平方根

目次

1　準備

どのような数が, ある数の 2 乗になっているか, ある程度分かっておこう.

1. 次の計算をしなさい.

- 1^2
- 2^2
- $(-3)^2$
- $(-4)^2$
- 5^2
- 6^2
- 7^2
- $(-8)^2$
- $(-9)^2$
- 10^2
- 11^2
- 12^2
- $(-13)^2$
- $(-14)^2$
- 15^2
- 16^2

エラトステネスのふるい

— 100 までの素数を全て求める —

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

まず 1 を消す（1 は素数ではない）.
次に 2 以外の 2 の倍数を消す.
次に 3 以外の 3 の倍数を消す.
次に 5 以外の 5 の倍数を消す.
次に 7 以外の 7 の倍数を消す.

これで 100 までの素数だけ残る. 上の図では 3 の倍数まで消してある.
このようにして素数を見つける方法を, エラトステネスのふるいという.
(エラトステネスはギリシアの数学者, 275 ? B.C. - 195 B.C.)

ちなみに, 100 までの素数を求めるためだけなら, 11 の倍数は消す必要が無い. なぜなら, $22, 33, \cdots, 99$ はいずれも既に消されているから.

10 ページ以降に備え, 素因数分解を練習しよう.

2.

- 15 は 3 で $\left\{\begin{matrix}\text{割り切れる}\\ \text{割り切れない}\end{matrix}\right\}$. よって, 3 は 15 の $\left\{\begin{matrix}\text{倍数}\\ \text{約数}\end{matrix}\right\}$ である.
- どんな数も, 必ず $\boxed{\quad\quad}$ で割り切れる. また, その数自身で $\left\{\begin{matrix}\text{割り切れる}\\ \text{割り切れない}\end{matrix}\right\}$.
- 約数を $\boxed{\quad\quad}$ つしか持たない数を**素数**という（1 は素数ではない）.

素因数分解の方法

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$24 = 2^3 \times 3$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 75 \\ \hline 5 & 15 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$75 = 5^2 \times 3$

3. 次の中から**素数**を選び, ○をつけなさい.

$$5,\quad 8,\quad 14,\quad 19,\quad 25,\quad 31$$

> 整数を **素数だけの積（掛け算）** で表すことを**素因数分解**という.
> **どの整数の素因数分解も, 一通りに決まる.**

4. 次の数を素因数分解しなさい.

(1) 12　　(2) 18　　(3) 48　　(4) 60　　(5) 90　　(6) 198

2 平方根 — 2 乗する前はいくつ？

2.1 平方根とは何か、根号とは何か

■平方根の定義 — 2 乗のもと

1. (1) (　　) も (　　) も 2 乗すると 4 になる.
   (2) (　　) も (　　) も 2 乗すると 25 になる.
   (3) 2 乗すると 9 になる数は (　　), (　　) の 2 つある.
   (4) 2 乗すると $\frac{1}{4}$ になる数は (　　), (　　) の 2 つある.

> **2 乗すると 25 になる数**を **25 の平方根**という.

2. 25 の平方根を全て答えなさい. (　　　)

> **2 乗すると 49 になる数**を **49 の平方根**という.

3. 49 の平方根を全て答えなさい. (　　　)

> 平方 $\Longleftrightarrow$ 2 乗　根 $\Longleftrightarrow$ ねっこ, もと
> つまり**平方根** $\Longleftrightarrow$ **2 乗（される前）のもと**

4. (1) 36 の平方根を全て書くと (　　　) である.
   (2) 64 の (　　) のうち, 正の値は 8, 負の値は −8 である.
   (3) 100 の平方根のうち, 正の値は $\boxed{}$, 負の値は $\boxed{}$ である.
   (4) $\frac{1}{9}$ の平方根のうち, 正の値は $\boxed{}$, 負の値は $\boxed{}$ である.
   (5) 16 の正の (　　) は 4 である. 25 の負の平方根は $\boxed{}$ である.
   (6) $\frac{1}{16}$ の正の平方根は $\boxed{}$ である. $\frac{4}{25}$ の負の平方根は $\boxed{}$ である.
   (7) 面積 49cm^2 の正方形の 1 辺は $\boxed{}$ cm である.
   (8) 面積 64m^2 の正方形の 1 辺は $\boxed{}$ m, 面積 $\frac{4}{9}$cm^2 の正方形の 1 辺は $\boxed{}$ cm である.
   (9) 121 の平方根は $\boxed{}$, $\boxed{}$ であり, 196 の平方根は $\boxed{}$, $\boxed{}$ である.

■$\sqrt{}$（根号）の定義 — 正の平方根を表す記号

$\sqrt{x}$ で x の 正の 平方根を表す．（負の平方根は $-\sqrt{x}$）

$\sqrt{}$ のことを，「**根号**」という．

5. **例 1** $\sqrt{16}$ とは「16 の正の平方根」のこと，つまり $\sqrt{16}=4$.

(1) $\sqrt{49}$　(2) $\sqrt{36}$　(3) $\sqrt{\dfrac{1}{9}}$

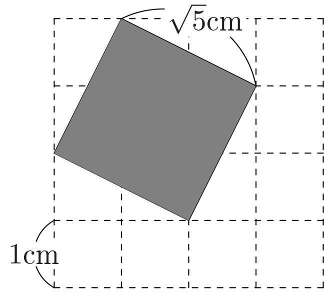
(4) $\sqrt{1}$　(5) $-\sqrt{4}$　(6) $-\sqrt{\dfrac{9}{4}}$

(7) 100 に $\Big(\qquad\Big)$ をつけた $\sqrt{100}$ は，100 の $\Big(\qquad\qquad\Big)$ を意味し，$\boxed{}$ に等しい．

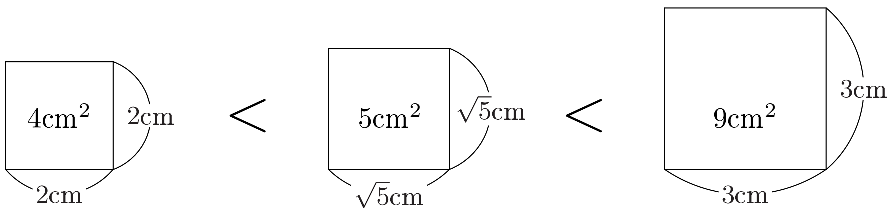
■$\sqrt{5}$ — 2 乗すると 5 になる数？

$\sqrt{5}$ はどんな数？

2 乗すると 5 になる数は「**ある**」



右の図の正方形は面積が 5 cm^2 なので（四角の数を数えてみよう），
1 辺の長さは「2 乗すると 5 になる数（単位 cm）」$=\sqrt{5}$ cm である．
では，$\sqrt{5}$cm とは，どれくらいの長さだろうか？



上の図より，$\sqrt{5}$cm は 2cm より長く 3cm より短い，つまり $2<\sqrt{5}<3$

6. (1) 1 辺 $\sqrt{3}$cm の正方形の面積は $\Big(\qquad\Big)$ cm^2 であり，1 辺が 2cm の正方形の面積より $\left\{\begin{matrix}\text{大きい}\\\text{小さい}\end{matrix}\right\}$.

つまり，$\left\{\begin{matrix}\sqrt{3}\text{cm は 2cm より長い}\\\sqrt{3}\text{cm は 2cm より短い}\end{matrix}\right\}$.

(2) 1 辺 $\sqrt{7}$cm の正方形の面積は $\Big(\qquad\Big)$ cm^2 であり，1 辺が 3cm の正方形の面積より $\left\{\begin{matrix}\text{大きい}\\\text{小さい}\end{matrix}\right\}$.

つまり，$\left\{\begin{matrix}\sqrt{7}\text{cm は 3cm より長い}\\\sqrt{7}\text{cm は 3cm より短い}\end{matrix}\right\}$ であり，$\left\{\begin{matrix}\sqrt{7}>3\\\sqrt{7}<3\end{matrix}\right\}$.

