\end{matrix}\right\}$

3. 次の値について, 大きさ・長さの大きい順に並べ, （ア）～（ウ）で答えなさい.

(1)（ア）1 辺 $\dfrac{3}{2}$cm の正方形の面積
（イ）1 辺 $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$cm の正方形の面積
（ウ）1 辺 $\sqrt{2}$cm の正方形の面積

$\boxed{ア} > \boxed{ウ} > \boxed{イ}$

(2)（ア）1cm
（イ）$\sqrt{\dfrac{7}{3}}$cm
（ウ）$\dfrac{5}{2}$cm

$\boxed{ウ} > \boxed{イ} > \boxed{ア}$

(3)（ア）$\sqrt{\dfrac{5}{3}}$
（イ）$\sqrt{3}$
（ウ）2

$\boxed{ウ} > \boxed{イ} > \boxed{ア}$

4. 大きい方に ○ を付けなさい.

(1) $\left\{\begin{matrix}-4\\ -\sqrt{5}\end{matrix}\right\}$　(2) $\left\{\begin{matrix}-\sqrt{3}\\ -\dfrac{5}{2}\end{matrix}\right\}$　(3) $\left\{\begin{matrix}-2\\ -\sqrt{\dfrac{10}{3}}\end{matrix}\right\}$　(4) $\left\{\begin{matrix}-\dfrac{1}{2}\\ -\sqrt{\dfrac{1}{2}}\end{matrix}\right\}$　(5) $\left\{\begin{matrix}-\sqrt{\dfrac{7}{3}}\\ -\dfrac{7}{3}\end{matrix}\right\}$

2.4　有理数と無理数

分数で書ける数を**有理数**という．分数で書けない数を**無理数**という．
無理数と有理数をまとめて，**実数**という．イメージとしては，**数直線上の数全て**を実数と思えばよい．

- **実数**
  - **有理数**
    - 整数
      - 正の整数（**自然数**）……… $3,\ 5$ など
      - 0
      - 負の整数 ……………… $-3,\ -5$ など
    - 整数でない有理数
      - 有限小数 …… $3.3,\ -5.2,\ \dfrac{5}{4},\ -\dfrac{3}{2}$ など
      - 循環小数（無限小数）…… $\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{5}{7}$ など
  - **無理数** ………… 循環しない無限小数（無限小数）…… $\sqrt{3},\ -\sqrt{7},\ \pi$ など

整数も小数も，分数で表すことができる $\left(3 = \dfrac{3}{1},\ 4.23 = \dfrac{423}{100}\right)$ ので，有理数である．
有理数の小数部分は，無いか，無限に続かないか，無限に続いても同じ数の繰り返しである（つまり，循環する）．
平方根は，小数部分が繰り返されず**分数で表せない**．全ての無理数は，小数部分が繰り返されない．
無理数には，平方根の他に，円周率 π などがある．

1. 数のリスト $\boxed{\mathbf{4,\ \sqrt{3},\ \dfrac{5}{3},\ \sqrt{4},\ -\sqrt{5},\ -0.45,\ \pi+1,\ 3\dfrac{2}{5},\ 0}}$ について，

(1) このうち無理数は $\left(\ \mathbf{\sqrt{3}, -\sqrt{5}, \pi+1}\ \right)$，有理数は $\left(\ \mathbf{4, \dfrac{5}{3}, \sqrt{4}, -0.45, 3\dfrac{2}{5}, 0}\ \right)$ である．

(2) このうち無限小数は $\left(\ \mathbf{\sqrt{3}, \dfrac{5}{3}, -\sqrt{5}, \pi+1}\ \right)$，自然数は $\left(\ \mathbf{4, \sqrt{4}}\ \right)$ である．

2. $\dfrac{2}{11}$ は $0.181818\cdots$ であり，無限に"18"を繰り返す．そこでこの循環小数を $0.\dot{1}\dot{8}$ と書く．
他に，例えば $\dfrac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$，$\dfrac{1}{7} = 0.14285714285714\cdots = 0.\dot{1}4285\dot{7}$，$\dfrac{14}{11} = 1.272727\cdots = 1.\dot{2}\dot{7}$．
以下も同じように循環小数で表せ．

(1) $\dfrac{7}{9}$　　(2) $\dfrac{14}{33}$　　(3) $\dfrac{3}{13}$　　(4) $\dfrac{38}{27}$

$\mathbf{0.\dot{7}}$　　$\mathbf{0.\dot{4}\dot{2}}$　　$\mathbf{0.\dot{2}3076\dot{9}}$　　$\mathbf{1.\dot{4}0\dot{7}}$

3. $0.4343\cdots = 0.\dot{4}\dot{3}$ は循環小数なので，ある分数と等しいはずである．その分数を x とおく．
x を $\boxed{\mathbf{100}}$ 倍すると $43.434343\cdots$ になり，これは $x = 0.434343\cdots$ に $\boxed{\mathbf{43}}$ を足したものと等しい．
よって，$100x = 43 + x$ となるので，$x = \dfrac{43}{99}$ と求められる．同様にして，以下も分数で表せ．

(1) $0.\dot{3}\dot{9}$　　(2) $0.\dot{5}$　　(3) $0.\dot{3}1\dot{5}$　　(4) $1.\dot{5}8\dot{5}$

$\mathbf{\dfrac{13}{33}}$　　$\mathbf{\dfrac{5}{9}}$　　$\mathbf{\dfrac{35}{111}}$　　$\mathbf{\dfrac{176}{111}}$

3 まとめその1

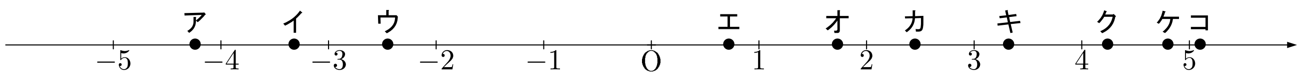
1.

