13th-note 数学 I

（新学習指導要領（平成 **24** 年度〜）向け）

Ver3.02（2013-5-20）

第 1 章 Ver3.31，第 2 章 Ver3.31，第 3 章 Ver3.31，第 4 章 Ver3.01

はじめに

13th-note 数学 I は，文部科学省の指導要領（平成 24 年度以降実施）に沿った内容を含む検定外の「高校の教科書」として作られ，ホームページ（http://www.collegium.or.jp/~kutomi/）にて無償公開されています．学ぶ意欲さえあれば，誰でも学ぶことができるように，との意図からです．

また，執筆者と閲覧者がインターネットを介して繋がり，互いの意見を交わすことが出来る関係にあります．

こういった「教科書」の形態は，日本ではあまり見られないことでしょう．

しかし，13th-note 数学 I が既存の教科書と最も異なる点は，その中身でしょう．13th-note 数学 I では，以下の方針を採用しています．

- 13th-note 数学 I では全ての問題に，詳細な解答・解説を付ける．
- 新しい数学の概念に関して，通常，教師用にしか載っていない詳細な解説も付ける．

これらは，以下の考えに基づいています．

- 自学自習がしやすい教科書にしたかった．
  （学校等とは関係なく自分で勉強したい人のためでもあり，試験前に教科書を開きながら自学自習する高校生のためでもある）
- 隅々まで読めば読むほど，何か得るものがある教科書にしたかった．
- 大学受験の数学を意識してはいるが，あくまで数学の知識・感覚（新しい数学の概念を吸収するための土壌，とでも言えるでしょうか）を中心に解説している教科書にしたかった．
- 既存の教科書・指導要領に沿わせることより，数学の理解に必要かどうかに基づいて内容の選定・配列することを重視した．

詳細な解説を増やしたことは，一方で，悩みの種にもなりました．というのも，その詳細な解説が，読者の創造力・発想力を妨げないか，と感じたからです．

この点について，私は「詳細な解説を最初に読むか，後で読むか，そもそも読まないか，それは読者が決めればよい．ただ我々は，読者の視点が偏らないよう，最大限の配慮をするのみ」という結論を出し，上記の方針としました．

この教科書の執筆者として，数学の学習について 2 点アドバイスを書いておきます．

(1) 公式そのものよりも，「いつ公式が使えるか」を真っ先に覚えましょう．公式そのものは忘れても調べられます．また，思い出そうとしたり，作ろうとする努力はよい勉強になります．しかし，「いつ使うか」を忘れると，答えを見ない限り何もできません．
(2) 問題を解いて答えが合わないときは，まず，計算ミスを疑いましょう．

この 13th-note 数学 I は，FTEXT 数学 I を改訂することで出発しました．至る所に手を加え，新しいアイデア・表現・図表等を加えた結果が 13th-note ですが，最初に FTEXT 数学 I がなければ，この 13th-note 数学 I の誕生はずっと遅れていたでしょう．FTEXT 数学 I の作成を中心になって進められた吉江弘一氏に，感謝いたします．

また，この 13th-note 数学 I を作成する際には，TeX という組版ソフトが使われています．TeX のシステムを作られた Donald E. Knuth 氏，それを日本語に委嘱した ASCII Corporation，さらに，（日本の）高校数学に適した記号・強力な描画環境を実現した「LaTeX 初等数学プリント作成マクロ emath」作者の大熊一弘氏に，感謝いたします．

最後に，13th-note 数学 I の雰囲気を和らげてくれているみかちゃんフォントの作者にも感謝いたします．

この教科書を手にとった人，一人一人に，「数学も，悪くないな」と思っていただければ，幸いです．

久富 望

凡例

1. 【解答】について

【解答】には，問題の解答だけでなく，さらに理解を深めるためのヒントも書かれていることがあります．問題を解いて解答が一致した後，一応**【解答】**をチェックすることをお勧めします．

2. 問題の種類

【例題 2】　**【例題】**は，主に，直前の定義や内容の確認を兼ねた例題です．
はじめて学ぶ人，復習だが理解が足りないと思う人は，解くのが良いでしょう．
逆に，既に理解がある程度できていると思う人は，飛ばしても良いでしょう．

【練習 3：主要になる「練習」問題】
【練習】は，13th-note 教科書の軸と成る問題群です．
基本的に解くようにしましょう．解いていて疑問など見つかれば，直線の説明，**【例題】**を参照したり，答えをよく理解するようにしましょう．

【暗記 4：ただ解けるだけではいけません】
定義・定理を「知っている」と「使える」は違います．
特に，「反射的にやり方を思い出す」べき内容があります．それが，この暗記問題です．
この暗記問題については「解ける」だけでなく，その解き方・考え方をすぐに頭の中で思い浮かべられるようにするべきです．

【発展 5：さらなる次へのステップ】
発展 は，ただ定義や定理が分かるだけでは解けない問題です．
さらに理解を深めたい人，大学入試の数学を意識する人は挑戦し，理解するようにしましょう．

3. 補足

本文中，ところどころに … マーク付きの文章があります．このマークのついた文章は，主に，本文とは少し異なる視点から書かれています．理解を深めることに役立つことがあるでしょう．

目次

第 1 章　数と式

A 実数・集合・命題・証明～数学の基礎

1A.1　実数

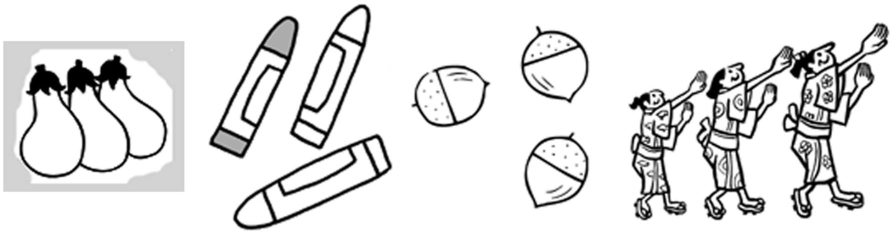
「数とは何か？」

高校数学の学習を始めるにあたって，この問題について考えてみよう．

1.　自然数・整数

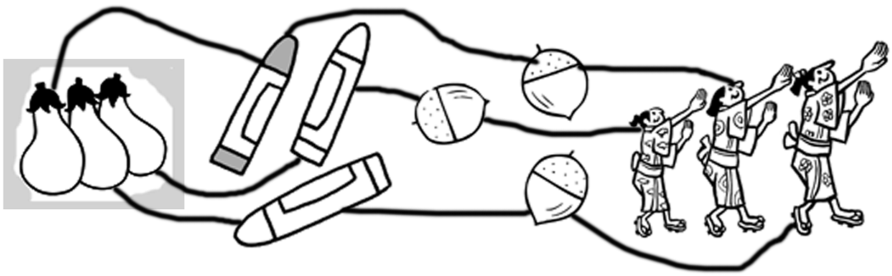
A.　「同じ数」とは～自然数の成り立ち

次の絵は左から「3 本」「3 本」「3 個」「3 人」であり，「数えた結果は 3 になる」という共通点がある．



そして，上のどの場合も，同じ数だけある．

もし，3 という数字がなかったら，「同じ数だけある」事実はどう表現すればよいだろうか．それには，次のように線を引いて考えればよい．



そして，この線の本数が数を表していると考えられる．このように，（線を引くなどして）何かと何かを対応させるやり方を**一対一対応**という[*1]．

ものを数えるときに使う数字「1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$」をまとめて**自然数** (natural number) という．

[*1] このときの線の様子は，数字を表す文字の成り立ちに深く影響している．数字の 3 を，漢字では「三」と表すのはその一例である．複数の古代文明でも同じ現象が見られ，古代エジプトであれば，「|||」で数字 3 を表したことが分かっている．

B. 負の数～何かと比べる

たとえば，あるお店に来たお客さんの数が右の表のようになったとしよう．

曜日	月	火	水	木	金	土
人数	60	64	56	54	60	63

火曜は月曜より 4 人多い．

一方，水曜は月曜より 4 人少ない．

どちらも「4 人」だが，火曜と水曜では意味が正反対である．そこで，火曜を「+4 人」，水曜を「−4 人」のように表現する．

このように，何かと値を比べるとき，自然数にマイナス (−) をつけた負の数は重要な意味を持つ．

曜日	月	火	水	木	金	土
月曜と比べた増加（人）	−	+4	−4	**−6**	**0**	**+3**

C. 0

0 の誕生は，負の数より遅い．今では子供でも 0 を使いこなすが，人類は長い間，0 を用いなかった．

たとえば，古代ローマでは，I（1），V（5），X（10），L（50），C（100），D（500），M（1000），··· などを用い，古代の中国では，一，二，三，···，十，百，千，万，億，··· などを用いた[*2]．

0 という「数」を発明したのはインド人である．7 世紀には発明されていた．0 のおかげで現在のように「筆算」や「小数」を本格的に使う事が可能になり，人類の計算技術も，数を表わす能力も，飛躍的に向上した[*3]．

【例題 1】 次の計算をしなさい．ただし，0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 を用いずに計算すること．

1. VIII + XIII　　2. XXII + XXVIII　　3. 五百四 + 二千十八　　4. 三万五千十六 + 二万四百九

D. 整数とは

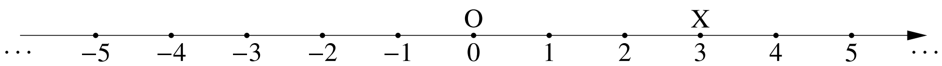
負の数と，0，自然数をまとめて**整数** (integral number) という．たとえば，次の数は全て整数である．

−2568，−23，−3，0，4，57

E. 自然数・整数の図示

自然数や整数を図示するには**数直線** (number line) を用いる．

数直線上のある点 X について「点 X に対応する数が a であること」を，X(a) と書く．たとえば，下図では点 X に対応する数が 3 であるので，X(3) である．



[*2] しかし，これらのやり方では，数が大きくなるたびに新しい記号を作らなければならない．

[*3] とはいえ，筆算や小数が考え出されて一般的に使用されるまでに何百年という時間がかかっている．筆算が考え出されるまで，計算には大変な時間がかかった．また，小数が存在しないだけでなく，分数の表し方は今と異なり，計算はとても複雑だった．

2. 有理数

A. 分数〜2つの数の比

6 は 3 の何倍か？これは，$6 \div 3 = 2$ によって 2 倍と求められ，6 の 3 に対する**比** (ratio) の値を表している．

一方，12 は 5 の何倍になるだろうか．$10 < 12 < 15$ なので，2 倍よりは大きく，3 倍よりは小さいが，整数では表せない．そこで新しい数，分数 $\dfrac{12}{5}$ をつくる．

一般に，「a の b に対する比」を分数を $\dfrac{a}{b}$ で表わす．

「に対する」の付けられた値・言葉が，その文脈中では基準となる．

B. 有理数とは何か

分数で表現できる数を**有理数** (rational number) [*4] という．整数は $\dfrac{(\text{整数})}{1}$ と表すことができるので有理数である．たとえば，次の数は全て有理数である．

$-\dfrac{8}{3}$， -2，0，$\dfrac{11}{19}$，$\dfrac{18}{9}$，26

特に，**約分** (reduction) できない分数を**既約分数** (irreducible fraction) という．

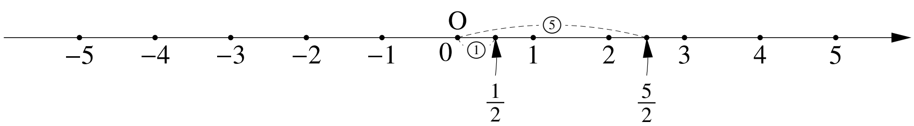
有理数どうしの比も有理数になる．詳しくは，『複分数』(p.103) で学ぶ．

【例題 2】 次の分数を，既約分数で答えなさい．

1. 5 の 9 に対する比の値
2. 7 の 35 に対する比の値
3. 12 に対する，9 の比の値
4. −10 に対する，15 の比の値

C. 有理数の図示

たとえば，$\dfrac{1}{2}$ を数直線上で表すには，下図のように 0 と 1 をつなぐ線分の 2 等分点をとり，その点に $\dfrac{1}{2}$ を対応させればよい．また，$\dfrac{5}{2}$ ならば $\dfrac{1}{2} \times 5$ と考えて，0 と $\dfrac{1}{2}$ をつなぐ線分を 5 つつないで得られる線分の右端の点を対応させればよい．



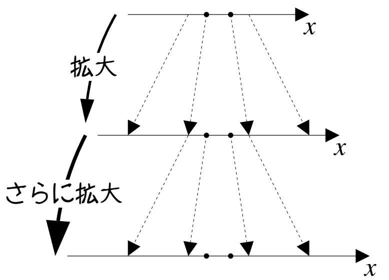
[*4] ratio が「比」を意味するのだから，rational number は“有比数”とでも訳されるべきだったのかもしれない．

D.　有理数の間には必ず有理数がある

たとえば，$\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{2}{7}$ の間の有理数は，次のようにして得られる．

$$\frac{2}{7}=\frac{12}{42}<\frac{\overset{12\text{ と }14\text{ の平均値}}{\boxed{13}}}{42}<\frac{14}{42}=\frac{1}{3}$$

有理数の間には必ず有理数がある

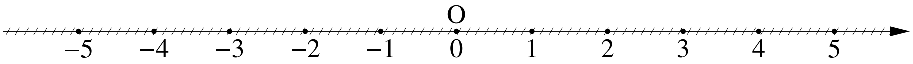


一般に，2 つの有理数 $\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{c}{d}$ $\left(\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\right)$ において

$$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}<\frac{\overset{ad\text{ と }bc\text{ の平均値}}{\boxed{\frac{ad+bc}{2}}}}{bd}<\frac{bc}{bd}=\frac{c}{d}$$

とすれば，2 つの有理数の間に新しい有理数を考えることができる．

こうして，2 つの異なる有理数の間には，必ず有理数が存在する[*5]ことがわかる．



有理数はぴっしり詰まっているイメージ

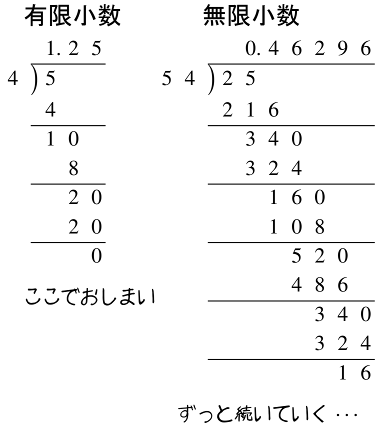
【練習 3：有理数の稠密性】

2 つの有理数 $\dfrac{6}{25}$，$\dfrac{1}{4}$ の間にある分数のうち，分母が 200 であるものを求めよ．

E.　有理数と小数

有理数は筆算により**小数** (decimal number) になおすことができるが，次の 2 種類が存在する．

- $\dfrac{5}{4}=1.25$ のような，**有限小数** (finite decimal)
- $\dfrac{25}{54}=0.4629629\cdots$ のような，**無限小数** (infinite decimal)
  ただし，同じ数の並びが繰り返し現れるので，
  $\dfrac{25}{54}=0.4629629629\cdots=0.4\dot{6}2\dot{9}$ のように，循環の始まりと終わりに「$\dot{}$」を付ける．このような小数は**循環小数** (circulating decimal) とよぶ．



逆に，どんな小数も分数に直すことができる．

有限小数は，$0.234=\dfrac{234}{1000}=\dfrac{117}{500}$ のようにすればよい．

循環小数の場合，たとえば $0.4\dot{6}2\dot{9}$ を小数に直すには，

$x=0.4\dot{6}2\dot{9}=0.4629629629\cdots$ とおき，次のようにすればよい[*6]．

$$\begin{array}{rrl}
 & 1000x = & 462.9629629\cdots \\
-) & x = & 0.4629629\cdots \\ \hline
 & 999x = & 462.5
\end{array}$$

←循環の周期に合わせ，1000倍した

$$\therefore\ x=\frac{462.5}{999}=\frac{4625}{9990}=\frac{25}{54}$$

←記号 "∴" は「だから」「つまり」を意味する．たいていは「だから」と読む．

[*5] このことを，有理数の 稠密(ちゅうみつ)性 (density) という．

[*6] 小数点以降，無限に数が続く数を普通の数のように足したり引いたりできることについての，厳密な根拠は数学 III で学ぶ．

【練習 4：有理数と循環小数】

分数は小数で，小数は分数で表せ．

(1) $\dfrac{9}{16}$　(2) $\dfrac{5}{37}$　(3) 0.625　(4) $0.\dot{4}2\dot{9}$

3. 実数

A. 無理数

有理数でない数のことを**無理数** (irrational number) と言う[*7]．言い換えると，分数で表せない数が無理数である[*8]．p.42 で見るように，無理数の例として $\sqrt{2}$ が挙げられる．

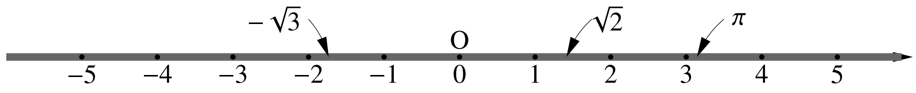
根号 $\sqrt{\ }$ の近似値は，『開平法について』(p.87) のようにして，筆算で求められる．

B. 実数

数直線上に表すことのできる数すべてを，**実数** (real number) という．

すべての小数は数直線上に表すことができる[*9]ので，無理数はすべて実数である．

無理数は有理数どうしの間をみっちり埋めている[*10]．



みっちり詰まった実数のイメージ

無理数には次のような数が知られている．

$-\sqrt{23}$，$5\sqrt{2}$，**3 乗して 2 になる数** $\sqrt[3]{2}$，**円周率** $\pi = 3.1415926\cdots$，**ネイピア数**[*11] $e = 2.7182818\cdots$

今後，a，b，x などで数を表すとき，特に断りが無ければ，その数は実数であるとする．

[*7] ir-rational の ir は否定を表す接頭語であり，irrational とは rational でない，つまり，比で表せないという意味である．

[*8] 有理数はすべて循環小数になり，循環小数はすべて有理数になった (p.5).
ここから，循環しない小数が有理数ではないことが分かる．

[*9] この事実を厳密に示すことは，より厳密な実数の定義と，デデキントの切断という考え方を必要とし，高校の学習範囲を超えてしまう．ただし，たとえば $\sqrt{2}$ のような数は右のようにすれば数直線上に表すことができる．

[*10] 実数の**連続性** (continuity) といい，有理数の稠密性と区別される．詳しくは数学 III で学ぶ．

[*11] ネイピア数 e について，詳しくは数学 III で学ぶ．

以上見てきたいろいろな数について，まとめると次のようになる．

数の分類

- **実数**
  - **有理数**
    - **整数**
      - 正の整数（**自然数**）
      - 0
      - 負の整数
    - 整数でない有理数
      - 有限小数
      - 循環小数（無限小数）
  - **無理数** ………… 循環しない無限小数（無限小数）

【例題 5】 次の実数について，以下の問に答えよ．

$3,\quad -2,\quad 0,\quad \dfrac{2}{5},\quad -\dfrac{2}{5},\quad \sqrt{3},\quad 1.\dot{5}\dot{2},\quad \dfrac{36}{6},\quad -\sqrt{16},\quad \left(\sqrt{5}\right)^2,\quad 2\pi$

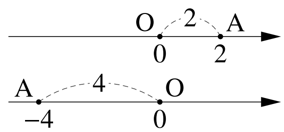
(1) 自然数を選べ．　(2) 整数を選べ．　(3) 有理数を選べ．　(4) 無理数を選べ．

4. 絶対値

A. 絶対値とは

数直線上で，原点 O と点 A(a) の距離のことを a の**絶対値** (absolute value) といい，$|a|$ と書く[*12]．たとえば

$|2| = 2,\quad |-4| = 4$



である．正の数に絶対値記号を付けても値は変わらない．
また，負の数に絶対値記号を付けると，値は -1 倍になる．

[*12] $|a|$ は「a（の）絶対値」と読まれることが多い．たとえば，$|2|$ ならば「２（の）絶対値」と読む．

【例題 6】 1. から 3. の値を計算し，4. の問いに答えなさい.

1. $|-3|+|2|$　　2. $|-3-5|$　　3. $x=-2$ のときの，$|x+4|$ の値

4. $\left|\sqrt{2}-2\right|$ の値は $\sqrt{2}-2$ に等しいか，$-\left(\sqrt{2}-2\right)$ に等しいか.

【例題 7】 $|5|^2$，$|3||-4|$，$\dfrac{|5|}{|-10|}$ を計算しなさい.

絶対値

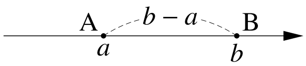
$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$ ← a が負の値なので $-a$ は正の値

と表すことができる．絶対値については次式が成り立つ.

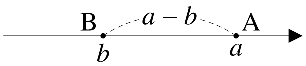
$|a| \geqq 0$ ，$|a| = |-a|$

B. 絶対値と 2 点間の距離

b − a≧0のとき



b − a<0のとき



絶対値記号を用いると，数直線上の 2 点 A(a) と B(b) の距離 AB は

AB $= |b-a|$

で表すことができる．この $|b-a|$ は，2 つの数 a と b の差も表している.

【例題 8】 数直線上に A(−4), B(−1), C(2), D(5) をとる．CD, BC, AD, CA をそれぞれ求めよ.

【練習 9：絶対値の値】

次の値を計算しなさい.

1. $x = 2$ のときの，$|x - 3|$ の値　　2. $\left|-\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3}\right|$　　3. $\left|-3 + \sqrt{5}\right|$

C. 絶対値の値と場合分け

【例題 10】 次の x の条件において，$|x - 2|$ と $x - 2$ が等しい値になるものをすべて選べ.

1. $x = 3$　　2. $x = -1$　　3. $x = 1$　　4. $x = 4$　　5. $x < 2$ のとき　　6. $2 \leqq x$ のとき

【練習 11：絶対値の場合分け】

以下のそれぞれの場合について，式 $|x-4|+|2x+2|$ の値を計算せよ．

(1) $x=5$ (2) $x=1$ (3) $x=a$，ただし $4 \leqq a$ (4) $x=a$，ただし $-1<a<4$

この問題のように場合に分けて問題を解くことは，高校の数学において極めて重要である．絶対値を含む問題の他にも，数学 A で学ぶ場合の数・確率などにおいて頻繁に必要とされる．
余談になるが，日常でも場合に分けて考えることは大切である．たとえば，晴れと雨で場合に分けて遠足の予定を立てないと，大変なことになってしまう．

【発展 12：絶対値の性質】

a，b に関して次の等式が成り立つことを証明せよ．ただし，(3) では $b \neq 0$ とする．

(1) $|a|^2=a^2$ (2) $|ab|=|a||b|$ (3) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$

これらの性質についてイメージがしやすいよう，具体例を挙げておく．

(1) $a=-3$ のとき

$|-3|^2=9$，$(-3)^2=9$

(2) $a=-3$，$b=4$ のとき

$|(-3)\times 4|=12$，$|-3||4|=12$

(3) $a=-\sqrt{5}$，$b=2$ のとき

$\left|\dfrac{-\sqrt{5}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{|-\sqrt{5}|}{|2|}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

絶対値の中が「0 以上か」「負か」で，絶対値の外し方が違うので，場合に分けて示す．

上の等式は，以下のように記憶するとよい．

(1) 2 乗すると絶対値は外れる（付く）
(2) 掛け算のところで絶対値は切れる（つながる）
(3) 割り算のところで絶対値は切れる（つながる）

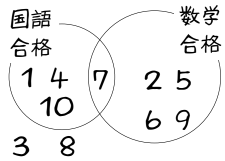
1A.2 集合

1. 集合の基礎

A. 集合とは何か

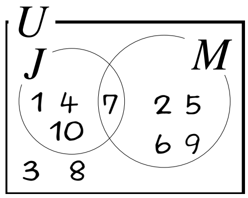
たとえば，出席番号 1 から 10 までの人が受けたテスト結果が左下の表になったとき，右下のようにもまとめられる．

出席番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
国語	○	×	×	○	×	×	○	×	×	○
数学	×	○	×	×	○	○	○	×	○	×



ものや人の集まりを**集合** (set) といい[*13]，集合に含まれるものや人をその集合の**要素** (element) という．

さらに，次のように集合を文字で置こう[*14]．



出席番号 1 から 10 までの 10 人の集合を U

「国語を合格した人」の集合を J，「数学を合格した人」の集合を M

右下のような図を**ベン図** (Venn diagram) という．また，この例では四角の枠内の集合 U の要素のみ考えている．このような集合 U は**全体集合** (universal set) といわれる．

【例題 13】 上の例において，次にあてはまる要素を**すべて**答えよ．

1. M の要素であるもの
2. J の要素でも M の要素でもあるもの
3. M の要素で**ない**もの
4. J の要素ではあるが M の要素では**ない**もの

[*13] ただし，数学では集合に含まれるか含まれないか明確にできる場合のみ扱う．「大きい数の集まり」のように，範囲が不明確なものは集合とはいわない．

[*14] たいてい，集合は大文字 $A, B, C, \cdots, Y, Z$ で表され，要素は小文字 $a, b, c, \cdots, y, z$ で表される．

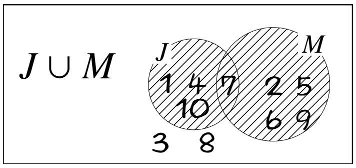
B. 集合の表し方〜外延的定義

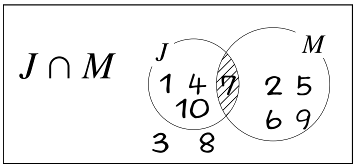
p.11 の例において，集合 J の要素は 1，4，7，10 ですべてである．このことを，次のように表す[*15]．

$J = \{1,\ 4,\ 7,\ 10\}$　←{　}の間にすべての要素を書き出す

C. 「または」を表す記号 ∪,「かつ」を表す記号 ∩

集合 J, M のうち，少なくとも一方には属する要素全体の集合を $J \cup M$（または）で表す．これを集合 J と M の**和集合** (sum of sets) といい，ベン図では右の斜線部分に対応する．





集合 J, M の両方に属する要素全体の集合は $J \cap M$（かつ）で表す．これを集合 J, M の**共通部分** (common part) といい，ベン図では右下の斜線部分に対応する．

右のベン図を用いて，要素を書き並べると，次のようになる．

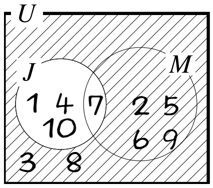
$J \cup M = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$，　$J \cap M = \{7\}$

要素をもたない集合を**空集合**（くう） (empty set) といい，記号 $\emptyset$ で表す[*16]．もし，集合 A, B に共通の要素がないならば，$A \cap B = \emptyset$ と表す．

【例題 14】 $A = \{1, 3, 4, 5, 8\}$，$B = \{2, 5, 7\}$，$C = \{3, 6\}$ のとき，$A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B \cap C$ を答えよ．

D. 補集合

全体集合 U のうち集合 J に属さ**ない**要素全体の集合を $\overline{J}$ で表す．p.11 の例では



$\overline{J} = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$

である．これを集合 J の**補集合** (complement) といい，ベン図では右の斜線部分に対応する．補集合を考えるときは，必ず全体集合を定める必要がある．

[*15] このように，要素を書き並べて集合を表すことを**外延的定義**（がいえん） (extensional definition) という．

[*16] 集合における空集合は，数におけるゼロの役割に近い．．それが由来で，空集合は 0 に斜線をいれた $\emptyset$ で表す．

【例題 15】 全体集合は $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする．

1. 1 桁の 2 の倍数の集合を A とするとき，A, $\overline{A}$ を，それぞれ要素を書き並べて表せ．
2. 1 桁の 3 の倍数の集合を B とする．$A \cap B$, $\overline{A} \cap B$ を，それぞれ要素を書き並べて表せ．

E. 「属する」を表す記号 $\in$

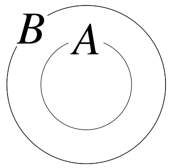
一般に，「a が集合 X の要素である」ことを「a は集合 X に**属する** (in)」という．

p.11 の例において，「1 は集合 J に属する」「3 は集合 J に属さない」．これらを次の記号で表す．

$1 \in J$ （または，$J \ni 1$[*17]），　　　$3 \notin J$ （または，$J \not\ni 3$）

このように，属する・属さないは，記号 $\in$, $\notin$, $\ni$, $\not\ni$ を用いて表される．

$A \subseteqq B$

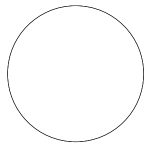


F. 部分集合を表す記号 $\subseteqq$, $\supseteqq$

2 つの集合 A，B について，A の全ての要素が B の要素であるとき，「A は B の**部分集合** (subset) である」「B は A を**含む** (contain)」と言い，次の記号で表す．

記号 $A \subseteqq B$ 　　（または，$B \supseteqq A$）[*18]

$A = B$



これらを否定するときは，記号 $A \not\subseteqq B$, $B \not\supseteqq A$ で表す．

記号 $\subseteqq$, $\supseteqq$ は，等号を省略して $\subset$, $\supset$ と書かれることも多い[*19]．

一般に，A と B の要素が完全に一致するときは，A と B は**等しい** (equal) といい $A = B$ と表す．また，等しくないときは $A \neq B$ と表す．

・・・・空集合 $\emptyset$ は，どんな集合にも含まれていると決められている．実際，空集合のすべての要素（1 つもないのだが）は，どんな集合にも含まれている．

【例題 16】 次のうち，正しいものをすべて選べ．

$\{1, 2, 3, 4\} \supseteqq \{1, 2, 3\}$，　$\{1, 2, 3\} \supseteqq \{2, 3\}$，　$\{1, 2\} \supseteqq \{2, 3, 5\}$，　$\{1\} \supseteqq \emptyset$

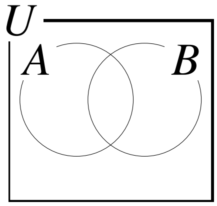
[*17] 記号の広い側が集合の方を向く．読み方は「1 は J に属する」，「1 は J の要素である」，「J は 1 を要素にもつ」など．

[*18] 記号の広い側が大きい集合の方を向く．読み方は「A は B の部分集合である」「B は A を含む」「A は B に含まれる」など．

[*19] $A \subset B$ は，「A が B の**真部分集合** (proper subset) である」ことを表す場合もある．「A が B の真部分集合である」とは，$A \subseteqq B$ であるが $A \neq B$ のときのことをいう．

【練習 17：集合の記号】

全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ とし，そのうち 12 の約数である数の集合を A，10 の約数である数の集合を B とする．



(1) 右のベン図に 1 から 12 までのすべての要素を書き入れなさい．

(2) 集合 $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$ を答えなさい．

(3) 次のうち，正しいものをすべて選びなさい．

$$3 \in A \cap B,\ 3 \in A \cup B,\ \overline{B} \ni 4,\ A \cap B \not\ni 2,\ A \cup B \supseteqq A,\ A \supseteqq A \cap B$$

$\cup$ はコップのような形をしているので水がいっぱい入り，要素の個数が多くなる和集合を表すと覚えると，$\cup$, $\cap$ の区別をつけやすい．

【練習 18：部分集合】

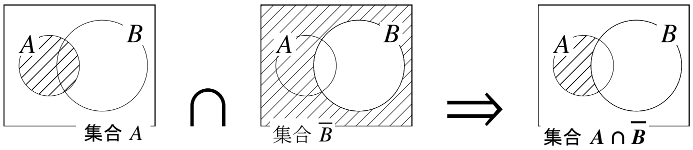
集合 {1, 2, 3} の部分集合をすべて挙げよ．

【発展 19：どんな集合でも成り立つ法則】

全体集合 U に含まれる集合 A について，集合 $A \cap \overline{A}$, $A \cup \overline{A}$ はどんな集合か．また，$\overline{A}$ の補集合である $\overline{\overline{A}}$ はどんな集合か．

G.　「ベン図」による集合の図示

集合 $A \cap \overline{B}$ は，ベン図の A, $\overline{B}$ のどちらも斜線になる部分であるので，次のように図示できる．



H.　ド・モルガンの法則

たとえば，$\overline{A \cap B}$ によって「$A \cap B$ の補集合」を表す．この集合について，重要な法則がある．

【暗記 20：集合の性質〜その１〜】

(1) 集合 $\overline{A \cap B}$，$\overline{A \cup B}$ について，それぞれベン図を用いて図示しなさい．

(2) 集合 $\overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A} \cup \overline{B}$，$\overline{A} \cup B$ について，それぞれベン図を用いて図示しなさい．

(3) (1)，(2) で図示した集合のうち，等しい集合を 2 組選び，等号で結びなさい．

ド・モルガンの法則

どんな集合 A，B に関しても，次の**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) が成り立つ．

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,　　　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

この法則を「補集合を表す線を切ると，∩ や ∪ がひっくり返る」と覚えてもよい．

【練習 21：ベン図による図示とド・モルガンの法則】

(1) 集合 $\overline{A} \cap B$ をベン図を用いて図示しなさい.

(2) 全体集合を $U = \left\{ n \,\middle|\, n \text{ は 1 桁の整数} \right\}$ とし，$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする.
$\overline{A} \cap B,\ A \cup \overline{B},\ \overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A} \cap \overline{B}$ を，それぞれ要素を書き並べて表せ.

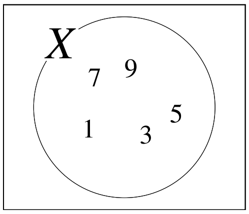
2. いろいろな集合の表現

A. 集合の表し方〜内包的定義

集合 $X = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ は，要素の満たす条件を示す方法を用いて，次のように表すことができる[20].

$$X = \left\{ a \,\middle|\, a \text{ は 10 以下の正の奇数} \right\}$$

aで要素を代表↑　　　↑要素が満たす条件



【例題 22】 集合 $A = \left\{ a \,\middle|\, a \text{ は 18 の正の約数} \right\}$，$B = \left\{ p \,\middle|\, p \text{ は 20 以下の正の素数} \right\}$ とする.

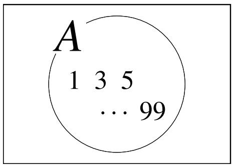
1. 集合 A, B を要素を書き並べる方法で表せ.
2. $6 \in A$, $6 \in B$ は正しいか，それぞれ答えよ.
3. $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\} = \left\{ y \,\middle|\, y \text{ は} \boxed{} \text{の正の約数} \right\}$ において，$\boxed{}$ に適する数字を答えよ.

*20 このような書き方を**内包的定義**（ないほう）(intensional definition) ともいう.