(3) 1 辺 $\Big(\qquad\Big)$ cm の正方形の面積は，29cm^2 であり，1 辺が 5cm の正方形の面積より $\left\{\begin{matrix}\text{大きい}\\\text{小さい}\end{matrix}\right\}$.

7. 大きさ・長さの大きい方に ○ を付けなさい．

(1) $\left\{\begin{matrix}\text{1 辺 3cm の正方形の面積}\\\text{1 辺 }\sqrt{6}\text{cm の正方形の面積}\end{matrix}\right\}$　(2) $\left\{\begin{matrix}3\\\sqrt{6}\end{matrix}\right\}$　(3) $\left\{\begin{matrix}\sqrt{20}\\5\end{matrix}\right\}$　(4) $\left\{\begin{matrix}6\\\sqrt{30}\end{matrix}\right\}$

2.2 平方根の大きさ比べ

1.

- $\sqrt{5}$ は $\sqrt{6}$ よりも $\begin{Bmatrix}\text{大きい}\\\text{小さい}\end{Bmatrix}$. $\sqrt{13}$ は $\sqrt{11}$ よりも $\begin{Bmatrix}\text{大きい}\\\text{小さい}\end{Bmatrix}$. $\sqrt{204}$ は $\sqrt{203}$ よりも $\begin{Bmatrix}\text{大きい}\\\text{小さい}\end{Bmatrix}$.

- 3 は $\sqrt{\boxed{}}$ に等しいので, $\sqrt{10}$ よりも $\begin{Bmatrix}\text{大きい}\\\text{小さい}\end{Bmatrix}$. また, $\sqrt{11}$ よりも $\begin{Bmatrix}\text{大きい}\\\text{小さい}\end{Bmatrix}$.

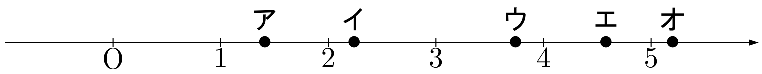
- 5 は $\sqrt{\boxed{}}$ に等しいので, $\begin{Bmatrix}\sqrt{26}\\\sqrt{23}\end{Bmatrix}$ よりも大きく, $\begin{Bmatrix}\sqrt{27}\\\sqrt{24}\end{Bmatrix}$ よりも小さい.

- 3 は $\sqrt{\boxed{}}$ に等しく, 4 は $\sqrt{\boxed{}}$ に等しい. だから, $\begin{Bmatrix}\sqrt{7}\\\sqrt{13}\end{Bmatrix}$ と $\begin{Bmatrix}\sqrt{17}\\\sqrt{15}\end{Bmatrix}$ は 3 より大きく 4 より小さい.

2. 値の大きい方に ○ を付けなさい.

(1) $\begin{Bmatrix}\sqrt{18}\\\sqrt{13}\end{Bmatrix}$　(2) $\begin{Bmatrix}\sqrt{10}\\3\end{Bmatrix}$　(3) $\begin{Bmatrix}4\\\sqrt{18}\end{Bmatrix}$　(4) $\begin{Bmatrix}\sqrt{7}\\3\end{Bmatrix}$　(5) $\begin{Bmatrix}6\\\sqrt{34}\end{Bmatrix}$　(6) $\begin{Bmatrix}\sqrt{24}\\5\end{Bmatrix}$

3. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{21}$ は, 数直線上のアからオのどれかと一致する. 次の $\boxed{}$ に, **アからオで答え**なさい.



- $\sqrt{5}$ は 2 より大きく 3 より小さいので, 数直線の $\boxed{}$ に一致する.
- $\sqrt{2}$ は数直線の $\boxed{}$ に一致し, $\sqrt{21}$ は数直線の $\boxed{}$ に一致する.

4. (1) $\begin{Bmatrix}a=6\\a=3\end{Bmatrix}$ のとき, $\sqrt{a}$ は 2 より大きい. $1<\sqrt{a}<2$ となる a の値には $\begin{Bmatrix}a=3\\a=5\end{Bmatrix}$ がある.

(2) $\sqrt{5}<\sqrt{a}<\sqrt{10}$ を満たす整数 a を全て求めなさい.

(3) $2<\sqrt{a}<3$ を満たす整数 a を全て求めなさい.

(4) $4<\sqrt{a}<5$ を満たす整数 a は何個あるか.

(5) $\begin{Bmatrix}a=6\\a=3\end{Bmatrix}$ のとき, $\sqrt{2a}$ は 3 より大きい. また, $\begin{Bmatrix}a=2\\a=4\end{Bmatrix}$ ならば $2<\sqrt{3a}<3$ を満たす.

(6) $5<\sqrt{2a}<6$ を満たす整数 a を全て求めなさい.

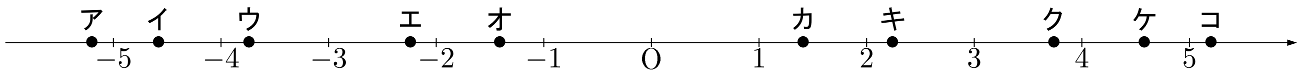
(7) $3<\sqrt{3a}<5$ を満たす整数 a を全て求めなさい.

2.3　負の平方根

1. (1) $\sqrt{2}$ の値は, $\left\{\begin{array}{c} 1 \text{ と } 2 \\ 2 \text{ と } 3 \end{array}\right\}$ の間にある．だから, $-\sqrt{2}$ の値は $\left\{\begin{array}{c} -2 \text{ と } -1 \\ -3 \text{ と } -2 \end{array}\right\}$ の間にある．

(2) $\sqrt{7}$ は 2 より $\left\{\begin{array}{c} \text{大きい} \\ \text{小さい} \end{array}\right\}$．だから, $-\sqrt{7}$ は -2 より $\left\{\begin{array}{c} \text{大きい} \\ \text{小さい} \end{array}\right\}$．

2. $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{21}$ は, 数直線上のアからコのどれかと一致する．次の $\boxed{}$ に, アからコで答えなさい．



- $\sqrt{5}$ は 2 と 3 の間なので, $-\sqrt{5}$ は -3 と -2 の間, つまり $-\sqrt{5}$ は数直線の $\boxed{}$ に一致する．
- $-\sqrt{2}$ は数直線の $\boxed{}$ に一致し, $-\sqrt{21}$ は数直線の $\boxed{}$ に一致する．

−(マイナス) をつけると大小が逆転する, つまり, $\boldsymbol{a > b \Rightarrow -a < -b}$

3. 値の大きい方に ○ を付けなさい．

(1) $\left\{\begin{array}{c} -\sqrt{18} \\ -\sqrt{13} \end{array}\right\}$　(2) $\left\{\begin{array}{c} -\sqrt{42} \\ -\sqrt{53} \end{array}\right\}$　(3) $\left\{\begin{array}{c} -3 \\ -\sqrt{8} \end{array}\right\}$　(4) $\left\{\begin{array}{c} -5 \\ -\sqrt{27} \end{array}\right\}$　(5) $\left\{\begin{array}{c} -4 \\ -\sqrt{14} \end{array}\right\}$　(6) $\left\{\begin{array}{c} -6 \\ -\sqrt{34} \end{array}\right\}$

4. (1) $\left\{\begin{array}{c} a=6 \\ a=3 \end{array}\right\}$ のとき, $-\sqrt{a}$ は -2 より大きい．$-2 < -\sqrt{a} < -1$ となる a の値には $\left\{\begin{array}{c} a=2 \\ a=5 \end{array}\right\}$ がある．