- $\sqrt{7}$ を 7 の正の $\Big($ **平方根** $\Big)$ といい，記号 $\sqrt{}$ を $\Big($ **根号** $\Big)$ という．
- $\sqrt{14}$ は 14 の $\Big($ **正** $\Big)$ の平方根であり，$\boxed{-\sqrt{7}}$ は，7 の負の平方根である．
- $\sqrt{5}$ も $-\pi$ も，$\dfrac{2}{3}$ と同じように無限小数だが，$\sqrt{5}$ と $-\pi$ は $\Big($ **無理数** $\Big)$，$\dfrac{2}{3}$ は $\Big($ **有理数** $\Big)$ である．
- 普通，ものを数えるときは $\boxed{\mathbf{1}}$ から始める．よって，$\Big($ **自然数** $\Big)$ に 0 や負の整数は含まれない．

2. 大きい方に ○ を付けなさい．

(1) $\left\{\begin{array}{l}○\sqrt{64}\\ \sqrt{59}\end{array}\right\}$ (2) $\left\{\begin{array}{l}○6\\ \sqrt{35}\end{array}\right\}$ (3) $\left\{\begin{array}{l}○\sqrt{\dfrac{11}{3}}\\ \dfrac{3}{2}\end{array}\right\}$ (4) $\left\{\begin{array}{l}-\sqrt{12}\\ ○-\sqrt{7}\end{array}\right\}$ (5) $\left\{\begin{array}{l}-4\\ ○-\sqrt{15}\end{array}\right\}$ (6) $\left\{\begin{array}{l}-\sqrt{\dfrac{13}{2}}\\ ○-\dfrac{7}{3}\end{array}\right\}$

3. $\sqrt{6}$, $-\sqrt{11}$, $\sqrt{23}$ は，数直線上のアからセのどれかと一致する．次の $\boxed{}$ に，アからコで答えなさい．



- $\sqrt{6}$ は数直線の $\boxed{\text{カ}}$ に一致し，$-\sqrt{11}$ は数直線の $\boxed{\text{イ}}$ に一致する．
- $\sqrt{23}$ は 4.5 より $\left\{\begin{array}{l}○\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{array}\right\}$ よって $\sqrt{23}$ は数直線の $\boxed{\text{ケ}}$ に一致する．

4. 次の値について，大きさ・長さの大きい順に並べ，（ア）〜（ウ）で答えなさい．

(1)（ア）$\sqrt{\dfrac{13}{2}}$ （イ）$\sqrt{6}$ （ウ）$\dfrac{5}{2}$

$\boxed{\text{ア}} > \boxed{\text{ウ}} > \boxed{\text{イ}}$

(2)（ア）$\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ （イ）-1 （ウ）$\dfrac{4}{3}$

$\boxed{\text{ウ}} > \boxed{\text{ア}} > \boxed{\text{イ}}$

(3)（ア）$\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ （イ）$-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ （ウ）-2

$\boxed{\text{ア}} > \boxed{\text{イ}} > \boxed{\text{ウ}}$

(4)（ア）$-\dfrac{2}{5}$ （イ）-1 （ウ）$-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

$\boxed{\text{ア}} > \boxed{\text{ウ}} > \boxed{\text{イ}}$

5. (1) 10 は $\sqrt{\boxed{100}}$ に等しく 11 は $\sqrt{\boxed{121}}$ に等しいので，$10 < \sqrt{a} < 11$ となる整数 a は $\Big($ **20** $\Big)$ 個ある．

(2) $-6 < -\sqrt{a} < -5$ となる整数 a は何個あるか．

10 個（26 から 35 まで）

(3) $-3 < -\sqrt{3a} < -1$ となる整数 a を全て求めなさい．

$\mathbf{2, 1}$

---

6. (1) $\left(\sqrt{4}\right)^2 = \boxed{\mathbf{4}}$ (2) $\sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2} = \boxed{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}$ (3) $-\sqrt{(-5)^2} = \boxed{\mathbf{-5}}$

7. $\dfrac{4}{7}$ を循環小数で表すと $\boxed{\mathbf{0.\dot{5}7142\dot{8}}}$ であり，$0.\dot{1}4\dot{8}$ を分数で表すと $\boxed{\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{27}}}$ である．

4 平方根の掛け算，割り算と分母の有理化

4.1 平方根の掛け算・割り算

■平方根の ×，÷ の計算 —— 普通にできる！ 掛け算・割り算は難しくありません．つまり，

- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

1. $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ を 2 乗すると，$\left(\sqrt{3} \times \sqrt{5}\right)^2 = \sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} = (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5})^2$ なので，$\boxed{\mathbf{15}}$ になる．

つまり，$\sqrt{3} \times \sqrt{5} =$ (2 乗して 15 になる正の数) $= \boxed{\boldsymbol{\sqrt{15}}}$ である．

(参考) 同じようにして，$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$，$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ を一般的に証明することができる．

2. 次の計算をしなさい．根号を外せるものは外すこと．

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$
$\boldsymbol{\sqrt{6}}$

(2) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$
$\boldsymbol{\sqrt{21}}$

(3) $-\sqrt{5} \times \sqrt{7}$
$\boldsymbol{-\sqrt{35}}$

(4) $\sqrt{3} \times (-\sqrt{5})$
$\boldsymbol{-\sqrt{15}}$

(5) $-\sqrt{7} \times (-\sqrt{6})$
$\boldsymbol{\sqrt{42}}$

(6) $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$
$\mathbf{9}$

(7) $\sqrt{12} \div \sqrt{4}$
$\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(8) $\sqrt{30} \div \sqrt{6}$
$\boldsymbol{\sqrt{5}}$

(9) $\sqrt{14} \div (-\sqrt{7})$
$\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

(10) $-\sqrt{20} \div \sqrt{5}$
$\mathbf{-2}$

(11) $-\sqrt{15} \div (-\sqrt{10})$
$\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{3}{2}}}$

(12) $\sqrt{50} \div \sqrt{20}$
$\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{5}{2}}}$

3. 次のうち，$\sqrt{6}$ と等しいものに ○ をつけよ．

○$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$，　○$\sqrt{\dfrac{12}{2}}$，　○$\sqrt{2 \times 3}$，　$\sqrt{12} \div 2$，　○$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$，　○$\sqrt{2}\sqrt{3}$，　○$\sqrt{12 \div 2}$

例 4 $\boxed{a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}\ (\times \text{ は省略できる})}$　$-2 \times \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$，　$\dfrac{1}{4} \times \sqrt{2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\ \left(= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

4. 次の計算をしなさい．

(1) $5 \times \sqrt{3} \boldsymbol{= 5\sqrt{3}}$

(2) $(-3) \times \sqrt{6} \boldsymbol{= -3\sqrt{6}}$

(3) $\dfrac{3}{2} \times \sqrt{10} \boldsymbol{= \dfrac{3}{2}\sqrt{10}}$

(4) $\sqrt{3} \times (-\frac{1}{2}) \boldsymbol{= -\dfrac{1}{2}\sqrt{3}}$

(5) $4 \times 3\sqrt{2} \boldsymbol{= 12\sqrt{2}}$

(6) $\sqrt{7} \times \sqrt{3} \times 6 \boldsymbol{= 6\sqrt{21}}$

(7) $(-1) \times \sqrt{7} \times \dfrac{4}{5}$
$\boldsymbol{= -\dfrac{4}{5}\sqrt{7}}$

(8) $(-5) \times \sqrt{7} \times \sqrt{6} \times (-6)$
$\boldsymbol{= 30\sqrt{42}}$

(9) $6\sqrt{5} \times \sqrt{7} \div (-4)$
$\boldsymbol{= -\dfrac{3}{2}\sqrt{35}}$

■$\sqrt{}$（根号）の中を簡単にする

例 5　$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = \sqrt{45}$

根号の中を簡単にするための因数分解
$\begin{array}{r|l} 4 & 24 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$　　$\begin{array}{r|l} 9 & 72 \\ \hline 4 & 8 \\ \hline & 2 \end{array}$
$24 = 2^2 \times 6$　　$72 = 2^2 \times 3^2 \times 2$
4 で割れる $\iff$ 下 2 桁が 4 で割れる
9 で割れる $\iff$ 全ての桁を足すと 9 で割れる
25 で割れる $\iff$ 下 2 桁が 25 で割れる

5. 例 5 に倣って, 以下の数を $\sqrt{a}$ の形で表せ.