B. 集合のいろいろな表現

たとえば，集合 $A = \left\{ y \,\middle|\, y \text{ は 100 以下の正の奇数} \right\}$ の要素を並べて書き表すと $A = \{1,\ 3,\ 5, \cdots, 99\}$ となる．このように，集合の要素の数が多いときは $\cdots$ を用いて表すことがある[21]．

また，奇数は一般に $2n-1$ と表すことができ，式 $2n-1$ は



$n = 1$ を代入すれば，$2 \cdot 1 - 1 = 1$ ←記号 " $\cdot$ " は掛け算を表す

$n = 2$ を代入すれば，$2 \cdot 2 - 1 = 3$

$n = 3$ を代入すれば，$2 \cdot 3 - 1 = 5$

$\vdots$

$n = 50$ を代入すれば，$2 \cdot 50 - 1 = 99$

となるから，$A = \left\{ 2n-1 \,\middle|\, 1 \leqq n \leqq 50,\ n \text{ は自然数} \right\}$ や $A = \{2 \cdot 1 - 1,\ 2 \cdot 2 - 1,\ 2 \cdot 3 - 1,\ \cdots,\ 2 \cdot 50 - 1\}$ と書いてもよい．このように，一つの集合に対していろいろな表現ができる．

また，要素の個数は無限にあってよい[22]．

$$B = \left\{ z \,\middle|\, z \text{ は正の 3 の倍数} \right\} = \left\{ 3n \,\middle|\, n \text{ は自然数} \right\} = \{3, 6, 9, \cdots\} = \{3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ 3 \cdot 3, \cdots\}$$

【例題 23】 次の $\boxed{}$ に適する値・集合を答えなさい．

1. 式 $3n+1$ は $n = 1$ のとき $\boxed{\text{ア}}$，$n = 2$ のとき $\boxed{\text{イ}}$，$n = 3$ のとき $\boxed{\text{ウ}}$，$n = 4$ のとき $\boxed{\text{エ}}$ である．だから，集合 $C = \left\{ 3n+1 \,\middle|\, n = 1, 2, 3, 4 \right\}$ の要素を書き並べて表すと，$C = \boxed{\text{オ}}$ となる．
2. 式 $3n+1$ は $n = 30$ のとき $\boxed{\text{カ}}$ である．
   だから，集合 $D = \left\{ 3n+1 \,\middle|\, n \text{ は 30 以下の自然数} \right\}$ の要素を書き並べて表すと，$D = \boxed{\text{キ}}$ となる．

要素を書き並べるときに $\cdots$ を用いるは，たいてい，$\cdots$ の前に 3 つは要素を書き並べる．

【例題 24】 次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

1. $A = \left\{ 2k \,\middle|\, k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \right\}$
2. $B = \left\{ 2a+1 \,\middle|\, a \text{ は 1 桁の自然数} \right\}$
3. $C = \left\{ 5a \,\middle|\, a \text{ は 100 以下の自然数} \right\}$
4. $D = \left\{ 2n-1 \,\middle|\, n \text{ は正の整数} \right\}$

[21] $\cdots$ の部分に厳密さが欠けるという欠点はあるが，表現が具体的で分かり易いという利点を持つ．

[22] 要素が有限個の集合は**有限集合** (finite set)，要素が無限個存在する集合は**無限集合** (finite set) といわれる．

【練習 25：集合の表し方〜その１〜】

次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

i) $A=\left\{2n-1 \,\middle|\, n \text{ は整数，} 1 \leqq n \leqq 5\right\}$　　ii) $B=\left\{2k \,\middle|\, k \text{ は整数，} 1 \leqq k \leqq 50\right\}$

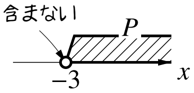
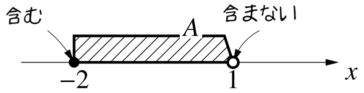
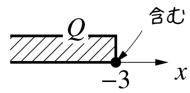
iii) $C=\left\{2^n \,\middle|\, n \text{ は自然数，} 1 \leqq n \leqq 6\right\}$　　iv) $D=\left\{2a-1 \,\middle|\, 0 \leqq a \leqq 3,\ a \text{ は整数}\right\}$

C.　実数を全体集合とする集合

実数全体を全体集合とした，$A=\left\{x \,\middle|\, -2 \leqq x < 1,\ x \text{ は実数}\right\}$ のような集合を考えることもできる．このような集合では，要素を書き並べることはできない．要素が無数に連続して存在するからである．

$-1 \in A,\ 0 \in A,\ \dfrac{1}{2} \in A,\ -\sqrt{3} \in A,\ -2 \in A$

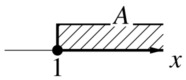
A のような集合を図示するには，数直線を用いて以下のように図示する．

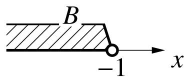
$P=\left\{x \,\middle|\, -3 < x\right\}$	$A=\left\{x \,\middle|\, -2 \leqq x < 1\right\}$	$Q=\left\{x \,\middle|\, x \leqq -3\right\}$
		

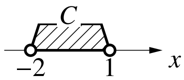
不等号 <, > は，境目を「白丸」「斜め線」で表し，不等号 ≦, ≧ は，境目を「黒丸」「垂直線」で表す．

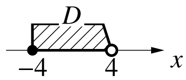
【例題 26】

1. それぞれの図が表す集合を答えなさい．

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

2. 集合 $A=\left\{x \,\middle|\, -1 < x \leqq 2\right\}$ について，次の $\boxed{}$ に ∈, ∉ のいずれかを入れなさい．

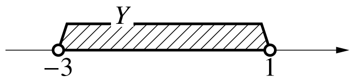
$0\boxed{}A,\ 0.8\boxed{}A,\ \dfrac{1}{2}\boxed{}A,\ -\sqrt{3}\boxed{}A,\ -1\boxed{}A,\ 2\boxed{}A$

【練習 27：集合の表し方〜その２〜】

全体集合を実数全体，$X = \left\{x \,\middle|\, -2 \leqq x \leqq 2\right\}$，$Y$ を右下の数直線で表される集合とする．

(1) 集合 X を右の数直線上に書き入れなさい．

(2) $X \cap Y$, $X \cup Y$ をそれぞれ求めなさい．



(3) 集合 $\overline{X}$ は次のどれに等しいか，答えなさい．

(a) $\left\{x \,\middle|\, x < -2\right\}$　(b) $\left\{x \,\middle|\, 2 \leqq x\right\}$　(c) $\left\{x \,\middle|\, x \leqq -2,\ 2 \leqq x\right\}$　(d) $\left\{x \,\middle|\, x < -2,\ 2 < x\right\}$

(4) 集合 $\overline{Y}$ を答えなさい．

【発展 28：ド・モルガンの法則】

$A \cap B = \left\{x \,\middle|\, -1 \leqq x < 4\right\}$, $A \cup B = \left\{x \,\middle|\, -3 \leqq x\right\}$ であるとき，$\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ を求めよ．

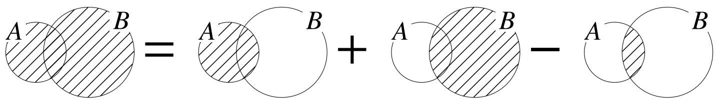
3. 集合の要素の個数

A. 集合の要素の個数

集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す（ただし，集合 A の要素は有限個であるとする）．たとえば，$A = \{1, 3\}$ ならば $n(A) = 2$ である．また，空集合の要素の個数は $n(\emptyset) = 0$ と定める．

B. 和集合の要素の個数（包含と排除の原理）

和集合 $A \cup B$ の要素の個数は $n(A \cup B)$ と表される．これは，下のベン図を用いて，次のように求められる．



包含と排除の原理（2 集合版）

2 つの集合 A，B に関して

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \underbrace{n(A \cap B)}_{A \cap B\ \text{の要素の個数}}$$

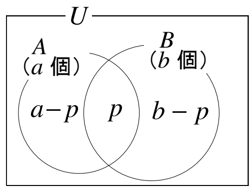
が成り立つ．これを**包含**（ほうがん）**と排除**（はいじょ）**の原理** (principle of inclusion and exclusion) という．

特に，$A \cap B = \emptyset$ のときには，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ となる．

この法則は，$n(A) = a$，$n(B) = b$，$n(A \cap B) = p$ とおいたときに

$$n(A \cap \overline{B}) = a - p,\quad n(\overline{A} \cap B) = b - p$$

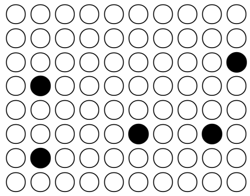
であることからも確かめられる．



【例題 29】 40 人がいるクラスでアンケートをとった．

1. 兄がいるのは 12 人，姉がいるのは 8 人，兄も姉もいるのは 3 人だという．兄か姉がいるのは全部で何人か．
2. クラス全員が，電車か自転車で通学しており，電車を使うのは 17 人，自転車を使うのは 30 人だという．電車も自転車も使うのは何人いるか．

C. 補集合の要素の個数 ～ “着目しないもの”に着目する



たとえば，右の丸のうち，白丸○の個数は

（全ての丸の個数）−（黒丸●の個数）

$= 8 \times 10 - 5 = 75$ 個

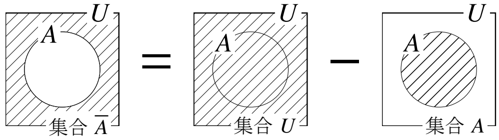
と求めるとよい．この考え方を集合に応用して，次を得る．

補集合の要素の個数

全体集合を U とする集合 A と，その補集合 $\overline{A}$ の要素の個数について次が成り立つ．

$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$

この法則をベン図で表すと右図のようになる．
簡単な法則だが，よく使われる法則である．



【例題 30】 全体集合を $U = \left\{x \,\middle|\, x \text{ は 100 以下の自然数}\right\}$ とする．
$A = \left\{x \,\middle|\, x \text{ は 3 の倍数}\right\}$，$B = \left\{x \,\middle|\, x \text{ は 5 の倍数}\right\}$ とするとき，次の値を求めよ．
1. $n(A)$　　2. $n(B)$　　3. $n(A \cap B)$　　4. $n(A \cup B)$　　5. $n(\overline{A})$　　6. $n(\overline{B})$

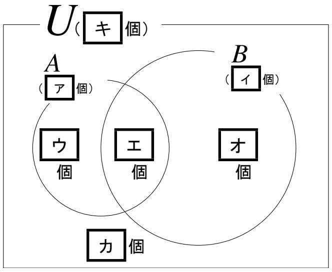
【練習 31：補集合の要素の個数と包含と排除の原理〜その１〜】

全体集合 U と集合 A, B について，

$$n(U) = 50,\ n(A) = 20,\ n(A \cup B) = 42,\ n(A \cap B) = 6$$

であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 右のベン図の $\boxed{}$ にあてはまる値を入れよ．



(2) 次の値を求めよ．

1) $n(A \cap \overline{B})$　　2) $n(\overline{A} \cap \overline{B})$　　3) $n(A \cup \overline{B})$

【練習 32：補集合の要素の個数と包含と排除の原理〜その２〜】

総世帯数が 191 のある地区では，新聞をとっている世帯が 170 ある．このうち A 新聞をとっている世帯は 89，B 新聞をとっている世帯は 108 ある．その他の新聞はこの地区には無いものとして，以下の問に答えよ．

(1) この地区では新聞をとっていない世帯はいくつか.

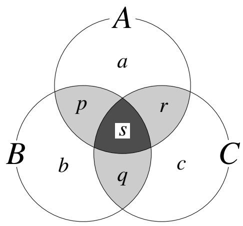
(2) A，B 両方の新聞をとっている世帯はいくつか.

4. 3つの集合による関係

A. 3つの集合によるベン図

【暗記 33：3つ以上の集合によるベン図】

右の図のように，a, b, c, p, q, r, s に分かれている．次の集合が表す部分を答えよ（たとえば，集合 A が表す部分は a, p, r, s になる）．



1. $(A \cup B) \cup C$　　2. $A \cup (B \cup C)$　　3. $(A \cap B) \cap C$
4. $A \cap (B \cap C)$　　5. $A \cup (B \cap C)$　　6. $A \cap (B \cup C)$
7. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$　　8. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

集合の性質〜その１〜

集合 A，B，C に関して次のことが成り立つ．

i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　　←括弧を省略して $A \cup B \cup C$ と書く

ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$　　←括弧を省略して $A \cap B \cap C$ と書く

iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

・・・・ iii) は式の分配法則 $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ と関連付けると覚えやすい．

B. 3つの集合によるド・モルガンの法則

3集合の場合もド・モルガンの法則が成り立つ．たとえば

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{(A \cup B) \cup C}$$　←$A \cup B$ を，ひとかたまりとして考える

$$= \overline{A \cup B} \cap \overline{C}$$　←$A \cup B$ と C について『ド・モルガンの法則』

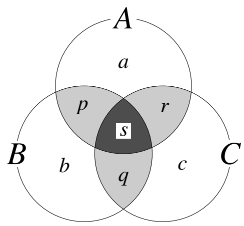
$$= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$　←『ド・モルガンの法則』より，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

【暗記 34：3 集合の場合のド・モルガンの法則】

先の例にならって，$\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ を示せ.

C. 3 つの集合による包含と排除の原理

$n(A\cup B\cup C)$ を求めるには，3 集合の場合の『包含と排除の法則』(p.20) を用いる.
この等式について，右図を見ながら理解しよう.



$$n(A\cup B\cup C)$$
$$=\underbrace{n(A)+n(B)+n(C)}_{\substack{p,\,q,\,r\text{ を 2 重に，}\\ s\text{ を 3 重に足してしまう}}}-\underbrace{n(A\cap B)}_{p,\,s\text{ を引く}}-\underbrace{n(B\cap C)}_{q,\,s\text{ を引く}}-\underbrace{n(C\cap A)}_{r,\,s\text{ を引く}}+\underbrace{n(A\cap B\cap C)}_{\text{引きすぎた }s\text{ を足す}}$$

包含と排除の原理（3 集合版）

3 つの集合 A，B，C に関して，次の等式が成り立つ.
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

【練習 35：補集合の要素の個数と包含と排除の原理（3 集合版）〜その１〜】

3，5，7 の少なくとも一つで割り切れる 1000 以下の自然数は，全部で何個あるか.

【㊵㊱ **36**：補集合の要素の個数と包含と排除の原理（3 集合版）〜その２〜】

300 人の高校生に A，B，C の 3 種のテストを行った．A テストに 102 人，B テストに 152 人，C テストに 160 人が合格したが，これらの中で，A，B 両テストに 42 人，B，C 両テストに 62 人，C，A 両テストに 32 人が合格している．3 種のテストのどれにも合格しなかった人は 10 人であった．このとき，3 種のテストにすべて合格した人は何人か.

1A.3 命題

1. 命題の基礎

A. 数学とは何か？

「数学とは何か？」この質問に対する一つの答えとして，次のように言うことができる[*23].

「正しいか間違いか，確定できる方法のみを用い，物事を扱う学問である」

たとえば「20 歳という年齢は，若いと言えるか」という問題の答えは確定できない．答える人の価値観によって答えが異なる．だから，この問いは数学では扱われない[*24].

「正しいか間違いか」が定まる問題のことを**命題**(めいだい) (proposition) と言い[*25]，数学で扱う問題は命題に限る．

【例題 37】 次の問題は命題ではないので，数学では扱われない．なぜ命題でないか，説明しなさい．

1. 身長 190 cm のバスケットボールの選手がいる．この人の身長は高いだろうか？
2. 2003 年にアメリカはイラクに侵攻した．これは正しい判断だったろうか？

B. 真偽と反例

命題が正しいとき，その命題は**真**(しん) (true) であるといい，命題が間違っているとき，その命題は**偽**(ぎ) (false) であるという．命題の定義から，命題には真か偽しかない．

命題が偽であるとき，その命題が正しくない例を**反例** (counterexample) という．

例えば，命題「実数 x が $x^2 = 1$ を満たすなら $x = 1$ に限る」は偽であり，その反例は $x = -1$ である．

【例題 38】 次の命題について真偽を答え，偽であるものには反例を一つ挙げなさい．

1. 1 m 40 cm は 1 m よりも長い
2. 自然数は無限個存在する．
3. 奇数を 2 倍すれば偶数である．
4. 奇数と奇数を足すと奇数になる．

[*23] 物理学，化学，生物学など，多くの自然科学においても「正しいか間違いか」は重要であるが，いつも確定できるとは限らない．これらの自然科学においては，たとえば「実験の結果と一致しているか」もやはり重要である．

[*24] 世の中には，「正しいか間違いか」を完全に決定することができない問題も多い．しかし，「正しいか間違いか」を完全に決定できる範囲だけで物事を考えても，有用なことがたくさんある．

[*25] 未解決問題のように，将来的に正しいか間違いかを確定できると考えられている問題も命題と言われる．

2. 命題を構成する「条件」

A. 「仮定」の役割

「ab は 0 に等しいか？」という問いには真偽が定まらないが，次の 2 つはいずれも真偽が定まる．

i) 「$a = 0$ であるとき，ab は 0 に等しいか？」（ 真 ）
ii) 「a, b とも正の数ならば，ab は 0 に等しいか？」（ 偽 ）

命題において，前提となる事柄を**仮定** (assumption)，真偽を確定するべき事柄を**結論** (conclusion) という．また，単独では真偽が定まらないが，命題の仮定や結論になりうる内容を**条件** (condition) という．

たとえば，上の 2 つの命題は次のように表される．

i) 「$a = 0$」 $\Longrightarrow$「ab は 0 に等しい」（ 真 ）
ii) 「a, b とも正の数」$\Longrightarrow$「ab は 0 に等しい」（ 偽 ）
（ 仮定 ）　　　　（ 結論 ）

このように，仮定と結論を結ぶ「であるとき」「ならば」などの言葉を，記号「⇒」で表すこともある．

【例題 39】 以下のように仮定と結論が与えられた命題の，真偽を答えよ，偽であれば反例を一つあげよ．
1. 「仮定：a, b は整数」「結論：ab は整数」
2. 「仮定：$a + b$ は整数」「結論：ab は整数」

B. 命題「$p \Rightarrow q$」

条件 p を「$x > 0$」，条件 q を「$x + 10 > 0$」とすると，命題「$p \Rightarrow q$」とは命題「$x > 0$ ならば $x + 10 > 0$ である」のことであり，これは真である．

このように，一般に命題を「$p \Rightarrow q$」と表すことが多い．ここで，文字 p, q は条件を表す．

p：「$x > 0$」，q：「$x + 10 > 0$」のとき
命題 $p \Rightarrow q$ とは
↓ ↓
命題「$x > 0$」ならば「$x + 10 > 0$」のこと

【例題 40】
1. p :「$a = b$」，q :「$a^2 = b^2$」のとき，命題「$p \Rightarrow q$」の真偽を答え，偽である場合は反例をあげよ．
2. p :「$ac = bc$」，q :「$a = b$」のとき，命題「$p \Rightarrow q$」の真偽を答え，偽である場合は反例をあげよ．

3. 条件と集合

A. 「全体集合」の役割

命題「a は自然数とする．$a+1$ は正である．」は真である．

しかし，「$a+1$ は正である．」の一文に真偽を定めることはできない．a を自然数だと考えた人にとっては真であるが，a を整数だと考えた人には $a=-2$ という反例があって偽となるからである．

このように，与えられた文字をどの範囲で考えているかを明示する必要がある[*26]．

B. 条件の否定

条件 p に対し，条件「p でない」を p の**否定** (negation) といい，記号 $\overline{p}$ で表される．

例えば，自然数 m について，条件 p「m は 3 の倍数」の否定 $\overline{p}$ は「m は 3 の倍数でない」である．

また，実数 a について，条件 q「$a \leqq 10$」の否定 $\overline{q}$ は「a は 10 以下ではない」，つまり「$10 < a$」である．

【例題 41】 a は実数，n は自然数とする．以下の条件を述べよ．

1. 条件 p「n は 10 の倍数」の否定 $\overline{p}$
2. 条件 q「n は奇数」の否定 $\overline{q}$
3. 条件 r「$3 \leqq a$」の否定 $\overline{r}$
4. 条件 s「$4 < a$」の否定 $\overline{s}$

C. 条件の「または」と「かつ」

たとえば，条件「$a>0$ または $b>0$」は，「$a>0$ か $b>0$ のどちらかは成立する」ことを意味する．

一方，条件「$a>0$ かつ $b>0$」は，「$a>0$ と $b>0$ のどちらも成立する」ことを意味する．

「または」「かつ」をまとめると，右のようになる[*27]．

「p または q」には「p も q も成立」する場合も含まれることに注意しよう，

○ :「成立する」　× :「成立しない」

	p	q	p または q	p かつ q
i)	○	○	○	○
ii)	○	×	○	×
iii)	×	○	○	×
iv)	×	×	×	×

【例題 42】 実数 a, b について，条件 p :「$a>0$」，q :「$b>0$」とする．

1. $a=3$, $b=-1$ のとき，条件「$\overline{p}$」「p または q」「p かつ q」が成立するかどうか，それぞれ答えよ．
2. $a=2$, $b=2$ のとき，条件「$\overline{p}$」「p または q」「p かつ q」が成立するかどうか，それぞれ答えよ．
3. $a=0$, $b=0$ のとき，条件「$\overline{p}$」「p または q」「p かつ q」が成立するかどうか，それぞれ答えよ．

[*26] 文脈から明らかなときは省略されることもある．とはいえ，書く必要があるか迷ったら書いた方がよい．

[*27] 論理学などにおいては，条件の「または」「かつ」を記号 ∨, ∧ で表すこともある．高校数学ではほとんど用いられない．

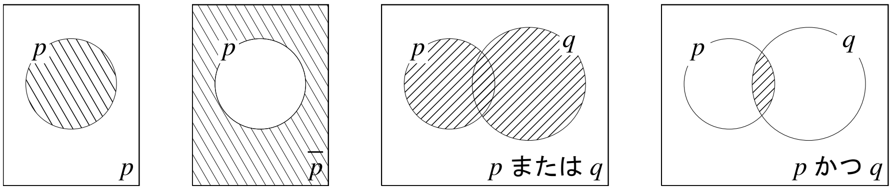
【例題 43】 次の$\boxed{}$に，「または」「かつ」のどちらかを入れなさい．

1. 「$a = 3,\ b = -1$ のとき $a + b = 2$」は「$a = 3$ $\boxed{}$ $b = -1$ のとき $a + b = 2$」と同じ意味である．
2. 「実数 $a,\ b$ について」は「a が実数 $\boxed{}$ b が実数のときについて」と同じ意味である．
3. 「$x^2 = 1$ の解は $x = 1,\ -1$」は「$x^2 = 1$ の解は $x = 1$ $\boxed{}$ $x = -1$」と同じ意味である．

カンマ（,）は「かつ」を意味することが多い．ただし，方程式の解を列挙するときなどは「または」を意味する．条件の意味を考えて判断しよう．

D. 条件と集合

全体集合 U のうち，条件 p が成立する U の要素の集合を，同じく p で表して，ベン図で図示することができる．



こうして，条件も集合と同じように考えることができ，特に次の事実を得る．

ド・モルガンの法則

どんな条件 p，q に関しても，次の**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) が成り立つ．

$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$,　　$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}$

「$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$」の具体例として，条件「$a = 0$ または $b = 0$ が成り立たない」ときを考えよう．これは，$a \neq 0,\ b \neq 0$ の両方が成り立つときに限る．つまり「$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$」でないといけない．

【例題 44】 $a,\ b$ は実数，$m,\ n$ は整数とする．次の条件の否定を述べよ．

1. $a = 1$ かつ $b = 1$　　2. $a = 2$ または $b = 2$　　3. $a \neq 3$ かつ $b = 3$　　4. $m,\ n$ は偶数
5. m または n が 5 で割り切れる　　6. $a > 0$ または $b < 0$

【練習 45：または・かつ・否定】

（例）にならって右の表を埋めなさい．
ただし，○は「成立する」，×は「成立しない」を表す．

	p	q	p かつ q	$\overline{p\text{ かつ }q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$ または $\overline{q}$
（例）	○	○	○	×	×	×	×
i)	○	×					
ii)	×	○					
iii)	×	×					

【練習 46：または・かつ・否定〜その２〜】

自然数 a, b について，以下の命題の真偽を答えよ．偽である場合は反例を一つあげよ．

(1) a, b が奇数ならば，ab は奇数である．

(2) a または b が奇数ならば，ab は奇数である．

(3) a が 3 で割り切れないならば，$2a$ は 3 で割り切れない．

(4) $2a = 3b$ ならば，a は 3 の倍数，b は 2 の倍数である．

E. 発展 「すべての」「ある」の否定

ある新幹線が事故を起こせば，「すべての新幹線は事故を起こさない」ことは否定される[*28]．

一方，「すべての人が行方が分かっている」ことによって「行方不明者がいる」ことは否定される[*29]．

一般に，「ある〜」が「すべての〜」の否定となり，「すべての〜」が「ある〜」の否定となる．

【発展 47：「すべての」「ある」の否定】

① 条件「すべての自然数 n について，$(n+1)(n-1)$ は 4 で割り切れる」の否定を述べよ．

② 条件「ある実数 x について，$x^2 + 1 = 0$ である」の否定を述べよ．

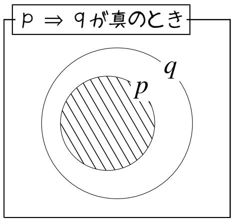
[*28] 他のすべての新幹線が事故を起こさなくても，否定になる．

[*29] ある人の行方がわかるだけでは否定にならない．すべての人の行方が分からないといけない．

4. 必要条件と十分条件

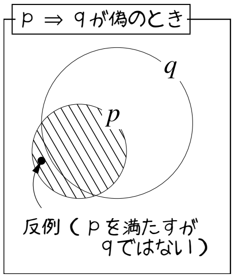
A. 命題 $p \Rightarrow q$ の真偽の図示

命題 $p \Rightarrow q$ が真であるとは，全体集合内の「p を満たす要素は全て q を満たす」ことになる．ベン図で表すと左下図のように，条件 p, q は集合として $p \subset q$ である．



$p \subset q$

逆に，命題 $p \Rightarrow q$ が偽ならば，その反例は「p を満たすが q を満たさない要素」である．それは，ベン図で表すと右図の ● に相当する．



$p \not\subset q$

B. 逆

仮定と結論を交換してできる命題を，**逆** (converse) の命題という．たとえば

「$a = 1$ ならば，$a^2 = 1$ である」　（真）

という命題の逆は，次のようになる．

「$a^2 = 1$ ならば，$a = 1$ である」　（偽）

上の例のように，もとの命題の真偽と，逆の命題の真偽が一致するとは限らない．

文字を使って表せば，命題「$p \Rightarrow q$」の逆は，命題「$q \Rightarrow p$」となる．

【例題 48】 以下の命題の真偽を答えよ．次に，逆の命題を書き，その真偽も答えよ．

1. $x = 0$ ならば，$x^3 = 0$ である．
2. x, y が有理数ならば，$x + y$ は有理数である．

【発展 49：逆はいつも正しいとは限らない】

もとの命題が真であっても，逆の命題が偽であるかもしれないことは，次のように説明できる．$\boxed{}$ に適する式を答えなさい．

命題 P： $p \Rightarrow q$ が真であるとき，条件 p, q には，集合として $\boxed{ア}$ という関係が成り立つ．一方，命題 P の逆 $\boxed{イ}$ が成り立つには，条件 p, q には，集合として $\boxed{ウ}$ という関係が成り立たないといけない．

しかし，$\boxed{ア}$ のときに $\boxed{ウ}$ が成り立つとは限らないので，逆が成り立つとは限らない．

C. 必要条件と十分条件

たとえば,「オリンピックの金メダリストならば努力している」ことを正しいと認めよう.

このとき,「オリンピックの金メダリスト」を見れば「努力している」と見なして良い. つまり,「オリンピックの金メダリスト」であることが,「努力している」かどうかを判断するのに十分な条件となる.

一方,「努力している」人を見れば「オリンピックの金メダリスト」になるための必要な条件をこなしている, と考えられる.

数学においても, 真になる命題「$p \Rightarrow q$」があれば, 条件 p と, 条件 q に「必要」「十分」と呼ばれる論理的な関係を考えることができる.

必要条件と十分条件

命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき,(p に対して) q は**必要条件** (necessary condition) であるといい,
命題「$q \Rightarrow p$」が真であるとき,(p に対して) q は**十分条件** (sufficient condition) であるという.
命題「$p \Rightarrow q$」も「$q \Rightarrow p$」も真であるときは,(p に対して) q は**必要十分条件** (necessary and sufficient condition) である, または, p と q は**同値** (equivalence) である, という.

【例題 50】 a, b は整数とする. 条件 p :「a, b はともに奇数」, q :「ab は奇数」, r :「$a+b$ は偶数」とする. 次の $\boxed{\quad}$ に,「真」「偽」「ある」「ない」のいずれかで答えよ.

1. 命題 $p \Rightarrow q$ は $\boxed{ア}$ であり, 命題 $q \Rightarrow p$ は $\boxed{イ}$ である.
   よって,(p に対して) q は必要条件で $\boxed{ウ}$. また, 十分条件で $\boxed{エ}$.
2. 命題 $q \Rightarrow r$ は $\boxed{オ}$ であり, 命題 $r \Rightarrow q$ は $\boxed{カ}$ である.
   よって, r は (q に対して) 必要条件で $\boxed{キ}$. また, 十分条件で $\boxed{ク}$.
3. r は, p について必要条件で $\boxed{ケ}$. また, 十分条件で $\boxed{コ}$.
   なぜなら, 命題 $p \Rightarrow r$ は $\boxed{サ}$ であり, 命題 $r \Rightarrow p$ は $\boxed{シ}$ であるから.
4. p と q は同値で $\boxed{ス}$. q と r は同値で $\boxed{セ}$. r と p は同値で $\boxed{ソ}$.

「(p に対して) q は必要条件」という表現は, 以下のいずれとも同じ意味である.

- q は p に対して必要条件
- q は p の必要条件
- q は p について必要条件

何は必要条件であるのかを, 読み間違えないようにしよう.

p が q の必要条件・十分条件であるかを調べるには，2 つの命題 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ の真偽を求めればよい．

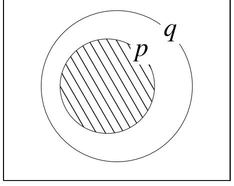
【例題 51】 次の $\boxed{}$ に，①から④のいずれかを選んで答えなさい．

1. $a = b$ であることは，$ac = bc$ であることの $\boxed{}$.
2. $x^2 = 4$ であることは，$x = 2$ であることの $\boxed{}$.
3. a が 4 の倍数であることは，a が 6 の倍数であることの $\boxed{}$.
4. $a = b = 0$ であることは，$a^2 + b^2 = 0$ であることの $\boxed{}$.