(2) 整数 a のうち, $-3 < -\sqrt{a} < -2$ となる a を全て求めなさい．

(3) 整数 a のうち, $-2 < -\sqrt{a} < 0$ となる a を全て求めなさい．

5. 例に倣って, 根号を含む式を簡単にしなさい．

例 2　$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$,　$-\left(\sqrt{\dfrac{1}{9}}\right)^2 = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = -\dfrac{1}{9}$　(実は, 計算するまでもない)

(1) $\sqrt{5^2}$　(2) $\sqrt{(-2)^2}$　(3) $-\sqrt{(-3)^2}$

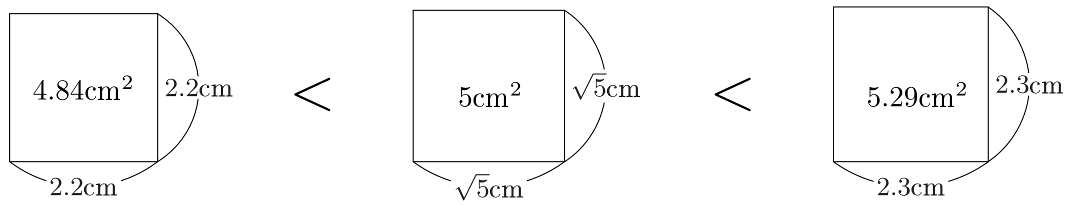
(4) $-\left(\sqrt{9}\right)^2$　(5) $(\sqrt{4})^2$　(6) $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}$

例 3　$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$,　$\left(-\sqrt{5}\right)^2 = 5$　($\sqrt{5}$ も $-\sqrt{5}$ も, もともと 2 乗すれば 5 になる数．)

(1) $-\left(\sqrt{7}\right)^2$　(2) $\left(-\sqrt{\dfrac{3}{8}}\right)^2$　(3) $-\left(-\sqrt{2}\right)^2$

(4) $-\sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2}$　(5) $(\sqrt{8})^2$　(6) $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}$

■$\sqrt{5}$ の大きさをもっと正確に もっと細かく正方形を考えてみよう.



つまり, $2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ であり, $\sqrt{5} = 2.2\cdots$

> このように計算した結果, 次の値になることが知られている.
>
> $\boldsymbol{\sqrt{2} = 1.41421356\cdots}$ 「ひとよひとよにひとみごろ（一夜一夜に人見ごろ)」と覚える
>
> $\boldsymbol{\sqrt{3} = 1.7320508\cdots}$ 「ひとなみにおごれや（人並みにおごれや)」と覚える
>
> $\boldsymbol{\sqrt{5} = 2.2360679\cdots}$ 「ふじさんろくおうむなく（富士山麓オウム鳴く)」と覚える
>
> この 3 つの値は覚えておくと, 大体の値が簡単に計算できて便利.
> また, これらの小数部分は**無限に数字が続き**, **数字は循環しない**. $\dfrac{2}{3} = 0.6666\cdots$ などとは異なる.
> (整数や分数にならない他の平方根も同じ — 例えば $\sqrt{7} = 2.6457513110645905905016157536\cdots$)

(やってみよう) 2.2360679 の 2 乗を, 電卓で計算してみよう.

1. 3.2 は $\sqrt{\boxed{}}$ に等しいので, $\sqrt{10}$ より $\left\{\begin{matrix}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{matrix}\right\}$. 3 は $\sqrt{\boxed{}}$ に等しいので, $\sqrt{\dfrac{20}{3}}$ より $\left\{\begin{matrix}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{matrix}\right\}$.
また, $\dfrac{3}{2}$ は $\sqrt{\boxed{}}$ に等しいので, $\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ より $\left\{\begin{matrix}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{matrix}\right\}$.

2. 大きさ・長さの大きい方に ○ を付けなさい.

(1) $\left\{\begin{matrix}\sqrt{\dfrac{9}{2}}\\ 4\end{matrix}\right\}$ (2) $\left\{\begin{matrix}\dfrac{5}{3}\\ \sqrt{\dfrac{7}{2}}\end{matrix}\right\}$ (3) $\left\{\begin{matrix}\sqrt{3}\\ 3\end{matrix}\right\}$ (4) $\left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{\dfrac{1}{2}}\end{matrix}\right\}$

3. 次の値について, 大きさ・長さの大きい順に並べ, （ア）～（ウ）で答えなさい.

(1) （ア）1 辺 $\dfrac{3}{2}$cm の正方形の面積
（イ）1 辺 $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$cm の正方形の面積
（ウ）1 辺 $\sqrt{2}$cm の正方形の面積

$\boxed{} > \boxed{} > \boxed{}$

(2) （ア）1cm
（イ）$\sqrt{\dfrac{7}{3}}$cm
（ウ）$\dfrac{5}{2}$cm

$\boxed{} > \boxed{} > \boxed{}$

(3) （ア）$\sqrt{\dfrac{5}{3}}$
（イ）$\sqrt{3}$
（ウ）2

$\boxed{} > \boxed{} > \boxed{}$

4. 大きい方に ○ を付けなさい.

(1) $\left\{\begin{matrix}-4\\ -\sqrt{5}\end{matrix}\right\}$ (2) $\left\{\begin{matrix}-\sqrt{3}\\ -\dfrac{5}{2}\end{matrix}\right\}$ (3) $\left\{\begin{matrix}-2\\ -\sqrt{\dfrac{10}{3}}\end{matrix}\right\}$ (4) $\left\{\begin{matrix}-\dfrac{1}{2}\\ -\sqrt{\dfrac{1}{2}}\end{matrix}\right\}$ (5) $\left\{\begin{matrix}-\sqrt{\dfrac{7}{3}}\\ -\dfrac{7}{3}\end{matrix}\right\}$

2.4　有理数と無理数

分数で書ける数を**有理数**という．分数で書けない数を**無理数**という．
無理数と有理数をまとめて, **実数**という．イメージとしては, **数直線上の数全て**を実数と思えばよい．

- **実数**
  - **有理数**
    - 整数
      - 正の整数（**自然数**）……… $3,\ 5$ など
      - 0
      - 負の整数 ……………… $-3,\ -5$ など
    - 整数でない有理数
      - 有限小数 …… $3.3,\ -5.2,\ \dfrac{5}{4},\ -\dfrac{3}{2}$ など
      - 循環小数 …… $\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{5}{7}$ など（無限小数）
  - **無理数** ………… 循環しない無限小数（無限小数）…… $\sqrt{3},\ -\sqrt{7},\ \pi$ など

整数も小数も, 分数で表すことができる $\left(3=\dfrac{3}{1},\ 4.23=\dfrac{423}{100}\right)$ ので, 有理数である．
有理数の小数部分は, 無いか, 無限に続かないか, 無限に続いても同じ数の繰り返しである（つまり, 循環する）．
平方根は, 小数部分が繰り返されず**分数で表せない**．全ての無理数は, 小数部分が繰り返されない．
無理数には, 平方根の他に, 円周率 π などがある．

1. 数のリスト $\boxed{\ \mathbf{4,\ \sqrt{3},\ \dfrac{5}{3},\ \sqrt{4},\ -\sqrt{5},\ -0.45,\ \pi+1,\ 3\dfrac{2}{5},\ 0}\ }$ について,

(1) このうち無理数は $\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)$, 有理数は $\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)$ である．

(2) このうち無限小数は $\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)$, 自然数は $\left(\qquad\qquad\right)$ である．

2. $\dfrac{2}{11}$ は $0.181818\cdots$ であり, 無限に"18"を繰り返す．そこでこの循環小数を $0.\dot{1}\dot{8}$ と書く．
他に, 例えば $\dfrac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$, $\dfrac{1}{7}=0.14285714285714\cdots=0.\dot{1}4285\dot{7}$, $\dfrac{14}{11}=1.272727\cdots=1.\dot{2}\dot{7}$.
以下も同じように循環小数で表せ．