(1) $3\sqrt{2}$　(2) $6\sqrt{2}$　(3) $5\sqrt{3}$　(4) $3\sqrt{10}$

$\boldsymbol{\sqrt{18}}$　$\boldsymbol{\sqrt{72}}$　$\boldsymbol{\sqrt{75}}$　$\boldsymbol{\sqrt{90}}$

例 6　$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

6. 例 6 に倣って, 以下の数を $a\sqrt{b}$ の形で表せ.

(1) $\sqrt{20}$　(2) $\sqrt{50}$　(3) $\sqrt{32}$　(4) $\sqrt{96}$

$\boldsymbol{2\sqrt{5}}$　$\boldsymbol{5\sqrt{2}}$　$\boldsymbol{4\sqrt{2}}$　$\boldsymbol{4\sqrt{6}}$

例 7　$3\sqrt{20} = 3\sqrt{2^2 \times 5} = 3 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

7. 例 7 に倣って, 以下の数の根号内をできるだけ小さくしなさい.

(1) $6\sqrt{8}$　(2) $5\sqrt{45}$　(3) $2\sqrt{99}$　(4) $4\sqrt{72}$

$\boldsymbol{12\sqrt{2}}$　$\boldsymbol{15\sqrt{5}}$　$\boldsymbol{6\sqrt{11}}$　$\boldsymbol{24\sqrt{2}}$

例 8

$$(-2\sqrt{18}) \times (-3\sqrt{6}) = 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 18\sqrt{12} = 36\sqrt{2}$$

$\sqrt{}$ の中を小さくしてから計算しよう.

8. 次の計算をしなさい. 根号の中はできるだけ簡単にすること. (参考：慣れると 15 ページの 9 のようにできるようになる.)

(1) $5\sqrt{18} \times \sqrt{5} = \boxed{\mathbf{15}}\sqrt{2} \times \sqrt{5}$

$= \boxed{\boldsymbol{15\sqrt{10}}}$

(2) $(-\sqrt{12}) \times 4\sqrt{8} = \boldsymbol{-16\sqrt{6}}$

(3) $\sqrt{7} \times (-3\sqrt{63}) = \mathbf{-63}$

(4) $(-4\sqrt{30}) \times \sqrt{8} = \boldsymbol{-16\sqrt{15}}$

(5) $(-4\sqrt{8}) \times 2\sqrt{12} = \boldsymbol{-32\sqrt{6}}$

(6) $(-2\sqrt{27}) \times (-2\sqrt{18}) = \boldsymbol{36\sqrt{6}}$

4.2　分母の有理化

分母から $\sqrt{\quad}$（根号）を無くすことを, **分母の有理化**という.

例 9

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad\qquad \frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{{}^{2}\cancel{4}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=2\sqrt{2}$$

1. 例 9 に倣って計算し, 次の式の分母から根号を無くせ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\mathbf{\dfrac{1}{6}\sqrt{6}}$　(2) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\mathbf{\dfrac{3}{5}\sqrt{5}}$　(3) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\mathbf{\sqrt{3}}$

(4) $6\div\sqrt{3}=\mathbf{2\sqrt{3}}$　(5) $6\div\sqrt{15}=\mathbf{\dfrac{2}{5}\sqrt{15}}$　(6) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$

例 10

$$\frac{15}{\sqrt{90}}=\frac{{}^{5}\cancel{15}}{\cancel{3}\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\cancel{5}\sqrt{10}}{\cancel{10}^{\,2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$\sqrt{\quad}$ の中を小さくしてから有理化しよう.

2. 例 10 に倣って計算し, 次の式の分母から根号を無くせ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{32}}=\dfrac{1}{\boxed{4}\sqrt{2}}=\boxed{\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{8}}}$　(2) $\dfrac{3}{\sqrt{18}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$　(3) $4\div\sqrt{12}=\mathbf{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

(4) $\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{12}}=\mathbf{\sqrt{15}}$　(5) $4\sqrt{3}\div\sqrt{32}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$　(6) $\dfrac{4}{3\sqrt{18}}=\mathbf{\dfrac{2}{9}\sqrt{2}}$

例 11

$$\sqrt{3}\div3\sqrt{30}\times6\sqrt{2}=\frac{\cancel{\sqrt{3}}\times6\cancel{\sqrt{2}}}{3\underbrace{\cancel{\sqrt{30}}}_{\cancel{\sqrt{10}}_{\sqrt{5}}}}=\frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3}\times\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

3. 例 11 に倣って計算し, 次の式の分母から根号を無くせ.

(1) $\sqrt{6}\times\sqrt{10}\div5\sqrt{30}$

$\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{5}}$

(2) $\sqrt{21}\times\sqrt{2}\div2\sqrt{7}$

$\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

(3) $\sqrt{15}\div3\sqrt{6}\times2\sqrt{5}$

$\mathbf{\dfrac{5}{3}\sqrt{2}}$

(4) $\sqrt{30}\div2\sqrt{5}\div\sqrt{10}$

$\mathbf{\dfrac{\sqrt{15}}{10}}$

4.3 およその値を求める

1. $\sqrt{2}=1.414,\ \sqrt{3}=1.732,\ \sqrt{5}=2.236$ と近似するとき, 以下の $\boxed{}$ に正しい値を入れなさい.

- $\sqrt{18}$ を $a\sqrt{b}$ の形にすると $\boxed{3\sqrt{2}}$ であり, およその値は $\boxed{4.242}$ である.
- $\sqrt{45}$ を $a\sqrt{b}$ の形にすると $\boxed{3\sqrt{5}}$ であり, およその値は $\boxed{6.708}$ である.
- $\sqrt{48}$ のおよその値は $\boxed{6.928}$, $\sqrt{20}$ のおよその値は $\boxed{4.472}$ である.

2.
- $10\sqrt{2}=\sqrt{\boxed{200}}$, $100\sqrt{2}=\sqrt{\boxed{20000}}$, $1000\sqrt{2}=\sqrt{\boxed{2000000}}$
- $10\sqrt{20}=\sqrt{\boxed{2000}}$, $100\sqrt{20}=\sqrt{\boxed{200000}}$, $1000\sqrt{20}=\sqrt{\boxed{20000000}}$
- $0.1\times\sqrt{5}=\sqrt{\boxed{0.05}}$, $0.01\times\sqrt{5}=\sqrt{\boxed{0.0005}}$, $0.001\times\sqrt{5}=\sqrt{\boxed{0.000005}}$
- $0.1\times\sqrt{50}=\sqrt{\boxed{0.5}}$, $0.01\times\sqrt{50}=\sqrt{\boxed{0.005}}$, $0.001\times\sqrt{50}=\sqrt{\boxed{0.00005}}$

3. $\sqrt{3}=1.732,\ \sqrt{30}=5.477$ と近似したとき, 以下の $\boxed{}$ に正しい値を入れなさい.