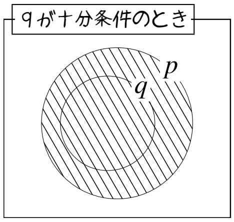
① 必要十分条件である　② 必要条件であるが十分条件でない
③ 十分条件であるが必要条件でない　④ 必要条件でも十分条件でもない

D. 必要条件・十分条件の図示

q が（p に対して）必要条件ならば，命題 $p \Rightarrow q$ が真なので左のベン図のように表される．



また，q が（p に対して）十分条件ならば，命題 $q \Rightarrow p$ が真なので右のベン図のように表される．



もし，左右どちらの図も成立すれば，結局，条件 p と条件 q は一致することになる．これが，必要十分条件のことを「同値[*30]」とも言われる理由である．

[*30] 本来，「同値」を意味する"equivalence"は「同等」と訳された方が分かり易かったかもしれない．しかし，「同値」という訳語が一般的なので今後もこれを用いる．

【練習 52：必要条件と十分条件〜その１〜】

次の $\boxed{}$ に，①から④のいずれかを選んで答えなさい．

(1) $x^2 < 1$ は，$x < 1$ であることの $\boxed{}$．

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形であることは，AB//DC であることの $\boxed{}$．

(3) $a < 1$, $b < 1$ であることは，$ab < 1$ であることの $\boxed{}$．

① 必要十分条件である　② 必要条件であるが十分条件でない

③ 十分条件であるが必要条件でない　④ 必要条件でも十分条件でもない

5. 逆・裏・対偶

命題「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」を $p \Rightarrow q$ の**裏** (converse of contraposition) という．たとえば

「$a = 1$ ならば，$a^2 = 1$ である」　**（真）**

という命題の裏は，次のようになる．

「$a \neq 1$ ならば，$a^2 \neq 1$ である」　**（偽）**

上の例のように，もとの命題の真偽と，裏の命題の真偽が一致するとは限らない．

【例題 53】 以下の命題の真偽を答えよ．次に，裏の命題を書き，その真偽も答えよ．

1. $x = 0$ ならば，$x^3 = 0$ である．
2. x, y が有理数ならば，$x + y$ は有理数である．

A.　対偶とは何か

命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」を $p \Rightarrow q$ の**対偶** (contraposition) という．たとえば

「$a = 1$ ならば，$a^2 = 1$ である」　（真）

という命題の対偶は，次のようになる．

「$a^2 \neq 1$ ならば，$a \neq 1$ である」　（真）

【例題 54】　以下の命題の対偶を書き，その真偽も答えよ．

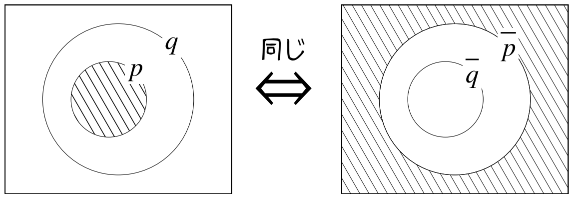
1. $x = 0$ ならば，$x^3 = 0$ である．
2. x, y が有理数ならば，$x + y$ は有理数である．

B.　対偶の真偽は保たれる

もとの命題の真偽と，対偶の命題の真偽は必ず一致する．

p.31 の A. のような図を用いて，右の 2 つの図から考えてみよう．どちらも，条件 p（斜線部分）が q に含まれていることがわかる．

補足 (p.90) に，より詳しい証明がある．



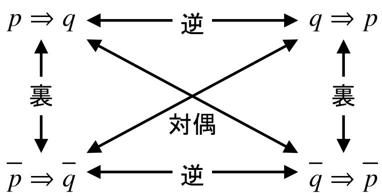
p ⇒ qが真　　　$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ が真

C.　逆・裏・対偶のまとめ

命題 $\overline{p}$，$\overline{q}$ の否定は，もとの命題 p，q であるから，命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の対偶は $p \Rightarrow q$ である．つまり，対偶の対偶はもとに戻る．

また，命題 $q \Rightarrow p$ の対偶は命題 $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ になる．このことから，逆の対偶は裏になることも分かる．

逆・裏・対偶の関係をまとめると，右図のようになる．



【例題 55】　命題「$x = 2$ ならば $x^2 = 4$ である」を P とし，P の逆・裏・対偶の命題をそれぞれ P_1, P_2, P_3 とする．P_1, P_2, P_3 の命題を書き，それらの真偽も答えよ．

【練習 56：対偶の真偽は保たれる】

「背が高い友人Ａ」と待ち合わせしている人の考えとして正しくなるよう，選択肢から選びなさい．

「向こうから誰かが来る．その誰かは，背が $\left\{\begin{matrix}\text{高い}\\ \text{低い}\end{matrix}\right\}$ ので，友人Ａで $\left\{\begin{matrix}\text{ある}\\ \text{ない}\end{matrix}\right\}$.」

【練習 57：逆・裏・対偶】

以下の命題の，逆・裏・対偶の命題を書きなさい．また，それぞれについて真偽を答えなさい．

ただし，(4) の「△ABC = △POR」は「△ABC と △PQR の面積が等しい」を意味する．

(1) 「$x = 1$」⇒「$x^2 - x = 0$」

(2) 「x, y は整数」⇒「xy は整数」

(3) 「$x + y = 5$」 ⇒「$x = 2$ かつ $y = 3$」

(4)「△ABC = △POR」 ⇒ 「△ABC ≡ △POR」

1A.4　証明

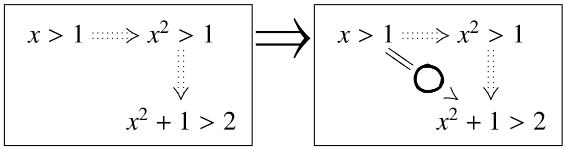
どんな命題にも通用する証明方法は無い．

しかし，多くの証明に使われる基本的な方法や，ある形の命題にはきわめて有効な証明方法はある．

それらの中には，普段，人に説明する場面でも有効な方法論もある．

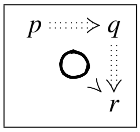
1. 証明の基礎

A. $p \Rightarrow q \Rightarrow r$



たとえば，次の 2 つの命題は真である．

- $x > 1$ ならば $x^2 > 1$ である．
- $x^2 > 1$ ならば $x^2 + 1 > 2$ である．



上の 2 つの命題から出来る，新しい命題「$x > 1$ ならば $x^2 + 1 > 2$ である」も真になる．一般に，命題 $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow r$ が真ならば，新しい命題 $p \Rightarrow r$ も真である．

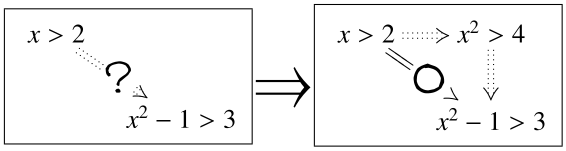
【例題 58】 次の 2 つの正しい命題から，新しい命題を作りなさい．

1. 「$x^2 - x - 2 = 0$ ならば $x = 2,\ -1$ である」「$x = 2,\ -1$ ならば $x^3 - 3x - 2 = 0$ である」
2. 「$\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{5}$ ならば，定数 k を用いて $a = 3k,\ b = 2k,\ c = 5k$ と表せる」
「定数 k を用いて $a = 3k,\ b = 2k,\ c = 5k$ と表せるならば，$a : b : c = 3 : 2 : 5$ である」

B. 三段論法

たとえば，命題「$x > 2$ ならば $x^2 - 1 > 3$」を証明するには，次の 2 段階に分けて考えればよい．

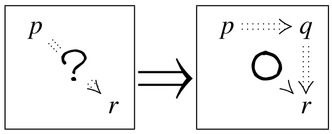
- $x > 2$ ならば $x^2 > 4$ であり，
- $x^2 > 4$ ならば $x^2 - 1 > 3$ である．



この考え方のポイントは，条件「$x^2 > 4$」を間に挟んだことにある．

命題 $p \Rightarrow r$ が真であることを示すために，新たな条件 q を考え，命題 $p \Rightarrow q$ と命題 $q \Rightarrow r$ の両方を示してもよいと分かる．

この命題の証明方法を**三段論法** (syllogism) という．



【例題 59】 命題「a が偶数ならば a^2 は偶数である」の証明が完成するよう，$\boxed{}$ に適する語句を答えなさい．

仮定より，整数 k を用いて $a = 2k$ と表すことができる．
$a = 2k$ ならば $a^2 = \boxed{ア}$ となって a^2 は $\boxed{イ}$ と分かる．よって，命題は正しいと証明された．

三段論法における中間的な条件 q を見つけることは，問題によって異なる．

C. 同値であることの証明

「p と q が同値である」という命題を示すには，2 つの命題「$p \Rightarrow q$」「$q \Rightarrow p$」を証明すればよい.

…命題「$p \Rightarrow q$」と「$q \Rightarrow p$」はまとめて，命題「$p \Leftrightarrow q$」とも表される.

【例題 60】 a, b を整数とする．2 つの条件「$a-b$ が偶数である」「$a+b$ が偶数である」は同値であることを示そう.

まず，「$a-b$ が偶数ならば $a+b$ が偶数である」ことを示す.

$a-b$ は偶数なので $a-b=2m$（m は整数）とおく．$a-b$ に $\boxed{\text{ウ}}$ を足せば $a+b$ になるので

$$a+b=2m+\boxed{\text{ウ}}=2\left(\boxed{\text{エ}}\right)$$

である．$\boxed{\text{エ}}$ は整数なので，$a+b$ は偶数である.

次に，逆の「$a+b$ が偶数ならば $a-b$ が偶数である」ことを示す.

$a+b$ は偶数なので，$a+b=2n$（n は整数）とおくと

$$a-b=2n-\boxed{\text{ウ}}=2\left(\boxed{\text{オ}}\right)$$

であり，$\boxed{\text{オ}}$ は整数なので $a-b$ も偶数である.

以上から，2 つの条件「$a-b$ が偶数である」「$a+b$ が偶数である」は同値であることが示された.

【練習 61：同値であることの証明】

a, b を整数とする．$a+2b$ が 4 の倍数であることと $a-2b$ が 4 の倍数であることは，同値な条件であることを示せ.

2. 対偶を用いた証明

もとの命題と対偶の命題は真偽が一致した (p.35)．そこで，命題 $p \Rightarrow q$ の証明が難しいときには，命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を証明してもよい．

【暗記 62：対偶証明法】
a^2 が奇数ならば a が奇数であることを，対偶法を用いて示せ．

【例題 63】 平面上の 3 点 A，B，P がある．以下の $\boxed{}$ に当てはまる文章・言葉を答えよ．
「$\angle \mathrm{APB} \fallingdotseq 90^\circ$ ならば，線分 AB を直径とする円の周上に P はない」の対偶は $\boxed{カ}$ であり，これは $\boxed{キ}$ の定理から正しい．よって，もとの命題も正しいことが分かる．

【暗記 64：$x = a$ かつ $y = b$ と同値な条件】
実数 x, y について，命題「$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$ ならば $x = 1$ かつ $y = 1$」を対偶を用いて示せ．

…… 上の命題の逆も成立する．同じようにして，一般に，実数 x, y, a, b について「$x = a$ かつ $y = b$」と「$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$」は同値と示され，この事実自体が証明に用いることもある．詳しくは p.91 を参照のこと．

3. 背理法

A. 背理法とは何か

命題 $p \Rightarrow q$ を示すのに，以下のように証明を進めてもよい．

i. 仮定 p のもと，条件 q が成り立たないと仮定する．

ii. i. のとき，つじつまが合わないこと，すなわち**矛盾**(むじゅん) (contradiction) を導く．

iii. 条件 q が成り立たないと仮定したのが間違いだったので，条件 q が成り立っている，と結論づける．

この証明方法を**背理法**(はいりほう) (reduction to absurdity) という[*31]．

【例題 65】 $a+b=2$ のとき，a または b は 1 以上であることを示せ．

命題 $p \Rightarrow q$ を背理法で示すとき，条件 q が成り立たないと仮定して話を進めるが，仮定である p を否定しないように注意しよう．結果的には，条件 p と条件 $\overline{q}$ が同時に成り立つと仮定して，話を進めることになる．

【暗記 66 : $x=a$ または $y=b$ と同値な条件】
実数 x, y について，命題「$(x-1)(y-1)=0$ ならば $x=1$ または $y=1$」を背理法を用いて示せ．

上の命題の逆も成立する．同じようにして，一般に，実数 x, y, a, b について「$x=a$ または $y=b$」と「$(x-a)(y-b)=0$」は同値と示され，この事実自体が証明に用いることもある．詳しくは p.92 を参照のこと．

[*31] この証明が有効であるのは，命題は真か偽かに定まることに由来する．つまり，命題「$p \Rightarrow q$」と命題「$p \Rightarrow \overline{q}$」は一方のみが真であり，一方のみが偽である．そこで，「$p \Rightarrow q$」の真を示すために，「$p \Rightarrow \overline{q}$」の偽を示すのである．

B. 無理数であることの証明

ある数が無理数であることを示すには，背理法を用いる[*32].

「無理数どうしの足し算や引き算が無理数になる」ことは偽なので，書いてはいけない[*33].

一方，有理数どうしの四則計算が有理数になることは，断りなく用いても良い.

【暗記 67：無理数であることの証明】

$2\sqrt{2}-3$ が無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい.

【練習 68：背理法～その１～】

$\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ が無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは用いてもよい.

[*32] ある数 x が無理数であることの定義が「x が分数では表せないこと」である．だから，x が無理数であることを示すには，基本的に「x が有理数である（分数で表すことができる）」と仮定して矛盾を導くしかない.

[*33] たとえば，2 つの無理数 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ について，互いに足しても掛けても割っても無理数にならない.

【発展 69：背理法～その２～】

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{6}$ が無理数であることは用いてもよい．

C. 有理数でないことの証明

【発展 70：$\sqrt{2}$ は有理数ではないことの証明】

$\sqrt{2}$ が有理数でないことを証明せよ．

B 式の展開・因数分解・1次不等式

1B.1 単項式と多項式

この章では，まず，高校で学ぶような複雑な式を，見通しよく扱うための方法を学ぶ．
そして，展開（1.〜2.）と因数分解（1.〜3.）を学ぶ．

1. 単項式

A. 単項式と次数

$3abx^2$ のように，いくつかの文字や数を掛け合わせた式を**単項式** (monomial) といい，掛け合わせる文字の個数を**次数** (degree) という．1 や -3 などの数は，文字を含まない単項式とみなし，次数は 0 とする[*34]．また，数の部分を**係数** (coefficient) という．

文字 $a,\ b,\ x$ について考える

$$\underbrace{3}_{\text{係数}}abx^2$$

文字が 4 個掛けてあるので次数は 4

次数の大小は，「高い」「低い」で表されることが多い．たとえば，式 ab は，式 $4x$ よりも次数が「高い」．

【例題 71】 式 $3b^2$, $-5x^2y$, -6, $\dfrac{1}{3}xz$ について

1. それぞれ係数と次数を答えよ．
2. 一番次数の高い式，低い式をそれぞれ選べ．

B. 特定の文字に着目する

単項式において，特定の文字に着目することがある．このとき，その他の文字を数と同様に扱う．たとえば，単項式 $3abx^2$ では以下のようになる．

文字 x の単項式と考えた場合　$3abx^2 = (3ab)x^2$，次数は 2，係数は $3ab$

文字 a の単項式と考えた場合　$3abx^2 = (3bx^2)a$，次数は 1，係数は $3bx^2$

文字 x に着目する

$$\overbrace{3ab}^{\text{係数}}x^2$$

x 2個なので次数は 2

【例題 72】 以下のそれぞれについて，式 $3ka^4b^5$ の次数と係数を答えよ．

1. 文字 a の式と考えたとき
2. 文字 b の式と考えたとき
3. 文字 $a,\ b$ の式と考えたとき

[*34] ただし，単項式 0 については次数を考えない．
通常，次数が m の式と次数が n の式の積は次数 $m+n$ の式になるが，
単項式 0 の次数を考えると，この規則が成り立たなくなってしまう．

$$\underbrace{3ab}_{\text{次数は }2} \times \underbrace{2xyz}_{\text{次数は }3} = \underbrace{6abxyz}_{\text{次数は }5\ (=2+3)}$$

【練習 73：単項式の次数】

次の多項式について，[ ] 内の文字に着目したときの次数と係数を答えよ．

(1) $3x^4y^5$　[x], [y], [x と y]　　(2) $2abxy^2$　[x], [y], [x と y]

C. 累乗と指数法則

実数 a を n 個（$n \geqq 2$）掛け合わせた式 $\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}}$ は a^n で表され「a の n 乗」と読む．このとき，a の右上に書かれた数 n のことを**指数** (exponent) という．

a^2 のことを a の**平方** (square)，a^3 のことを a の**立方** (cube) といい，a, a^2, a^3, $\cdots$ を総称して a の**累乗** (power) という．

$$\underbrace{6 \times 6 \times 6 \times 6}_{4\text{ 個}} = 6^4 \quad \leftarrow \text{指数は 4}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{3\text{ 個}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \leftarrow \text{指数は 3}$$

累乗に関して，一般に次のような**指数法則** (exponential law) が成り立つ[*35]．

指数法則

m，n が自然数のとき一般に次のような性質が成り立つ．

i) $a^m a^n = a^{m+n}$　　ii) $(a^m)^n = a^{mn}$　　iii) $(ab)^n = a^n b^n$

この指数法則は，暗記するようなものではない．仕組みを理解して慣れよう．なお，「·」は掛け算を表す．たとえば，$4 \cdot 2x = 8x$ となる．今後，頻繁に用いられる記号なので覚えておこう．

i) $a^2 \times a^4 = (\underbrace{a \times a}_{2\text{ 個}}) \cdot (\underbrace{a \times a \times a \times a}_{4\text{ 個}}) = a^6 \ (= a^{2+4})$

ii) $(a^2)^4 = (\underbrace{a \times a}_{2\text{ 個}}) \cdot (\underbrace{a \times a}_{2\text{ 個}}) \cdot (\underbrace{a \times a}_{2\text{ 個}}) \cdot (\underbrace{a \times a}_{2\text{ 個}}) = a^8 \ (= a^{2\times4})$

iii) $(a \times b)^4 = \underbrace{(a \times b) \cdot (a \times b) \cdot (a \times b) \cdot (a \times b)}_{a\text{ も }b\text{ も 4 個ずつ}} = a^4 \times b^4$

【例題 74】 次の式を計算して簡単にせよ．

1. $x^2 \times x^3$　2. $(x^2)^3$　3. $(x^3)^5$　4. $(xy^2)^3$　5. $(2a^3)^2$　6. $(-a)^3$

[*35] 今のところ，指数は自然数だが，数学 II においては整数や有理数などへと拡張させていく．

2. 多項式

A. 多項式 — 複数の「項」の式

$2a-3b^2+ab$ のように，いくつかの単項式の和や差として表される式を**多項式** (polynomial) という（**整式** (integral expression) ともいう[*36]）．

多項式を構成する単項式を，**項** (term) という．特に，0 次の項のことを**定数項** (constant term) という．たとえば，多項式 $2a-3b^2-4+ab$ の項は，$2a, -3b^2, -4, ab$（または $+ab$）であり，定数項は -4 である．負の符号も含めて項ということに注意しよう[*37]．

B. 同類項をまとめる

多項式の項のうち，文字の部分が同じである項どうしを**同類項** (similar term) という．多項式の加法と減法は，同類項をまとめることによって行われる．

同類項

$$\begin{aligned}5a^2b+3ab+3-a^2b+2ab &= (5a^2b-a^2b)+(3ab+2ab)+3\\ &= 4a^2b+5ab\underbrace{+3}_{\text{定数項}}\end{aligned}$$

同類項

たとえば，$A=3x^2-2x+1$，$B=2x^2+7x-3$ のとき

多項式の加法

$$\begin{aligned}A+B &= (3x^2-2x+1)+(2x^2+7x-3)\\ &= 3x^2-2x+1+2x^2+7x-3\\ &= (3x^2+2x^2)+(-2x+7x)+(1-3)\\ &= 5x^2+5x-2\end{aligned}$$

←かっこをはずした→

←同類項をまとめた→

多項式の減法

$$\begin{aligned}A-B &= (3x^2-2x+1)-(2x^2+7x-3)\\ &= 3x^2-2x+1-2x^2-7x+3\\ &= (3x^2-2x^2)+(-2x-7x)+(1+3)\\ &= x^2-9x+4\end{aligned}$$

…… 同類項を縦に並べると，計算がしやすくなる．

$$\begin{aligned}A+B &= 3x^2-2x+1\\ &\quad +2x^2+7x-3\\ &= 5x^2+5x-2\end{aligned}\qquad \begin{aligned}A-B &= 3x^2-2x+1\\ &\quad -2x^2-7x+3\\ &= x^2-9x+4\end{aligned}$$

←かっこをはずし，同類項を縦に並べた

【例題 75】

1. $2ab+a^2c-3c-2a^2c$ の同類項をまとめ，項をすべて答え，定数項があれば答えよ．
2. $X=a^2+3a-5$，$Y=2a^2+3a+5$ のとき，$X+Y$，$X-Y$ を求めよ．

[*36] 「多項式」と「単項式」をまとめて「整式」と定める言い方もある．

[*37] 単項式は多項式の特別なものであり，「項が 1 つの多項式」が単項式であると言える．

【練習 76：指数法則】

次の計算をしなさい．

(1) $2a^3b \times (a^2)^2$　(2) $(4x^2y)^2 \times 2xy$　(3) $(3xy^3)^2 \times \dfrac{1}{3}xy^2$

(4) a の平方の立方は，a の何乗か．

C. 多項式の次数

多項式の次数は，各項の次数のうち最大のもので定義される．次数が n の多項式を，単に **n 次式** (expression of degree n) という．たとえば，$4a^2b+5ab$ は（a と b について）3 次式である（右図参照）．

$$\underbrace{\underset{\text{次数は }3}{4a^2b} + \underset{\text{次数は }2}{5ab}}_{\text{多項式の次数は（大きい方の）}3}$$

つまり 3 次式

D. 降べきの順 — 式が見やすいように

多項式の項を，次数が低くなる順に並べ替えることを，「**降べきの順** (descending order of power) に整理する」という[*38]．たとえば，多項式 $-3x^2-7+4x^3+x$ を（x について）降べきの順に整理してみよう．

$$\underbrace{\underset{2\text{次}}{-3x^2}\ \underset{0\text{次}}{-\ 7}\ \underset{3\text{次}}{+4x^3}\ \underset{1\text{次}}{+\ x}}_{\text{次数の大きさがばらばら}} = \underbrace{\underset{3\text{次}}{\mathbf{4x^3}}\ \underset{2\text{次}}{\mathbf{-\,3x^2}}\ \underset{1\text{次}}{\mathbf{+\ x}}\ \underset{0\text{次}}{\mathbf{-\ 7}}}_{\text{次数が順に低くなる}}$$

これによって式が見やすくなり，展開・因数分解・値の代入などがやりやすくなる．

今後は，降べきの順に整理する習慣をつけよう[*39]．

【例題 77】

1. 多項式 $3x^3-3x^2+1+x^3$ の同類項をまとめ，降べきの順に整理すると $\boxed{ア}$ となる．
この式の次数は $\boxed{イ}$ であり，項をすべて挙げると $\boxed{ウ}$，定数項は $\boxed{エ}$ である．
2. 多項式 $2x+3x^2-x^2-4x-5$ の同類項をまとめ，降べきの順に整理すると $\boxed{オ}$ となる．
この式の次数は $\boxed{カ}$ であり，項をすべて挙げると $\boxed{キ}$，定数項は $\boxed{ク}$ である．

[*38] 逆に，次数が高くなる順に整理することを「**昇べきの順** (ascending order of power) に整理する」という．たとえば，$-3x^2-7+4x^3+x=-7+x-3x^2+4x^3$ のようになる．ただし，高校ではあまり用いられない．

[*39] ただし，対称性をもつ $ab+bc+ca$ のような式は，例外として，降べきの順にする必要がないこともある．

E. 特定の文字でまとめる

多項式においても，特定の文字に着目し，他の文字を数とみなすことがある．

たとえば，多項式 $bx - ax^3y + y^2 + y$ について考えてみよう．

x について降べきの順に整頓したとき

$$\underset{1\text{次}}{bx} - \underset{3\text{次}}{ax^3y} + \underset{0\text{次}}{y^2 + y}$$

$$= \underbrace{\overbrace{-ay}^{\text{係数}}}_{} \underset{3\text{次}}{x^3} + \overbrace{b}^{\text{係数}} \underset{1\text{次}}{x} + \underset{0\text{次}}{\overbrace{(y^2 + y)}^{\text{定数項}}}$$

- 次数は 3（x について 3 次式）
- x^3 の係数は $-ay$，x の係数は b
- 定数項は $y^2 + y$

y について降べきの順に整頓したとき

$$\underset{1\text{次}}{-ax^3y} + \underset{0\text{次}}{bx} + \underset{2\text{次}}{y^2} + \underset{1\text{次}}{y}$$

$$= \underset{2\text{次}}{y^2} - \underset{1\text{次}}{ax^3y} + \underset{1\text{次}}{y} + \underset{0\text{次}}{bx}$$

$$= \underset{2\text{次}}{y^2} + \overbrace{(-ax^3 + 1)}^{\text{係数}} \underset{1\text{次}}{y} + \underset{0\text{次}}{\overset{\text{定数項}}{bx}}$$

- 次数は 2（y について 2 次式）
- y^2 の係数は 1，y の係数は $-ax^3 + 1$
- 定数項は bx

$-ax^3 + 1$ のように，定数項や係数が 2 つ以上の項からなる場合は，上のように（　）でまとめる．

【例題 78】 次の多項式を x について降べきの順に整理し，x^2 の係数，x の係数，定数項を答えよ．

1. $x^2 + 2y^2 - 3xy + 4y^2 + 2xy$　　2. $-x^2 + xy^2 - 3xy^2 + 2x^2$　　3. $3x^2 - 12xy + 4 + 3x^2 - 2x + 5$

【練習 79：降べきの順】

(1) $4a^2 + a^3 - 3 + a^2 - 1$ を整理し，降べきの順に整理しなさい．また，この式は何次式か．

(2) 次の多項式について，[ ] 内の文字に着目して降べきの順に並べ，式の次数，定数項を答えよ．

1) $2cb - 3a - 2c^2a$ [c]　　2) $3k^2x + 2kx^2 + 4kx + 4k - 3$ [x]

F. 分配法則，交換法則，展開

分配法則 $A(B + C) = AB + AC$，$(A + B)C = AC + BC$，交換法則 $AB = BA$ は多項式においても成立する．たとえば，これを使って $(x^2 + 3)(x^2 - 4x + 5)$ は次のように計算する．

$$
\begin{aligned}
(x^2+3)(x^2-4x+5) &= (x^2+3)A && \leftarrow x^2-4x+5 \text{ を } A \text{ とおいた}\\
&= x^2A + 3A && \leftarrow \text{分配法則 } (A+B)C = AC+BC \text{ を使った}\\
&= x^2(x^2-4x+5) + 3(x^2-4x+5) && \leftarrow A \text{ を } x^2-4x+5 \text{ に戻した}\\
&= x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 12x + 15 && \leftarrow \text{分配法則 } A(B+C) = AC+BC \text{ を使った}\\
&= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 15 && \leftarrow \text{同類項でまとめ降べきの順に並べた}
\end{aligned}
$$

ここでは，$x^2 - 4x + 5$ を A とおいて計算した．結果的に，1つの多項式を1つの文字のようにして扱ったことになる．この見方は今後，極めて重要となる．

ただし上の計算については，慣れてくると，左下のように計算できるようになる．

$$
\begin{aligned}
(x^2+3)\ (x^2-4x+5) &= \overset{①}{x^4} - \overset{②}{4x^3} + \overset{③}{5x^2} + \overset{④}{3x^2} - \overset{⑤}{12x} + \overset{⑥}{15}\\
&= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 15
\end{aligned}
$$

	x^2	$-4x$	5
x^2	x^4 ①	$-4x^3$②	$5x^2$③
3	$3x^2$④	$-12x$⑤	15 ⑥

表の①, ②, ··· は，左の式の①, ②, ··· に対応している．

このように，「多項式どうしの積[*40]を計算して，単項式だけの和にすること」を**展開** (expansion) **する**という．0 でない 2 つの多項式について，次数が m の式と次数が n の式の積を展開すると，次数 $m + n$ の多項式になる．

[*40] 多項式の除法は数学 II で学ぶ．

【練習 80：展開の基礎〜その１〜】

A が次の式のとき，$(3x+y)A$ を展開し，x についての降べきの順に整理しなさい．

(1) $A = x + y$　(2) $A = 2x^2 - 3x + 5$　(3) $A = 2x - 6y + 1$

【練習 81：展開の基礎〜その２〜】

$A = 2x + y$, $B = 3x - 2y - 1$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) 積 AB を展開し，x についての降べきの順に整理しなさい．

(2) 積 AB の x の係数が 3 に等しいとき，y の値を求めなさい．

1. 多項式の乗法の公式

今後出てくる公式については，掛け算の九九のようなものだと思って繰り返し練習しよう．慣れてくると多項式の展開が格段に速く正確になる．

A. 中学の復習

左の「i) うまい計算のやり方（○）」で，反射的にできるように復習しよう．

平方の公式

1° $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(3x+2)^2 = \underbrace{9x^2 + 2\cdot(3x)\cdot 2 + 4}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 9x^2 + 12x + 4$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(3x+2)^2 = (3x+2)(3x+2)$$
$$= 9x^2 + 6x + 6x + 4$$
$$= 9x^2 + 12x + 4$$

和と差の積の公式

2° $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(5x+2y)(5x-2y)$$
$$= \underbrace{(5x)^2 - (2y)^2}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 25x^2 - 4y^2$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(5x+2y)(5x-2y)$$
$$= 25x^2 - 10xy + 10yx - 4y^2$$
$$= 25x^2 - 4y^2$$

1 次式の積の公式〜特殊形

3° $(x+b)(x+d) = x^2 + (b+d)x + bd$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(x+3y)(x-4y)$$
$$= \underbrace{x^2 + (3y-4y)x + (3y)\cdot(-4y)}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= x^2 - xy - 12y^2$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(x+3y)(x-4y)$$
$$= x^2 - 4xy + 3yx - 12y^2$$
$$= x^2 - xy - 12y^2$$

【例題 82】 以下の展開をしなさい．ただし，4. 以降は $A = x - 3,\ B = x + 3,\ C = x - 1$ とする．

1. $(a+4)^2$　2. $(x+2y)(x-2y)$　3. $(p+2)(p-4)$　4. A^2　5. AB　6. AC

B. 1 次式の積の一般的な公式

$(ax+b)(cx+d)$ を展開すると

$$(ax+b)(cx+d) = \overset{①}{acx^2} + \overset{②}{adx} + \overset{③}{bcx} + \overset{④}{bd} \qquad = acx^2 + \underbrace{(ad+bc)}_{\text{外どうしの積＋中どうしの積}}x + bd$$

	cx	d
ax	acx^2	adx
b	bcx	bd

となる．これを使い，たとえば $(2x+3y)(5x-4y)$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（○）

$$\begin{aligned}&(2x+3y)(5x-4y)\\ &= \underbrace{10x^2 + (-8y+15y)x + (3y)\cdot(-4y)}_{\text{慣れると省略できる}}\\ &= 10x^2 + 7xy - 12y^2\end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$\begin{aligned}&(2x+3y)(5x-4y)\\ &= 10x^2 - 8xy + 15yx - 12y^2\\ &= 10x^2 + 7xy - 12y^2\end{aligned}$$

1 次式の積の公式〜一般形

4°　$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

この公式の $(ad+bc)$ の部分は「（外どうしの積（ad））＋（中どうしの積（bc））」と覚えるとよい．

【例題 83】 次の多項式を展開し整理せよ．

1. $(x+2)(2x+1)$　2. $(2x+3)(3x-2)$　3. $(5x-3y)(2x-y)$　4. $(3x-y)(2x+3y)$

【練習 84：1 次式の積の公式】

次の多項式を展開しなさい.

(1) $(x+1)(x+2)$　(2) $(x+4)(2x-3)$　(3) $(4x+3)(x-3)$　(4) $(3x-1)(x-3)$

(5) $(x+2y)(x-3y)$　(6) $(3x+y)(4x-y)$　(7) $(2x+5y)(3x-y)$　(8) $(2x-y)(5x+y)$

「外どうしの積＋中どうしの積」を暗算でできるようにしよう.

C. 展開公式のまとめ

最も大事なことは,「いつ, どの展開公式を使うのか」見極めることである.

【練習 85：多項式の展開の練習〜その１〜】

次の多項式を展開せよ.

(1) $(2x-5y)(2x+5y)$　(2) $(x+5)(x-8)$　(3) $(2x+1)(x-3)$

(4) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)^2$　(5) $(3a-2)(4a+1)$　(6) $(a-4)(3a+12)$

(7) $(a^2-3)(a^2+7)$　(8) $\left(3a-\frac{1}{2}b\right)^2$　(9) $(-2ab+3c)(2ab+3c)$

D.　分母の有理化

分母に根号（$\sqrt{\quad}$）をもつ分数において，分母の根号を無くし，有理数に変えることを，分母の**有理化** (rationalization) という[*41].

$$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3\left(\boldsymbol{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\boldsymbol{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)}$$

← 分母と分子に $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ を掛ける

$$= \frac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$$

← 『和と差の積の公式』(p.50)

【例題 86】　以下の分数の分母を有理化しなさい．

1. $\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　　2. $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$　　3. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$　　4. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$　　5. $\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}$

[*41] これによって，近似値を求めやすくなる．下の例でいえば（$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.414$，$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.732$ とする）

$$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \fallingdotseq 3 \div (1.732-1.414) = 3 \div 0.318, \qquad 3\sqrt{3}+3\sqrt{2} \fallingdotseq 3 \times (1.732+1.414) = 3 \times 3.146$$

2. 展開の工夫

1.『多項式の乗法の公式』で学んだ公式を工夫して用いると，複雑な式の計算がかなり容易にできるようになる．ここでは，代表的な 2 つの工夫の方法を取り上げる．

A. 式の一部をまとめる

多項式の一部を 1 つの文字とおくと，今までの公式がより広く使える．たとえば

$$
\begin{aligned}
(x+y+3)(x+y-2) &= (M+3)(M-2) && \leftarrow M=x+y \text{ とおき，式の一部を一つの文字とみなす}\\
&= M^2+M-6 && \leftarrow \text{『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.50)}\\
&= (x+y)^2+(x+y)-6 && \leftarrow M \text{ を } x+y \text{ に戻す}\\
&= x^2+2xy+y^2+x+y-6 && \leftarrow \text{『平方の公式』(p.50)}
\end{aligned}
$$

のように展開できる．

次に，$(x+y-z)(x-y+z)$ の展開を考える．$-y+z=-(y-z)$ に注意して，次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
(x+y-z)(x-y+z) &= \{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\} && \leftarrow -y+z=-(y-z)\\
&= (x+A)(x-A) && \leftarrow A=y-z \text{ とおき，式の一部を 1 つの文字とみなす}\\
&= x^2-A^2 && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』(p.50)}\\
&= x^2-(y-z)^2 && \leftarrow A \text{ を } y-z \text{ に戻す}\\
&= x^2-(y^2-2yz+z^2) && \leftarrow \text{『平方の公式』(p.50)}\\
&= x^2-y^2+2yz-z^2 && \leftarrow \text{符号に注意して ( ) を外す}
\end{aligned}
$$

【例題 87】 次の多項式を展開せよ．

1. $(x+y-5)(x+y+3)$　　2. $(x+y+z)(x+y-z)$　　3. $(a^2+a-1)(a^2-a-1)$

慣れるまでは，式の一部や共通部分を A や X などでおきかえよう．そして最終的には，前の例題のようにおきかえずにできるようになろう．

B. 3 項の平方の公式

式の一部をまとめることによって，$(a+b+c)^2$ の展開は次のようにできる．

$$(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \qquad \leftarrow a+b \text{ をまとめて考えて『平方の公式』(p.50)}$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ca + 2bc + c^2 \qquad \leftarrow \text{『平方の公式』(p.50)}$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \qquad \leftarrow \text{この順番にすると式が見やすい}$$

であるから，$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ が成り立つ．

この展開の結果は，3 項の平方の公式とよばれ，たとえば $(2x+y-3)^2$ は次のように計算できる．

i) うまい計算のやり方（○）

$$(2x+y-3)^2$$
$$= \underbrace{(2x)^2 + y^2 + 3^2 + 2\cdot 2xy + 2\cdot y(-3) + 2\cdot(-3)2x}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy - 6y - 12x$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(2x+y-3)^2$$
$$= (2x+y-3)(2x+y-3)$$
$$= 4x^2 + 2xy - 6x + 2yx + y^2 - 3y - 6x - 3y + 9$$
$$= 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy - 6y - 12x$$

3 項の平方の公式

7° $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

【例題 88】 次の多項式を展開せよ．

1. $(3a-b+3c)^2$
2. $(a^2+a-1)^2$

C. 掛け算の順序の工夫

$14 \times 16 \times 5$ の計算は，$14 \times (16 \times 5) = 14 \times 80$ とすると楽にできる．

多項式の展開においても，掛け算の順序を考えると計算が楽にできることがある．

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(a^2+b^2)(a-b) && \leftarrow \text{前から順に計算するととても大変}\\
=\ &(a+b)(a-b)(a^2+b^2) && \leftarrow (a-b) \text{ は } (a+b) \text{ と相性がいい}\\
=\ &(a^2-b^2)(a^2+b^2) && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』(p.50)}\\
=\ &a^4-b^4 && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』(p.50)}
\end{aligned}
$$

p.44 で学んだ $A^2B^2 = (AA)\cdot(BB) = (AB)\cdot(AB) = (AB)^2$ も重要な働きをする．

$$
\begin{aligned}
&(x+1)^2(x-1)^2 && \leftarrow (x+1)(x-1) \text{ を 2 回掛けることと同じ}\\
=\ &\{(x+1)(x-1)\}^2 &&\\
=\ &(x^2-1)^2 && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』(p.50)}\\
=\ &x^4-2x^2+1 && \leftarrow \text{『平方の公式』(p.50)}
\end{aligned}
$$

掛け算の順序を工夫して，共通する式を作ることができる場合もある．

$$
\begin{aligned}
&(x+1)(x+3)(x-2)(x-4) && \leftarrow +1-2 \text{ も } +3-4 \text{ も同じ結果になることに注目}\\
=\ &\{(x+1)(x-2)\}\{(x+3)(x-4)\} && \leftarrow \text{掛け算の順番を入れ替えた}\\
=\ &(x^2-x-2)(x^2-x-12) && \leftarrow x^2-x \text{ が共通している}\\
=\ &\left\{(x^2-x)-2\right\}\left\{(x^2-x)-12\right\} &&\\
=\ &(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24 && \leftarrow x^2-x \text{ について展開した}\\
=\ &(x^4-2x^3+x^2)-14x^2+14x+24 && \leftarrow (x^2-x)^2 \text{ の展開でミスをしないように}\\
=\ &x^4-2x^3-13x^2+14x+24 && \leftarrow \text{同類項をまとめた}
\end{aligned}
$$

【例題 89】 次の多項式を展開せよ．

1. $(x-1)(x-3)(x+3)(x+1)$　　2. $(a+b)^2(a-b)^2$　　3. $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)$

【㊤㊥ 90：多項式の展開の練習～その２～】

次の多項式を展開せよ．

① $(a-2)(a+2)(a^2+4)(a^4+16)$

② $(2a-b+c)(2a+b+c)$

③ $(x+y+z+w)(x+y-z-w)$

④ $(x-4)^2(x+5)^2$

⑤ $(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2$

⑥ $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

1. 多項式の因数 — 因数分解の基礎

A. 因数と因数分解

1 つの多項式 A が，多項式 B，C，$\cdots$ の積で書けるとき，B や C を，A の**因数** (factor) という[*42].