(1) $\dfrac{7}{9}$　　(2) $\dfrac{14}{33}$　　(3) $\dfrac{3}{13}$　　(4) $\dfrac{38}{27}$

3. $0.4343\cdots=0.\dot{4}\dot{3}$ は循環小数なので, ある分数と等しいはずである．その分数を x とおく．
x を $\boxed{}$ 倍すると $43.434343\cdots$ になり, これは $x=0.434343\cdots$ に $\boxed{}$ を足したものと等しい．
よって, $100x=43+x$ となるので, $x=\dfrac{43}{99}$ と求められる．同様にして, 以下も分数で表せ．

(1) $0.\dot{3}\dot{9}$　　(2) $0.\dot{5}$　　(3) $0.\dot{3}1\dot{5}$　　(4) $1.\dot{5}8\dot{5}$

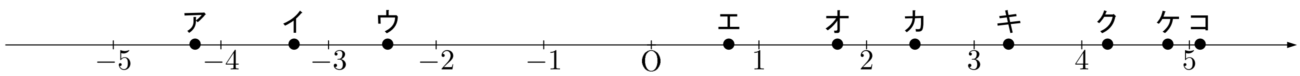
3 まとめその 1

1.
- $\sqrt{7}$ を 7 の正の $\left(\qquad\qquad\right)$ といい，記号 $\sqrt{}$ を $\left(\qquad\qquad\right)$ という．
- $\sqrt{14}$ は 14 の $\left(\qquad\right)$ の平方根であり，$\boxed{\qquad}$ は，7 の負の平方根である．
- $\sqrt{5}$ も $-\pi$ も，$\dfrac{2}{3}$ と同じように無限小数だが，$\sqrt{5}$ と $-\pi$ は $\left(\qquad\qquad\right)$，$\dfrac{2}{3}$ は $\left(\qquad\qquad\right)$ である．
- 普通，ものを数えるときは $\boxed{\qquad}$ から始める．よって，$\left(\qquad\qquad\right)$ に 0 や負の整数は含まれない．

2. 大きい方に ○ を付けなさい．

(1) $\left\{\begin{matrix}\sqrt{64}\\ \sqrt{59}\end{matrix}\right\}$ (2) $\left\{\begin{matrix}6\\ \sqrt{35}\end{matrix}\right\}$ (3) $\left\{\begin{matrix}\sqrt{\dfrac{11}{3}}\\ \dfrac{3}{2}\end{matrix}\right\}$ (4) $\left\{\begin{matrix}-\sqrt{12}\\ -\sqrt{7}\end{matrix}\right\}$ (5) $\left\{\begin{matrix}-4\\ -\sqrt{15}\end{matrix}\right\}$ (6) $\left\{\begin{matrix}-\sqrt{\dfrac{13}{2}}\\ -\dfrac{7}{3}\end{matrix}\right\}$

3. $\sqrt{6}$, $-\sqrt{11}$, $\sqrt{23}$ は，数直線上のアからセのどれかと一致する．次の $\boxed{\qquad}$ に，アからコで答えなさい．



- $\sqrt{6}$ は数直線の $\boxed{\qquad}$ に一致し，$-\sqrt{11}$ は数直線の $\boxed{\qquad}$ に一致する．
- $\sqrt{23}$ は 4.5 より $\left\{\begin{matrix}\text{大きい}\\ \text{小さい}\end{matrix}\right\}$ よって $\sqrt{23}$ は数直線の $\boxed{\qquad}$ に一致する．

4. 次の値について，大きさ・長さの大きい順に並べ，（ア）～（ウ）で答えなさい．

(1) （ア）$\sqrt{\dfrac{13}{2}}$ （イ）$\sqrt{6}$ （ウ）$\dfrac{5}{2}$

$\boxed{\qquad} > \boxed{\qquad} > \boxed{\qquad}$

(2) （ア）$\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ （イ）-1 （ウ）$\dfrac{4}{3}$

$\boxed{\qquad} > \boxed{\qquad} > \boxed{\qquad}$

(3) （ア）$\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ （イ）$-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ （ウ）-2

$\boxed{\qquad} > \boxed{\qquad} > \boxed{\qquad}$

(4) （ア）$-\dfrac{2}{5}$ （イ）-1 （ウ）$-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

$\boxed{\qquad} > \boxed{\qquad} > \boxed{\qquad}$

5. (1) 10 は $\sqrt{\boxed{\quad}}$ に等しく 11 は $\sqrt{\boxed{\quad}}$ に等しいので，$10 < \sqrt{a} < 11$ となる整数 a は $\left(\qquad\qquad\right)$ 個ある．

(2) $-6 < -\sqrt{a} < -5$ となる整数 a は何個あるか．

(3) $-3 < -\sqrt{3a} < -1$ となる整数 a を全て求めなさい．

---

6. (1) $\left(\sqrt{4}\right)^2 = \boxed{\qquad}$ (2) $\sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2} = \boxed{\qquad}$ (3) $-\sqrt{(-5)^2} = \boxed{\qquad}$

7. $\dfrac{4}{7}$ を循環小数で表すと $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ であり，$0.\dot{1}4\dot{8}$ を分数で表すと $\boxed{\qquad}$ である．

4　平方根の掛け算, 割り算と分母の有理化

4.1　平方根の掛け算・割り算

■平方根の ×, ÷ の計算 —— 普通にできる！ 掛け算・割り算は難しくありません．つまり，

- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

1. $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ を 2 乗すると，$\left(\sqrt{3} \times \sqrt{5}\right)^2 = \sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} = (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5})^2$ なので，$\boxed{}$ になる．

つまり，$\sqrt{3} \times \sqrt{5} =$ (2 乗して 15 になる正の数) $= \boxed{}$ である．

(参考) 同じようにして，$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$，$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ を一般的に証明することができる．

2. 次の計算をしなさい．根号を外せるものは外すこと．

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$　(2) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$　(3) $-\sqrt{5} \times \sqrt{7}$

(4) $\sqrt{3} \times (-\sqrt{5})$　(5) $-\sqrt{7} \times (-\sqrt{6})$　(6) $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$

(7) $\sqrt{12} \div \sqrt{4}$　(8) $\sqrt{30} \div \sqrt{6}$　(9) $\sqrt{14} \div (-\sqrt{7})$

(10) $-\sqrt{20} \div \sqrt{5}$　(11) $-\sqrt{15} \div (-\sqrt{10})$　(12) $\sqrt{50} \div \sqrt{20}$

3. 次のうち，$\sqrt{6}$ と等しいものに ○ をつけよ．

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3},\quad \sqrt{\frac{12}{2}},\quad \sqrt{2 \times 3},\quad \sqrt{12} \div 2,\quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}},\quad \sqrt{2}\sqrt{3},\quad \sqrt{12 \div 2}$$

例 4　$\boxed{a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}\ (\times \text{ は省略できる})}$　$-2 \times \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$，$\dfrac{1}{4} \times \sqrt{2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2} \left(= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

4. 次の計算をしなさい．

(1) $5 \times \sqrt{3}$　(2) $(-3) \times \sqrt{6}$　(3) $\dfrac{3}{2} \times \sqrt{10}$

(4) $\sqrt{3} \times (-\dfrac{1}{2})$　(5) $4 \times 3\sqrt{2}$　(6) $\sqrt{7} \times \sqrt{3} \times 6$

(7) $(-1) \times \sqrt{7} \times \dfrac{4}{5}$　(8) $(-5) \times \sqrt{7} \times \sqrt{6} \times (-6)$　(9) $6\sqrt{5} \times \sqrt{7} \div (-4)$

■$\sqrt{}$（根号）の中を簡単にする

例 5　$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = \sqrt{45}$

5. **例 5** に倣って, 以下の数を $\sqrt{a}$ の形で表せ.