- $\sqrt{3000}$ は $\left\{\begin{array}{c}10\sqrt{3}\\ 10\sqrt{30}\end{array}\right\}$ なので, およその値は $\boxed{54.77}$ である.
- $\sqrt{0.03}$ は $\left\{\begin{array}{c}\sqrt{3}\\ \sqrt{30}\end{array}\right\}$ の $\boxed{0.1}$ 倍なので, 小数で求めると $\boxed{0.1732}$ である.
- $\sqrt{0.3}$ は $\left\{\begin{array}{c}\sqrt{3}\\ \sqrt{30}\end{array}\right\}$ の $\boxed{0.1}$ 倍なので, 小数で求めると $\boxed{0.5477}$ である.
- $\sqrt{3000000}$ はおよそ $\boxed{1732}$ であり, $\sqrt{0.003}$ はおよそ $\boxed{0.05477}$ である.

4. $\sqrt{2}=1.414,\ \sqrt{5}=2.236$ とする.

(1) $4\div\sqrt{2}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ の分母を有理化する（根号を無くす）と $\boxed{2\sqrt{2}}$ になる.

つまり, $4\div\sqrt{2}$ のおよその値は $\boxed{2.828}$ と容易に計算できる.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ の分母を有理化すると $\boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$ になる. つまり, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のおよその値は $\boxed{0.4472}$ である.

5. $\sqrt{2}=1.414,\ \sqrt{5}=2.236$ とする. 以下のおよその値を求めなさい.

(1) $\sqrt{20000}$

141.4

(2) $\sqrt{0.0005}$

0.02236

(3) $\sqrt{50}$

7.07

(4) $\dfrac{3}{\sqrt{18}}$ **0.707**

(5) $\dfrac{3}{\sqrt{20}}$ **0.6708**

5　平方根の四則計算

一つずつ, 例に倣って計算しましょう. **いずれも, 根号の中はできるだけ簡単にし, 分母に根号は残さないように.**

例 12

$2\sqrt{2}$	$+$	$3\sqrt{2}$	$=$	$5\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}$	$-$	$2\sqrt{3}$	$=$	$\sqrt{3}$
$\sqrt{2}$ が 2 つ		$\sqrt{2}$ が 3 つ		$\sqrt{2}$ が 5 つ	$\sqrt{3}$ が 3 つ		$\sqrt{3}$ が 2 つ		$\sqrt{3}$ が 1 つ

1. (1) $5\sqrt{5}+5\sqrt{5}=\mathbf{10\sqrt{5}}$　(2) $4\sqrt{5}-3\sqrt{5}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$　(3) $6\sqrt{2}+5\sqrt{2}=\mathbf{11\sqrt{2}}$

例 13　$-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=\mathbf{(-3+5)\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$　　$\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{3}=\boldsymbol{\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)\sqrt{3}}=\frac{9}{4}\sqrt{3}$

2. (1) $6\sqrt{7}+3\sqrt{7}=\mathbf{9\sqrt{7}}$　(2) $-5\sqrt{7}+\sqrt{7}=\mathbf{-4\sqrt{7}}$　(3) $-2\sqrt{6}+3\sqrt{6}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

(4) $-5\sqrt{6}-\sqrt{6}=\mathbf{-6\sqrt{6}}$　(5) $-4\sqrt{7}+4\sqrt{7}=\mathbf{0}$　(6) $-3\sqrt{6}+5\times\sqrt{6}=\mathbf{2\sqrt{6}}$

(7) $\frac{5}{3}\sqrt{5}-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\sqrt{5}}$　(8) $-\frac{1}{4}\sqrt{5}-\sqrt{5}=\boldsymbol{-\frac{5}{4}\sqrt{5}}$

(9) $-\frac{5}{4}\times\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}=\boldsymbol{-\frac{19}{12}\sqrt{2}}$　(10) $\frac{5}{2}\sqrt{6}-5\sqrt{6}\div 3=\boldsymbol{\frac{5}{6}\sqrt{6}}$

3. (1) $\sqrt{28}+\sqrt{7}=\boxed{\mathbf{2}}\sqrt{7}+\sqrt{7}$
$=\boxed{\mathbf{3}}\sqrt{7}$

(2) $3\sqrt{18}-3\sqrt{32}=\boxed{\mathbf{9}}\sqrt{2}-\boxed{\mathbf{12}}\sqrt{2}$
$=\boxed{\mathbf{-3}}\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{24}+\sqrt{6}=\mathbf{3\sqrt{6}}$　(4) $2\sqrt{20}-\sqrt{5}=\mathbf{3\sqrt{5}}$　(5) $-\sqrt{18}+\sqrt{2}=\mathbf{-2\sqrt{2}}$

(6) $3\sqrt{3}-\sqrt{27}=\mathbf{0}$　(7) $3\sqrt{63}+3\sqrt{7}=\mathbf{12\sqrt{7}}$　(8) $2\sqrt{3}\times\sqrt{18}-\sqrt{24}=\mathbf{4\sqrt{6}}$

(9) $-2\sqrt{20}-2\sqrt{45}+3\sqrt{5}=\mathbf{-7\sqrt{5}}$　(10) $\sqrt{28}-4\sqrt{7}+2\sqrt{21}\times\sqrt{3}=\mathbf{4\sqrt{7}}$

例 14 (分数があっても，今までどおり) $\boxed{-2\sqrt{5}-\frac{5}{4}\underbrace{\sqrt{20}}_{2\sqrt{5}}=-2\sqrt{5}-\frac{5}{2}\sqrt{5}=-\frac{9}{2}\sqrt{5}}$

4. (1) $-\frac{1}{2}\sqrt{28}-\frac{5}{3}\sqrt{7}=\boldsymbol{-\frac{8}{3}\sqrt{7}}$

(2) $-\frac{3}{4}\sqrt{7}+\frac{3}{4}\sqrt{28}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt{7}}$

(3) $\frac{3}{4}\sqrt{48}-\frac{3}{2}\sqrt{12}+\frac{4}{3}\sqrt{27}=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$

(4) $-\frac{5}{2}\sqrt{45}+\frac{5}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\sqrt{10}\times\sqrt{2}=\boldsymbol{-2\sqrt{5}}$

例 15 $\boxed{\sqrt{}\text{の中が異なる}2\text{つの数は，足すことも引くこともできない！！}}$

$3\sqrt{5}+2\sqrt{5}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\underline{5\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ これでおしまい！！