1 つの多項式 A を複数の因数に分解することを A の**因数分解** (factorization) という．特に断りがなければ，係数が整数の範囲でそれ以上分解できない形まで因数分解する[*43].

$$
\begin{aligned}
2a^2 - 4ab &= 1 \cdot \underline{(2a^2 - 4ab)} \\
&= \underline{2} \cdot \underline{(a^2 - 2ab)} \\
&= \underline{2a} \cdot \underline{(a - 2b)} \\
&= \underline{2} \cdot \underline{a} \cdot \underline{(a - 2b)}
\end{aligned}
$$

～～ のあるものは，全て $2a^2 - 4ab$ の因数

因数は，整数における「約数」にほぼ対応する．

B. 共通因数

多項式において，各項に共通する因数を**共通因数** (common factor) という．

多項式の各項に共通因数があれば，まず，それをかっこの外にくくり出す[*44]．共通因数をくくり出すことは，因数分解において最も基本的，同時に最も重要な手段である．

$$
\begin{aligned}
2x^2y + 3xy^2 + xy &= 2x\underbrace{(xy)}_{\text{共通}} + 3y\underbrace{(xy)}_{\text{の}} + 1\underbrace{(xy)}_{\text{因数}} \\
&= xy(2z + 3y + 1)
\end{aligned}
$$

$$
3a\underbrace{(x + y)}_{\text{共通の}} + 2b\underbrace{(x + y)}_{\text{因数}} = (3a + 2b)(x + y)
$$

【例題 91】 次の式を因数分解せよ．

1. $2p^2q + pq^3 - 2pq$
2. $a(x + y) - b(x + y)$
3. $p(2x - y) + q(y - 2x)$

[*42] ただし，多項式 1 は因数に含めない．

[*43] 「素数」の役割をする多項式は高校数学では扱われないためではあるが，本来は「素因数分解」と言うべきである．

[*44] 共通しない部分を括弧でくくり，共通する因数をその外に出すため，この動詞が頻繁に使われる．この操作は，分配法則の逆の操作であり，左にくくり出しても，右にくくり出してもよい．

【練習 92：共通因数による因数分解】

次の式を因数分解せよ．

(1) $6a^2b + 4ab^2 - 2ab$　　(2) $x(s + 2t) - y(s + 2t)$　　(3) $3a(x - y) + 6b(x - y) + 9c(y - x)$

C. 因数分解の目的

たとえば，2002 と $2 \times 7 \times 11 \times 13$ は同じ数を表わすが，この 2 つの表し方にはそれぞれ長所がある．

まず，2002 という表現は，個数や大きさを表すのに適している．だから，私たちは「$(2 \times 7 \times 11 \times 13)$ 個のりんご」とは言わず「2002 個のりんご」と言う．一方，$2 \times 7 \times 11 \times 13$ という表現は 2002 という数のもつ約数についての性質（たとえば，「13 で割り切れる」など）をよく表しており，時に有用である．

式においても同様に，等しい 2 つの式 $3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)(x - 1)$ のそれぞれに長所がある．

$3x^2 - 5x + 2$ は

- 何次式かがわかりやすい
- 平方完成[*45]や，微分・積分がしやすい[*45]

$(3x - 2)(x - 1)$ は

- 方程式・不等式が解きやすい[*46]
- 因数が見やすい

つまり，どちらの形にも長所があり，場合に応じて使い分けられないといけない．そのために，展開・因数分解どちらの操作も，手早く正確にできなければならない．

$(3x - 2)(x - 1) \to 3x^2 - 5x + 2$ の操作（展開）

$3x^2 - 5x + 2 \to (3x - 2)(x - 1)$ の操作（因数分解）

[*45] 平方完成は数学 I で，微分・積分は数学 II で学ぶ．

[*46] 2 次方程式・不等式は数学 I で学ぶ．数学 II 以降でも，様々な方程式・不等式を学ぶ．

2. 多項式の因数分解の公式

共通因数が無くても，展開の公式を逆に使えば因数分解をできるときがある．

A. 中学の復習

$9x^2+6xy+y^2$ には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

$$\begin{aligned}9x^2+6xy+y^2 &= (3x)^2+2\cdot(3x)\cdot y+y^2\\ &= (3x+y)^2\end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned}(3x+y)^2 &= (3x)^2+2\cdot(3x)\cdot y+y^2\\ &= 9x^2+6xy+y^2\end{aligned}$$

平方の公式 (p.50) の逆利用

1° $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,　　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$16a^2-b^2$ には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

$$\begin{aligned}16a^2-b^2 &= (4a)^2-b^2\\ &= (4a+b)(4a-b)\end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned}(4a+b)(4a-b) &= (4a)^2-b^2\\ &= 16a^2-b^2\end{aligned}$$

$\bigcirc^2-\triangle^2$ の形を見たら因数分解，とすぐに気付けるようになろう．

和と差の積の公式 (p.50) の逆利用

2° $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

x^2+5x+6 には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

x^2+5x+6　　← 足して 5，掛けて 6 になる数は？

$=x^2+(2+3)x+2\cdot3$　　$6=1\times6\to$ 和は $7(\times)$
　　$6=2\times3\to$ 和は $5(\bigcirc)$

$=(x+2)(x+3)$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned}&(x+2)(x+3)\\ &= x^2+(2+3)x+2\cdot3\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

1 次式の積の公式 (p.51) の逆利用

3° $x^2+(b+d)x+bd=(x+b)(x+d)$

【練習 93：因数分解の練習】

次の式を因数分解せよ．

(1) x^2+6x+9 (2) $4x^2-12xy+9y^2$ (3) a^2-9 (4) $4x^2-25y^2$

(5) x^2-6x+8 (6) $a^2+3ab-18b^2$ (7) a^4+4a^2+4 (8) a^4-1

(9) $x^2-(a-b)^2$ (10) $4x^2-9(a-b)^2$ (11) $(a-b)^2+10(a-b)+21$

$\cdots$ 自分の実行した因数分解が正しいかどうかは，展開によって確認できる．

B. 『1 次式の積の公式〜一般形』(p.51) を逆に利用した因数分解

$3x^2+14x+8$ の因数分解を考えてみよう．

i) 因数分解

$$\begin{aligned} &3x^2+14x+8\\ =&(1\cdot 3)x^2+(1\cdot 2+4\cdot 3)x+2\cdot 4\\ =&(x+4)(3x+2)\end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned} &(x+4)(3x+2)\\ =&(1\cdot 3)x^2+(1\cdot 2+4\cdot 3)x+2\cdot 4\\ =&3x^2+14x+8\end{aligned}$$

この $(x+4)$ と $(3x+2)$ を見つけるには，次のようなたすきがけと呼ばれる方法を用いる．
たすきがけは，下のように行われる．

$$\begin{array}{lcccccc} \text{上の段}\to & 1 & & 4 & \to & 12 \\ \text{下の段}\to & 3 & \times & 2 & \to & 2 \\ \hline & & & & & \mathbf{14} & \bigcirc \end{array}$$

$$3x^2+\mathbf{14}x+8 = \underbrace{(x+4)}_{\text{上の段の }1,4}\underbrace{(3x+2)}_{\text{下の段の }3,2}$$

x^2 の係数3は
1×3しかない

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & & ? & \to & ? \\ \mathbf{3} & \times & ? & \to & ? \\ \hline & & & & 14 \text{ にしたい} \end{array}$$

定数項の8は，1×8，2×4，4×2，8×1のどれか（$(-1)\times(-8)$ などは考えなくて良い）

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \to & 3 \\ 3 & \times & 8 & \to & 8 \\ \hline & & & & 11\ \times \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & \to & 6 \\ 3 & \times & 4 & \to & 4 \\ \hline & & & & 10\ \times \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & & \mathbf{4} & \to & 12 \\ 3 & \times & \mathbf{2} & \to & 2 \\ \hline & & & & \mathbf{14}\ \bigcirc \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & & 8 & \to & 24 \\ 3 & \times & 1 & \to & 1 \\ \hline & & & & 25\ \times \end{array}$$

初めのうちは試行錯誤が必要だが，慣れてくると 2 つ目くらいの表でできるようになる．コツをつかむには，係数を「1×　」にするかどうか，奇数・偶数を考える，の２点に注意すると良い．

【例題 94】 次の式を因数分解せよ．

1. $2x^2+3x+1$
2. $4x^2+5x+1$
3. $5a^2+7ab+2b^2$

次に，$6x^2 + x - 12$ の因数分解を考えてみよう．

x^2 の係数6は 1×6 か？

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \times & ? & \to & ? \\ \mathbf{6} & & ? & \to & ? \\ \hline & & & & 1 \end{array}$$
にしたい

x^2 の係数6は 2×3 か？

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{2} & \times & ? & \to & ? \\ \mathbf{3} & & ? & \to & ? \\ \hline & & & & 1 \end{array}$$
にしたい

定数項の−12は，1×12，2×6，3×4 のどちらかにマイナス（−）を付けたもの

1 という小さな値にするには，1×12 では適さないと予想できる[*47]．

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 3 & \to & 18 \\ 6 & & -4 & \to & -4 \\ \hline & & & & 14 \end{array} \times$$

*47全然ダメ↑↑

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 4 & \to & 12 \\ 3 & & -3 & \to & -6 \\ \hline & & & & 6 \end{array} \times$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & -3 & \to & -9 \\ 3 & & 4 & \to & 8 \\ \hline & & & & -1 \end{array} \times$$

符号だけ違う↑↑

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & \mathbf{3} & \to & 9 \\ 3 & & \mathbf{-4} & \to & -8 \\ \hline & & & & \mathbf{1} \end{array} \bigcirc$$

一つ左を符号だけ変えた

よって，$6x^2 + x - 12 = (2x + 3)(3x - 4)$ になる．

【例題 95】 次の式を因数分解せよ．

1. $2x^2 + 9x - 5$
2. $12a^2 + 7a - 12$
3. $4x^2 + 23x - 6$
4. $8x^2 - 10xy + 3y^2$

1 次式の積の公式 (p.51) の逆利用

4° $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

【練習 96：1 次式の積の公式】

次の式を因数分解しなさい．

(1) $5x^2 + 11x + 6$　(2) $6x^2 - x - 15$　(3) $7x^2 - 16x + 4$　(4) $9a^2b - 12ab - 12b$

[*47] 「$1\times\bigcirc$」を含むたすきがけをした結果は，値が極端に大きく（正の数）なったり小さく（負の数）なったりすることが多い．そのため，$6x^2 + x - 12$ のように x の係数が 0 に近い場合は「1×6」「1×12」を考える優先順位は低い．

C. 因数分解の公式のまとめ

最も大事なことは,「いつ, どの因数分解を使うのか」見極めることである.

【練習 97：因数分解の練習〜その１〜】

次の式を因数分解せよ.

(1) $a^2 - 14ab + 49b^2$　(2) $2x^2 - x - 3$　(3) $2ax^2 - 5ax + 3a$　(4) $3b^2 - 27c^2$

(5) $3x^3 - 8x^2 - 3x$　(6) $2a^4 - 32$　(7) $x^8 - 1$　(8) $5(x+y)^2 - 8(x+y) - 4$

(9) $(a+b)^2 + 10c(a+b) + 25c^2$

D. 発展 2 重根号

$\sqrt{5}$ は「2 乗して 5 になる正の数」を表す．同じように，$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ は「2 乗して $8+2\sqrt{15}$ になる正の数」を表す．このように，根号の中に根号がある状態を **2 重根号** (double radical sign) という．

一部の 2 重根号は外すことができる．たとえば，$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$ である．実際

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2 = 5+2\sqrt{15}+3 = 8+2\sqrt{15}$$

なので，「2 乗して $8+2\sqrt{15}$ になる正の数」は $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ であると分かる．

【例題 98】 次の中から，$\sqrt{6+2\sqrt{5}}$, $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ に一致するものをそれぞれ選べ．

a. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$　　b. $2+\sqrt{3}$　　c. $\sqrt{5}+1$　　d. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

$a>0$, $b>0$ のとき，$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab}$ であり，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ であるから

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

である．よって，$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ を外すには，足して 8，掛けて 15 になる 2 数 a, b を探せばよい．

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot 3}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$$

また，$\boldsymbol{a>b}>0$ のとき，$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab}$ であり，$\boldsymbol{\sqrt{a}-\sqrt{b}>0}$ であるから

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

つまり，2 重根号 $\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}$ を外すには，「足して x，掛けて y となる 2 つの数」を探せばよい．

【練習 99：2 重根号を外す〜その１〜】

2 重根号 $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$, $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$, $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$, $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ を外せ．

【発展 100：2 重根号を外す〜その２〜】

次の 2 重根号を外せ．

① $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$　　　② $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

2 重根号を外すには，まず $\sqrt{}$ の中に $2\sqrt{}$ を作るように考える．

3. 難度の高い因数分解

共通因数も無く，どの公式にも当てはまらない場合も，工夫次第で因数分解ができることがある．

A. 共通因数が見つけにくい多項式の因数分解

$ax+ay-x-y$ という式には，共通因数も無く，どの公式にも当てはまらないが，

$$
\begin{aligned}
&ax+ay-x-y \\
&=a(x+y)-x-y && \leftarrow \text{前２つで } a \text{ が共通するのでまとめてみる} \\
&=a(x+y)-(x+y) && \leftarrow \text{残りもまとめてみたら，} x+y \text{ が共通因数になった} \\
&=(a-1)(x+y) && \leftarrow -(x+y)=(-1)\times(x+y) \text{ であることに注意！}
\end{aligned}
$$

のようにして，「共通因数を見つけて」因数分解ができる．もう 1 つ例を挙げよう．

$$
\begin{aligned}
&m^2+2m-n^2-2n && \leftarrow \text{前２つでまとめるとうまくいかないので} \\
&=(m^2-n^2)+2m-2n && \leftarrow \text{この２つでまとめてみる} \\
&=(m+n)(m-n)+2(m-n) && \leftarrow m-n \text{ が共通因数になった} \\
&=(m+n+2)(m-n) && \leftarrow m-n=X \text{ とおくと } \{(m+n)+2\}\ X \text{ になる}
\end{aligned}
$$

数をこなしていくと，共通因数を見つけるのがうまくなる．というのも「どの因数でまとめられるか」少しずつ予想ができるようになるからである．

【練習 101：4 項の因数分解】

次の式を因数分解せよ．

(1) $ab + ac + b + c$　(2) $mn + 2m - n - 2$　(3) $a^2 - 5a + 5b - b^2$

B. 次数の小さい文字に着目する

共通因数が見つからないときは，最も次数の低い文字に着目し，降べきの順に整理しよう．それによって，共通因数が見えてくることが多い[*48]．たとえば，次のようになる．

$$\begin{aligned}
& a^2 + ab - 3a + b - 4 && \leftarrow a \text{ については2次式，} b \text{ については1次式} \\
&= (a+1)b + a^2 - 3a - 4 && \leftarrow \text{次数の低い } b \text{ について，降べきの順に整頓} \\
&= (a+1)b + (a-4)(a+1) && \leftarrow \text{定数項を因数分解したら，} a+1 \text{ が共通因数になった} \\
&= (a+1)(a+b-4) && \leftarrow b+a-4 \text{ は順番を入れ替えておこう}
\end{aligned}$$

【練習 102：次数の低い文字に着目する】

次の式を因数分解せよ．

(1) $a^2 + ab + bc + ca$　(2) $x^2 - 2xy + 2y - 1$　(3) $x^2 + 2xy + 3x + 4y + 2$

[*48] もっとも次数の低い文字でまとめると，最高次の係数に共通因数が出てくることが多いからである．

C. 複 2 次式の因数分解

ax^4+bx^2+c という形の多項式を**複 2 次式** (biquadratic expression) という．ただし，$a \neq 0$ とする．
例として，次の 2 つの複 2 次式の因数分解についてみてみよう．

i) x^4-13x^2+36 の因数分解
この複 2 次式は，$x^2=X$ とおくと，$X^2-13X+36=(X-4)(X-9)$ であるから

$$\begin{aligned} x^4-13x^2+36 &= (x^2-4)(x^2-9) \\ &= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

ii) x^4+2x^2+9 の因数分解
この複 2 次式は，$x^2=X$ とおいても，X^2+2X+9 となるだけで因数分解が進まない．
そこで，x^4 と 9 に着目すると，うまく因数分解できる．

$$\begin{aligned} & x^4+2x^2+9 \\ &= x^4+6x^2+9-4x^2 && \Leftarrow 2x^2=6x^2-4x^2 \text{ と変形し，平方の形が作れるようする} \\ &= \underbrace{(x^2+3)^2}_{\text{平方の形にする}} -(2x)^2 && \Leftarrow \bigcirc^2-\triangle^2 \text{ の形} \\ &= \left\{(x^2+3)+2x\right\}\left\{(x^2+3)-2x\right\} = (x^2+2x+3)(x^2-2x+3) \end{aligned}$$

複 2 次式の因数分解

複 2 次式 ax^4+bx^2+c の因数分解には，次の 2 つの場合がある．
i) $x^2=X$ とおくことにより因数分解できる場合
ii) ax^4 と c に着目し，bx^2 の項を変形して因数分解できる場合

i) の方法でうまくいかない場合に，ii) の方法を試すと覚えておくとよい．

【例題 103】 次の式を因数分解せよ．
1. x^4+7x^2-8
2. x^4+x^2+1

D.　2 文字 2 次式の因数分解

降べきにしても共通因数が見つけられない場合でも，2 次式の場合は『1 次式の積の公式の逆利用』(p.62) を使って因数分解できることがある．

たとえば，$2x^2+5xy+3y^2+2x+4y-4$ という式の因数分解について考えてみよう．

まず，これを x について降べきの順に整理する．

$2x^2+(5y+2)x+3y^2+4y-4$

今までのように共通因数を作ることはできない．そこで，x を含まない項について因数分解する．

$2x^2+(5y+2)x+(3y-2)(y+2)$

『1 次式の積の公式の逆利用』(p.62) のときと同じように，たすき掛けをする．

x^2 の係数 2 は
1 × 2 しかない

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \times & ? & \to & ? \\ \mathbf{2} & & ? & \to & ? \\ \hline & & & & 5y+2 \end{array}$$
にしたい

$\Longrightarrow$

定数項は（3y − 2）×（y + 2）か（y + 2）×（3y − 2）のどちらか

$\{-(3y-2)\}\times\{-(y+2)\}$ などは，y の係数が合わず不適

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 3y-2 & \to & 6y-4 \\ 2 & & y+2 & \to & 2y+4 \\ \hline & & & & 8y \end{array} \quad \times$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & \boldsymbol{y+2} & \to & 2y+4 \\ 2 & & \boldsymbol{3y-2} & \to & 3y-2 \\ \hline & & & & \boldsymbol{5y+2} \end{array} \quad ○$$

こうして，$(2x+3y-2)(x+y+2)$ と因数分解できることが分かる．

上のたすきがけの表を作るコツは，「ひとまず y の係数だけ考えること」にある．

【例題 104】 次の式を因数分解せよ．

1. $x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$
2. $2x^2-y^2-xy+3x+3y-2$

E. いろいろな因数分解

どの因数分解の手段を用いるかどうかは，だいたい次の優先順位で考えるとよい．方針がわからないときは，ひとまずこの順序で考えてみよう．

(1) 共通因数を見つける
(2) 次数の小さい文字に注目し，降べきの順に並べる．
(3) 公式を使えないか考える

【練習 105：因数分解の練習〜その２〜】

(1) 次の式を因数分解せよ．

1. $xy - x - y + 1$
2. $a^2 + b^2 + ac - bc - 2ab$
3. $a^4 + a^2b^2 + b^4$
4. $x^2 - xy - 12y^2 + 5x + y + 6$

(2) 発展 次の式を因数分解せよ．

1. $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$
2. $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$
3. $a^4 + 64$
4. $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 4x + 7y - 2$
5. $(x^2 - 2x - 2)(x^2 - 2x - 6) - 12$

4. 式の値の計算

A. $x+y$, xy, $x-y$ の値を利用する

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ を変形して，等式 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ を得る．

この等式を用いると，x, y が一部の符号しか異ならないときの計算を，簡単にできることがある．

たとえば，$x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ のとき，$x+y=4$, $x-y=2\sqrt{3}$, $xy=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=1$ である．これを用いて，x^2+y^2, x^2y-xy^2 の値は次のように計算できる．

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ &= 4^2-2\cdot 1 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3y-xy^3 &= xy(x^2-y^2) \\ &= xy(x+y)(x-y) = 1\cdot 4\cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

【例題 106】

1. $x=\sqrt{6}+\sqrt{3}$, $y=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ のとき，以下の値を計算しなさい．
   1) $x+y$　2) xy　3) $x-y$　4) x^2+y^2　5) $x^4y^2-x^2y^4$
2. $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ のとき，以下の値を計算しなさい．
   1) $x+y$　2) xy　3) $x-y$　4) x^2-y^2　5) x^4+y^4

B. 発展 因数分解と式の値

因数分解には，式の因数を見えるようにする長所があった．この長所を生かせば，文字の値を整数や自然数に限った次のような問題を解くことができる．

【発展 107：因数分解と式の値】

① 多項式 $F = ab - 3a + 2b - 6$ について，次の問いに答えなさい．

i. F を因数分解しなさい．

ii. $F = 6$ を満たす自然数 $(a,\ b)$ の組をすべて求めなさい．

② $mn + 2m - n = 3$ を満たす整数 $(m,\ n)$ の組をすべて求めなさい．

1B.4 1次不等式

2つの数が等しいことは等号(=)を使った等式で表されるように，2つの数の間の大小は，不等号(> や ≦ など)を使って表される．

1. 不等式の性質

A. 不等号とその読み方

2つの数の大小関係は，**不等号** (a sign of inequality) を用いて表される．たとえば，「2より3の方が大きい」ことは $2 < 3$ と表される．

	読み方[*49]	意味
$a < b$	a は b より小さい（a は b 未満である）	
$a \leqq b$	a は b 以下である	$a < b$ または $a = b$
$a > b$	a は b より大きい	
$a \geqq b$	a は b 以上である	$a > b$ または $a = b$

「〜以○」は等号ありの不等号，「〜より○○○」「〜未満」は等号なしの不等号と理解できる．

B. 不等式とは何か

たとえば「ある数 a を2倍してから3を加えた数は，4より大きい」ことは

$$2a + 3 > 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

と不等号を用いて表すことができる．① のように，2つの式の大小関係を不等号を使って表したものを**不等式** (inequality) という．

等式の場合と同じように，不等号の左側にある式を**左辺** (left side)，右側にある式を**右辺** (right side)，左辺と右辺をあわせて**両辺** (both sides) という．①の左辺は $2a + 3$，右辺は4である．

【例題 108】 次の文章を不等式で表せ．また，その左辺，右辺を答えよ．
1. 「a と3の和は，b の2倍以上」
2. 「x の2倍から3引いた数は，x の (-2) 倍より小さい」

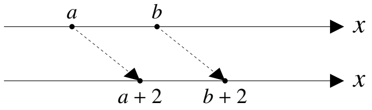
*49 次のような読み方もよく用いられる．
$a < b$:「a 小なり b」，$a \leqq b$:「a 小なりイコール b」，$a > b$:「a 大なり b」，$a \geqq b$:「a 大なりイコール b」

C. 不等式の性質

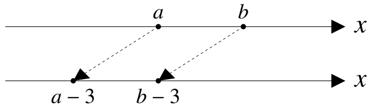
数直線上の点の移動をイメージしながら，不等式の性質を考えよう．

i) 両辺に同じ数を足す(引く)場合　⇒不等号の向きは変わらない（“<”は“<”のまま）

$a < b$ のとき，$a + 2 < b + 2$ である．

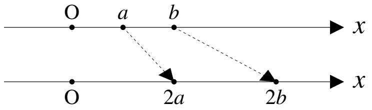


$a < b$ のとき，$a - 3 < b - 3$ である．

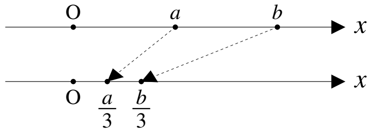


ii) 両辺に正の数を掛ける(割る)場合　⇒不等号の向きは変わらない（“<”は“<”のまま）

$a < b$ のとき，$2a < 2b$ である．

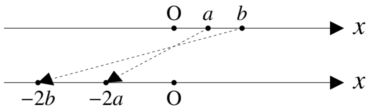


$a < b$ のとき，$\dfrac{a}{3} < \dfrac{b}{3}$ である．

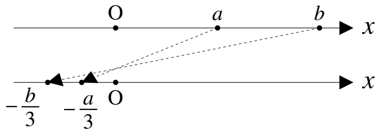


iii) 両辺に負の数を掛ける(割る)場合　⇒不等号の向きが反対になる（“<”は“>”に変わる）

$a < b$ のとき，$-2a > -2b$ である．



$a < b$ のとき，$-\dfrac{a}{3} > -\dfrac{b}{3}$ である．



【例題 109】

1. $a > b$ のとき，次の $\square$ に入る不等号を書け．
   i. $a + 4 \ \square\ b + 4$　　ii. $a - 2 \ \square\ b - 2$　　iii. $a - 3 \ \square\ b - 3$　　iv. $3a \ \square\ 3b$
   v. $2a \ \square\ 2b$　　vi. $-3a \ \square\ -3b$　　vii. $4a \ \square\ 4b$　　viii. $-a \ \square\ -b$
2. i. ～v. のそれぞれについて，$a > b$, $a < b$, $a \geqq b$, $a \leqq b$ のいずれが成り立つか答えよ．
   i. $5a < 5b$　　ii. $-2a < -2b$　　iii. $a - 4 < b - 4$　　iv. $\dfrac{a}{4} \leqq \dfrac{b}{4}$　　v. $-\dfrac{a}{4} \leqq -\dfrac{b}{4}$

不等式の性質

i) すべての実数 c で　$a < b \iff a + c < b + c \ ,\ a - c < b - c$

ii) $0 < c$ のとき　$a < b \iff ac < bc \ ,\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

iii) $c < 0$ のとき　$a < b \iff ac > bc \ ,\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$　←逆符号！

……これらの性質により，p.77 で学ぶように，不等式も方程式と同じようにして解くことができる．

【練習 110：不等式の性質】

以下の$\boxed{}$にあてはまる適当な数字を答えよ．

(1) $x+3<5$

$\Leftrightarrow\ x+3-3<5-\boxed{ア}$

$\Leftrightarrow\ x<\boxed{イ}$

(2) $2x<8$

$\Leftrightarrow\ 2x\times\dfrac{1}{2}<8\times\boxed{ウ}$

$\Leftrightarrow\ x<\boxed{エ}$

(3) $-3x\geqq 15$

$\Leftrightarrow\ -3x\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)\leqq 15\times\boxed{オ}$

$\Leftrightarrow\ x\leqq\boxed{カ}$

2. 1次不等式とその解法

A. 1次不等式とは何か

左辺，右辺とも（x について）次数が 1 次以下である不等式を，（x についての）**1 次不等式** (linear inequality) という．たとえば，次の式はすべて 1 次不等式である．

$2x+3>5x-3,\quad -x-5\geqq 2x+4,\quad 2x-3<7$

（x についての）不等式の**解** (solution) とは，不等式を満たす x の値のことをいう．たとえば，いろいろな x において，不等式

$2x+3>5x-3$ ……… ①

を満たすかどうか調べてみよう．$x=-2$ の時を調べると

（左辺）$=2\times(-2)+3=-1$

（右辺）$=5\times(-2)-3=-13$

となり，左辺の方が大きい．つまり，$x=-2$ は解である．

x	左辺	右辺	
−2	−1	−13	○
−1	1	−8	○
0	3	−3	○
1	5	2	○
2	7	7	×
3	9	12	×
4	11	17	×

このことを繰り返せば，右上の表を作る事ができ，①の解は無数にあることが分かる．

【例題 111】 不等式 $2x-1<x+2$ について，次の問いに答えよ．

1. $x=-2$ のとき，左辺の値，右辺の値をそれぞれ求めよ．また，$x=-2$ は解になるか．
2. $x=3$ のとき，左辺の値，右辺の値をそれぞれ求めよ．また，$x=3$ は解になるか．
3. $x=4$ のとき，左辺の値，右辺の値をそれぞれ求めよ．また，$x=4$ は解になるか．

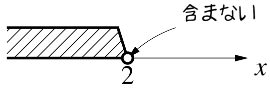
B. 不等式の解法と解の図示

不等式を**解く** (solve) とは「不等式のすべての解を求めること」を意味する．

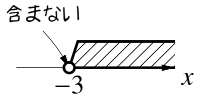
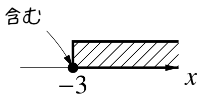
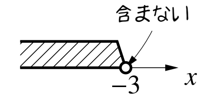
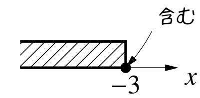
p.75 で学んだ性質から，不等式も，方程式と同じように**移項**（いこう） (transposition) を用いて解くことができる．たとえば，不等式 ① は次のように解くことができる．

$$\begin{aligned} & 2x+3 > 5x-3 & \\ \Leftrightarrow\quad & 2x-5x > -3-3 & \text{←移項した} \\ \Leftrightarrow\quad & -3x > -6 & \\ \Leftrightarrow\quad & x < 2 & \text{← }-3\text{ で割った（符号の向きが逆になる！！）} \end{aligned}$$

こうして，「x は 2 より小さければ解になる」ことが求められる．このことは，数直線を用いて右図のように表すことができる．



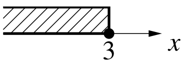
一般に，不等式の解は以下のように図示する．

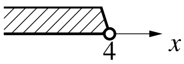
$-3 < x$	$-3 \leqq x$	$x < -3$	$x \leqq -3$
			

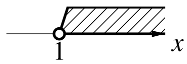
不等号 <，> のときは，境目を「白丸」「斜め線」で表す．

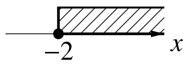
一方，不等号 ≦，≧ のときは，境目を「黒丸」「垂直線」で表す．

【例題 112】 それぞれの図が表す，不等式の解を答えなさい．

1. 

2. 

3. 

4. 

解の図示は，次で学ぶ「連立不等式」においてきわめて重要になる．

【例題 113】 次の 1 次不等式を解け．また，その解を数直線上に表せ．

1. $x-8<5$　　2. $4x-8>2x$　　3. $5-3x \leqq 7-10x$

【練習 114：1 次不等式】

次の 1 次不等式を解け．また，その解を数直線上に表せ．

(1) $-8x \leqq 32$　　(2) $2(x-2) > 3(4-x)+4$　　(3) $3 - \dfrac{5x-1}{3} > 2x+1$

【練習 115：不等式の解】

(1) 不等式 $2x-3<7$ において，$x=-3$ は解になるか，$x=5$ は解になるか．

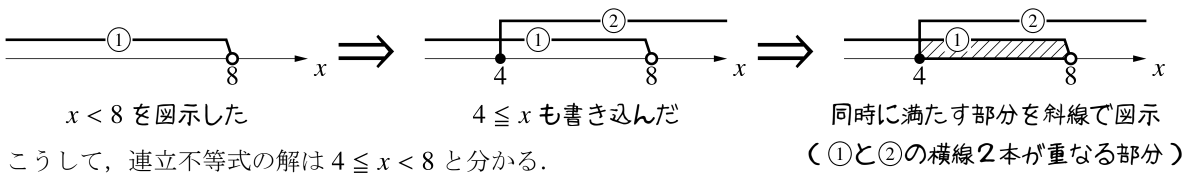
(2) 不等式 $-x-5 \geqq 2x+4$ において，$x=-3$ は解になるか，$x=5$ は解になるか．

C. 連立不等式

連立不等式 (simultaneous inequalities) とは，2 つ以上の満たすべき不等式の集まりを指す．連立不等式を解くとは，全ての不等式を同時に満たす x の範囲を求めることである．

たとえば，連立不等式 $\begin{cases} x-3<5 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x+1 \leqq 4x-3 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ を解こう．

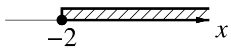
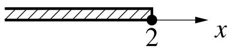
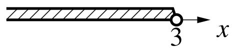
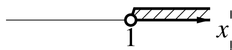
①の解は $x<8$ であり，②の解は $4 \leqq x$ になる．これらをまとめて図示しよう．



こうして，連立不等式の解は $4 \leqq x < 8$ と分かる．

2 つの不等式を同時に満たす範囲がない場合は「解なし」と答える.

【例題 116】 以下の図に $x < 0$ を書き込み，同時に満たす x の範囲を答えなさい．同時に満たす x の範囲がなければ,「解なし」と答えなさい.

1. 
2. 
3. 
4. 

【例題 117】 連立不等式 $\begin{cases} 4x - 3 < 2x - 5 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x + 1 \geqq 2x - 3 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ を解け.

連立不等式を解くときには必ず，解を数直線上に書き表すこと.

D. 3 つ以上の式による不等式

たとえば，x が不等式 $-2x + 6 < x < 4x - 3$ ……… ③ を満たすには，$-2x + 6 < x$ と $x < 4x - 3$ を同時に満たせばよい．つまり，③を解くには連立不等式 $\begin{cases} -2x + 6 < x \\ x < 4x - 3 \end{cases}$ を解けばよい.