(1) $3\sqrt{2}$　(2) $6\sqrt{2}$　(3) $5\sqrt{3}$　(4) $3\sqrt{10}$

根号の中を簡単にするための因数分解

$$\begin{array}{r|l} 4 & 24 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 72 \\ \hline 4 & 8 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$24 = 2^2 \times 6$　　$72 = 2^2 \times 3^2 \times 2$

4 で割れる
$\iff$ 下 2 桁が 4 で割れる

9 で割れる
$\iff$ 全ての桁を足すと 9 で割れる

25 で割れる
$\iff$ 下 2 桁が 25 で割れる

例 6　$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

6. **例 6** に倣って, 以下の数を $a\sqrt{b}$ の形で表せ.

(1) $\sqrt{20}$　(2) $\sqrt{50}$　(3) $\sqrt{32}$　(4) $\sqrt{96}$

例 7　$3\sqrt{20} = 3\sqrt{2^2 \times 5} = 3 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

7. **例 7** に倣って, 以下の数の根号内をできるだけ小さくしなさい.

(1) $6\sqrt{8}$　(2) $5\sqrt{45}$　(3) $2\sqrt{99}$　(4) $4\sqrt{72}$

例 8

$$(-2\sqrt{18}) \times (-3\sqrt{6}) = 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 18\sqrt{12} = 36\sqrt{2}$$

$\sqrt{}$ の中を小さくしてから計算しよう.

8. 次の計算をしなさい. 根号の中はできるだけ簡単にすること. (参考：慣れると 15 ページの 9 のようにできるようになる.)

(1) $5\sqrt{18} \times \sqrt{5} = \boxed{}\sqrt{2} \times \sqrt{5}$
$= \boxed{}$

(2) $(-\sqrt{12}) \times 4\sqrt{8}$

(3) $\sqrt{7} \times (-3\sqrt{63})$

(4) $(-4\sqrt{30}) \times \sqrt{8}$

(5) $(-4\sqrt{8}) \times 2\sqrt{12}$

(6) $(-2\sqrt{27}) \times (-2\sqrt{18})$

4.2 分母の有理化

分母から $\sqrt{}$（根号）を無くすことを，**分母の有理化**という.

例 9

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{{}^{2}\cancel{4}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 2\sqrt{2}$$

1. 例 9 に倣って計算し，次の式の分母から根号を無くせ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ (2) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ (3) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

(4) $6 \div \sqrt{3}$ (5) $6 \div \sqrt{15}$ (6) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

例 10

$$\frac{15}{\sqrt{90}} = \frac{{}^{5}\cancel{15}}{\cancel{3}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\cancel{5}\sqrt{10}}{\cancel{10}^{\,2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$\boxed{\sqrt{}\text{の中を小さくしてから有理化しよう.}}$

2. 例 10 に倣って計算し，次の式の分母から根号を無くせ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{32}} = \dfrac{1}{\boxed{}\sqrt{2}}$

$= \boxed{}$

(2) $\dfrac{3}{\sqrt{18}}$ (3) $4 \div \sqrt{12}$

(4) $\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$ (5) $4\sqrt{3} \div \sqrt{32}$ (6) $\dfrac{4}{3\sqrt{18}}$

例 11

$$\sqrt{3} \div 3\sqrt{30} \times 6\sqrt{2} = \frac{\cancel{\sqrt{3}} \times 6\cancel{\sqrt{2}}}{3\underbrace{\cancel{\sqrt{30}}}_{\cancel{\sqrt{10}}\,\sqrt{5}}} = \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3} \times \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

3. 例 11 に倣って計算し，次の式の分母から根号を無くせ.

(1) $\sqrt{6} \times \sqrt{10} \div 5\sqrt{30}$ (2) $\sqrt{21} \times \sqrt{2} \div 2\sqrt{7}$

(3) $\sqrt{15} \div 3\sqrt{6} \times 2\sqrt{5}$ (4) $\sqrt{30} \div 2\sqrt{5} \div \sqrt{10}$

4.3 およその値を求める

1. $\sqrt{2}=1.414,\ \sqrt{3}=1.732,\ \sqrt{5}=2.236$ と近似するとき, 以下の $\boxed{}$ に正しい値を入れなさい.

- $\sqrt{18}$ を $a\sqrt{b}$ の形にすると $\boxed{}$ であり, およその値は $\boxed{}$ である.
- $\sqrt{45}$ を $a\sqrt{b}$ の形にすると $\boxed{}$ であり, およその値は $\boxed{}$ である.
- $\sqrt{48}$ のおよその値は $\boxed{}$, $\sqrt{20}$ のおよその値は $\boxed{}$ である.

2.
- $10\sqrt{2}=\sqrt{\boxed{}}$, $100\sqrt{2}=\sqrt{\boxed{}}$, $1000\sqrt{2}=\sqrt{\boxed{}}$
- $10\sqrt{20}=\sqrt{\boxed{}}$, $100\sqrt{20}=\sqrt{\boxed{}}$, $1000\sqrt{20}=\sqrt{\boxed{}}$
- $0.1\times\sqrt{5}=\sqrt{\boxed{}}$, $0.01\times\sqrt{5}=\sqrt{\boxed{}}$, $0.001\times\sqrt{5}=\sqrt{\boxed{}}$
- $0.1\times\sqrt{50}=\sqrt{\boxed{}}$, $0.01\times\sqrt{50}=\sqrt{\boxed{}}$, $0.001\times\sqrt{50}=\sqrt{\boxed{}}$

3. $\sqrt{3}=1.732,\ \sqrt{30}=5.477$ と近似したとき, 以下の $\boxed{}$ に正しい値を入れなさい.

- $\sqrt{3000}$ は $\left\{\begin{matrix}10\sqrt{3}\\10\sqrt{30}\end{matrix}\right\}$ なので, およその値は $\boxed{}$ である.
- $\sqrt{0.03}$ は $\left\{\begin{matrix}\sqrt{3}\\\sqrt{30}\end{matrix}\right\}$ の $\boxed{}$ 倍なので, 小数で求めると $\boxed{}$ である.
- $\sqrt{0.3}$ は $\left\{\begin{matrix}\sqrt{3}\\\sqrt{30}\end{matrix}\right\}$ の $\boxed{}$ 倍なので, 小数で求めると $\boxed{}$ である.
- $\sqrt{3000000}$ はおよそ $\boxed{}$ であり, $\sqrt{0.003}$ はおよそ $\boxed{}$ である.

4. $\sqrt{2}=1.414,\ \sqrt{5}=2.236$ とする.

(1) $4\div\sqrt{2}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ の分母を有理化する（根号を無くす）と $\boxed{}$ になる.

つまり, $4\div\sqrt{2}$ のおよその値は $\boxed{}$ と容易に計算できる.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ の分母を有理化すると $\boxed{}$ になる. つまり, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のおよその値は $\boxed{}$ である.

5. $\sqrt{2}=1.414,\ \sqrt{5}=2.236$ とする. 以下のおよその値を求めなさい.