5. (1) $2\sqrt{6}+3\sqrt{5}+6\sqrt{5}=\boldsymbol{2\sqrt{6}+9\sqrt{5}}$

(2) $5\sqrt{6}-\sqrt{6}-\sqrt{7}-3\sqrt{7}=\boldsymbol{4\sqrt{6}-4\sqrt{7}}$

(3) $\sqrt{6}+2\sqrt{6}+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}=\boldsymbol{3\sqrt{6}+8\sqrt{5}}$

(4) $-4\sqrt{6}+3\sqrt{5}+4\sqrt{6}-3\sqrt{5}=\boldsymbol{0}$

6. (1) $\sqrt{63}+2\sqrt{48}+\sqrt{7}+\sqrt{27}$

$=\boldsymbol{4\sqrt{7}+11\sqrt{3}}$

(2) $3\sqrt{5}-2\sqrt{8}-\sqrt{2}+3\sqrt{20}$

$=\boldsymbol{9\sqrt{5}-5\sqrt{2}}$

(3) $-2\sqrt{5}+2\sqrt{20}-\sqrt{8}+2\sqrt{2}$

$=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

(4) $-2\sqrt{54}-\sqrt{24}+\sqrt{32}-\sqrt{2}$

$=\boldsymbol{-8\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$

(5) $3\sqrt{7}-2\sqrt{27}-\sqrt{28}-3\sqrt{12}$

$=\boldsymbol{\sqrt{7}-12\sqrt{3}}$

(6) $-\frac{5}{2}\sqrt{7}+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{12}-3\sqrt{28}$

$=\boldsymbol{-\frac{17}{2}\sqrt{7}+\frac{10}{3}\sqrt{3}}$

例 16 (有理化付き) $\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\underbrace{\sqrt{12}}_{2\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3}=\sqrt{3}}$

7. (1) $\frac{6}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}$

$=\boldsymbol{6\sqrt{2}}$

(2) $\frac{6}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}$

$=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(3) $2\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

$=\boldsymbol{0}$

(4) $-\dfrac{4}{\sqrt{6}}+\dfrac{3}{4}\sqrt{24}$

$$=\mathbf{\frac{5}{6}\sqrt{6}}$$

(5) $\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{45}}+\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

$$=\mathbf{\frac{9}{10}\sqrt{10}}$$

8. $\boxed{\times,\ \div \text{が先!!}\quad +,\ -\text{が後!!}}$

(1) $6\div\sqrt{5}-2\times\sqrt{5}+\sqrt{5}$

$$=\mathbf{\frac{1}{5}\sqrt{5}}$$

(2) $2\sqrt{2}\div\sqrt{6}-\dfrac{6}{\sqrt{3}}+2\times\sqrt{3}$

$$=\mathbf{\frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

(3) $-\sqrt{8}-3\sqrt{2}\div2+\sqrt{\dfrac{1}{18}}$

$$=\mathbf{-\frac{10}{3}\sqrt{2}}$$

(4) $\dfrac{3}{2}\times\sqrt{6}-4\div\sqrt{54}+3\sqrt{24}\div4$

$$=\mathbf{\frac{25}{9}\sqrt{6}}$$

9. (1) $\sqrt{5}\times\underbrace{\sqrt{10}}_{\sqrt{5}\text{で割れる}}=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{\boxed{2}}$

$$=\boxed{5\sqrt{2}}$$

(2) $\underbrace{\sqrt{14}}_{\sqrt{7}\text{で割れる}}\times\underbrace{\sqrt{21}}_{\sqrt{7}\text{で割れる}}=\sqrt{7}\times\sqrt{\boxed{2}}\times\sqrt{7}\times\sqrt{\boxed{3}}$

$$=7\sqrt{\boxed{6}}$$

例 17　(分配法則 — 掛け算)　$\boxed{-\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{15}+\underline{\sqrt{10}}\text{後ろにも掛けることを忘れない！！}}$

10. (1) $\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)$

$$=\mathbf{6-2\sqrt{15}}$$

(2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{10}+\sqrt{27}\right)$

$$=\mathbf{\sqrt{30}+9}$$

(3) $\sqrt{2}\left(-\sqrt{10}-2\sqrt{6}\right)$

$$=\mathbf{-2\sqrt{5}-4\sqrt{3}}$$

(4) $\sqrt{3}\left(-2\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$

$$=\mathbf{-6-3\sqrt{5}}$$

例 18　(分配法則 — 割り算)　$\boxed{\left(\sqrt{15}-\sqrt{10}\right)\div\sqrt{5}=-\sqrt{3}+\underline{\sqrt{2}}\text{後ろも割ることを忘れない！！}}$

11. (1) $\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)\div\sqrt{3}$

$$=\mathbf{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

(2) $\left(-\sqrt{20}+\sqrt{10}\right)\div\sqrt{5}$

$$=\mathbf{-2+\sqrt{2}}$$

(3) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\div\sqrt{2}$

$$=\mathbf{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

(4) $\left(-\sqrt{21}+\sqrt{14}\right)\div\sqrt{7}$

$$=\mathbf{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

例 19 (分配法則 — 分母の有理化と共に)

$\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\underline{\times\sqrt{5}}}{\sqrt{5}\underline{\times\sqrt{5}}} = \dfrac{10-\sqrt{15}}{5}$ これは約分できない！！（参考：下の例 20 ）

12. (1) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{6}+2}{2}$$

(2) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$$\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{5}$$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{4}$$

(4) $\left(\sqrt{5}-3\right)\div 3\sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{10}-3\sqrt{2}}{6}$$

例 20

$\dfrac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\underline{\times\sqrt{6}}}{2\sqrt{6}\underline{\times\sqrt{6}}} = \dfrac{3\sqrt{30}-3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\cancel{3}\left(\sqrt{30}-\sqrt{2}\right)}{\cancel{12}^{\,4}} = \dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{4}$

13. (1) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$

$$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

(2) $\dfrac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$

$$\frac{\sqrt{10}-2}{3}$$

(3) $\dfrac{\sqrt{18}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$$\frac{3-\sqrt{6}}{2}$$

(4) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\div 2\sqrt{15}$

$$\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{10}$$

14. (1) $\sqrt{10}\left(-\sqrt{20}-\sqrt{24}\right)+\sqrt{3}\left(\sqrt{20}+\sqrt{6}\right)$

$$= -7\sqrt{2}-2\sqrt{15}$$

(2) $\sqrt{6}\left(\sqrt{32}+2\sqrt{15}\right)+\dfrac{6\sqrt{15}-3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$$= 7\sqrt{3}+9\sqrt{10}$$

(3) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{\sqrt{10}-3\sqrt{2}}{3}$$

6　まとめその２

1.