【例題 118】 不等式 $-2x + 6 < x < 4x - 3$ を解け.

【練習 119：連立不等式】

次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} \dfrac{11}{4}x - \dfrac{3}{2} > 2x - 5 \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6} \leqq -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 0.25x - 0.18 \geqq 0.6 - 0.14x \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6} \leqq -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases}$

E. 発展 1次不等式の応用

【練習 120：1次不等式の応用】

(1) A 地点から 15 km 離れた B 地点まで歩いた．はじめは急ぎ足で毎時 5 km，途中から疲れたので毎時 3 km の速さで歩いた．所要時間が 4 時間以内のとき，急ぎ足で何 km 以上歩いたか求めよ．

(2) 5 % の食塩水 800 g と 8 % の食塩水を何 g か混ぜて，6 % 以上の食塩水を作りたい．8 % の食塩水を何 g 以上混ぜればよいか求めよ．

F. 取り得る範囲を求める

【練習 121：取り得る範囲〜その１〜】

実数 x が $-2 < x < 4$ であるとき，以下の値の取り得る範囲を答えよ．

(1) $x+3$　　(2) $x-2$　　(3) $2x$　　(4) $2x-5$　　(5) $-2x$

【発展 122：取り得る範囲〜その２〜】

実数 a は小数第 1 位を四捨五入して 4 になり，実数 b は小数第 1 位を四捨五入して 6 になるという．

1. a, b の取り得る範囲を不等式で答えよ．
2. $3a+b$ の取り得る範囲を不等式で答えよ．
3. $a-b$ の取り得る範囲を不等式で答えよ．

3. 絶対値を含む 1 次関数・方程式・不等式

A. 絶対値と方程式・不等式の関係

『絶対値』(p.7) でも学んだように，実数 x の絶対値 $|x|$ は，数直線上での原点と実数 x に対応する点との距離を表すので，次のことがいえる．

絶対値と方程式・不等式の関係

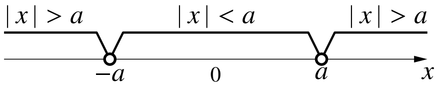
絶対値を含む x の方程式，不等式に関して

$|x| = a \iff x = \pm a$

$|x| < a \iff -a < x < a$

$|x| > a \iff x < -a$ または $a < x$

ただし，$a > 0$ とする[*50].



【練習 123：絶対値を含む 1 次方程式・1 次不等式】

次の方程式・不等式を解け．

(1) $|x - 1| = 3$　(2) $|3x - 2| = 6$　(3) $|x + 1| > 4$　(4) $|5x - 2| \leqq 4$

[*50] 実数の絶対値は 0 以上の値なので，$a = 0$ や $a < 0$ の場合を考える必要性は低い．たとえば，不等式 $|x| < -2$ の解は「解なし」，不等式 $|x| > 0$ の解は「0 以外のすべての実数」である．

B.　場合に分けて絶対値を外す

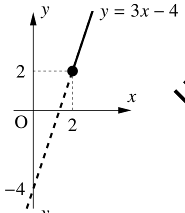
前ページの関係が使えない場合は，場合に分けて絶対値を外す必要がある．

たとえば，関数 $y = x + |2x - 4|$ のグラフは，次のように場合に分けて描く．

$y = x + |2x - 4|$ の絶対値を場合に分けて外す

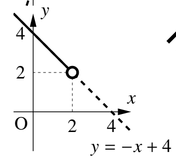
$2 \leqq x$ のとき，
$|2x - 4| = 2x - 4$ であるので

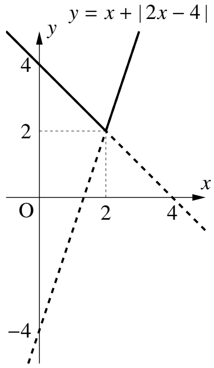
$$\begin{aligned} y &= x + |2x - 4| \\ &= x + (2x - 4) = 3x - 4 \end{aligned}$$



$x < 2$ のとき，
$|2x - 4| = -(2x-4)$ であるので

$$\begin{aligned} y &= x + |2x - 4| \\ &= x - (2x - 4) = -x + 4 \end{aligned}$$





【練習 124：絶対値を含む 1 次関数】

次の式で与えられた関数のグラフを描け．

(1) $y = 2x + |x - 1|$　　　　(2) $y = |x - 4|$

(2) のグラフは，直線 $y = x - 4$ のうち $y < 0$ の部分を，$y > 0$ になるよう x 軸に対して対称移動したグラフになっている．

【㊞㊞ 125：絶対値を含む 1 次方程式】

次の方程式を解け．

① $|x+1|=2x$　② $|3x-4|=x+8$　③ $|2x-2|=x-4$

【㊗㊦ 126：絶対値を含む 1 次不等式】

次の不等式を解け.

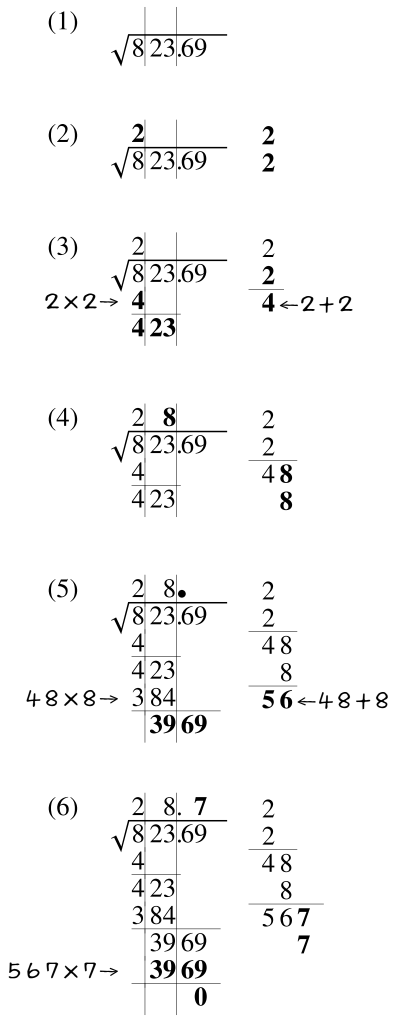
① $|x+6| > 3x$　　② $|2x-1| \leqq x+2$

$\boxed{\text{C}}$ 第１章の補足

1. 開平法について

A. 開平法の手順

例として，$\sqrt{823.69}$ の値を開平法で計算する．



(1) 823.69 を根号の中に書き，「小数点を基準」にして「2 桁ずつ」区切っていく．また，横にスペースをとっておく．

(2) 一番左の数は 8．2 乗して 8 を超えない最大の数 2 を，右図のように 3 ヶ所に書く．

(3) $(2 \times 2 =)\ 2^2 = 4$ を 8 の下に書き，8 から 4 を引く．そして，23 を下に下ろす．
また，その横で $2 + 2 = 4$ を計算する．

(4) 「4$\boxed{?}$」に「$\boxed{?}$」を掛けて「423」を超えない，最大の 1 桁の整数 $\boxed{?}$ を求める．

$$48 \times 8 = 384 \leqq 423 < 49 \times 9 = 441$$

であるので，$\boxed{?}$ は 8．これを 3 ヶ所に書き込む．

(5) 48×8 の結果 384 を 423 の下に書き，423 から引く．そして，69 を下に下ろす．さらに，小数点を打つ．
また，$48 + 8$ を横で計算しておく．

(6) 「56$\boxed{?}$」に「$\boxed{?}$」を掛けて「3969」を超えない，最大の 1 桁の整数 $\boxed{?}$ を求める．

$$567 \times 7 = 3969 \leqq 3969 < 568 \times 8$$

より $\boxed{?}$ は 7 であり，$3969 - 567 \times 7 = 0$ なので計算は完了．
$\sqrt{823.69} = 28.7$ とわかる．
（いつまでも 0 が現れないときは，計算を繰り返すことでより精密な近似値を求めることができる．）

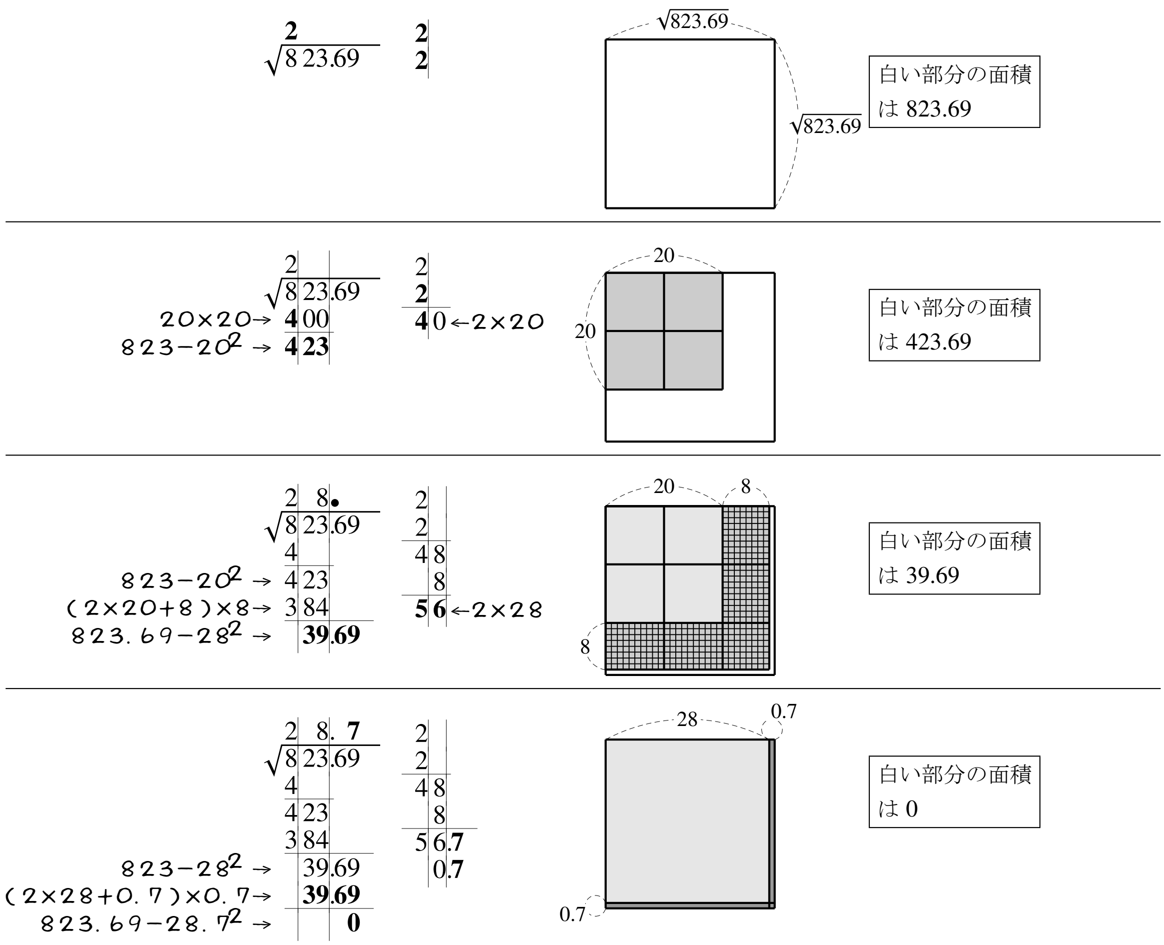
B.　開平法とは

「開平」とは「ある数の平方根を求めること」であり，「**開平法**（extraction of square root）」とは，その「開平」を筆算のような計算で求める方法である．いずれも和算[*51]の時代から使われた用語であり，開平法は古くからそろばんによって用いられていた．

開平法の計算は，化学や物理において必要とされることがある．

C.　開平法の仕組み

なぜ，前ページの開平法によって平方根が求められるのか，その仕組みを下に図で示しておく（途中の計算式の中に，実際の計算のときには必要のない数字があるので注意すること）．余裕のある人は，各自で考えてみよう．



---

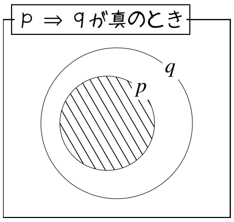
*51 吉田光由著「塵劫記(1627)」などが大きなきっかけとなって発達した，江戸時代の開国以前における日本の数学の総称．関孝和(1640?42?〜1708)，建部賢弘(1664〜1739)などの傑出した人物が現れた．和算においては，微分積分学を初めとする関数の概念こそ大きな流れを作らなかったものの，方程式論，数値計算などの分野においては同時代のヨーロッパの数学を先んじることもあった．
また，和算が庶民にも広く流行していた点は，数学の歴史において特筆すべき事柄である．開国以後の日本が，ヨーロッパの数学を吸収して初等教育に導入するまであまり時間がかからなかった要因には，和算の影響がたいへん大きかったと考えられている．

【練習 127：開平法】

$\sqrt{153664}$，$\sqrt{1.1236}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{9.8}$ の値を開平法によって計算せよ(無限に続く場合は，四捨五入によって上から 3 桁まで計算せよ)．

電卓で値を確かめながら，いろいろな値で練習しよう．

2. 「対偶の真偽は保たれる」ことの証明



A. 「$p \Rightarrow q$ は真である」の言い換え

「$p \Rightarrow q$ が真である」は「条件 $\overline{p} \cup q$ は常に真である」と言い換えられる．

これは，p.31 で学んだベン図でも確認することが出来る．

…… むしろ逆に「$p \Rightarrow q$ が真である」を「条件 $\overline{p} \cup q$ は常に真である」として定義することもある．

B. 「すべての命題は真か偽か定まる」ことの言い換え

『数学とは何か？』(p.26) にあるように，数学においては「真偽が定まる命題」しか考えない．

このことは，次のように表すことができる．

「どんな命題 p についても，$p \cup \overline{p}$ は必ず真である」

これを**排中律** (law of excluded middle) といい，これを用いて，次が成立すると分かる．

「条件 p の否定の否定は，条件 p と同値である」

直感的に，これが正しいことは分かるだろうが，排中律を使って厳密に示すことは，かなり難しい[*52].

C. 「対偶の真偽は保たれる」ことの証明

次の 3 つの事実から，命題 $p \Rightarrow q$ の真偽と命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する．

(I) （上の A. より）「$p \Rightarrow q$ が真である」と「条件 $\overline{p} \cup q$ は常に真である」は同値である．

(II) （上の B. より）どんな命題 p についても，同値関係 $p \iff \overline{\overline{p}}$ が成り立つ

(III) どんな命題 p, q についても，$p \cup q$ と $q \cup p$ の真偽は必ず一致する

対偶の真偽は保たれる

どんな条件 p，q に関しても，命題「$p \Rightarrow q$」と，その対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」は真偽が一致する．

（証明）「命題 $p \Rightarrow q$ が真である」$\iff$「$\overline{p} \cup q$ は常に正しい」（上の (I) より）

$\iff$「$q \cup \overline{p}$ は常に正しい」（上の (III) より）

$\iff$「$\overline{\overline{q}} \cup \overline{p}$ は常に正しい」（上の (II) より）

$\iff$「命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ は真である」（上の (I) より） ■

*52 「厳密に」とは，ベン図などを使わず，記号の定義のみ用いることを意味する．この $p \iff \overline{\overline{p}}$ を示すには，「$q \Rightarrow r$ が真ならば，$p \cup q \Rightarrow p \cup r$ が真である ……… ①」を認める必要がある．

そのうえで，概略を示す．まず「排中律が等しい事」を言い換えて「$p \Rightarrow \overline{\overline{p}}$」が示される．逆の「$\overline{\overline{p}} \Rightarrow p$」を示すには「$\overline{\overline{\overline{p}}} \cup p$」を示せばよい．それには，たった今示した $p \Rightarrow \overline{\overline{p}}$ と①から $\overline{p} \cup p \Rightarrow \overline{p} \cup \overline{\overline{p}}$ が正しいので，これに排中律などを用いればよい．

3. 「または」「かつ」の証明

「q かつ r」を示す方が，「q または r」を示すよりも，分かりやすい．

A. 基本的な「q かつ r」の証明

一般に，「q かつ r を示す」ためには，「q であること」「r であること」をどちらも示せばよい．

B. $x = a$ かつ $y = b$ の証明

p.39 で学んだように，「$x = a$ かつ $y = b$」と「$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$」は同値である．
そのため，「$x = a$ かつ $y = b$」を示すために，「$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$」を示してもよい．
特に，$x = y = z$ を示すために，「$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$」を示すこともある．

【練習 128：「かつ」の証明】

(1) $n = 2k+1$（k は自然数）のとき，$n^2 - n$ は偶数であり，かつ，$n^2 - 1$ は 8 で割り切れることを示せ．
(2) $x^2 + y^2 = x + y = 2$ のとき，$x = 1$ かつ $y = 1$ であることを示せ．
(3) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ のとき，$x = y = z$ であることを示せ．

C. 基本的な「q または r」の証明

一般に，「q または r を示す」ためには，「条件 q が成り立たないならば r である」ことを示せばよい[*53].

【練習 129 :「または」の証明〜その１〜】

(1) $ac = bc$ ならば，$c = 0$ または $a = b$ を示せ.

(2) $ab = 0$ ならば，$a = 0$ または $b = 0$ を示せ.

D. $x = a$ または $y = b$ の証明

p.40 で学んだように，「$x = a$ または $y = b$」と「$(x-a)(y-b) = 0$」は同値である.

そのため，「$x = a$ または $y = b$」を示すために「$(x-a)(y-b) = 0$」を示してもよい.

【練習 130 :「または」の証明〜その２〜】

$ab + 1 = a + b$ のとき，$a = 1$ または $b = 1$ を示せ.

【発展 131 :「少なくとも 1 つは 1」の証明】

$a + b + c = -abc$, $ab + bc + ca = -1$ のとき，a, b, c の少なくとも 1 つは 1 であることを示せ.

*53 もしくは「条件 r が成り立たないならば q である」ことを示せばよい.

4. 3次式の展開・因数分解

A. 立方の公式 1

$(a+b)^3$ を展開すると

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)\ (a^2+2ab+b^2)$$

$$= \overset{①}{a^3} + \overset{②}{2a^2b} + \overset{③}{ab^2} + \overset{④}{ba^2} + \overset{⑤}{2ab^2} + \overset{⑥}{b^3}$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

	a^2	$2ab$	b^2
a	a^3	$2a^2b$	ab^2
b	ba^2	$2ab^2$	b^3

となる．これを使い，たとえば $(2x+y)^3$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（○）

$$(2x+y)^3$$
$$= \underbrace{(2x)^3 + 3\cdot(2x)^2y + 3\cdot(2x)y^2 + y^3}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(2x+y)^3$$
$$= (2x+y)(2x+y)^2$$
$$= (2x+y)(4x^2+4xy+y^2)$$
$$= 8x^3 + 8x^2y + 2xy^2 + 4x^2y + 4xy^2 + y^3$$
$$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

次ページで見るように，$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ も成り立つ．

立方の公式 1

5° $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,　$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

【例題 132】

1. $a = 5x,\ b = 2$ のとき，$3a^2b,\ 3ab^2$ の値をそれぞれ求めよ．
2. 次の多項式を展開せよ．

(a) $(x+2)^3$　(b) $(x+4)^3$　(c) $(2x+1)^3$　(d) $(3x+2)^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ については，公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ で処理するほうがよい．たとえば，$(a-2b)^3$ の計算は次のようになる．

$$\begin{aligned}(a-2b)^3 &= \left\{a+(-2b)\right\}^3 && \leftarrow 2b \text{ を引くことと } (-2b) \text{ を足すことは同じ}\\ &= a^3 + 3\cdot a^2(-2b) + 3\cdot a(-2b)^2 + (-2b)^3 && \leftarrow \text{慣れると省略できる}\\ &= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3\end{aligned}$$

一般の $(a+b)^n$ の展開については数学 II で学ぶ．

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

【練習 133：多項式の展開〜立方の公式 1】

次の多項式を展開せよ．

(1) $(a-4)^3$　　(2) $(3a-2)^3$　　(3) $(2a+5)^3 + (2a-5)^3$

B. 立方の公式 2

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開すると

$$(a+b)\ (a^2-ab+b^2) = \overset{\textcircled{1}}{a^3} - \overset{\textcircled{2}}{a^2b} + \overset{\textcircled{3}}{ab^2} + \overset{\textcircled{4}}{ba^2} - \overset{\textcircled{5}}{ab^2} + \overset{\textcircled{6}}{b^3}$$

$$= a^3 + b^3$$

	a^2	$-ab$	b^2
a	a^3	$-a^2b$	ab^2
b	ba^2	$-ab^2$	b^3

となる．これを使い，たとえば $(3x+1)(9x^2-3x+1)$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（○）

$$(3x+1)(9x^2-3x+1)$$

$$= \underbrace{(3x+1)\left\{(3x)^2-(3x)\cdot 1+1^2\right\}}_{\text{慣れると省略できる}}$$

$$= 27x^3+1$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(3x+1)(9x^2-3x+1)$$

$$= 27x^3-9x^2+3x+9x^2-3x+1$$

$$= 27x^3+1$$

また，同様に $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ も成り立つ．

立方の公式 2

6° $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,\qquad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

左辺の $a \pm b$ と右辺の $a^3 \pm b^3$ は符号が一致する，と覚えておこう．
ただし，この公式を展開のために使う機会は少なく，p.96 における「因数分解」で（逆方向に）よく利用される．

【例題 134】

1. $(x+2)(x^2-2x+4)$, $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)$ を展開せよ．
2. 次の中から，$8x^3+27$ になるもの，$8x^3-27$ になるものを 1 つずつ選べ．

   a) $(2x+3)(4x^2+6x+9)$　b) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$　c) $(2x+3)(4x^2-6x-9)$

   d) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$　e) $(2x-3)(4x^2-6x+9)$　f) $(2x-3)(4x^2-6x-9)$

C. 『立方の公式 2』(p.95) を逆に利用した因数分解

$8x^3+y^3$ には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

$$\begin{aligned}&8x^3+y^3\\=&(2x)^3+y^3\\=&(2x+y)\left\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\right\}\\=&(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)\end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned}&(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)\\=&(2x+y)\left\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\right\}\\=&(2x)^3+y^3\\=&8x^3+y^3\end{aligned}$$

立方の公式 2 (p.95) の逆利用

7° $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\bigcirc^3\pm\triangle^3$ の形の因数分解は重要度が高いが，忘れやすいので気をつけよう．展開のときと同じように，$a\pm b$ と $a^3\pm b^3$ は符号が一致する，と覚えておくとよい．また，1，8，27，64，125，216，343，512，729 を見たら「整数の 3 乗だ」と気づけるようになるとよい．

【例題 135】 次の式を因数分解せよ．

1. x^3+27　　2. $8a^3+1$　　3. $8x^3-27y^3$　　4. $64a^3-125b^3$

D. ㊦㊤ 3 次式の展開・因数分解のまとめ

【発展 136：3 次式の展開】

次の多項式を展開せよ．

① $(x-3)^3$　② $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^3$　③ $(p+q)(3p^2-3pq+3q^2)$　④ $(2x+4y)^3$　⑤ $(a+b)^3(a-b)^3$

【発展 137：3 次式の因数分解】

次の多項式を因数分解せよ．

① $343a^3-8b^3$　② $3x^3+81y^3$　③ a^6-b^6　④ $a^3+ab^2+b^2+1$

E. 式の値の計算 〜 3 次式の展開・因数分解の利用

x^3+y^3 の計算も，『立方の公式 1』(p.93)『立方の公式 2』(p.95) を使って，計算を簡単にできる．

たとえば，$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$ のとき，$x+y=4$, $x-y=2\sqrt{3}$, $xy=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=1$ である．

（解法１）立方の公式 1 を使う

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=14$ であるから

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &= 4\cdot(14-1)=52 \end{aligned}$$

（解法２）立方の公式 2 を使う

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ を変形して

$$\begin{aligned} x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= 4^3-3\cdot1\cdot4=52 \end{aligned}$$

これを応用して，x^5+y^5 の計算も，次のようにできる．

$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5$ を変形して

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2 \\ &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y) \\ &= 14\cdot52-1^2\cdot4=734 \end{aligned}$$

【練習 138：3 次式の公式と式の値】

$x=\sqrt{7}+\sqrt{2}$，$y=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ のとき，以下の値を計算しなさい．

(1) x^2+y^2　　(2) x^3-y^3　　(3) x^4+y^4　　(4) x^5-y^5

第2章　三角比と図形の計量

たとえば，3 辺の長さが 4 cm，5 cm，7 cm の三角形は，1 つに決まる．しかし，その三角形の内角は何度くらいなのか，そもそも鋭角三角形か，鈍角三角形なのかは，描いてみないと分からない．

三角比を用いると，この問題を簡単な計算で解決する．

2.1 鋭角の三角比

この節では，直角三角形を用いて，90° より小さな角(鋭角)の三角比を学ぶ．

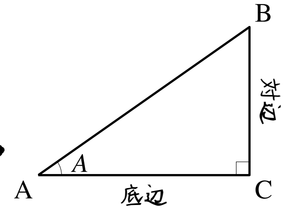
1. 三角比の定義 — 正接 (tan)，余弦 (cos)，正弦 (sin)

A. 直角三角形の辺の名前

AB が**斜辺** (hypotenuse) である直角三角形 ABC を ∠A から見るとき[*1]

辺 BC のことを**対辺** (opposite side)，辺 CA のことを**底辺** (base)

という．右図を「➔」の位置から見るとき，「➔」の反対側に対辺があり，三角形の底に底辺がある．



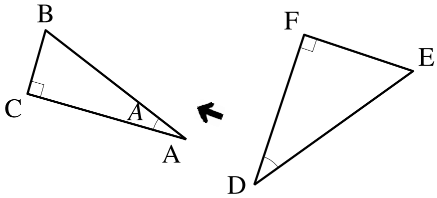
【例題 1】 右の △ABC を「➔」の位置から見たとき

辺 AB は斜辺，辺 BC は ア，辺 CA は イ

である．また，△DEF を頂点 D から見たときは

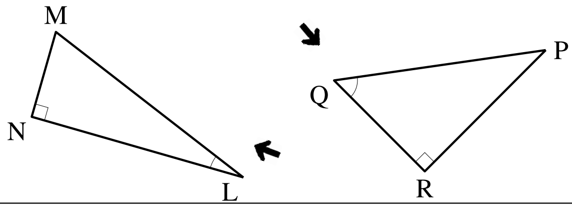
辺 ウ は斜辺，辺 エ は対辺，辺 オ は底辺

である．



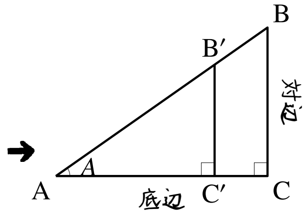
*1 この章の図にある “➔” は，本文中で「〜からみたときの」とある場合の説明の補助として使われている．自分も同じ所から見つめているつもりになって，図形を考えてみよう．

【練習 2：直角三角形の辺の名称】
「➔」の位置から見たとき，左の三角形の LM，MN，NL，右の三角形の PQ，QR，RP は，それぞれ対辺，底辺，斜辺のいずれか，



B. 正接 (tan)

右図において，∠A から見たときの $\dfrac{(\text{対辺})}{(\text{底辺})}$ の値は，∠A の大きさだけで決まる．実際に測ってみれば，$\dfrac{\mathrm{C'B'}}{\mathrm{AC'}} = \dfrac{0.75\times\mathrm{CB}}{0.75\times\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}}$ である（△AB'C' は △ABC の 0.75 倍で描かれている）．

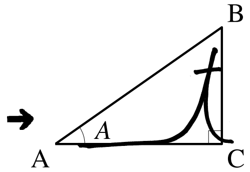


正接 (tan) の定義

右図の直角三角形 ABC において

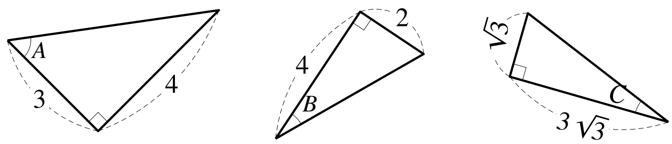
$$\underset{\text{タンジェントエー}}{\mathbf{tan}\,\boldsymbol{A}} = \frac{(\text{対辺})}{(\text{底辺})} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}}$$
←筆記体が終わる辺
←筆記体が始まる辺

と定義し[*2]，A の**正接**（せいせつ）または，A の**タンジェント** (tangent) という．
$\tan A$ は，∠A から見た底辺に対する対辺の倍率を表している．



tan の定義は t の筆記体を用いて覚える．右上図では，t の筆記体は，分母の AC で始まり，分子の CB で終わる．

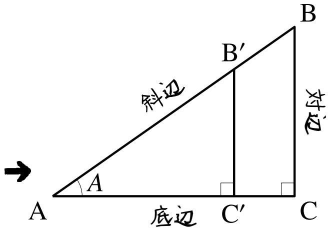
【例題 3】 右の図において，$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ をそれぞれ求めよ．



必ず，筆記体を用いた定義を確認しよう．慣れれば，問題の図を回したり，自分で描きなおす事なく求められるようになる．

[*2] この tan というのは，3 文字で 1 つの記号であり $t\times a\times n$ のことではない．これを明確にするため，数学では tan と斜体では書かず，tan と立体で書く．これは，次にでてくる sin，cos も同様である．

C. 余弦 (cos)・正弦 (sin)



右図において，∠A から見たときの $\dfrac{(\text{底辺})}{(\text{斜辺})}$，$\dfrac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})}$ の値は ∠A の大きさだけで決まる．実際，次が成り立つ．

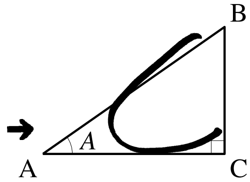
$$\frac{(\text{底辺})}{(\text{斜辺})} = \frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{B'A}} = \frac{0.75\times\mathrm{AC}}{0.75\times\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BA}}$$

$$\frac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{AB'}} = \frac{0.75\times\mathrm{BC}}{0.75\times\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$

余弦・正弦の定義

右図の直角三角形 ABC において

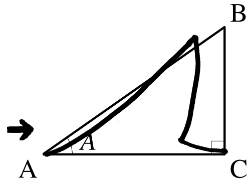
$$\overset{\text{コサインエー}}{\boldsymbol{\cos A}} = \frac{(\text{底辺})}{(\text{斜辺})} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BA}} \quad \begin{array}{l}\leftarrow\text{筆記体が終わる辺}\\ \leftarrow\text{筆記体が始まる辺}\end{array}$$



と定義し，A の**余弦**（よげん），または，A の**コサイン** (cosine) という．

$\cos A$ は，∠A からみた斜辺に対する底辺の倍率を表している．また

$$\overset{\text{サインエー}}{\boldsymbol{\sin A}} = \frac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \quad \begin{array}{l}\leftarrow\text{筆記体が終わる辺}\\ \leftarrow\text{筆記体が始まる辺}\end{array}$$



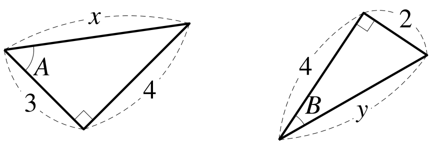
と定義し，A の**正弦**（せいげん），または，A の**サイン** (sine) という．

$\sin A$ は，∠A からみた斜辺に対する対辺の倍率を表している．

cos，sin の定義も，それぞれ c，s の筆記体を用いて覚える．tan も含めたすべて，「筆記体が始まる辺」が分母に，「筆記体が終わる辺」が分子になる．

【例題 4】 右の図において

1. 長さ x，y を求めよ．
2. $\cos A$，$\sin A$ を求めよ．
3. $\cos B$，$\sin B$ を求めよ．



筆記体の c は角を回り込むように書き，筆記体の s は角から斜辺へ向かう，と理解するとよい．

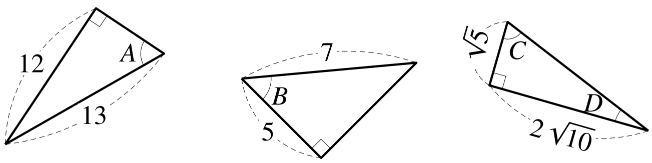
【練習 5：余弦・正弦・正接の定義】

(1) $\cos A$, $\sin A$, $\tan A$ を求めよ.

(2) $\cos B$, $\sin B$, $\tan B$ を求めよ.

(3) $\cos C$, $\sin C$, $\tan C$ を求めよ.

(4) $\cos D$, $\sin D$, $\tan D$ を求めよ.