(1) $\sqrt{20000}$ (2) $\sqrt{0.0005}$ (3) $\sqrt{50}$

(4) $\dfrac{3}{\sqrt{18}}$ (5) $\dfrac{3}{\sqrt{20}}$

5 平方根の四則計算

一つずつ, 例に倣って計算しましょう. **いずれも, 根号の中はできるだけ簡単にし, 分母に根号は残さないように.**

例 12

$2\sqrt{2}$	$+$	$3\sqrt{2}$	$=$	$5\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}$	$-$	$2\sqrt{3}$	$=$	$\sqrt{3}$
$\sqrt{2}$ が 2 つ		$\sqrt{2}$ が 3 つ		$\sqrt{2}$ が 5 つ	$\sqrt{3}$ が 3 つ		$\sqrt{3}$ が 2 つ		$\sqrt{3}$ が 1 つ

1. (1) $5\sqrt{5}+5\sqrt{5}$　(2) $4\sqrt{5}-3\sqrt{5}$　(3) $6\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

例 13

$-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=\boldsymbol{(-3+5)\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$　　$\dfrac{3}{4}\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}=\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}\right)\sqrt{3}}=\dfrac{9}{4}\sqrt{3}$

2. (1) $6\sqrt{7}+3\sqrt{7}$　(2) $-5\sqrt{7}+\sqrt{7}$　(3) $-2\sqrt{6}+3\sqrt{6}$

(4) $-5\sqrt{6}-\sqrt{6}$　(5) $-4\sqrt{7}+4\sqrt{7}$　(6) $-3\sqrt{6}+5\times\sqrt{6}$

(7) $\dfrac{5}{3}\sqrt{5}-\dfrac{4}{3}\sqrt{5}$　(8) $-\dfrac{1}{4}\sqrt{5}-\sqrt{5}$

(9) $-\dfrac{5}{4}\times\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(10) $\dfrac{5}{2}\sqrt{6}-5\sqrt{6}\div 3$

3. (1) $\sqrt{28}+\sqrt{7}=\boxed{}\sqrt{7}+\sqrt{7}$
$=\boxed{}\sqrt{7}$

(2) $3\sqrt{18}-3\sqrt{32}=\boxed{}\sqrt{2}-\boxed{}\sqrt{2}$
$=\boxed{}\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{24}+\sqrt{6}$　(4) $2\sqrt{20}-\sqrt{5}$　(5) $-\sqrt{18}+\sqrt{2}$

(6) $3\sqrt{3}-\sqrt{27}$　(7) $3\sqrt{63}+3\sqrt{7}$　(8) $2\sqrt{3}\times\sqrt{18}-\sqrt{24}$

(9) $-2\sqrt{20}-2\sqrt{45}+3\sqrt{5}$　(10) $\sqrt{28}-4\sqrt{7}+2\sqrt{21}\times\sqrt{3}$

例 14 (分数があっても, 今までどおり) $-2\sqrt{5}-\dfrac{5}{4}\underbrace{\sqrt{20}}_{2\sqrt{5}}=-2\sqrt{5}-\dfrac{5}{2}\sqrt{5}=-\dfrac{9}{2}\sqrt{5}$

4. (1) $-\dfrac{1}{2}\sqrt{28}-\dfrac{5}{3}\sqrt{7}$ (2) $-\dfrac{3}{4}\sqrt{7}+\dfrac{3}{4}\sqrt{28}$

(3) $\dfrac{3}{4}\sqrt{48}-\dfrac{3}{2}\sqrt{12}+\dfrac{4}{3}\sqrt{27}$ (4) $-\dfrac{5}{2}\sqrt{45}+\dfrac{5}{2}\sqrt{5}+\dfrac{3}{2}\sqrt{10}\times\sqrt{2}$

例 15 $\sqrt{}$ の中が異なる 2 つの数は, 足すことも引くこともできない！！

$3\sqrt{5}+2\sqrt{5}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\underline{5\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ これでおしまい！！

5. (1) $2\sqrt{6}+3\sqrt{5}+6\sqrt{5}$ (2) $5\sqrt{6}-\sqrt{6}-\sqrt{7}-3\sqrt{7}$

(3) $\sqrt{6}+2\sqrt{6}+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}$ (4) $-4\sqrt{6}+3\sqrt{5}+4\sqrt{6}-3\sqrt{5}$

6. (1) $\sqrt{63}+2\sqrt{48}+\sqrt{7}+\sqrt{27}$ (2) $3\sqrt{5}-2\sqrt{8}-\sqrt{2}+3\sqrt{20}$

(3) $-2\sqrt{5}+2\sqrt{20}-\sqrt{8}+2\sqrt{2}$ (4) $-2\sqrt{54}-\sqrt{24}+\sqrt{32}-\sqrt{2}$

(5) $3\sqrt{7}-2\sqrt{27}-\sqrt{28}-3\sqrt{12}$ (6) $-\dfrac{5}{2}\sqrt{7}+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{12}-3\sqrt{28}$

例 16 (有理化付き) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{6}\underbrace{\sqrt{12}}_{2\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\sqrt{3}=\sqrt{3}$

7. (1) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}$ (2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ (3) $2\sqrt{2}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

(4) $-\dfrac{4}{\sqrt{6}}+\dfrac{3}{4}\sqrt{24}$

(5) $\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{45}}+\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

8. $\boxed{\times,\ \div\ \text{が先!!}\quad +,\ -\ \text{が後!!}}$

(1) $6\div\sqrt{5}-2\times\sqrt{5}+\sqrt{5}$

(2) $2\sqrt{2}\div\sqrt{6}-\dfrac{6}{\sqrt{3}}+2\times\sqrt{3}$

(3) $-\sqrt{8}-3\sqrt{2}\div 2+\sqrt{\dfrac{1}{18}}$

(4) $\dfrac{3}{2}\times\sqrt{6}-4\div\sqrt{54}+3\sqrt{24}\div 4$

9. (1) $\sqrt{5}\times\underbrace{\sqrt{10}}_{\sqrt{5}\text{で割れる}}=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{\boxed{}}$

$=\boxed{}$

(2) $\underbrace{\sqrt{14}}_{\sqrt{7}\text{で割れる}}\times\underbrace{\sqrt{21}}_{\sqrt{7}\text{で割れる}}=\sqrt{7}\times\sqrt{\boxed{}}\times\sqrt{7}\times\sqrt{\boxed{}}$

$=7\sqrt{\boxed{}}$

例 17 (分配法則 — 掛け算) $-\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{15}+\underline{\sqrt{10}}$後ろにも掛けることを忘れない！！

10. (1) $\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)$

(2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{10}+\sqrt{27}\right)$

(3) $\sqrt{2}\left(-\sqrt{10}-2\sqrt{6}\right)$

(4) $\sqrt{3}\left(-2\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$

例 18 (分配法則 — 割り算) $\left(\sqrt{15}-\sqrt{10}\right)\div\sqrt{5}=-\sqrt{3}+\underline{\sqrt{2}}$後ろも割ることを忘れない！！

11. (1) $\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)\div\sqrt{3}$

(2) $\left(-\sqrt{20}+\sqrt{10}\right)\div\sqrt{5}$

(3) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\div\sqrt{2}$

(4) $\left(-\sqrt{21}+\sqrt{14}\right)\div\sqrt{7}$

例 19 (分配法則 — 分母の有理化と共に)

$$\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\underline{\times\boldsymbol{\sqrt{5}}}}{\sqrt{5}\underline{\times\boldsymbol{\sqrt{5}}}} = \frac{10-\sqrt{15}}{5}$$ これは約分できない！！（参考：下の例 20 ）

12. (1) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2}}$ (4) $\left(\sqrt{5}-3\right)\div 3\sqrt{2}$

例 20

$$\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\underline{\times\boldsymbol{\sqrt{6}}}}{2\sqrt{6}\underline{\times\boldsymbol{\sqrt{6}}}} = \frac{3\sqrt{30}-3\sqrt{2}}{12} = \frac{\cancel{\boldsymbol{3}}\left(\boldsymbol{\sqrt{30}-\sqrt{2}}\right)}{\cancel{\boldsymbol{12}}^{\boldsymbol{4}}} = \frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{4}$$

13. (1) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$ (2) $\dfrac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{18}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (4) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\div 2\sqrt{15}$

14. (1) $\sqrt{10}\left(-\sqrt{20}-\sqrt{24}\right)+\sqrt{3}\left(\sqrt{20}+\sqrt{6}\right)$

(2) $\sqrt{6}\left(\sqrt{32}+2\sqrt{15}\right)+\dfrac{6\sqrt{15}-3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

6 まとめその２

1.