- $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のうち, $\sqrt{3} \div \sqrt{2}$ と同じ値のものはのは $\boxed{\sqrt{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}}$ である.
- $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{5} = 2.236$ のとき, $\sqrt{200} + \sqrt{300} - \sqrt{500}$ のおよその値は $\boxed{\mathbf{9.1}}$ である.
- $2\sqrt{11}$ は $\sqrt{\boxed{\mathbf{44}}}$ に等しく, $3\sqrt{6}$ は $\sqrt{\boxed{\mathbf{54}}}$ に等しい．よって, $\left\{\begin{matrix} 2\sqrt{11} \\ 3\sqrt{6} \end{matrix}\right\}$ の方が大きい.
- $6\sqrt{2}$ と $4\sqrt{5}$ では $\left\{\begin{matrix} 6\sqrt{2} \\ 4\sqrt{5} \end{matrix}\right\}$ の方が大きく, $-2\sqrt{6}$ と $-3\sqrt{2}$ では $\left\{\begin{matrix} -2\sqrt{6} \\ -3\sqrt{2} \end{matrix}\right\}$ の方が大きい.

2. 次の計算をしなさい．いずれも, 根号の中はできるだけ簡単にし, 分母に根号は残さないように.

(1) $\sqrt{28} - 3\sqrt{7}$

$= -\sqrt{7}$

(2) $\dfrac{3}{4}\sqrt{20} - \dfrac{4}{3}\sqrt{45}$

$= -\dfrac{5}{2}\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{\dfrac{1}{8}} - \sqrt{2}$

$= -\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{3}{4}\sqrt{32} - \dfrac{3}{2}\sqrt{8} = 0$

(5) $\dfrac{\sqrt{27}}{4} + \dfrac{5}{3} \times \sqrt{3} = \dfrac{29}{12}\sqrt{3}$

(6) $\dfrac{2}{3}\sqrt{6} - \dfrac{2}{\sqrt{24}}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{6}$

(7) $-\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - \dfrac{6}{\sqrt{6}}$

$= 0$

(8) $\dfrac{1}{2}\sqrt{28} - 2\sqrt{6} + \dfrac{1}{2}\sqrt{24} - 2\sqrt{7}$

$= -\sqrt{7} - \sqrt{6}$

(9) $-\dfrac{3}{2}\sqrt{12} + \dfrac{5}{2}\sqrt{24} + 3\sqrt{6} + \dfrac{3}{4}\sqrt{48}$

$= 8\sqrt{6}$

(10) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{6} + \dfrac{3}{\sqrt{6}}$

$= -\dfrac{1}{6}\sqrt{6}$

(11) $-\dfrac{7}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{8}$

$= -\dfrac{15}{2}\sqrt{2}$

(12) $3\sqrt{45} + \dfrac{5}{\sqrt{20}}$

$= \dfrac{19}{2}\sqrt{5}$

(13) $\sqrt{5} - 2\sqrt{20} - 2 \div \sqrt{5}$

$= -\dfrac{17}{5}\sqrt{5}$

(14) $-6\times\sqrt{2}+\dfrac{6}{\sqrt{8}}-4\div\sqrt{2}$

$$=-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{2}}$$

(15) $-\dfrac{6}{\sqrt{2}}-3\sqrt{18}-\dfrac{4}{\sqrt{8}}$

$$=\mathbf{-13\sqrt{2}}$$

(16) $-\dfrac{6}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{12}$

$$=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{3}}$$

(17) $\sqrt{10}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$

$$=\mathbf{2\sqrt{5}+2\sqrt{15}}$$

(18) $\sqrt{5}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)$

$$=\mathbf{10-5\sqrt{3}}$$

(19) $\left(\sqrt{75}-2\sqrt{15}\right)\div\sqrt{15}$

$$=\mathbf{\sqrt{5}-2}$$

(20) $\dfrac{-\sqrt{32}-2\sqrt{15}}{2}\times\sqrt{6}$

$$=\mathbf{-4\sqrt{3}-3\sqrt{10}}$$

(21) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}\times\sqrt{15}$

$$\mathbf{5+2\sqrt{5}}$$

(22) $\sqrt{3}\left(-\sqrt{6}+\sqrt{15}\right)-\sqrt{15}\left(\sqrt{32}+\sqrt{3}\right)$

$$=\mathbf{-3\sqrt{2}-4\sqrt{30}}$$

(23) $\sqrt{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{20}\right)-\sqrt{5}\left(-\sqrt{15}-\sqrt{8}\right)$

$$=\mathbf{7\sqrt{3}+4\sqrt{10}}$$

(24) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\mathbf{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}-3\sqrt{10}}}{\mathbf{6}}$$

(25) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{30}-3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\dfrac{2\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$$=\mathbf{-2\sqrt{5}-1}$$

7　応用問題

7.1　$\sqrt{\quad}$ が自然数になるためには？　—　$\sqrt{\quad}$ の中が, 自然数の 2 乗になればよい

1. 次のうち, 値が自然数になるものを**全て選べ**.
（　**イ, ウ**　）

(ア) $\sqrt{3\times5}$　(イ) $\sqrt{3^2\times2^2}$
(ウ) $\sqrt{2^4\times5^2}$　(エ) $\sqrt{3^3}$

2. 次のうち, 値が自然数になるものを**全て選べ**.
（　**ア, ウ**　）

(ア) $\sqrt{2^2\times3^2}$　(イ) $\sqrt{2\times5}$
(ウ) $\sqrt{3^4\times5^2}$　(エ) $\sqrt{2^2\times3^3}$

3. $\sqrt{2n}$ が自然数となるような n の値を**全て**選べ.
（　**エ, カ, サ**　）

(ア) $n=3$　(イ) $n=4$　(ウ) $n=5$
(エ) $n=2$　(オ) $n=2\times3$　(カ) $n=2\times4$
(キ) $n=2\times5$　(ク) $n=2\times6$　(ケ) $n=2\times7$
(コ) $n=2\times8$　(サ) $n=2\times9$　(シ) $n=2\times10$

4. $\sqrt{20n}$ は $\sqrt{\boxed{\boldsymbol{5n}}}$ の 2 倍に等しい. $\sqrt{20n}$ が自然数になるような n の値を**全て**選べ.
（**エ, カ, サ**）

(ア) $n=2$　(イ) $n=3$　(ウ) $n=4$
(エ) $n=5$　(オ) $n=5\times3$　(カ) $n=5\times4$
(キ) $n=5\times5$　(ク) $n=5\times6$　(ケ) $n=5\times7$
(コ) $n=5\times8$　(サ) $n=5\times9$　(シ) $n=5\times10$

---

5. $\sqrt{3n}$ が自然数になるような自然数 n の値を, 小さい順に 3 つ挙げよ.

3, 12, 27

6. $\sqrt{8n}$ が自然数になるような自然数 n の値を, 小さい順に 3 つ挙げよ.

2, 8, 18

7. $\sqrt{15n}$ が自然数になるような自然数 n の値を, 小さい順に 3 つ挙げよ.