D. 三角比の値

正接，余弦，正弦をまとめて，**三角比** (trigonometric ratio) という．いろいろな角度に関する三角比の値を p.261 にまとめてある．

【例題 6】 p.261 を用いて次の問に答えよ．ただし，$0° < A < 90°$ である．

1. $\cos 40°$ の値を調べよ．また，$\sin A = 0.97$ のとき，A のおよその値を求めよ．
2. $\cos B$ が $\sin 20°$ に等しいとき，B の値を求めよ．

E. 分数と分数の比 — 複分数

「3 を 10 で割った値」を $\dfrac{3}{10}$ と表すように，「$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ を $\dfrac{1}{7}$ で割った値」を $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}}$ と表すこともできる．このように，$\dfrac{a}{b}$ の分子または分母がさらに分数であるとき，$\dfrac{a}{b}$ を**複分数** (complex fraction) [*3] という．複分数は三角比の計算においてよく現れる．

複分数は，分母と分子に同じ数を掛ければ複分数でなくなる[*4]．

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\times 21}{\frac{1}{7}\times 21} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{3}_{1}}\times \cancel{21}^{7}}{\frac{1}{\cancel{7}_{1}}\times \cancel{21}^{3}} = \frac{\sqrt{2}\times 7}{1\times 3} = \frac{7\sqrt{2}}{3}$$

【例題 7】 複分数 $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{2}{3}}$ を，普通の分数の（複分数でない）形にしなさい．

F. 有名角の三角比

30°，45°，60° の三角比の値は，知っているものとされる．これらの角は，有名角といわれる．

【暗記 8：有名角の三角比】

1. 3 辺の長さが 1，2，$\sqrt{3}$ の直角三角形を用い，$\cos 30^\circ$，$\sin 30^\circ$，$\tan 30^\circ$ を求めよ．
2. 3 辺の長さが 1，1，$\sqrt{2}$ の直角三角形を用い，$\cos 45^\circ$，$\sin 45^\circ$，$\tan 45^\circ$ を求めよ．
3. $\cos 60^\circ$，$\sin 60^\circ$，$\tan 60^\circ$ を求めよ．

有名角でない三角比の値を覚える必要はない．必要なときは．p.261 の表を用いる．

*3 繁分数 (compound fraction) ともいう．

*4 $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}}$ は $\dfrac{\sqrt{2}}{3} \div \dfrac{1}{7}$ を計算しても求められる．

【練習 9：複分数】

次の複分数を，普通の分数の形になおしなさい（分母の有理化もすること）．

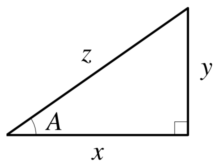
(1) $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{7}}$　　(2) $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{25}{9}}$　　(3) $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$　　(4) $\dfrac{2a}{\frac{1}{2}}$

2. 三角比の利用

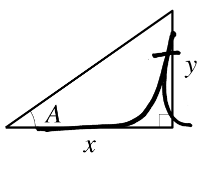
A. 三角比から辺の長さを求める

等式 $\tan A = \dfrac{y}{x}$ の両辺に x を掛けて

$$x \times \tan A = x \times \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x \tan A = y$$



という式を得る．この結果は，「x から t を書(か)いて，y にたどりつく」筆記体と



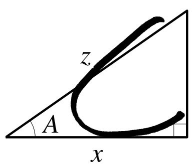
「x に tan を掛(か)けて，y を求める」ことを結びつけて覚えるとよい．

$$x\,\overbrace{\tan A}^{x \to y\text{ に筆記体 t を書く}} = y$$

同じようにして，cos，sin についても，以下の結果が成り立つ．

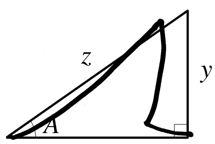
z から x を求める式

$$z\,\overbrace{\cos A}^{z \to x\text{ に筆記体 c を書く}} = x$$



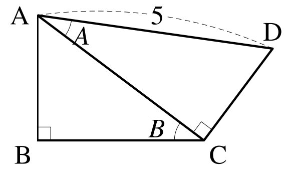
z から y を求める式

$$z\,\overbrace{\sin A}^{z \to y\text{ に筆記体 s を書く}} = y$$



これら 3 つの式を用いると，三角比から辺の長さを計算しやすい．

【例題 10】 右の図形について



$$\sin A = \frac{3}{5},\ \cos A = \frac{4}{5},\ \tan B = \sqrt{2},\ \cos B = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

とする．以下の問いに答えよ．

1. 辺 $\boxed{\text{ア}}$ から始めて ∠A について筆記体の s を書けば，辺 CD で終わるので，

   $\mathrm{CD} = \boxed{\text{ア}}\sin A = \boxed{\text{イ}}$

2. 辺 AD から始めて ∠A について筆記体の c を書き，∠B について筆記体の c を書けば辺 $\boxed{\text{ウ}}$ で終わるので，$\boxed{\text{ウ}} = (\mathrm{AD}\cos A)\cos B = \mathrm{AD}\cos A\cos B = \boxed{\text{エ}}$

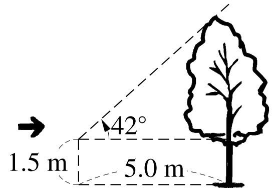
B. 身近な例への三角比の応用

大きなものの長さや高さを測るために，三角比は有効である．

【例題 11】 目の高さが 1.5 m にある人が，木から 5.0 m 離れた地点に立って木のてっぺんを見上げた．すると，水平な地面と視線のなす角[*5]が 42°であった．

この木の高さはおよそ何 m か.（右図参照）

p.261 の三角比の表を使って，小数第 2 位を四捨五入して答えなさい.



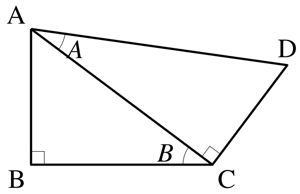
[*5] この角度のことを，仰角（ぎょうかく）という．

【練習 12：三角比と辺の長さ】

右の図形について，次の問いに答えよ．

(1) AD = 6 のとき，長さが $6\sin A$，$6\cos A\sin B$ に等しい線分を，それぞれ答えよ．

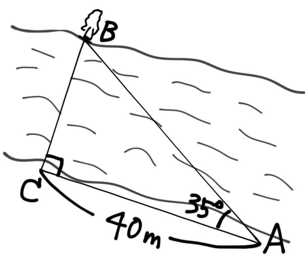
(2) AC = 5 のとき，CD，AB，AD の長さを，A，B で表せ．



【練習 13：身近な例への三角比の応用】

凧揚（たこあ）げをしていたら，水平な地面に対し 50° の角度で長さ 50.0 m のひもが伸びきった．ひもを持つ手は 1.0 m の高さにあり，糸が一直線に伸びているならば，この凧は地面からおよそ何 m の高さにあるか．p.261 の三角比の表を使って，小数第 2 位を四捨五入して答えなさい．

【練習 14：川を渡らず川幅を知る方法】



川の長さを測るため，左図の A 点と C 点から，B 点の木を観測したところ，∠BCA = 90°，∠BAC = 35°，AC = 40 m であった．

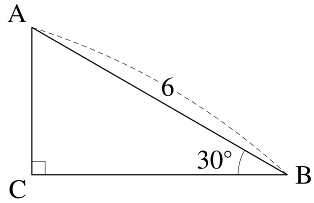
(1) 川の幅 BC は何 m か．p.261 の三角比の表を使い，小数第 2 位を四捨五入して答えなさい．

(2) C 点から 80 m 離れた点 D から木を見ると，∠BDC はおよそ何度か．p.261 の三角比の表を使い，整数値で答えなさい．

上の例題のようにすれば，原理的には，B へ誰も行くことなく川幅を測ることができる．

C. 15° の三角比とその周辺

たとえば，右の直角三角形の BC の長さを考えよう．

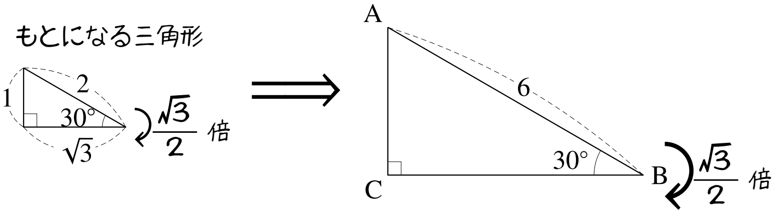


この三角形は 30°, 60°, 90° の直角三角形なので，$AB : BC = 2 : \sqrt{3}$ から

$$6 : BC = 2 : \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2BC = 6\sqrt{3}$$

であるので，$BC = 3\sqrt{3}$ と求められる．

しかし，BC が AB の何倍なのか考えると，三角比を用いる必要もなく，さらに計算がしやすい．

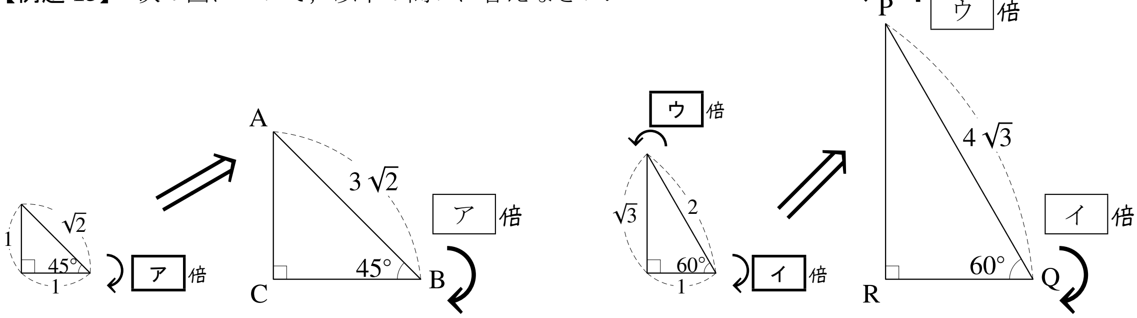


つまり

$$BC = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

上のやり方は結果的には，三角比の値を用いずに，等式 $BC = 6\cos 30°$ を用いている．

【例題 15】 次の図について，以下の問いに答えなさい．



1. 上の図の $\boxed{}$ に当てはまる値を答えなさい．値の分母は有理化しなくてよい．
2. BC，RQ，PR の長さを求めなさい．

D.　15°，75° の三角比

有名角以外にも，15°，75°，18°，36°，72° の三角比も計算で求められる（18°，36°，72° の三角比については，p.156 を参照のこと）[*6].

【練習 16：15°，75° の三角比】

$\triangle$ABC は $\angle A = 75°$，$\angle B = 60°$，$\angle C = 45°$ であり，A から辺 BC へ下ろした垂線の足[*7]を D，B から辺 CA へ下ろした垂線の足を E とする．BD = 1 とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) AB，AD の長さを求めよ．　(2) AC，BC の長さを求めよ．　(3) BE，AE の長さを求めよ．

(4) $\cos 15°$，$\sin 15°$，$\tan 15°$ を求めよ．　(5) $\cos 75°$，$\sin 75°$，$\tan 75°$ を求めよ．

[*6] 15°，75°，18°，36°，72° の三角比の値を覚える必要はない．

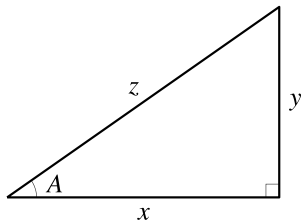
[*7] 「A から辺 BC へ下ろした垂線の足」とは，「A から引いた辺 BC に垂直な線が，辺 BC と交わる点」のことである．

3. 三角比の相互関係

A. $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

右図の直角三角形において，p.104 で学んだように

$x = z\cos A$ ，　$y = z\sin A$　　　　　　　　$\cdots\cdots\cdots$ ①



であった．①を用いて

$$\tan A = \frac{y}{x} = \frac{z\sin A}{z\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

となる．つまり，次の等式 $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ が成り立つ．

B. $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

三平方の定理より $x^2 + y^2 = z^2$ であるから，これに①を代入して

$$(z\cos A)^2 + (z\sin A)^2 = z^2$$
$$\Leftrightarrow z^2(\cos A)^2 + z^2(\sin A)^2 = z^2$$
$$\Leftrightarrow (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．普通 $(\cos A)^2$，$(\sin A)^2$，$(\tan A)^2$ は，それぞれ $\cos^2 A$，$\sin^2 A$，$\tan^2 A$ と書かれる[*8]．つまり，等式②は $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ と書かれる．

【例題 17】

1. $\sin A = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin^2 A$ はいくらか．$\cos^2 A$ はいくらか．$\cos A$ はいくらか．
2. $\sin A = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ．

[*8] A の 2 乗の cos の値である $\cos(A^2)$ と，$\cos A$ の 2 乗である $(\cos A)^2$ は，全く別の式であるが，かっこを省略して書くと，どちらも $\cos A^2$ となり区別できない．そのため，$\cos A^2$ と書かれたときは常に $\cos(A^2)$ を表すと決まっている．$(\cos A)^2$ のかっこを省略するときには，本文にもあるように $\cos^2 A$ と書く．

【練習 18：三角比の相互関係の利用〜その１〜】

$0^\circ < A < 90^\circ$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\cos A = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めよ．

(2) $\sin A = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ．

【暗記 19：$\tan A$ と他の三角比との関係】

等式 $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ を用いて，$\dfrac{1}{\tan A}$ を，$\cos A$，$\sin A$ で表せ．

C.　$\tan A$ から $\sin A$，$\cos A$ を求める式

$\tan A$ しか与えられていないときは，別の公式が必要になる．

これは，$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ の両辺を $\sin^2 A$ で割って得られる．

$$\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 A} + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}$$

次ページで証明する式 iv) と合わせ，次のようにまとめられる．

三角比の相互関係

右図の直角三角形において

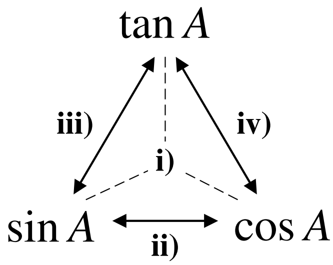
i) $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$　　（$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の関係）

ii) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$　　（$\sin A$ と $\cos A$ の関係）

が成り立つ．また，次の等式も成り立つ．

iii) $\dfrac{1}{\tan^2 A} + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 A}$　　（$\tan A$ と $\sin A$ の関係）

iv) $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$　　（$\cos A$ と $\tan A$ の関係）



iii) と iv) の式を覚える必要はない．ii) の両辺を $\sin^2 A$ や $\cos^2 A$ で割ればよい，と理解しておけばよい．

【例題 20】 $0^\circ < A < 90^\circ$ とする．$\tan A = 7$ のとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ．

【暗記 21：$\tan A$ と $\cos A$ との関係】

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ から，等式 $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$ を導け．

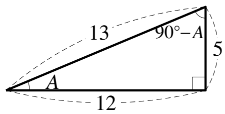
【練習 22：三角比の相互関係の利用～その２～】

$0° < A < 90°$ とする．$\tan A = \dfrac{1}{5}$ のとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ．

D.　$90° - A$ の三角比

【例題 23】　右図の直角三角形において

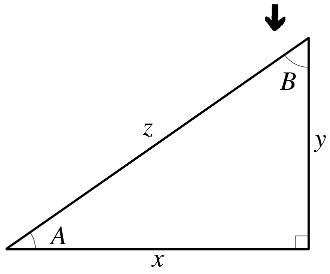
1. $\cos A$，$\sin A$，$\tan A$ を求めよ．
2. $\cos(90° - A)$，$\sin(90° - A)$，$\tan(90° - A)$ を求めよ．



右図の直角三角形において

$B = 90^\circ - A$

であるから，以下のように表すことができる.



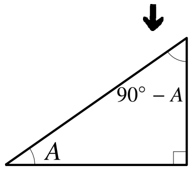
$\cos(90^\circ - A) = \cos B = \dfrac{y}{z} = \sin A$

$\sin(90^\circ - A) = \sin B = \dfrac{x}{z} = \cos A$

$\tan(90^\circ - A) = \tan B = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{\tan A}$

$90^\circ - A$ の三角比

右図の直角三角形を考えて，以下の等式が成り立つ.



$\cos(90^\circ - A) = \sin A$

$\sin(90^\circ - A) = \cos A$

$\tan(90^\circ - A) = \dfrac{1}{\tan A}$

この式は暗記するようなものではない.「$90^\circ - A$ の三角比は A だけを使った三角比で表せる」ことを理解し，公式を作れるようにすればよい.

【練習 24：$90^\circ - A$ **の三角比の利用】**

(1) 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ.

1) $\sin 80^\circ$　　2) $\cos 46^\circ$　　3) $\tan 82^\circ$

(2) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$ を簡単にしなさい.

$45^\circ < A < 90^\circ$ の三角比は，$0^\circ < A < 45^\circ$ の三角比になおすことができる.

p.261 の三角比の表において，$\cos 89^\circ = \sin 1^\circ$，$\cos 88^\circ = \sin 2^\circ$，$\cdots$ を確認してみよう.

2.2 三角比の拡張

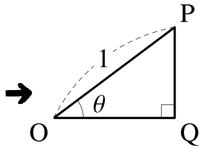
これまでは，鋭角の三角比のみを考えてきた．ここでは三角比の考えを直角・鈍角・0°・180° へと拡張し，0° から 180° までの三角比を統一的に扱う．

1. 座標と三角比の関係

A. 斜辺が 1 である直角三角形の三角比

斜辺が 1 である直角三角形 OPQ について，三角比を考えよう．すると，正弦，余弦，正接はそれぞれ

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}} = \mathrm{PQ}, \qquad \cos\theta = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{PO}} = \mathrm{OQ}$$

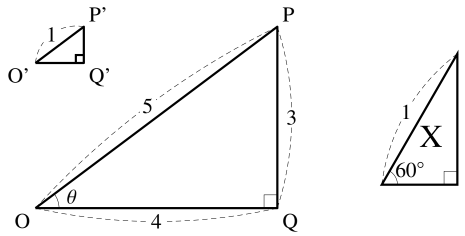


と書ける[*9]．つまり，斜辺の長さが 1 である直角三角形では

「対辺の長さは $\sin\theta$ の値を表し，底辺の長さは $\cos\theta$ の値を表す」

【例題 25】

1. $\triangle$OPQ と $\triangle$O'P'Q' は相似である．O'Q'，Q'P' の長さを求めなさい．また，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めなさい．
2. 右奥の直角三角形 X について，斜辺以外の 2 辺の長さを求めなさい．



[*9] 拡張された三角比では，θ（シータ），φ（ファイ）などギリシア文字を使うことが多い．ギリシア文字の一覧は p.263 参照．

B. 単位円と直角三角形

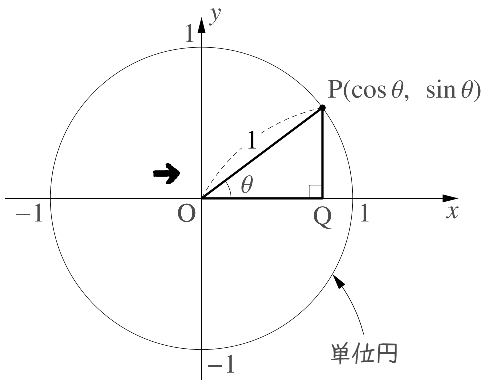
座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を**単位円** (unit circle) という．前ページの △OPQ を，左図のように単位円の(上半分の)中に描いてみよう．そのようにすれば

$\cos\theta = \mathrm{OQ} = (\mathrm{P}$ の x 座標)

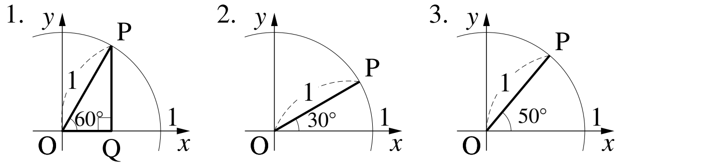
$\sin\theta = \mathrm{QP} = (\mathrm{P}$ の y 座標)

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}} = \frac{\mathrm{P}\text{ の }y\text{ 座標}}{\mathrm{P}\text{ の }x\text{ 座標}} = (\text{線分 OP の傾き})$$

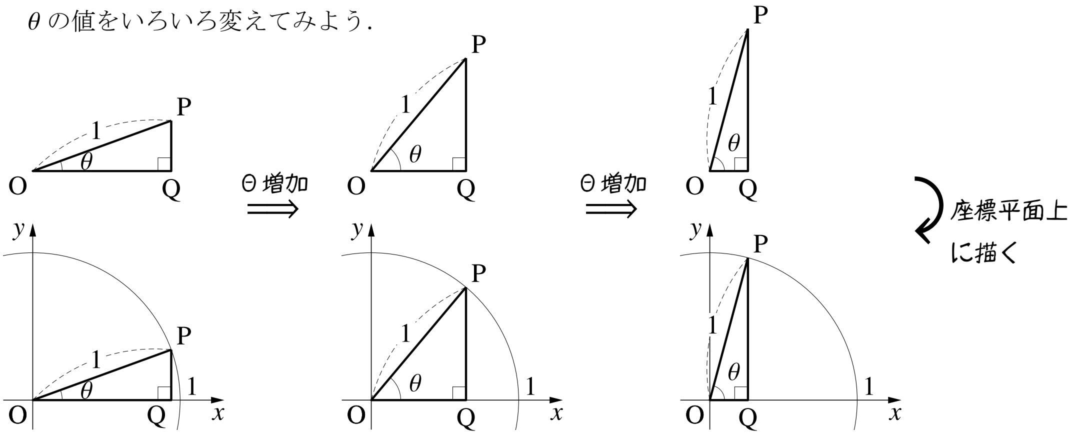
となる．



【例題 26】 右の各図について，点 P の座標をそれぞれ求めなさい．ただし，3. については『三角比の表』(p.261) を用いなさい．

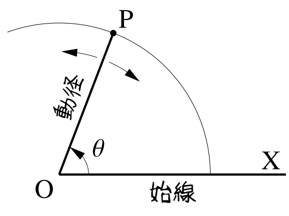


θ の値をいろいろ変えてみよう．



常に単位円周上にある点 P を**角点** (angular point) という[*10]．

上の図において，角 θ の大きさは，角点 P の位置で決まる．θ の増加に伴い，角点 P は反時計回りに回る．このとき，回転する線分 OP を**動径** (radial vector)，固定された半直線 OX を**始線** (initial line) という．

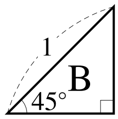


[*10] この「角点」という用語は 13th-note の造語であるので注意のこと．

【練習 27：斜辺が 1 である直角三角形】

(1) 右の直角三角形 B について，斜辺以外の 2 辺の長さを求めなさい．

(2) 斜辺の長さが 1，底辺の長さが $\dfrac{12}{13}$ である直角三角形について，対辺の長さを求めなさい．

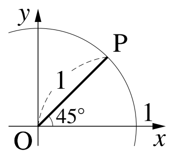


【練習 28：単位円と角点】

右図について，以下の問いに答えなさい．

(1) 動径と始線はどれか．右図に書き込みなさい．

(2) 角点 P の座標をそれぞれ求めなさい．



C. 三角比の拡張

角点 P の動く範囲を第 2 象限に広げれば，鈍角の三角比の定義を得る．

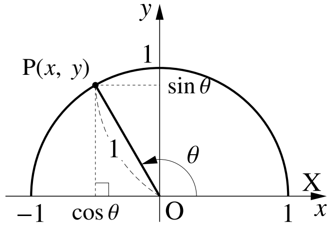
0° から 180° までの三角比

点 O を原点とする座標平面上に単位円の上半分をとり，その周上に角点 P をとる．x 軸の正の部分 OX に対し，$\angle\mathrm{POX} = \theta\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とするとき

$\cos\theta =$（角点 P の x 座標）

$\sin\theta =$（角点 P の y 座標）

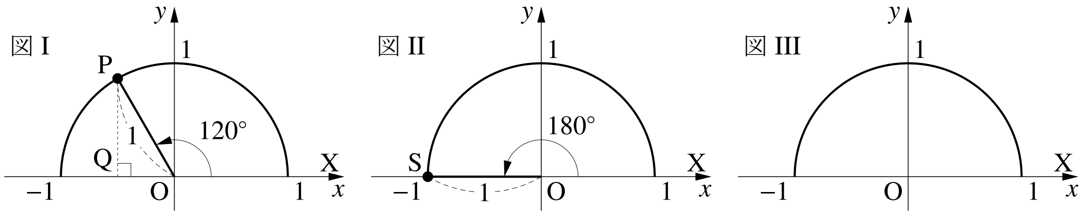
$\tan\theta = \dfrac{\text{（角点 P の } y \text{ 座標）}}{\text{（角点 P の } x \text{ 座標）}} =$ [*11]（動径 OP の傾き）



とする．ただし，角点 P の x 座標が 0 のとき，つまり，$\theta = 90^\circ$ のときは $\tan\theta$ を定義しない．

[*11] この等号は，（動径 OP の傾き）$= \dfrac{\text{（点 P の } y \text{ 座標）} - \text{（点 O の } y \text{ 座標）}}{\text{（点 P の } x \text{ 座標）} - \text{（点 O の } x \text{ 座標）}}$ であることから導かれる．

【例題 29】



1. 図 I の角点 P，図 II の角点 S の座標を求めよ．
2. cos 120°，sin 120°，tan 120°，cos 180°，sin 180°，tan 180° の値を求めなさい．
3. ∠AOX = 135° となるときの角点 A のおよその位置を図 III に書き込み，A の座標を答えよ．
4. sin 135°，cos 135°，tan 135° の値を求めよ．

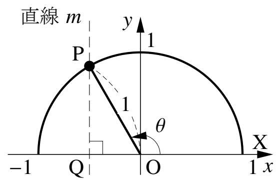
D.　三角比から角度を求める

（p.261 の三角比の表を用いずに）三角比から角度を求めることを考えよう．そのためには，単位円を書いて，角点がどこにあるのかを書き込めばよい．

【例題 30】 $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求めたい．それには

（角点 P の $\boxed{\text{ア}}$ 座標）$= -\dfrac{1}{2}$

となればよい．直線 m ： $\boxed{\text{ア}} = -\dfrac{1}{2}$ と単位円の交点は右図の P になり，



$\angle\text{POQ} = \boxed{\text{イ}}$ である．よって，図中の角 θ は $\boxed{\text{ウ}}$ であるから $\theta = \boxed{\text{ウ}}$ とわかる．

【暗記 31：拡張された三角比】

図 I

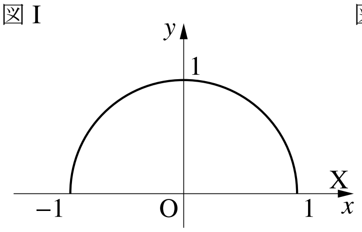


図 II

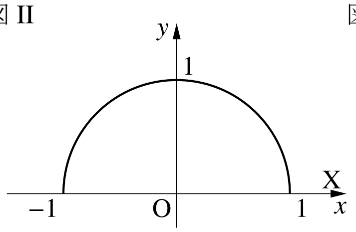
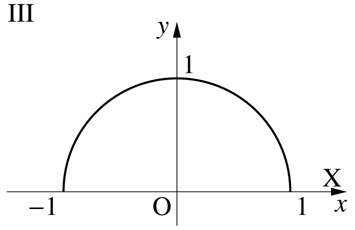
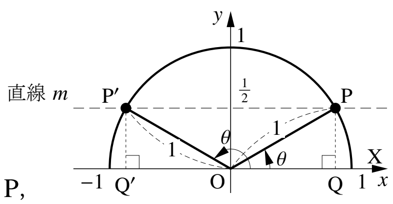


図 III



1. $\angle$POX = 30° となる角点 P を図 I に書き込み，cos 30°，sin 30°，tan 30° の値を求めよ．
（図に書き込む点は**およその位置**でよい，これは以下の問題でも同様である．）
2. $\angle$QOX = 150° となる角点 Q を図 II に書き込み，cos 150°，sin 150°，tan 150° の値を求めよ．
3. $\angle$ROX = 90° となる角点 R を図 III に書き込み，cos 90°，sin 90° の値を求めよ．

【練習 32：三角比を含む方程式〜その１〜】



$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求めたい．それには

（角点の $\boxed{\text{ア}}$ 座標）$= \dfrac{1}{2}$

となればよい．直線 m ：$\boxed{\text{ア}} = \dfrac{1}{2}$ と単位円の交点は右図の角点 P, P’ になり，$\angle$POQ も $\angle$P’OQ’ も $\boxed{\text{イ}}$ に等しい．よって，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ の解は $\theta = \boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ になる．

【練習 33：三角比を含む方程式〜その２〜】

以下の式を満たす θ を求めよ．ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$ (4) $\sin\theta = 1$

【発展 34：三角比を含む不等式】

以下の式を満たす θ を求めよ．ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

1 $\cos\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 2 $\sin\theta > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 3 $\tan\theta > -\sqrt{3}$

【練習 35：有名角の三角比】

0°，30°，45°，60°，90°，120°，135°，150°，180° の三角比の値をそれぞれ求めよ．

これらの値は，単位円を用いていつでも導けるようにしておこう．また，90° 以上の有名角でない角の三角比の値は，p.261 の三角比の表，『$90^\circ+\theta$ の三角比』(p.125)，『$180^\circ-\theta$ の三角比』(p.124) を用いて求める．

2. 拡張された三角比の相互関係

A. 拡張された三角比の相互関係

鋭角の三角比において成立した以下の式は，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ においても成立する．

拡張された三角比の相互関係

角 θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の式が成り立つ．（ただし，i), iii), iv) において，分母が 0 となる場合は考えない．）

i) $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の関係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

ii) $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の関係

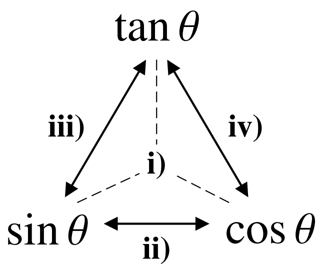
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

iii) $\tan\theta$ と $\sin\theta$ の関係

$$1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

iv) $\cos\theta$ と $\tan\theta$ の関係

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

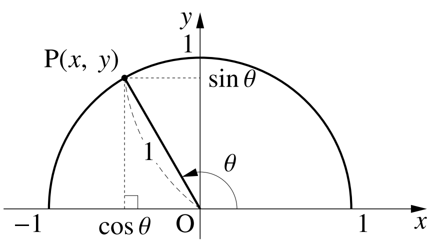


右図の単位円において $\cos\theta = x$，$\sin\theta = y$ であり

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

は tan の定義であった[*12]．また，三平方の定理より $x^2+y^2=1$ であるから

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$



が成り立つ．この等式から，鋭角の時と同じように iii), iv) は導かれる（自力で導けるよう練習しよう）．

[*12] p.116 の脚注を参照のこと

【**例題 36**】 次の問に答えよ．ただし $0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ である．

1. $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．
2. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

公式 ii)，iii)，iv) を用いるときは，sin は負の値にならないことに注意して解く必要がある．
一方，cos，tan の値は，負の値もとりうることに注意しよう．

【暗記 37：$\tan\theta$ と $\cos\theta$ との関係】

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ から，等式 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ を導け．

【練習 38：三角比の相互関係の利用～その３～】

『拡張された三角比の相互関係』を使って次の問に答えよ．ただし $0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ である．

(1) $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

(2) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

(3) $\tan\alpha=7$ のとき，$\cos\alpha$，$\sin\alpha$ の値を求めよ．

【練習 39：三角比の計算】

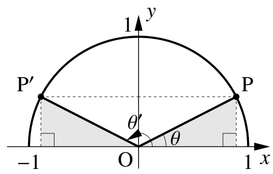
次の式を簡単にせよ．

(1) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

(2) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

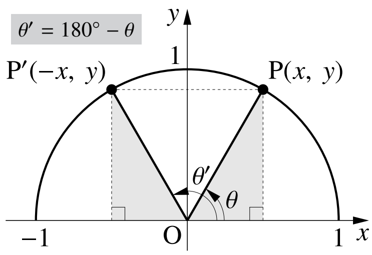
B.　$180° - \theta$ の三角比

【例題 40】　右の単位円において，角点 P の座標は $(0.891, 0.454)$ である．以下の問いに答えよ．



1. $\cos\theta$，$\sin\theta$ を求めよ．
2. 図中の θ' を θ で表せ．
3. P′ の座標を求めよ．
4. $\cos\theta'$，$\sin\theta'$ を求めよ．

右図のように，単位円周上に角 θ の動径 OP と角 $180° - \theta$ $(= \theta'$ とする$)$の動径 OP′ をとる．



点 P の座標を (x, y) とすると，点 P′ の座標は $(-x, y)$ であり

$$\sin\theta' = y = \sin\theta, \qquad \cos\theta' = -x = -\cos\theta,$$

$$\tan\theta' = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

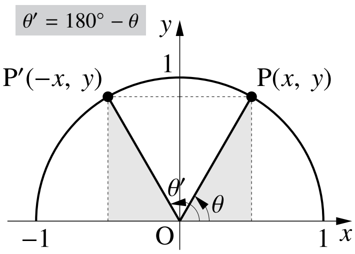
と表すことができる．ここで，$\theta' = 180° - \theta$ であるから，次のようにまとめることができる．

$180° - \theta$ の三角比

角 θ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の三角比において

$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$$

が成り立つ(ただし，$\tan 90°$ は考えない)．



つまり，$90° < \theta \leqq 180°$ の三角比は，$0° \leqq \theta < 90°$ の三角比になおして，その値を求めることができる．

【例題 41】 次の式を満たすように $\boxed{}$ の中に $90°$ より小さい角を入れよ．

1. $\sin 100° = \sin \boxed{}$
2. $\cos 179° = -\cos \boxed{}$
3. $\tan 125° = -\tan \boxed{}$

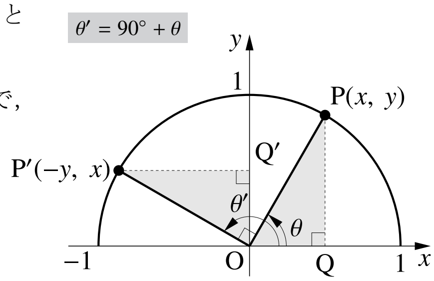
この式は暗記するようなものではない．「$180^\circ-\theta$ の三角比は θ だけを使った三角比で表せる」ことを理解し，必要なときに，上のように単位円を描き，導出できるようにしておこう．

【例題 42】 p.261 を用いて，$\cos 110^\circ$，$\sin 110^\circ$，$\tan 110^\circ$ の値を求めよ．

C. $90^\circ+\theta$ の三角比

右図のように，単位円周上に角 θ の動径 OP と角 $90^\circ+\theta$ $(=\theta'$ とする$)$の動径 OP′ をとる．

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，△OPQ と △OP′Q′ は合同なので，点 P′ の座標は $(-y,\ x)$ となるから



$$\sin\theta' = x = \cos\theta, \qquad \cos\theta' = -y = -\sin\theta,$$

$$\tan\theta' = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\tan\theta}$$

と表すことができる．ここで，$\theta'=90^\circ+\theta$ であるから，次のようにまとめることができる．

$90^\circ+\theta$ の三角比

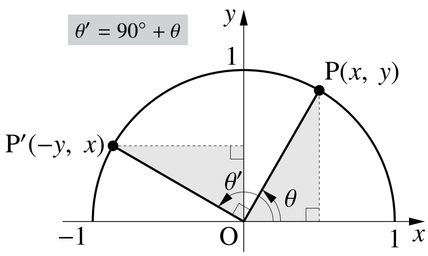
角 θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の三角比において

$$\sin(90^\circ+\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ+\theta) = -\frac{1}{\tan\theta}$$

が成り立つ(ただし，$\tan 90^\circ$ は考えない)．



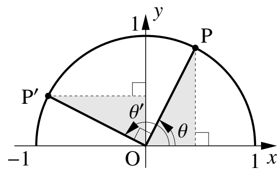
【例題 43】 次の式を満たすように $\boxed{}$ の中に 90° より小さい角を入れよ．

1. $\sin 100^\circ = \cos\boxed{}$ 　2. $\cos 179^\circ = -\sin\boxed{}$ 　3. $\tan 125^\circ = -\dfrac{1}{\tan\boxed{}}$

この式も暗記するようなものではない．「$90^\circ+\theta$ の三角比は θ だけを使った三角比で表せる」ということを理解し，必要なときに，上のように単位円を描いて導出できるようにしておこう．

【暗記 44：$90° + \theta$ の三角比の導出】

右の単位円において，角点 P の座標は (a, b) である．以下の問いに答えよ．



1. $\cos\theta$, $\sin\theta$ を a, b で表せ．
2. 図中の θ' を θ で表せ．
3. P′ の座標を a, b で表せ．
4. $\cos\theta'$, $\sin\theta'$ を a, b で表せ．