- $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のうち, $\sqrt{3} \div \sqrt{2}$ と同じ値のものはのは $\boxed{}$ である.
- $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{5} = 2.236$ のとき, $\sqrt{200} + \sqrt{300} - \sqrt{500}$ のおよその値は $\boxed{}$ である.
- $2\sqrt{11}$ は $\sqrt{\boxed{}}$ に等しく, $3\sqrt{6}$ は $\sqrt{\boxed{}}$ に等しい. よって, $\begin{Bmatrix} 2\sqrt{11} \\ 3\sqrt{6} \end{Bmatrix}$ の方が大きい.
- $6\sqrt{2}$ と $4\sqrt{5}$ では $\begin{Bmatrix} 6\sqrt{2} \\ 4\sqrt{5} \end{Bmatrix}$ の方が大きく, $-2\sqrt{6}$ と $-3\sqrt{2}$ では $\begin{Bmatrix} -2\sqrt{6} \\ -3\sqrt{2} \end{Bmatrix}$ の方が大きい.

2. 次の計算をしなさい. いずれも, 根号の中はできるだけ簡単にし, 分母に根号は残さないように.

(1) $\sqrt{28} - 3\sqrt{7}$

(2) $\dfrac{3}{4}\sqrt{20} - \dfrac{4}{3}\sqrt{45}$

(3) $\sqrt{\dfrac{1}{8}} - \sqrt{2}$

(4) $\dfrac{3}{4}\sqrt{32} - \dfrac{3}{2}\sqrt{8}$

(5) $\dfrac{\sqrt{27}}{4} + \dfrac{5}{3} \times \sqrt{3}$

(6) $\dfrac{2}{3}\sqrt{6} - \dfrac{2}{\sqrt{24}}$

(7) $-\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - \dfrac{6}{\sqrt{6}}$

(8) $\dfrac{1}{2}\sqrt{28} - 2\sqrt{6} + \dfrac{1}{2}\sqrt{24} - 2\sqrt{7}$

(9) $-\dfrac{3}{2}\sqrt{12} + \dfrac{5}{2}\sqrt{24} + 3\sqrt{6} + \dfrac{3}{4}\sqrt{48}$

(10) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{6} + \dfrac{3}{\sqrt{6}}$

(11) $-\dfrac{7}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{8}$

(12) $3\sqrt{45} + \dfrac{5}{\sqrt{20}}$

(13) $\sqrt{5} - 2\sqrt{20} - 2 \div \sqrt{5}$

(14) $-6\times\sqrt{2}+\dfrac{6}{\sqrt{8}}-4\div\sqrt{2}$

(15) $-\dfrac{6}{\sqrt{2}}-3\sqrt{18}-\dfrac{4}{\sqrt{8}}$

(16) $-\dfrac{6}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{12}$

(17) $\sqrt{10}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$

(18) $\sqrt{5}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)$

(19) $\left(\sqrt{75}-2\sqrt{15}\right)\div\sqrt{15}$

(20) $\dfrac{-\sqrt{32}-2\sqrt{15}}{2}\times\sqrt{6}$

(21) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}\times\sqrt{15}$

(22) $\sqrt{3}\left(-\sqrt{6}+\sqrt{15}\right)-\sqrt{15}\left(\sqrt{32}+\sqrt{3}\right)$

(23) $\sqrt{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{20}\right)-\sqrt{5}\left(-\sqrt{15}-\sqrt{8}\right)$

(24) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(25) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{30}-3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\dfrac{2\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

7 応用問題

7.1 $\sqrt{\quad}$ が自然数になるためには？ — $\sqrt{\quad}$ の中が，自然数の 2 乗になればよい

1. 次のうち，値が自然数になるものを**全て選べ**.
( )

(ア) $\sqrt{3\times 5}$　(イ) $\sqrt{3^2\times 2^2}$
(ウ) $\sqrt{2^4\times 5^2}$　(エ) $\sqrt{3^3}$

2. 次のうち，値が自然数になるものを**全て選べ**.
( )

(ア) $\sqrt{2^2\times 3^2}$　(イ) $\sqrt{2\times 5}$
(ウ) $\sqrt{3^4\times 5^2}$　(エ) $\sqrt{2^2\times 3^3}$

3. $\sqrt{2n}$ が自然数となるような n の値を**全て**選べ.
( )

(ア) $n=3$　(イ) $n=4$　(ウ) $n=5$
(エ) $n=2$　(オ) $n=2\times 3$　(カ) $n=2\times 4$
(キ) $n=2\times 5$　(ク) $n=2\times 6$　(ケ) $n=2\times 7$
(コ) $n=2\times 8$　(サ) $n=2\times 9$　(シ) $n=2\times 10$

4. $\sqrt{20n}$ は $\sqrt{\boxed{}}$ の 2 倍に等しい. $\sqrt{20n}$ が自然数になるような n の値を**全て**選べ.
( )

(ア) $n=2$　(イ) $n=3$　(ウ) $n=4$
(エ) $n=5$　(オ) $n=5\times 3$　(カ) $n=5\times 4$
(キ) $n=5\times 5$　(ク) $n=5\times 6$　(ケ) $n=5\times 7$
(コ) $n=5\times 8$　(サ) $n=5\times 9$　(シ) $n=5\times 10$

---

5. $\sqrt{3n}$ が自然数になるような自然数 n の値を，小さい順に 3 つ挙げよ.

6. $\sqrt{8n}$ が自然数になるような自然数 n の値を，小さい順に 3 つ挙げよ.

7. $\sqrt{15n}$ が自然数になるような自然数 n の値を，小さい順に 3 つ挙げよ.

8. $\sqrt{96n}$ が自然数になるような自然数 n の値を，小さい順に 3 つ挙げよ.

---

9. $\sqrt{\dfrac{5\times 3^2}{n}}$ が自然数になるような n の値を**全て**選べ.
( )

(ア) $n=1$　(イ) $n=3$
(ウ) $n=5$　(エ) $n=3^2$
(オ) $n=5\times 3$　(カ) $n=5\times 3^2$

10. $\sqrt{\dfrac{3\times 2^2}{n}}$ が自然数になるような自然数 n の値は，$\boxed{}$ と $\boxed{}$ である.

11. $\sqrt{\dfrac{18}{n}}$ が自然数になるような自然数 n の値を，**全て**挙げよ.

12. $\sqrt{\dfrac{96}{n}}$ が自然数になるような自然数 n の値は，$\boxed{}$，$\boxed{}$，$\boxed{}$ である.

7.2 展開公式と平方根 — 根号を文字と思って公式を使い，計算する

例 21 ($(x+a)(x+b)$ の利用)

$(\ \ x+2)(\ \ x-4) = \ \ x^2 \ \ - \ \ 2x \ \ -8$

$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-4) = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} - 8 \ \ = -5-2\sqrt{3}$

1. (1) $(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}+2)$ (2) $(\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}-4)$

(3) $(\sqrt{2}-5)(\sqrt{2}+3)$ (4) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+3)$

(5) $(3\sqrt{2}-1)(3\sqrt{2}+5)$ (6) $(2\sqrt{6}-4)(2\sqrt{6}+2)$

例 22 ($(x+a)^2$ の利用)

$(\ \ x+5)^2 = \ \ x^2 \ \ + \ \ 10x \ \ +25$

$(\sqrt{2}+5)^2 = (\sqrt{2})^2 + 10\sqrt{2} + 25 \ \ = 27+10\sqrt{2}$

$\boxed{(x+5)^2 = x^2 + \underline{\mathbf{10}x} + 25 \text{ に注意！}}$

2. (1) $(\sqrt{3}+5)^2$ (2) $(\sqrt{2}-1)^2$

(3) $(\sqrt{11}-2)^2$ (4) $(\sqrt{6}+4)^2$

(5) $(\sqrt{7}+1)^2$ (6) $(2\sqrt{6}-3)^2$

例 23 ($(x+a)(x-a)$ の利用)

$(\ \ x+3)(\ \ x-3) = \ \ x^2 \ \ -9$

$(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3) = (\sqrt{5})^2 - 9 = -4$

3. (1) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$ (2) $(\sqrt{2}+5)(\sqrt{2}-5)$

(3) $(\sqrt{5}-4)(\sqrt{5}+4)$

(4) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)$

(5) $(2\sqrt{7}-2)(2\sqrt{7}+2)$

(6) $(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)$

4. (1) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-4)-(2\sqrt{5}-3)^2$

(2) $(\sqrt{5}+4)(\sqrt{5}-5)+(\sqrt{5}+5)(\sqrt{5}+3)$

(3) $(3\sqrt{2}+5)(3\sqrt{2}+1)-(\sqrt{3}-1)^2$

(4) $(\sqrt{7}+3)(\sqrt{7}-3)-(2\sqrt{6}+3)(2\sqrt{6}-4)$

5.