15, 60, 135

8. $\sqrt{96n}$ が自然数になるような自然数 n の値を, 小さい順に 3 つ挙げよ.

6, 24, 54

---

9. $\sqrt{\dfrac{5\times3^2}{n}}$ が自然数になるような n の値を**全て選べ**.
（　**ウ, カ**　）

(ア) $n=1$　(イ) $n=3$
(ウ) $n=5$　(エ) $n=3^2$
(オ) $n=5\times3$　(カ) $n=5\times3^2$

10. $\sqrt{\dfrac{3\times2^2}{n}}$ が自然数になるような自然数 n の値は, $\boxed{\mathbf{3}}$ と $\boxed{\mathbf{12}}$ である.

11. $\sqrt{\dfrac{18}{n}}$ が自然数になるような自然数 n の値を, **全て**挙げよ.
2, 18

12. $\sqrt{\dfrac{96}{n}}$ が自然数になるような自然数 n の値は, $\boxed{\mathbf{6}}$, $\boxed{\mathbf{24}}$, $\boxed{\mathbf{96}}$ である.

7.2　展開公式と平方根 — 根号を文字と思って公式を使い，計算する

例 21　($(x+a)(x+b)$ の利用)

$(\ x+2)(\ x-4)=\ x^2\ -\ 2x\ -8$

$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-4)=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}-8\ =-5-2\sqrt{3}$

1.

(1) $(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}+2)$

$\mathbf{=12+5\sqrt{6}}$

(2) $(\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}-4)$

$\mathbf{=15-7\sqrt{3}}$

(3) $(\sqrt{2}-5)(\sqrt{2}+3)$

$\mathbf{=-13-2\sqrt{2}}$

(4) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+3)$

$\mathbf{=2\sqrt{3}}$

(5) $(3\sqrt{2}-1)(3\sqrt{2}+5)$

$\mathbf{=13+12\sqrt{2}}$

(6) $(2\sqrt{6}-4)(2\sqrt{6}+2)$

$\mathbf{=16-4\sqrt{6}}$

例 22　($(x+a)^2$ の利用)

$(\ x+5)^2=\ x^2\ +\ 10x\ +25$

$(\sqrt{2}+5)^2=(\sqrt{2})^2+10\sqrt{2}+25\ =27+10\sqrt{2}$

$\boxed{(x+5)^2=x^2+\underline{\mathbf{10}x}+25 \text{ に注意！}}$

2.

(1) $(\sqrt{3}+5)^2$

$\mathbf{=28+10\sqrt{3}}$

(2) $(\sqrt{2}-1)^2$

$\mathbf{=3-2\sqrt{2}}$

(3) $(\sqrt{11}-2)^2$

$\mathbf{=15-4\sqrt{11}}$

(4) $(\sqrt{6}+4)^2$

$\mathbf{=22+8\sqrt{6}}$

(5) $(\sqrt{7}+1)^2$

$\mathbf{=8+2\sqrt{7}}$

(6) $(2\sqrt{6}-3)^2$

$\mathbf{=33-12\sqrt{6}}$

例 23　($(x+a)(x-a)$ の利用)

$(\ x+3)(\ x-3)=\ x^2\ -9$

$(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)=(\sqrt{5})^2-9=-4$

3.

(1) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

$\mathbf{=2}$

(2) $(\sqrt{2}+5)(\sqrt{2}-5)$

$\mathbf{=-23}$

(3) $(\sqrt{5}-4)(\sqrt{5}+4)$

$= \mathbf{-11}$

(4) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)$

$= \mathbf{-7}$

(5) $(2\sqrt{7}-2)(2\sqrt{7}+2)$

$= \mathbf{24}$

(6) $(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)$

$= \mathbf{3}$

4. (1) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-4)-(2\sqrt{5}-3)^2$

$= \mathbf{-16+6\sqrt{5}}$

(2) $(\sqrt{5}+4)(\sqrt{5}-5)+(\sqrt{5}+5)(\sqrt{5}+3)$

$= \mathbf{5+7\sqrt{5}}$

(3) $(3\sqrt{2}+5)(3\sqrt{2}+1)-(\sqrt{3}-1)^2$

$= \mathbf{19+18\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

(4) $(\sqrt{7}+3)(\sqrt{7}-3)-(2\sqrt{6}+3)(2\sqrt{6}-4)$

$= \mathbf{-14+2\sqrt{6}}$

5.

- $x=\sqrt{3}+2$ のとき, $x-4 = \boxed{\sqrt{3}-2}$ である．よって,
  $x^2-4x = x(x-4) = \left(\underline{\sqrt{3}+2}\right)\left(\underline{\sqrt{3}-2}\right) = \boxed{-1}$
- $a=\sqrt{5}+3$ のとき, $a-6 = \boxed{\sqrt{5}-3}$ である．よって,
  $a^2-6a = a(a-4) = \left(\underline{\sqrt{5}+3}\right)\left(\underline{\sqrt{5}-3}\right) = \boxed{-4}$
- $x=\sqrt{13}-5$ のとき, $x+10 = \boxed{\sqrt{13}+5}$ である．よって,
  $x^2+10x+6 = x(x+10)+6 = \boxed{-6}$
- $a=2\sqrt{3}+3$ のとき, $a^2-6a+3 = \boxed{6}$ である．

7.3　$a+b,\ ab,\ a-b$ を利用した計算

(参考) $a+b$ は, a と b を入れ替えると $b+a$ であり, 式としては $a+b$ と同じ. a^2+b^2 も, a と b を入れ替えた b^2+a^2 と同じ式になる. このような式を「**対称式**」といい, 特に $a+b,\ ab$ を**基本対称式**という.

また, $a-b$ は, a と b を入れ替えると $b-a$ であり, 元の $a-b$ の (-1) 倍である. このような式は「**交代式**」と呼ばれる. a^2-b^2 なども交代式である.

1. (1) $a=\sqrt{5}+\sqrt{2},\ b=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ のとき,
$a+b=\left(\ \mathbf{2\sqrt{5}}\ \right),\ ab=\left(\ \mathbf{3}\ \right)$,
$a-b=\left(\ \mathbf{2\sqrt{2}}\ \right)$ である.

(2) $a=2\sqrt{2}+\sqrt{3},\ b=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ のとき,
$a+b=\left(\ \mathbf{4\sqrt{2}}\ \right),\ ab=\left(\ \mathbf{5}\ \right)$,
$a-b=\left(\ \mathbf{2\sqrt{3}}\ \right)$ である.

2. $a=\sqrt{3}+\sqrt{2},\ b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ のとき,

(1) $a+b=\left(\ \mathbf{2\sqrt{3}}\ \right),\ ab=\left(\ \mathbf{1}\ \right)$ である.