【練習 45：$180° - \theta$, $90° + \theta$ の三角比の利用〜その１〜】

次の式を満たすように $\boxed{}$ の中に $90°$ より小さい角を入れよ．

(1) $\cos 120° = -\cos\boxed{ア}$, $\sin 120° = \sin\boxed{イ}$　(2) $\cos 120° = -\sin\boxed{ウ}$, $\sin 120° = \cos\boxed{エ}$

(3) $\tan 120° = -\tan\boxed{オ} = -\dfrac{1}{\tan\boxed{カ}}$

【練習 46：$180° - \theta$, $90° + \theta$ の三角比の利用〜その２〜】

次の式を簡単にしなさい．

(1) $\sin 20° + \sin 50° + \sin 80° + \cos 110° + \cos 140° + \cos 170°$

(2) $\cos 10° + \cos 50° + \cos 90° + \cos 130° + \cos 170°$

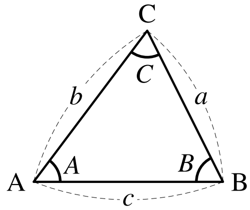
2.3 余弦定理・正弦定理

1. 辺と角の名前

$\triangle$ABC において，次のように略すことが多い．目的は，後で学ぶ公式を見やすくする事である．

$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C の大きさ　$\longrightarrow$　それぞれ A，B，C

辺 BC，CA，AB の長さ　$\longrightarrow$　それぞれ a，b，c



たとえば，角 A の向かい側にある辺 BC を a と表すことになる．

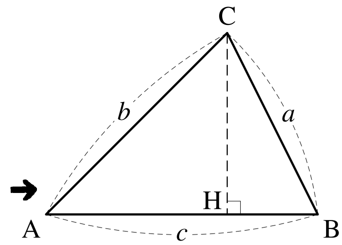
今後，特に断りのない限りこの記法にしたがうこととする．

2. 余弦定理（第 2 余弦定理）

A. 点 A からみた余弦定理

A が鋭角である $\triangle$ABC において，右図のように垂線 CH をひき，$\triangle$BCH に三平方の定理を用いると

$$
\begin{aligned}
a^2 = \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\
&= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\
&= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\
&= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos A
\end{aligned}
$$



という等式が成り立つ．この等式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

を（点 A からみた）**余弦定理** (cosine theorem) と呼ぶ[*13]．

【例題 47】 $\triangle$ABC において，$b = 3$，$c = 4\sqrt{2}$，$A = 45^\circ$ のとき，a の値を求めよ．

[*13] **第 2 余弦定理** (second cosine theorem) ともいう．第 1 余弦定理については p.159 を参照のこと．単に「余弦定理」というときにはこちらを指す．

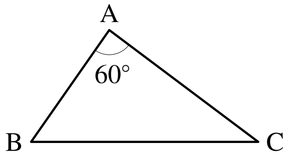
【練習 48：余弦定理の利用〜その１〜】

右図の △ABC について，以下の問いに答えなさい．

(1) a, b, c は，通常どの辺の長さを表すか．右図に書き込みなさい．

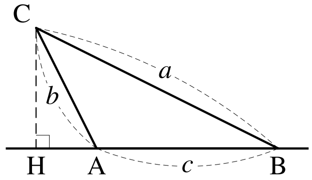
(2) $b = 3$，$c = 2$ のとき，a の値を求めよ．

(3) $a = 3\sqrt{7}$，$c = 6$ のとき，b の値を求めよ．



B. 辺の長さを求める

（点 A からみた）余弦定理は，A が鋭角でなくても成り立つ．右下の図のように，直線 AB 上に垂線 CH をひき，△BCH に三平方の定理を用いると



$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= a^2 = \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\
&= \{b\sin(180^\circ - A)\}^2 + \{c + b\cos(180^\circ - A)\}^2 \\
&= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \quad \leftarrow『180^\circ - \theta \text{ の三角比}』(\text{p.124})
\end{aligned}
$$

（Aが鋭角の時と同じ計算になるので，省略）

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (\text{右辺})$$

角 A が直角のときも，上の等式において $A = 90^\circ$ とすれば成立する．

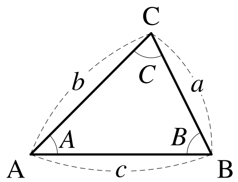
余弦定理（辺の長さを求める）

△ABC において，次の等式が成り立つ．

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ （点Aからみた余弦定理）

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ （点Bからみた余弦定理）

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ （点Cからみた余弦定理）



たとえば，点 A から見る代わりに点 B から見ると，a は b に，b は c に，c は a に，A は B になって，点 A からみた余弦定理は点 B からみた余弦定理となる．

この公式は，「2 辺とその間の角が分かれば三角形は決定し，特に，もう 1 辺の長さが決まる」事実に対応している．ただし，上の例題 (3) や p.131, 135 のように「2 辺とその間でない角」が与えられた三角形においても，この余弦定理は利用できる．

【例題 49】 △ABC において，$a = 3$，$b = 4\sqrt{2}$，$C = 135°$ のとき，c の値を求めよ．

C. 角（の余弦）の大きさを求める

点 A から見た余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を $\cos A$ について解けば

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

となるので，a, b, c の大きさから角 A（の余弦）求めることができる．

この等式も，単に余弦定理と呼ばれることが多い．

【例題 50】 △ABC において，$a = \sqrt{19}$，$b = 3$，$c = 5$ のとき，A の値を求めよ．また，$\cos C$ を求めよ．

「$\cos C$ を求めよ」のような問題では，角 C の値を求める必要はない．

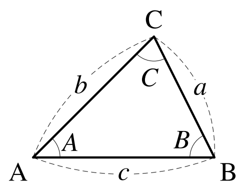
余弦定理（角の余弦を求める）

△ABC において，次の等式が成り立つ．

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{（点Aからみた余弦定理）}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \qquad \text{（点Bからみた余弦定理）}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad \text{（点Cからみた余弦定理）}$$



この等式は「3 辺を決めれば三角形も決定し，内角の大きさが決まる」ことに対応している．

この形で余弦定理を覚えてもよい．覚えやすい方で覚え，もう一方へ変形できれば十分である．

【暗記 51：余弦定理の式変形】

1. 等式 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ から，$\cos B$ を a, b, c で表す式を導け．

2. 等式 $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ から，c^2 を求める式を導け．

3. 三角形の決定（１）

A. 三角形の決定条件・その１〜３辺が与えられた場合

3 辺の長さを与えれば，三角形はただ 1 つに決定し，余弦定理を用いて，各頂点の角度の大きさを計算できる．これは，三角形の合同条件「3 辺が等しい(3 辺相等)」に対応している．

【練習 52：余弦定理の利用〜その２〜】

△ABC の 3 辺の長さが $a = \sqrt{21}$，$b = 4$，$c = 5$ のとき

(1) A の値を求めよ．　　(2) $\cos C$ を求め，∠C は鋭角か鈍角か答えよ．

B. 鋭角三角形・鈍角三角形

鋭角三角形なのか，鈍角三角形なのかは，三角形の一番大きな角が鋭角か，鈍角か調べれば十分である．

【練習 53：鋭角三角形・鈍角三角形】

3 辺が 4, 5, 7 の三角形において，最も大きな角はどこか．また，これは鋭角三角形か，鈍角三角形か．

点 A からみた余弦定理 $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab}$ を用いて，次の事実が導かれる．

A が鋭角 $\Leftrightarrow$ $\cos A > 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 < b^2 + c^2$

A が直角 $\Leftrightarrow$ $\cos A = 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$ （三平方の定理に一致）

A が鈍角 $\Leftrightarrow$ $\cos A < 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 > b^2 + c^2$

C. 三角形の決定条件・その２～２辺とその間の角が与えられた場合

2 辺とその間の角を与えれば三角形はただ 1 つに決定し，余弦定理を用いて残りの辺の長さと角度の大きさを計算できる．これは，三角形の合同条件「2 辺とその間の角が等しい(2 辺夾(きょう)角相等)」に対応している．

【例題 54】 △ABC において，$a = 3$，$b = 3\sqrt{2}$，$C = 135°$ のとき，c，$\cos B$ の値を求めよ．

D. 答えが 2 つある三角形

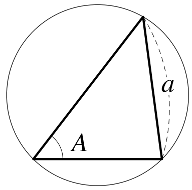
2 辺とその間でない角が与えられた場合も，余弦定理を用いて計算できる．しかし，三角形が決定するとは限らず，答えが 2 つになる場合がある．この問題については p.135 において再び取り上げられる．

【練習 55：2 辺とその間でない角が与えられた場合～その１～】

$A = 60°$，$a = 9$，$b = 10$ である三角形において，c を求めよ．

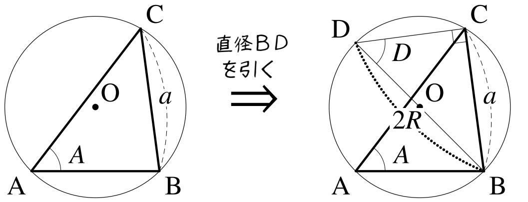
4. 正弦定理

A. 外接円と正弦定理



三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円** (circumscribed circle) といい，外接円の中心を**外心** (circumcenter) という[*14]．数学 A で学ぶように，1 つの三角形に対し，外接円と外心は 1 つに定まる．

次のように，外心が O である鋭角三角形 △ABC を考え，直径 BD を引こう．



線分 BD は円の直径なので ∠BCD = 90° であり，△DBC は直角三角形と分かり，$\sin D = \dfrac{a}{2R}$ である．円周角の定理より $A = D$ であるので

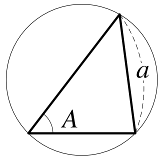
$$\frac{a}{2R} = \sin D = \sin A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

同様に，$\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ も成り立つ．これらの等式を，**正弦定理** (sine theorem) という．

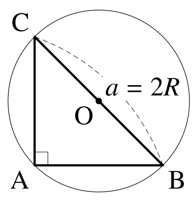
(…)正弦定理では，頻繁に複分数 (p.103) の計算を必要とするので，よく練習しよう．

【例題 56】 △ABC の外接円の半径を R とする．以下の問に答えなさい．

1. $a = 4$, $\sin A = \dfrac{1}{3}$ のとき，R を求めよ．
2. $a = \sqrt{7}$, $A = 30°$ のとき，R を求めよ．
3. $a = \sqrt{6}$, $A = 60°$ のとき，R を求めよ．

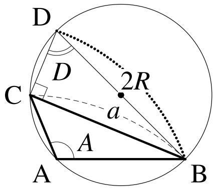


B. 直角三角形・鈍角三角形の正弦定理



A が直角のときは $\sin A = \sin 90° = 1$ である．また，$a = 2R$ である．つまり $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ は両辺とも a と一致し成立する．

[*14] 外心は 3 辺の垂直二等分線の交点に一致する．詳しくは，数学 A で扱う．



A が鈍角のとき，左図のように △ABC の外接円に直径 BD を引くと

$$
\begin{aligned}
A &= \angle\mathrm{DAC} + \angle\mathrm{DAB} \\
&= \angle\mathrm{DBC} + \angle\mathrm{DCB} && \text{（いずれも，円周角の定理）} \\
&= 180^\circ - D && \text{（△DCB に着目）}
\end{aligned}
$$

である[*15]ので，『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.124) から，$\sin A = \sin(180^\circ - D) = \sin D$ とわかる．

直角三角形 △DBC について $\sin D = \dfrac{a}{2R}$ であるから，次のようにして正弦定理が示される．

$$\sin A = \sin D = \frac{a}{2R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

C. 正弦定理のまとめ

3 つの等式 $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ から，次のようにまとめることができる．

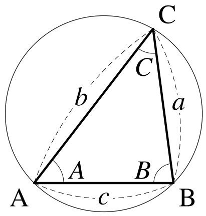
正弦定理

△ABC の外接円の半径 R について

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立つ．特に，辺と角について次の 3 つの式が成り立つ．

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$



【例題 57】

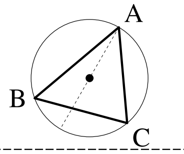
1. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ を a について解け．また，$\sin A = \dfrac{1}{3}$, $b = 6$, $\sin B = \dfrac{2}{5}$ のとき，a の値を求めよ．
2. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ を $\sin A$ について解け．また，$a = 2$, $b = 3$, $\sin B = \dfrac{3}{7}$ のとき，$\sin A$ の値を求めよ．

[*15] 一般に，円に内接する四角形においては，向かい合う 2 角の和は 180° となる (p.142)．詳しくは，数学 A でも取り扱われる．

【暗記 58：正弦定理の証明】

右図について，円の半径を R とする．

$b = 2R\sin B$ を証明しなさい．



等式 $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$ を確認できるようにしよう．

5. 三角形の決定（２）

A. 三角形の決定条件・その３～１辺とその両端の角が与えられた場合

1 辺とその両端の角が与えれば，三角形はただ 1 つに決定し，残りの辺の長さ，角度またはその余弦を求められる．これは，三角形の合同条件「1 辺とその両端の角が等しい(2 角夾(きょう)辺相等)」に対応している．

【練習 59：正弦定理の利用～その２～】

(1) $\triangle$ABC において，$c = 12$，$C = 45^\circ$，$A = 60^\circ$ のとき，a の値と，$\triangle$ABC の外接円の半径を求めよ．

(2) $\triangle$ABC において，$b = 7$，$B = 60^\circ$，$c = 6$ のとき，$\sin C$ の値と，$\triangle$ABC の外接円の半径を求めよ．

正弦定理から 4 つのことが分かる．上のように辺の長さを求めること，角の（正弦の）大きさを求めること，さらに，外接円の半径を求めること (p.132) と，正弦の比と辺の比が等しいこと (p.136) である．

B. 三角形の決定条件・その４～２辺とその間でない角が与えられた場合

p.131 でも取り上げた，2 辺とその間でない角が与えられた場合を再び考えよう．

【練習 60：2 辺とその間でない角が与えられた場合】

(1) $A = 30°$，$a = \sqrt{2}$，$b = 2$ である三角形を考えよう．正弦定理を用いて，$B = \boxed{ア}, \boxed{イ}$（ア＜イ）とわかる．一方，余弦定理を用いて，$c = \boxed{ウ}, \boxed{エ}$（ウ＜エ）とわかる．

ここで，$B = \boxed{ア}, \boxed{イ}$ のときの図をそれぞれ描けば，$B = \boxed{オ}$ のときの方が c が大きいので，$B = \boxed{ア}$ ならば $c = \boxed{カ}$，$B = \boxed{イ}$ ならば $c = \boxed{キ}$ とわかる．

(2) $A = 45°$，$a = 2$，$b = \sqrt{2}$ である三角形を考えよう．

正弦定理を用いると B の値は 2 つ求められるが，このうち $B = \boxed{ク}$ のみ適する．

実際，余弦定理を用いると c の値は 2 つ求められるが，このうち $c = \boxed{ケ}$ のみ適している．

C. 正弦の比と辺の比

【発展 61：正弦定理と正弦の比】

$\triangle$ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 4 : 5$ であるとき，次の問いに答えよ．

① 3 辺の長さの比 $a : b : c$ を求めよ．　② $\cos A$ を求めよ．

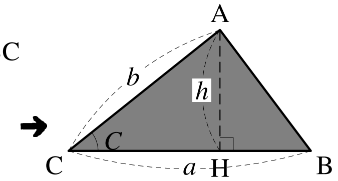
①から分かるように，$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ である．また，②で計算できたように，3 辺の比さえ分かれば 3 角の大きさは決定される．

2.4 平面図形の計量

1. 三角形の面積と三角比

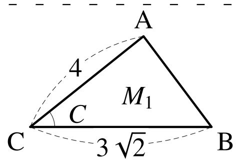
右図において $\triangle$ACH に着目すれば $h = \mathrm{AH} = b\sin C$ であるので，$\triangle$ABC の面積は次のように計算できる．

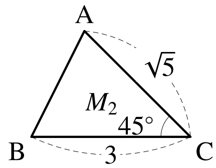
$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}a \cdot b\sin C = \dfrac{1}{2}ab\sin C$



【例題 62】

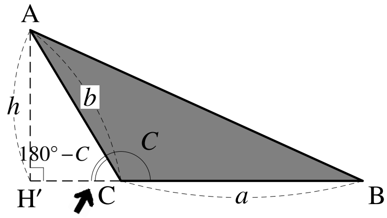
1. 右の三角形 M_1 の角 C について，$\sin C = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ であるという．M_1 の面積を求めよ．
2. 左の三角形 M_2 の面積を求めよ．





∠A が鈍角の場合も，△ACH′ に着目して

$h = b\sin(180° - C) = b\sin C$



である（『180° − θ の三角比』(p.124) を用いた）ので，

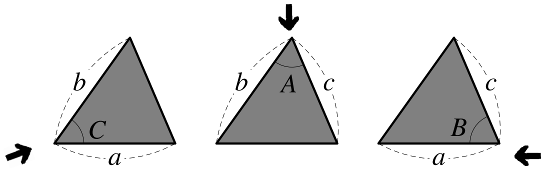
$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

と計算でき，同じ式を得る．また，$\theta = 90°$ の直角三角形の場合も同じ式が成り立つと分かる．

上の面積の公式は，角 C から見て得られた．角 A, B から見た場合も同様の公式が得られる．

三角形の面積

三角形の面積 S は，$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B$ で求めることができる．



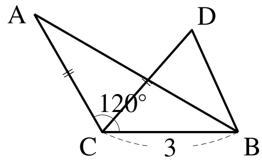
2 辺の長さと，その間の角の sin を掛けて，$\dfrac{1}{2}$ 倍すると面積になる，と理解すればよい．

【練習 63：三角形の面積～その１～】

右の図形において，AC = DC = $\sqrt{7}$ とする．

(1) △ACB の面積を求めよ．

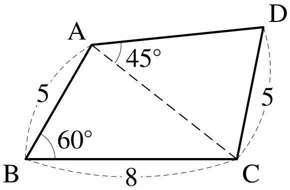
(2) $\sin\angle\mathrm{DCB} = \dfrac{3}{4}$ のとき，△DCB の面積を求めよ．



$\dfrac{1}{2}$ を掛け忘れないよう注意しよう．特に，発展で学ぶ『ヘロンの公式』(p.139) と区別すること．

【練習 64：四角形の計量】

四角形 ABCD において，$AB = 5$，$BC = 8$，$CD = 5$，$\angle ABC = 60°$，$\angle CAD = 45°$ のとき，次の問に答えよ．



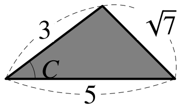
(1) AC の長さを求めよ．

(2) AD の長さを求めよ．

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ．

【練習 65：三角形の面積〜その２〜】

右図の三角形について，以下の問いに答えよ．



(1) $\cos C$ を求めよ．　　(2) 三角形の面積 S を求めよ．

【発展 66：ヘロンの公式】

三角形の 3 辺の長さを a, b, c とし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくとき，面積 S は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ に等しくなる．これをヘロンの公式という．この公式を用いて，以下の問いに答えなさい．

① 3 辺の長さが 5, 3, 6 である三角形の面積 S_1，4, 3, 2 である三角形の面積 S_2 を求めよ．

② 3 辺の長さが 5, 3, $\sqrt{7}$ である三角形の面積 S_3 を求めよ．

3 辺の長さがすべて整数の時は,「ヘロンの公式」を用いると面積の計算が特に簡単になる．
「ヘロンの公式」の証明は p.160 を参考のこと．自分で導こうとするとよい練習になる．

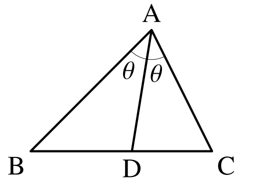
2. 平面図形の重要な問題・定理

A. 角の 2 等分線

【暗記 67：角の 2 等分線の定理】

AB = 4, AC = 3 の △ABC において，∠A の 2 等分線と辺 BC との交点を D とする．

1. BD : DC を求めよ．
2. BC = $\sqrt{21}$ のとき，AD の長さを求めよ．



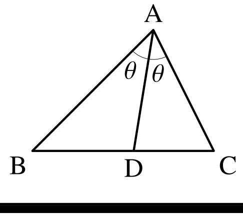
角の 2 等分線の定理

△ABC において，∠A の 2 等分線と辺 BC との交点を D とするとき

$\triangle ABD : \triangle ADC = \frac{1}{2}AB \cdot \cancel{AD\sin\theta} : \frac{1}{2}AC \cdot \cancel{AD\sin\theta}$（「面積の公式」より）

$\triangle ABD : \triangle ADC = BD : DC$（底辺の比より）

から，AB : AC = BD : DC が成り立つ．



つまり，角の 2 等分線においては，上の 2 辺の比と下の線分の比が一致する．

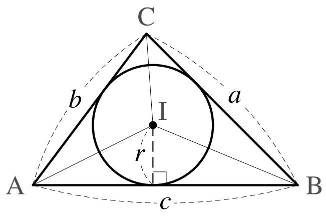
B. 内接円の半径

【暗記 68：内接円の半径を求める】

三角形の 3 つの辺すべてに接する円を，その三角形の**内接円** (inscribed circle) という．1 つの三角形に対し，内接円は 1 つに定まる[*16]．

$b=4$，$c=5$，$A=60^\circ$ である $\triangle$ABC について，内接円の半径を r とする．

1. a の値を求めよ．
2. $\triangle$ABC の面積を求めよ．
3. $\triangle$ABC の内接円の半径を求めよ．

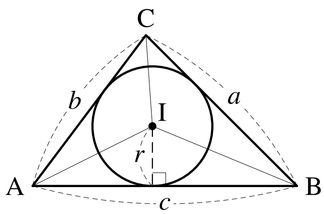


三角形の内接円と面積の関係

三角形の面積 S は，内接円の半径 r を用いて

$$S = \triangle\mathrm{BCI} + \triangle\mathrm{CAI} + \triangle\mathrm{ABI} = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

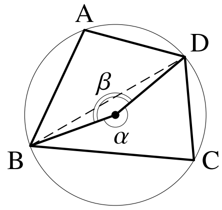
と表すことができる．ここで a，b，c は各辺の長さを表す．



この公式は，必要なときに導くことができれば十分である．ただし，三角形とその内接円を見たら「三角形の面積は計算できる」と連想できるようにしよう．

[*16] 内接円については，数学 A で詳しく取り扱う．

C. 円に内接する四角形



四角形 ABCD が円に内接しているとき，右のように α, β をおくと，中心角は円周角の 2 倍なので

A は右欄外の図の $\dfrac{1}{2}\alpha$ と等しく，C は右欄外の図の $\dfrac{1}{2}\beta$ と等しい.

よって，$A + C = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^\circ$ [*17]，さらに『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.124) から以下が導かれる.

円に内接する四角形の向かい合う角

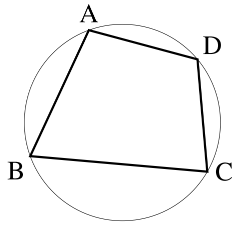
円に内接する四角形において，以下が成立する.

- $A + C = 180^\circ$ （$\Leftrightarrow$ $\angle\mathrm{A} = (\angle\mathrm{C}$ の外角$)$）

さらに，『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.124) を用いて

- $\cos A = -\cos C$ （$\cos A = -\cos(180^\circ - A)$ より）
- $\sin A = \sin C$ （$\sin A = \sin(180^\circ - A)$ より）

B, D についても同様である[*18].



四角形が円に内接している場合は，たいてい，次の関係のうちいくつかを使う.

- 円周角の定理
- 中心角が円周角の 2 倍（特に，直径に対する円周角は 90°）
- 上で学んだ，向かい合う角の関係

【例題 69】 四角形 ABCD は AB = 3, BC = 4, CD = 3, $B = 60^\circ$ であり，円に内接している.

1. 対角線 AC の長さを求めよ.
2. 辺 AD の長さを求めよ.

[*17] 『正弦定理』(p.133) の証明 iii) の中で，別の方法で証明した.

[*18] つまり，$\cos B = -\cos D$, $\sin B = \sin D$ が成り立つ.

【暗記 **70**：円に内接する四角形】

円に内接する四角形 ABCD において，AB = 4，BC = 5，CD = 3，DA = 3 とする．

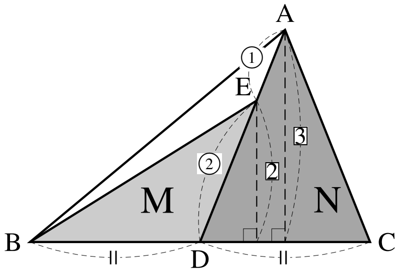
1. 対角線 BD の長さを求めよ．
2. 四角形 ABCD の面積を求めよ．

3. 平面図形の面積比

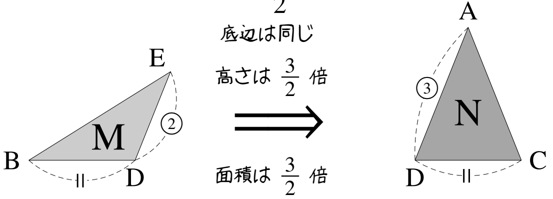
A. 相似でない２つの三角形の面積比

面積比を求めるときには，どこを底辺におくかが重要である．

まず，右の三角形 M，N の面積比を考えてみよう．

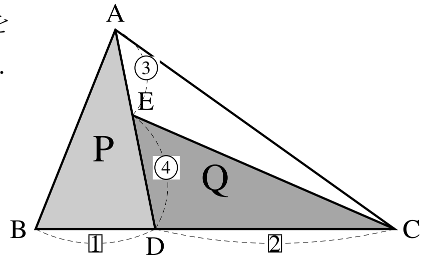


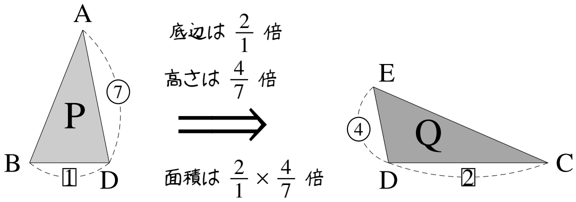
M の底辺を BD，N の底辺を CD とおけば，M，N の底辺の長さは等しく，M の高さの $\dfrac{3}{2}$ 倍が，N の高さになる．



つまり，M の面積を $\dfrac{3}{2}$ 倍すると N の面積に等しいと分かるから，M，N の面積比は 2 : 3 である．

次に，右の三角形 P，Q の面積比を考えてみよう．P の底辺を BD，Q の底辺を CD とすると，次のようにまとめることができる．





P の面積を $\dfrac{2}{1} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{8}{7}$ 倍すると Q の面積に等しいと分かるから，P，Q の面積比は 8 : 7 である．

【練習 71：平面図形の線分の比】

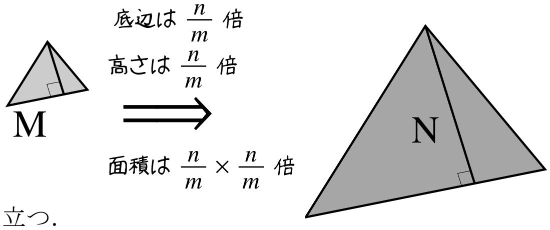
▱ABCD において，辺 BC 上に E を，辺 CD 上に F をとり，BE : EC = 1 : 2，DF : FC = 2 : 1 とする（▱は「平行四辺形」を表す）．

(1) $\triangle$FEC と $\triangle$DEC の面積比を求めよ．　(2) $\triangle$FBC と $\triangle$DEC の面積比を求めよ．

(3) $\triangle$FEC と ▱ABCD の面積比を求めよ．

B. 相似な平面図形の面積比

相似比が $m : n$ である，2 つの三角形の面積比を考えると右のようになる．つまり，M の面積を $\dfrac{n}{m} \times \dfrac{n}{m} = \left(\dfrac{n}{m}\right)^2$ 倍すると N の面積に等しいと分かり，M，N の面積比は $1 : \left(\dfrac{n}{m}\right)^2 = m^2 : n^2$ である．

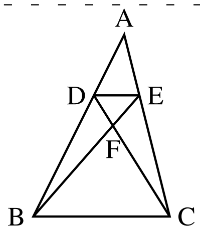


一般に，どんな平面図形においても，次のことが成り立つ．

相似な平面図形の面積比

相似比が $m : n$ である 2 つの平面図形について，その面積比は $m^2 : n^2$ である．

【例題 72】 右の図において，AD : DB = 1 : 2，AE : EC = 1 : 2 であるとする．



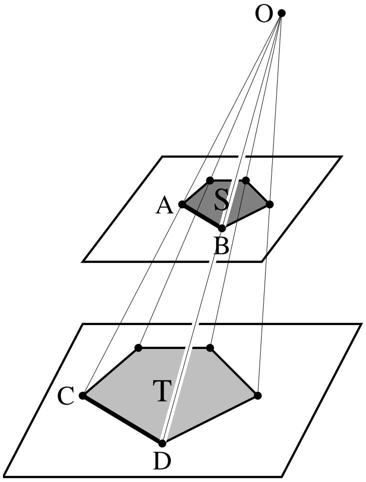
1. 相似な三角形の組を 2 つ見つけ（証明は無くてよい），それぞれについて面積の比を求めよ．
2. △DEF と △DBF の面積比を求めよ．
3. △DEF と △ABC の面積比を求めよ．

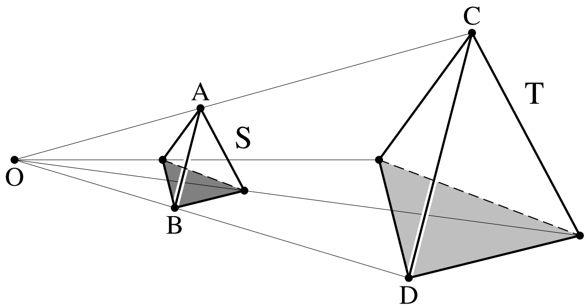
2.5 空間図形の計量

1. 空間図形の表面積比・体積比

A. 空間における相似について

2 つの図形が**相似** (similar) であるとは，「一方の図形を，ある 1 点に対して拡大・縮小すれば，他方の図形と合同になる」関係のことをいった．この定義は，空間内における相似にも当てはまる．





相似な二つの図形の，対応する辺の長さの比を**相似比** (ratio of similitude) という．

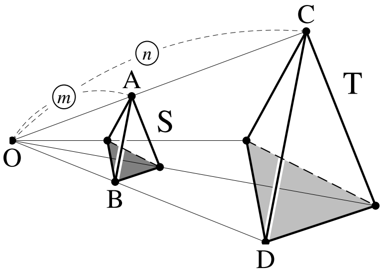
たとえば，上の図において，図形 S と図形 T はいずれも相似である．また，S と T の相似比はいずれも AB : CD に等しい．

【例題 73】 以下の，相似に関する文章は正しいか，間違いか答えなさい．

1. どのような 2 つの正方形も，相似である．
2. どのような 2 つの円も，相似である．
3. どのような 2 つの直方体も，相似である．
4. 2 つの立体 S と T が相似ならば，S の表面と T の表面は互いに相似である．

B.　相似な空間図形の表面積・体積の比

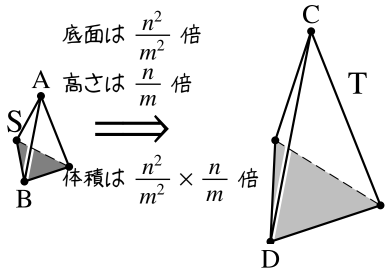
相似比が $m : n$ である，２つの相似な三角錐 S，T について，表面積比と体積比を考えてみよう．



p.4 で考えたように，２つの立体が相似ならば，その表面の図形は互いに相似である．

左の S と T の場合，S の４つの表面の図形の面積を S_1，S_2，S_3, S_4 とおけば, T の４つの表面の図形の面積は $\dfrac{n^2}{m^2}S_1$，$\dfrac{n^2}{m^2}S_2$，$\dfrac{n^2}{m^2}S_3$，$\dfrac{n^2}{m^2}S_4$ となるので，次のように分かる．

$$\text{(S の表面積) : (T の表面積)} = (S_1+S_2+S_3+S_4) : \left\{\frac{n^2}{m^2}(S_1+S_2+S_3+S_4)\right\}$$
$$= 1 : \left(\frac{n^2}{m^2}\right) = m^2 : n^2$$



次に体積比を考えよう．

上で考えたように，S の底面積の $\dfrac{n^2}{m^2}$ 倍が T の底面積になる．

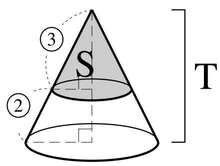
また，S の高さの $\dfrac{n}{m}$ 倍が T の高さになるから，S の体積を $\dfrac{n^2}{m^2}\times\dfrac{n}{m}=\dfrac{n^3}{m^3}$ 倍すると T の体積に等しい[*19]．よって，S，T の体積比は $m^3 : n^3$ である．

一般に，どんな空間図形においても，次のことが成り立つ．

相似な立体図形の表面積比・体積比

相似比が $m : n$ である２つの立体図形について，
(1) それぞれの表面をなす図形は相似であり，その相似比は $m : n$ である．
(2) 表面積比は $m^2 : n^2$ である．
(3) 体積比は $m^3 : n^3$ である．

【例題 74】 右図のような円錐 T を切り，上にできた円錐を S とする．
1. S と T は相似である．相似比を求めよ．
2. S と T の表面積比を求めよ．
3. T から S を除いた図形を U とする．S と U の体積比を求めよ．



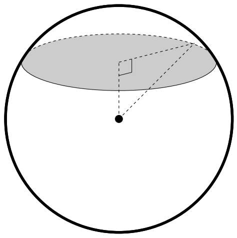
[*19] この例では，体積が $\dfrac{1}{3}\times$（底面積）$\times$（高さ）で求められるから分かる．

2. 球

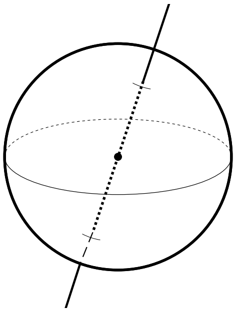
円を空間に広げたものが球，と考えてよい．

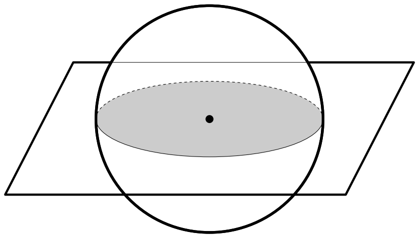
球は，最も美しい図形の 1 つとして，古来から人々の興味を惹いてきた．

球には以下の性質がある．

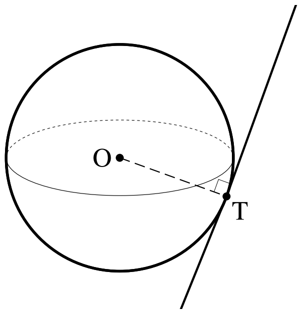


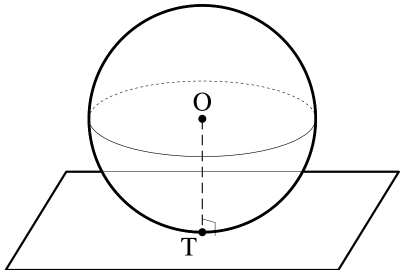
- 球を平面で切れば，その切り口は必ず円である．
- 中心を通るどの直線，平面に対しても，球は対称である．





- O を中心とする球が，球面上の点 T で平面・直線と接するとき，直線 OT はその平面・直線と直交する．





これらは，球の定義[20]と三平方の定理から証明することができる（ここでは省略する）．

[20] 「点 O を中心とする半径 r の球」は「点 O から距離 r にある空間上の点を全て集めてできる図形」と定義できる．また，数学 B において球面の方程式を学ぶ．

A.　球の表面積と体積

半径 r の球の体積，表面積は次のようになる[*21].