- $x=\sqrt{3}+2$ のとき, $x-4=\boxed{}$ である．よって,
  $x^2-4x=x(x-4)=\left(\underline{}\right)\left(\underline{}\right)=\boxed{}$

- $a=\sqrt{5}+3$ のとき, $a-6=\boxed{}$ である．よって,
  $a^2-6a=a(a-4)=\left(\underline{}\right)\left(\underline{}\right)=\boxed{}$

- $x=\sqrt{13}-5$ のとき, $x+10=\boxed{}$ である．よって,
  $x^2+10x+6=x(x+10)+6=\boxed{}$

- $a=2\sqrt{3}+3$ のとき, $a^2-6a+3=\boxed{}$ である．

7.3 $a+b,\ ab,\ a-b$ を利用した計算

(参考) $a+b$ は, a と b を入れ替えると $b+a$ であり, 式としては $a+b$ と同じ. a^2+b^2 も, a と b を入れ替えた b^2+a^2 と同じ式になる.
このような式を「**対称式**」といい, 特に $a+b,\ ab$ を**基本対称式**という.
また, $a-b$ は, a と b を入れ替えると $b-a$ であり, 元の $a-b$ の (-1) 倍である. このような式は「**交代式**」と呼ばれる. a^2-b^2 なども交代式である.

1. (1) $a=\sqrt{5}+\sqrt{2},\ b=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ のとき,
$a+b=\Big(\qquad\qquad\Big),\ ab=\Big(\qquad\qquad\Big)$,
$a-b=\Big(\qquad\qquad\Big)$ である.

(2) $a=2\sqrt{2}+\sqrt{3},\ b=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ のとき,
$a+b=\Big(\qquad\qquad\Big),\ ab=\Big(\qquad\qquad\Big)$,
$a-b=\Big(\qquad\qquad\Big)$ である.

2. $a=\sqrt{3}+\sqrt{2},\ b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ のとき,

(1) $a+b=\Big(\qquad\qquad\Big),\ ab=\Big(\qquad\qquad\Big)$ である.

(2)
- $a^2+3ab+b^2$ は, $\left\{\begin{array}{l}(a+b)^2 \text{ と } ab \text{ を足した}\\ (a+b)^2 \text{ から } ab \text{ を引いた}\end{array}\right\}$ ものに等しい. $(a+b)^2=\Big(\qquad\qquad\Big)$ なので,
  $a^2+3ab+b^2=\Big(\qquad\qquad\Big)$ である.
- a^2+ab+b^2 は, $\left\{\begin{array}{l}(a+b)^2 \text{ と } ab \text{ を足した}\\ (a+b)^2 \text{ から } ab \text{ を引いた}\end{array}\right\}$ ものに等しいので,
  $a^2+ab+b^2=\Big(\qquad\qquad\Big)$ である.
- a^2+b^2 は, $(a+b)^2$ から $\boxed{\qquad\qquad}$ を引いたものに等しいので,
  $a^2+b^2=\Big(\qquad\qquad\Big)$ である.

(3) $a-b=\Big(\qquad\qquad\Big)$ を使うと, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\Big(\qquad\qquad\Big)$ である.

3. $m=\sqrt{6}+\sqrt{5},\ n=\sqrt{6}-\sqrt{5}$ のとき, 以下の値を求めなさい.

(1) $m+n$ (2) mn (3) $m-n$

(4) $m^2+3mn+n^2$ (5) m^2+n^2 (6) m^2-n^2

<u>$a,\ b$ の値が分からなくても, $a+b,\ ab$ の値さえ分かっていれば, a^2+b^2 などは計算できる.</u>

4. $a+b=\sqrt{5},\ ab=1$ のとき, 以下の式の値を計算せよ.

(1) $(a+b)^2$ (2) $a^2+3ab+b^2$ (3) a^2+b^2

5. $p=\sqrt{7}+\sqrt{3},\ q=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ のとき, 以下の値を求めなさい.

(1) $p+q$　　(2) pq　　(3) $(p+q)^2$

(4) $p^2+5pq+q^2$　　(5) p^2+q^2　　(6) p^2-q^2

6. $a=\sqrt{5}+\sqrt{7},\ b=\sqrt{5}-\sqrt{7}$ のとき, 以下の値を求めなさい.

(1) $a+b$　　(2) ab　　(3) a^2-ab+b^2

(4) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{\boxed{}}{ab}$ （$\square$ には文字式を入れる）

$=\left(\right)$

(5) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{\boxed{}}{ab}$ （$\square$ には文字式を入れる）

$=\left(\right)$

7. $m=3\sqrt{2}+2,\ n=3\sqrt{2}-2$ のとき, 以下の値を求めなさい.

(1) $m^2+4mn+n^2$　　(2) m^2+n^2　　(3) m^2-n^2

(4) $\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}$　　(5) $\dfrac{n}{m}-\dfrac{m}{n}$

8. $a+b=\sqrt{13},\ ab=3$ のとき, 以下の式の値を計算せよ.

(1) $(a+b)^2$　　(2) $a^2+3ab+b^2$　　(3) a^2+b^2

(4) a^2-ab+b^2　　(5) $(a-b)^2$

7.4 整数部分と小数部分

1.
- 2.46 の整数部分は $\boxed{}$, 小数部分は 0.46 である．小数部分は, 2.46 から $\boxed{}$ を引いた値に等しい．
- $\sqrt{5}$ の整数部分は $\boxed{}$, 小数部分は $\begin{Bmatrix} \sqrt{5}-2 \\ 0.236 \end{Bmatrix}$ である．
- $\sqrt{3}$ の整数部分は $\boxed{}$, 小数部分は $\boxed{}$ である．
- $\sqrt{8}$ の整数部分は $\boxed{}$, 小数部分は $\boxed{}$ である．
- $\sqrt{2}+1$ は $\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$ より大きく $\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$ より小さい．

  つまり, $\sqrt{2}+1$ の整数部分は $\boxed{}$, 小数部分は $\boxed{}$ である．

2. $\sqrt{6}$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき,
- $a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$ である．
- $a+b = \boxed{}$ である．つまり, 整数部分と $\left(\underline{}\right)$ を足せば, 元の数になる．
- まず, $a-b = \boxed{}$ である．

  $a^2-b^2 = \left(\underline{}\right)(a-b)$ と因数分解できるので, $a^2-b^2 = \boxed{}$ である．
- $b+4 = \boxed{}$ なので, $b^2+4b = b\left(\underline{}\right) = \boxed{}$ である．

3. $\sqrt{12}$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき, 以下の値を計算しなさい．

(1) a　(2) b　(3) $a-b$　(4) a^2-b^2

4. $\sqrt{7}-1$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき, 以下の値を計算しなさい．

(1) b　(2) $a-b$　(3) $2a+b$　(4) b^2+4b

5. $\sqrt{18}-3$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき, 以下の値を計算しなさい．

(1) b^2+8b　(2) $(a+b)^2-(a-b)^2$