(2)
- $a^2+3ab+b^2$ は, $\left\{\begin{array}{l}(a+b)^2 \text{ と } ab \text{ を足した}\\(a+b)^2 \text{ から } ab \text{ を引いた}\end{array}\right\}$ ものに等しい. $(a+b)^2=\left(\ \mathbf{12}\ \right)$ なので,
  $a^2+3ab+b^2=\left(\ \mathbf{13}\ \right)$ である.
- a^2+ab+b^2 は, $\left\{\begin{array}{l}(a+b)^2 \text{ と } ab \text{ を足した}\\(a+b)^2 \text{ から } ab \text{ を引いた}\end{array}\right\}$ ものに等しいので,
  $a^2+ab+b^2=\left(\ \mathbf{11}\ \right)$ である.
- a^2+b^2 は, $(a+b)^2$ から $\boxed{\mathbf{2ab}}$ を引いたものに等しいので,
  $a^2+b^2=\left(\ \mathbf{10}\ \right)$ である.

(3) $a-b=\left(\ \mathbf{2\sqrt{2}}\ \right)$ を使うと, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\left(\ \mathbf{4\sqrt{6}}\ \right)$ である.

3. $m=\sqrt{6}+\sqrt{5},\ n=\sqrt{6}-\sqrt{5}$ のとき, 以下の値を求めなさい.

(1) $m+n$
$\mathbf{2\sqrt{6}}$

(2) mn
$\mathbf{1}$

(3) $m-n$
$\mathbf{2\sqrt{5}}$

(4) $m^2+3mn+n^2$
$\mathbf{25}$

(5) m^2+n^2
$\mathbf{22}$

(6) m^2-n^2
$\mathbf{4\sqrt{30}}$

$a,\ b$ の値が分からなくても, $a+b,\ ab$ の値さえ分かっていれば, a^2+b^2 などは計算できる.

4. $a+b=\sqrt{5},\ ab=1$ のとき, 以下の式の値を計算せよ.

(1) $(a+b)^2$
$\mathbf{5}$

(2) $a^2+3ab+b^2$
$\mathbf{6}$

(3) a^2+b^2
$\mathbf{3}$

5. $p=\sqrt{7}+\sqrt{3},\ q=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ のとき, 以下の値を求めなさい.

(1) $p+q$

$\boldsymbol{2\sqrt{7}}$

(2) pq

4

(3) $(p+q)^2$

28

(4) $p^2+5pq+q^2$

40

(5) p^2+q^2

20

(6) p^2-q^2

$\boldsymbol{4\sqrt{21}}$

6. $a=\sqrt{5}+\sqrt{7},\ b=\sqrt{5}-\sqrt{7}$ のとき, 以下の値を求めなさい.

(1) $a+b$

$\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

(2) ab

$\boldsymbol{-2}$

(3) a^2-ab+b^2

26

(4) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{\boxed{\boldsymbol{a+b}}}{ab}$ （$\square$ には文字式を入れる）

$=\left(\boldsymbol{-\sqrt{5}}\right)$

(5) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{\boxed{\boldsymbol{a^2+b^2}}}{ab}$ （$\square$ には文字式を入れる）

$=\left(\boldsymbol{-12}\right)$

7. $m=3\sqrt{2}+2,\ n=3\sqrt{2}-2$ のとき, 以下の値を求めなさい.

(1) $m^2+4mn+n^2$

100

(2) m^2+n^2

44

(3) m^2-n^2

$\boldsymbol{24\sqrt{2}}$

(4) $\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}$

$\boldsymbol{-\dfrac{2}{7}}$

(5) $\dfrac{n}{m}-\dfrac{m}{n}$

$\boldsymbol{-\dfrac{12\sqrt{2}}{7}}$

8. $a+b=\sqrt{13},\ ab=3$ のとき, 以下の式の値を計算せよ.

(1) $(a+b)^2$

13

(2) $a^2+3ab+b^2$

16

(3) a^2+b^2

7

(4) a^2-ab+b^2

4

(5) $(a-b)^2$

1

7.4 整数部分と小数部分

1.
- 2.46 の整数部分は $\boxed{\mathbf{2}}$, 小数部分は 0.46 である．小数部分は, 2.46 から $\boxed{\mathbf{2}}$ を引いた値に等しい．
- $\sqrt{5}$ の整数部分は $\boxed{\mathbf{2}}$, 小数部分は $\left\{\begin{matrix}\sqrt{5}-2 \\ 0.236\end{matrix}\right\}$ である．
- $\sqrt{3}$ の整数部分は $\boxed{\mathbf{1}}$, 小数部分は $\boxed{\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{1}}$ である．
- $\sqrt{8}$ の整数部分は $\boxed{\mathbf{2}}$, 小数部分は $\boxed{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{2}}$ である．
- $\sqrt{2}+1$ は $\left\{\begin{matrix}2 \\ 3\end{matrix}\right\}$ より大きく $\left\{\begin{matrix}3 \\ 4\end{matrix}\right\}$ より小さい．

  つまり, $\sqrt{2}+1$ の整数部分は $\boxed{\mathbf{2}}$, 小数部分は $\boxed{\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}$ である．

2. $\sqrt{6}$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき,
- $a=\boxed{\mathbf{2}}$, $b=\boxed{\sqrt{\mathbf{6}}-\mathbf{2}}$ である．
- $a+b=\boxed{\sqrt{\mathbf{6}}}$ である．つまり, 整数部分と $\left(\underline{\textbf{小数部分}}\right)$ を足せば, 元の数になる．
- まず, $a-b=\boxed{\mathbf{4}-\sqrt{\mathbf{6}}}$ である．

  $a^2-b^2=\left(\underline{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}\right)(a-b)$ と因数分解できるので, $a^2-b^2=\boxed{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{6}}-\mathbf{6}}$ である．
- $b+4=\boxed{\sqrt{\mathbf{6}}+\mathbf{2}}$ なので, $b^2+4b=b\left(\underline{\boldsymbol{b}+\mathbf{4}}\right)=\boxed{\mathbf{2}}$ である．

3. $\sqrt{12}$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき, 以下の値を計算しなさい．

(1) a (2) b (3) $a-b$ (4) a^2-b^2

(1) $\mathbf{3}$ (2) $\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{3}$ (3) $\mathbf{6}-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}$ (4) $\mathbf{12}\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{12}$

4. $\sqrt{7}-1$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき, 以下の値を計算しなさい．

(1) b (2) $a-b$ (3) $2a+b$ (4) b^2+4b

(1) $\sqrt{\mathbf{7}}-\mathbf{2}$ (2) $\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{7}}$ (3) $\sqrt{\mathbf{7}}$ (4) $\mathbf{3}$

5. $\sqrt{18}-3$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき, 以下の値を計算しなさい．

(1) b^2+8b

$$=(\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{4})(\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{4})=\mathbf{2}$$

(2) $(a+b)^2-(a-b)^2$

$$=\mathbf{4}\boldsymbol{ab}=\mathbf{12}\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{16}$$