球の表面積・体積

半径 r の球について，　表面積は $4\pi r^2$，　体積は $\dfrac{4}{3}\pi r^3$　　である.

「表面積を表す $4\pi r^2$ の r^2 を $\dfrac{r^3}{3}$ におきかえると，体積を表す $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ になる」と覚えると良い.

【練習 75：球の表面積，体積】

(1) 半径 4 cm の球の，表面積と体積をそれぞれ求めよ.

(2) 1 辺 8 cm の立方体の表面積と直径 10 cm の球の表面積では，どちらが大きいか.

(3) 1 辺 10 cm の立方体に高さ 9 cm まで水を入れてある．この水の中に半径 3 cm の球を静かに入れると，何 cm^3 の水があふれるか．ただし，表面張力は考えない.

[*21] 数学 III の微積分を用いて，これらの計算ができる．体積については，次の発展 のようにして計算できる.

3. 空間図形と三角比

空間図形の問題は，特定の平面を取り出し，平面図形の問題として考えてみよう．

A. 直角が 1 つの頂点に集まった四面体

四面体の頂点の 1 つに，2 つ以上直角を含む場合は比較的簡単である．図形を切ることなく，どれかの面を取り出して考えればたいていうまくいくからである*22.

1 つの頂点に直角が 3 つ集まった三角錐のことを**直角三角錐** (rectangular triangular pyramid) という．

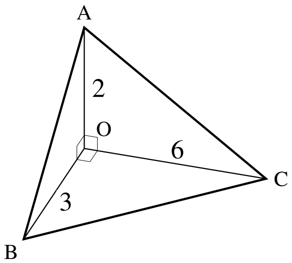
【練習 76：直角三角錐の計量】

右の図のように, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ の直角三角錐 OABC において，次の問に答えよ．ただし，OA = 2，OB = 3，OC = 6 とする．

(1) 辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ求めよ．

(2) $\angle ACB = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ．



【練習 77：三角錐の計量】

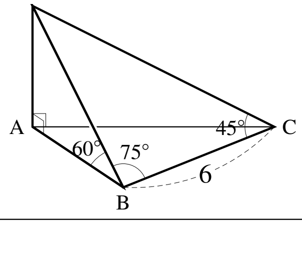
右図のような三角錐 OABC において，次の問に答えよ．

(1) 辺 OB の長さを求めよ．

(2) 辺 OC の長さを求めよ．

(3) 辺 AC の長さを求めよ．

(4) $\angle ABC = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．



*22 平面に対し，異なる 2 方向から直角である線分は，平面に対し垂線になっていることに注意すればよい．

【㊵㊶ **78**：山の高さを求める】

ある山から真北の地点 A と，真東の地点 B があり，この 2 点は 4 km 離れており，共に標高 200 m である．地点 A から山の頂上を見上げると 45° の高さであった．次に，地点 B から山の頂上を見上げると 30° の高さであった．この山の高さは何 km か.

B. 正多面体

空間図形において，全ての面が合同な正多角形からなり，各頂点に集まる辺の数が全て等しい多面体のことを**正多面体** (regular polyhedron) という[*23].

正多面体は，次の 5 つしかない．

正四面体，正六面体(立方体)，正八面体，正十二面体，正二十面体

正多面体にはたくさんの二等辺三角形がある．それを上手に生かした切り口を考えよう．

【練習 79：正四面体の計量】

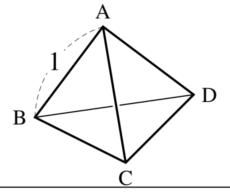
右下図のように，1 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD について以下の問に答えよ．

(1) $\triangle$BCD の面積 S を求めよ．

(2) 頂点 A から $\triangle$BCD に下ろした垂線の長さを求めよ．

(3) 発展 正四面体 ABCD に内接する球の半径を求めよ．

(4) 発展 正四面体 ABCD に外接する球の半径を求めよ．



*23 たとえば，正四面体は正多面体であるが，正四面体 2 つを重ねてできる六面体は，頂点に集まる辺の数が 3 つの場合と 4 つの場合があるので，正多面体ではない．

C. 正多角錐

角錐のうち，底面が正多角形で，側面が二等辺三角形で作られ，側面の頂点が一点に集まっている多面体のことを**正多角錐** (regular pyramid) という(正角錐ともいう)．底面が正 n 角形の正多角錐のことを正 n 角錐といい，n は 3 以上の自然数をとりうる．

正多角錐においては，頂点からの垂線の足が，底面の中心(対角線の交点)にくる．よって，底面の対角線を通る平面などに着目するとよい．

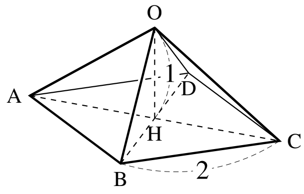
【練習 80：正四角錐の計量】

右図のように，底面の 1 辺の長さが 2，高さ OH が 1 である正四角錐 OABCD について以下の問に答えよ．

(1) AB の中点を M とするとき，$\angle$OMH を求めよ．

(2) A から辺 OB に下ろした垂線 AE の長さを求めよ．

(3) 辺 OB の中点を E とするとき，$\angle$AEC を求めよ．



(1) の $\angle$OMH は底面と側面のなす角に，(3) の $\angle$AEC は側面と側面のなす角に一致している．

D. 球を含んだ空間図形

空間図形に球を含む場合は，「球の中心と，球と他の図形の共有点」を結んだ平面に着目するとよい．

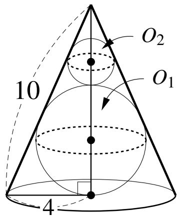
【練習 81：円錐と内接球】

底面の半径が 4，母線の長さが 10 の円錐がある．

(1) この円錐に内接する球 O_1 の半径を求めよ．

(2) 球 O_1 の上に外接し，さらに円錐に内接する球 O_2 の半径を求めよ．

ただし，球 O_1，O_2 とも，半径はできるだけ大きくなるようにする．



別解では断面が相似であることを使っているが，2 つの断面図のもとになる立体をそれぞれ考えても，やはり互いに相似である．

2.6 第２章の補足

1. 36°，72° などの三角比

A. 36°，72°，72° の三角形を考える

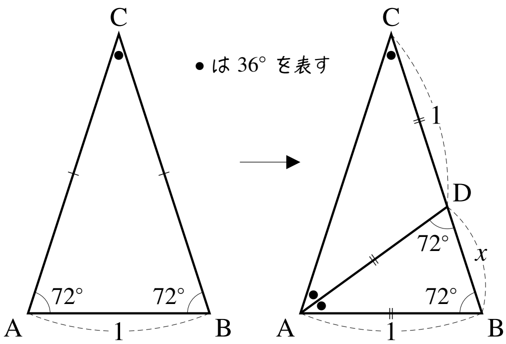
18° に関する三角比を考えるため，まず，右図の二等辺三角形 ABC について BC，AC の長さを求めよう[*24].

ここで，右図の奥のように ∠A の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする．このとき，

$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{DCA} = 36^\circ$

より △DAC は二等辺三角形になる．また

$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{ABD} = 72^\circ$



より △ABD も二等辺三角形になる．これらより，CD = AD = AB = 1 が成り立つ．

さらに，△CAB ∽ △ABD であるから，CB : AB = AB : BD が成り立つ．よって，$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{CB} \times \mathrm{BD}$ であるので，BD = x とおくと

$$1 \times 1 = (1 + x) \times x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$x > 0$ であるから，解の公式より $\mathrm{BD} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ と求められる．これより

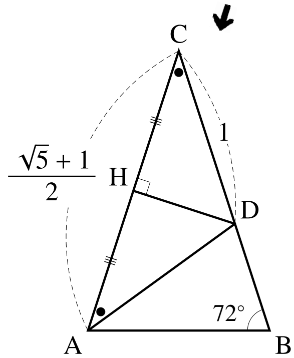
$$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} + 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

となる．また，$\mathrm{AC} = \mathrm{BD} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$ である．

B. 36° の三角比とその周辺

△ACD に着目し，右図のように．点 D から辺 AC へ垂線 DH を引く．

直角三角形 DCH に，余弦の定義を用いて



$$\cos 36^\circ = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{DC}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{CA}}{1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

さらに，三角比の相互関係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いて

$$\sin^2 36^\circ = 1 - \cos^2 36^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$$

であり，$\sin 36^\circ > 0$ であるから，$\sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ である．

また，これらより $\tan 36^\circ = \dfrac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}} =$（計算省略）$= \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ である．

[*24] 18° に関する三角比を求めるためには，AB の長さはいくつでもよい．ここでは，考えやすくするため 1 とした．

【練習 **82**：36° とその周辺の三角比】

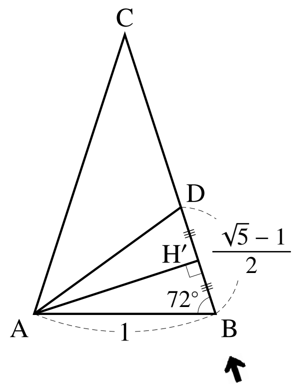
$\sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$，$\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，$\tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ を利用して次の三角比の値を求めよ.

(1) $\sin 54^\circ$，$\cos 54^\circ$，$\tan 54^\circ$

(2) $\sin 126^\circ$，$\cos 126^\circ$，$\tan 126^\circ$

(3) $\sin 144^\circ$，$\cos 144^\circ$，$\tan 144^\circ$

C. 72° の三角比とその周辺



今度は $\triangle$ABD に着目し，右図のように．点 A から辺 BD へ垂線 AH′ を引く．直角三角形 ABH′ に，余弦の定義を用いて

$$\cos 72^\circ = \frac{\text{BH}'}{\text{AB}} = \frac{\frac{1}{2}\text{BD}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

さらに，三角比の相互関係 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて

$$\sin^2 72^\circ = 1 - \cos^2 72^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

であり，$\sin 72^\circ > 0$ であるから，$\sin 72^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ である．

また，これらより $\tan 72^\circ = \dfrac{\sin 72^\circ}{\cos 72^\circ} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} =$（計算省略）$= \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ である．

【練習 83：72° とその周辺の三角比】

$\sin 72^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$，$\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\tan 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ を利用して次の三角比を求めよ．

(1) $\sin 18^\circ$，$\cos 18^\circ$，$\tan 18^\circ$

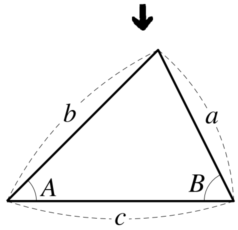
(2) $\sin 108^\circ$，$\cos 108^\circ$，$\tan 108^\circ$

(3) $\sin 162^\circ$，$\cos 162^\circ$，$\tan 162^\circ$

2. 第 1 余弦定理

三角形の 2 つの角と 2 辺の長さの間に次の関係式が成り立つ.

$c = b\cos A + a\cos B$

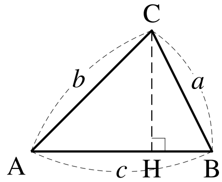


これを，**第 1 余弦定理** (first cosine theorem) という.

A が鋭角のときは，線分 AB 上に垂線 CH をひいて（A が直角の時は H と A が一致する）

（右辺）$= b\cos A + a\cos B = \mathrm{AH} + \mathrm{BH} = \mathrm{AB} = c =$（左辺）

となり成立する（A が直角の時は $a\cos A = 0$ なので $\mathrm{AH} = 0$）.



【暗記 84：第 1 余弦定理の導出】

上の続きとして，A が鈍角のときも第 1 余弦定理が成り立つことを証明せよ.

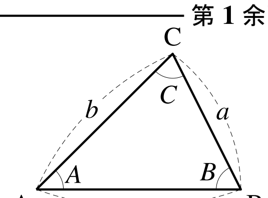
第 1 余弦定理

△ABC において次の等式が成り立つ.

$c = b\cos A + a\cos B$

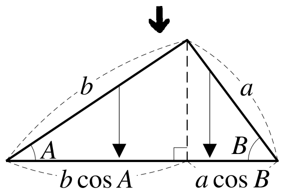
$b = a\cos C + c\cos A$

$a = c\cos B + b\cos C$



この定理は，ある角から見たときに左右 2 つの辺を向かいの辺に押しつぶす感じで覚えると良い.

また，上の暗記例題のように自分で垂線の引けるならば，公式を覚えなくてもよい.



3. ヘロンの公式の証明

【発展 85：ヘロンの公式の導出】

3 辺の長さが a, b, c である三角形について，以下の問いに答えなさい.

① 長さ c の辺の対角 C について，$\sin C$ を a, b, c で表せ．式は整頓しなくてよい.

② $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ としたとき，三角形の面積 S が $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ に等しいことを示せ.

第3章　２次関数・２次不等式

3.1 関数

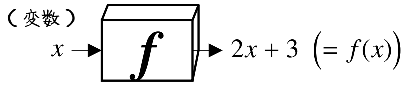
1. 関数とは

A. 関数とは何か

「実数 x を決めればただ 1 つの実数が決まる式」を（x の）**関数** (function) といい，$f(x)$，$g(x)$ のように表す[*1]．また，このときの x を**変数** (variable) という．

たとえば，$3\ \mathrm{m}^3$ の水が入っている水槽へ，毎分 $2\ \mathrm{m}^3$ の割合で水を入れることを考える．水を x 分間入れた後の，水槽の中の水の量は $2x+3\ (\mathrm{m}^3)$ である．

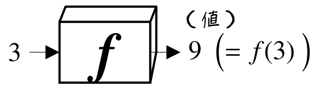
つまり，「水槽の中の水の量 (m^3)」は x によって決まるので，それを $f(x)$ とおけば



時間 (x) から水の量を決める規則

$$f(x)=2x+3 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

と書くことができる．①の変数 x に，$x=3$ を代入すれば



$x=3$ を $f(x)$ に代入して 9 を得る

$$f(3)=2\cdot3+3=9$$

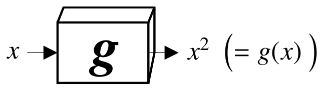
となって，3 秒後の水の量は $9\ \mathrm{m}^3$ と分かる．

ここで，$f(3)$ は関数 $f(x)$ に $x=3$ を代入して得られる**値** (value) と言う．

次のページで学ぶように，中学で学んだ関数の定義は，高校における関数の特別な場合になる．

【例題 1】 1 辺 x cm の正方形において「（x によって決まる）正方形の面積(cm^2)」を $g(x)$ とすれば

$$g(x)=x^2$$



正方形の 1 辺の長さ (x) から面積を決める規則

となる．この $g(x)$ について $g(4)$ を求めなさい．
また，その値は，どんな図形の面積を計算した結果になるか．

---

*1 $p(x)$，$a(x)$ などでもよいが，関数 (function) の頭文字である f からアルファベット順に，g，h などであることが多い．また，大文字の F，G なども使われる．

【練習 2：関数を表す】

次の関数を求めよ．また，それぞれ，変数を表す文字を答えよ．

(1) 縦が 4，横が x の長方形の面積 $a(x)$

(2) $6\ \mathrm{m}^3$ の水が入っている水槽へ，毎分 $3\ \mathrm{m}^3$ の割合で水を入れたときの，w 分後の水の量 $b(w)\ \mathrm{m}^3$

【練習 3：関数の値】

$f(x)=2x+3,\ g(x)=x^2,\ h(x)=2x^2-3x+3$ について，以下の問いに答えよ．

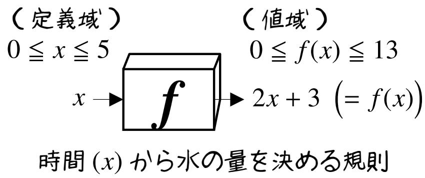
(1) $f(2),\ f(5),\ g(2),\ g(5)$ を求めよ，また，「$x=2t$ のときの $f(x)$ の値」である $f(2t)$ を t の式で表せ．

(2) $h(a),\ h(2t)$ の値を求めよ（$a,\ t$ を用いてよい）．

B. 関数の定義域・値域・最大値・最小値

中学で学んだ関数と同じように，定義域，値域，最大値，最小値を考えることができる．

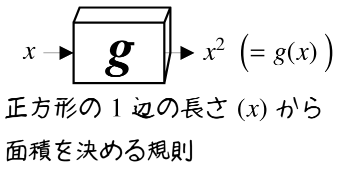
たとえば，p.161 の関数 $f(x)$ の例において，水槽の容積が $13\mathrm{m}^3$ であったならば，$f(x)=2x+3$ の**定義域** (domain) は $0 \leqq x \leqq 5$ である．というのも，$5<x$ では水槽から水があふれてしまうし，$x<0$ は意味では意味をもたない．



また，$f(x)$ の**値域** (range) は $0 \leqq f(x) \leqq 13$，**最小値** (minimum value) は $f(0)=0$，**最大値** (maximum value) は $f(5)=13$ である．

【例題 4】 1 辺 x cm の正方形において，「（x によって決まる）正方形の面積 (cm^2)」を表す関数 $g(x)=x^2$ について，以下の問いに答えよ．

1. $x=2$ は定義域に含まれるか．$x=-1,\ x=0$ はどうか．
2. 定義域を $1 \leqq x < 5$ としたとき，$g(x)$ の値域を求めよ．最小値・最大値があれば求めよ．



C. y を与える x の関数 — $y = f(x)$

中学において「関数」と呼んでいた $y = 2x + 3$ のような式も，「y を与える x の関数」として，単に関数とよぶことができる．このような「y を与える x の関数」は，一般的に $y = f(x)$ などと表される*2．

もう少し概念を広げれば，関数とは「変数を決めると，ただ 1 つの実数値が決まる規則」のことである．何かを入力すれば，何か実数値を出力するもの，それを「関数」とみなしてよい．

D. 文字定数

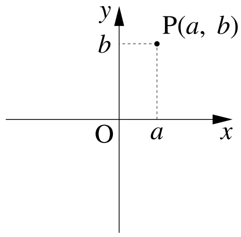
関数を表す式において，変数でない数値・文字を**定数** (constant) という．特に，変数でない文字を文字定数ということもある．

【例題 5】 関数 $f(x) = ax^3 + x^2 + bx + 2$ について，以下の問いに答えよ．

1. $f(x)$ に含まれる文字定数をすべて答えよ．
2. $a \fallingdotseq 0$ のとき，$f(x)$ は何次式か．
3. $a = 0$ のとき，$f(x)$ は何次式か．
4. $a = b = 0$ であるとき，$f(x)$ は何次式か．

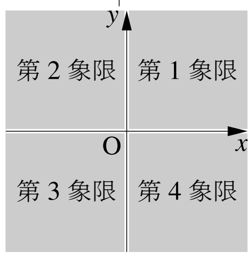
2. グラフによる関数の図示

A. 座標平面



関数を図示するには，中学までと同じように，**座標平面** (coordinate plane) を用いる．これは，平面に 2 本の直交する数直線（**座標軸** (coordinate axes) という）で定められた平面である*3．

座標平面は，座標軸によって次の 4 つの部分に分けられ，時計回りに



$x > 0$，$y > 0$ の部分：**第 1 象限**（しょうげん） (first quadrant)
$x < 0$，$y > 0$ の部分：**第 2 象限** (second quadrant)
$x < 0$，$y < 0$ の部分：**第 3 象限** (third quadrant)
$x > 0$，$y < 0$ の部分：**第 4 象限** (fourth quadrant)

とよばれる．ただし，座標軸はどの象限にも含めない．

【例題 6】 $(-2,\ 2)$ は第 $\boxed{ア}$ 象限，$(1, -2)$ は第 $\boxed{イ}$ 象限，$(-2, -3)$ は第 $\boxed{ウ}$ 象限である．

*2 2 つ以上の変数をもつ関数については，数学 II で詳しく学ぶ．
*3 右の図の場合は，特に xy（座標）平面といい，横の座標軸を x 軸，縦の座標軸を y 軸という．この x, y は他の文字でもよい．

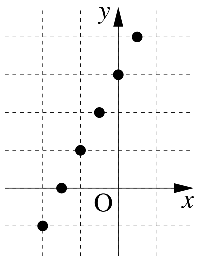
B. 関数のグラフ

「変数の値」と「関数の値」の対応は，中学校で学んだやり方で，座標平面上に表すことができる．たとえば，関数 $f(x)=2x+3$ について考えよう．

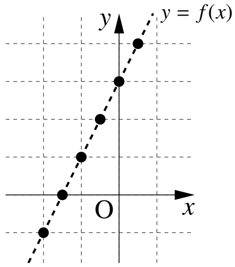
まず，$f(-2)=-1$，$f(-1)=0$ などの値を計算して，左下のような表ができる．

x	$\cdots$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$

$\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$



それぞれを座標平面上に点でとっていくと，変数 x の値は無数にあるので最終的に直線となる．この直線を関数 $y=f(x)$ の**グラフ** (graph) という．

一般には，関数 $f(x)$ について，$(x,\ f(x))$ を座標とする点全体の作る座標平面上の図形を「関数 $y=f(x)$ の**グラフ** (graph)」という．

【例題 7】 以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．ただし，$f(x)=2x+3$ とする．

1. 点 A$(1,\boxed{ア})$，B$(-3,\boxed{イ})$，C$\left(\dfrac{2}{3},\boxed{ウ}\right)$ は $y=f(x)$ のグラフ上にある．
2. 点 D$(\boxed{エ},7)$，E$(\boxed{オ},6)$，F$\left(\boxed{カ},\dfrac{1}{3}\right)$ は $y=f(x)$ のグラフ上にある．
3. 1. と 2. で求めた点のうち，第 2 象限にある点を答えよ．

【例題 8】 以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．ただし，$g(x)=x^2$ とする．

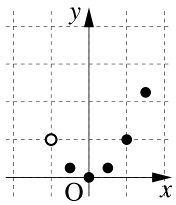
1. 点 $(2,\boxed{ア})$，$(-3,\boxed{イ})$，$\left(\dfrac{2}{3},\boxed{ウ}\right)$ は，$y=g(x)$ のグラフ上にある．
2. $y=g(x)$ のグラフ上にある y 座標が 3 の点は，$(\boxed{エ},3)$，$(\boxed{オ},3)$ である．

C.　グラフと最大値・最小値

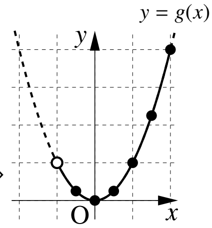
関数 $g(x) = x^2$ を定義域 $-1 < x \leqq 2$ において考えると，一番右のようなグラフ $y = g(x)$ $(-1 < x \leqq 2)$ を得る．

x	(-1)	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	(1)	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

$\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$



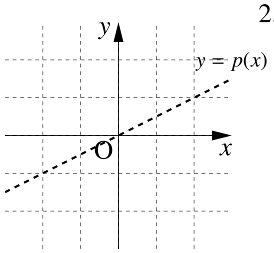
つまり，放物線の一部がグラフとなる．定義域から外れた部分は，右図のように点線で書く．$x = -1$ のように定義域の境目にあるが，定義域に含まれない点は，白丸で表す．

$x = -1$ は定義域に含まれないが，$x = -0.9, -0.99, -0.999, \cdots$ はすべて定義域に含まれるので，グラフは必ず白丸とつなぐ．

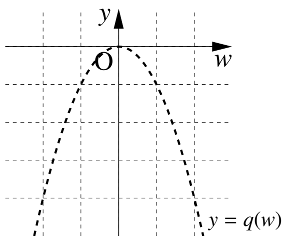
グラフの実数部分のうち，y 座標が一番小さい点は $(0,\ 0)$ であり，y 座標が一番大きい点は $(2,\ 4)$ である．ここから，関数 $g(x)$ の最小値が $g(0) = 0$ であり，最大値が $g(2) = 4$ であると分かる．

【例題 9】　関数 $p(x) = \frac{1}{2}x$, $q(w) = -w^2$ について，以下の問いに答えよ．

1. 右のグラフに関数 $y = p(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$ を書き込み，最大値・最小値があれば答えなさい．



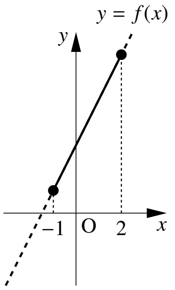
2. 右のグラフに関数 $y = q(w)$ $(-2 < w \leqq 1)$ を書き込み，最大値・最小値があれば答えなさい．



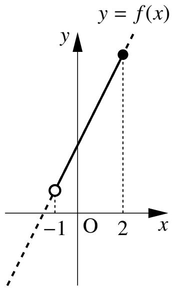
【練習 10：定義域，最大値，最小値，値域】

$f(x) = 2x + 3$，$g(x) = x^2$ とする．以下のグラフについて，それぞれ，定義域，最大値，最小値，値域を答えよ．最大値・最小値がない場合は「なし」でよい．

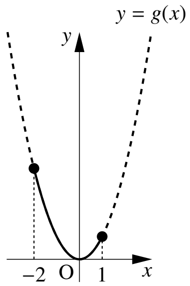
(1)



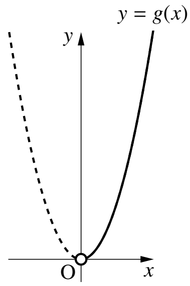
(2)



(3)



(4)



3. 方程式・不等式の解と関数のグラフ

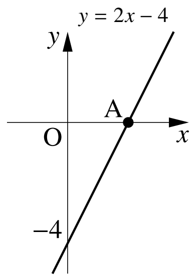
A. 1 次方程式の解・1 次関数のグラフ

たとえば，1 次関数 $y = 2x + 1$ が $y = 0$ となるときの x の値は 1 次方程式 $2x + 1 = 0$ を解けばよい．

このように，1 次関数の $y = 0$ となるときの値を求めるときに，1 次方程式を解く必要があり，その逆も成り立つ．

【暗記 11：1 次方程式と 1 次関数】

以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．



1. 1 次関数 $y = 2x - 4$ のグラフ上のうち y 座標が $\boxed{\text{ア}}$ になる点 A を求めるには，1 次方程式

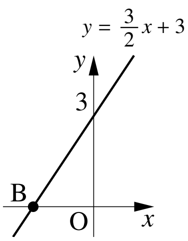
   $\boxed{\text{イ}} = 0$

   を解けばよい．その結果，A($\boxed{\text{ウ}}$, 0) と分かる．

2. 1 次関数 $y = \dfrac{3}{2}x + 3$ と $\boxed{\text{エ}}$ 軸の交点 B を求めるには

   $\dfrac{3}{2}x + 3 = 0$

   という 1 次方程式の解を求めればよい．その結果，B($\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$) と分かる．



3. 次のいずれの場合も，1 次方程式 $3x - 9 = 0$ を解けばよい．
   - 関数 $\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ 軸の交点を求める．
   - 関数 $\boxed{\text{キ}}$ の y 座標が $\boxed{\text{ケ}}$ になるときの x 座標を求める．

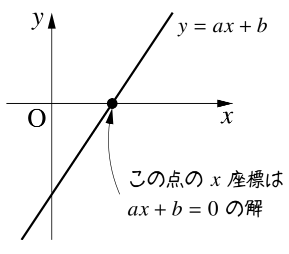
以上のことは，次のようにまとめられる．

1 次関数のグラフと 1 次方程式の解

$ax + b$ という 1 次式に対して

- $ax + b$ $= 0$ を解く
- $y =$ $ax + b$ のグラフと x 軸の交点（の x 座標）を求める
- $y =$ $ax + b$ のグラフ上の y 座標が 0 になる点（の x 座標）を求める

はいずれも同じである．



B. 連立方程式の解・1 次関数のグラフ

【暗記 12：連立方程式と 1 次関数】

以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．

1. 2 つの 1 次関数 $y=2x+1$ と $y=-3x+3$ の交点 A の座標は

　連立方程式 $\boxed{ア}$

　を解いて求めることができ，A($\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$) である．

2. 連立方程式 $\begin{cases} y=3x+4 \\ -2x+4=y \end{cases}$ の解は，2 つの 1 次関数 $\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$ の交点に一致し，$(x,\ y)=(\boxed{カ}, \boxed{キ})$ である．

2 つの 1 次関数のグラフの共有点と連立方程式

2 つの 1 次関数

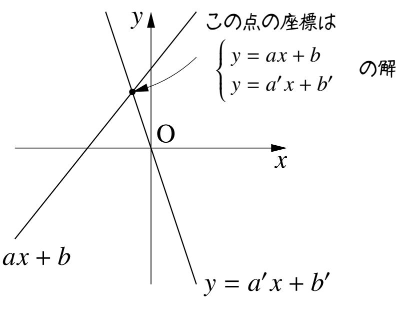
$y=ax+b$

$y=a'x+b'$

のグラフの共有点の (x 座標, y 座標) は，連立方程式

$$\begin{cases} y=ax+b \\ y=a'x+b' \end{cases}$$

の解 $(x,\ y)$ に一致する．

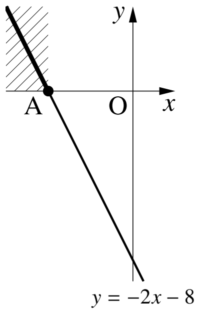


1 次方程式 $ax+b=0$ は，連立方程式 $\begin{cases} y=0 \\ y=ax+b \end{cases}$ の解に一致する．このことから，『1 次方程式の解・1 次関数のグラフ』の内容は，『連立方程式の解・1 次関数のグラフ』の特別な場合と考えることもできる．

C.　1 次不等式と 1 次関数の関係

【暗記 13：1 次不等式と 1 次関数】

$\boxed{}$ に適当な数値・文字を答えよ．$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ には <, ≦, >, ≧ の中から答えよ．



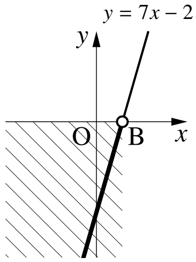
1. 右の直線 $y = -2x - 8$ について，A の座標は

   1 次方程式 $\boxed{\text{ア}} = 0$

   を解いて，A($\boxed{\text{イ}}$, 0) と求められる．
   また，グラフの太線部分である $y \boxed{\text{ウ}} 0$ の範囲は

   1 次不等式 $\boxed{\text{エ}}$

   を解いて $\boxed{\text{オ}}$ と求められ，これは右上のグラフとも一致する．



2. 右の直線 $y = 7x - 2$ について，B の座標は

   1 次方程式 $\boxed{\text{カ}} = 0$

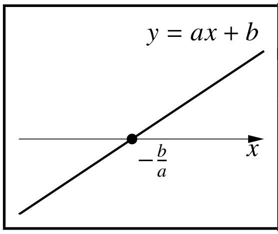
   を解いて，B($\boxed{\text{キ}}$, 0) である．
   また，グラフの太線部分である $y \boxed{\text{ク}} 0$ の範囲は

   1 次不等式 $\boxed{\text{ケ}}$

   を解いて $\boxed{\text{コ}}$ と求められ，これは右上のグラフとも一致する．

1 次不等式の解

$a > 0$ の場合の，1 次不等式と 1 次関数の解の関係はつぎのようにまとめることができる．



$ax + b = 0$ の解	$x = -\frac{b}{a}$
$ax + b > 0$ の解	$\boldsymbol{x > -\frac{b}{a}}$
$ax + b \geqq 0$ の解	$\boldsymbol{x \geqq -\frac{b}{a}}$
$ax + b < 0$ の解	$\boldsymbol{x < -\frac{b}{a}}$
$ax + b \leqq 0$ の解	$\boldsymbol{x \leqq -\frac{b}{a}}$

上の表は覚えなくてよい．1 次不等式と 1 次関数の対応を確認できればよい．

3.2 2次関数とそのグラフ

2 次関数のグラフは，「頂点」「軸（に対する対称性）」という大きな特徴を持ち，2 次方程式，2 次不等式を解くときの重要な道具ともなる．

A. 2 次関数の定義

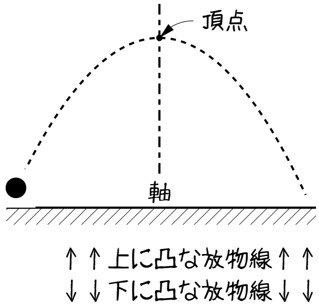
関数 $f(x)$ が x の 2 次式で表されるとき，つまり，$a\ (\neqq 0)$，b，c を定数として

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

の形で表されるとき，$f(x)$ は x の **2 次関数** (quadratic function) であるという．

2 次関数の値を y とおいた式 $y = ax^2 + bx + c$ も，(y を与える) x の 2 次関数という．

B. 2 次関数のグラフの基本

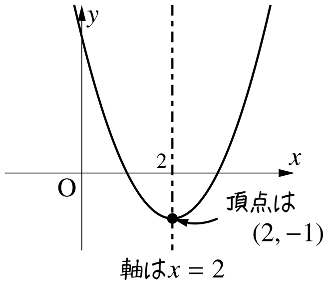


後で見るように，2 次関数のグラフは必ず**放物線** (parabola) になる[*4]．

放物線は必ず対称軸をもつ．この対称軸のことを単に**軸** (axis) といい，この軸と放物線の交点のことを**頂点** (vertex) という．

また，放物線の頂点が上にあれば「上に凸 (convex)」な放物線といい，頂点が下にあれば「下に凸」な放物線という．

C. 直線 $x = a$



右の放物線の軸は，図中の直線 - - - である．この直線は

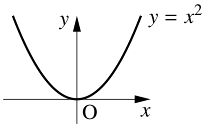
「x 座標が 2 である点を全て集めてできる直線」

に一致するので，「直線 $x = 2$」とよばれる．

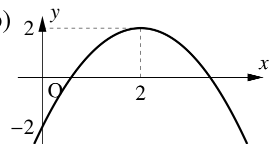
数学 I で学ぶ放物線の軸は，必ず「直線 $x = a$」の形をしている．

【例題 14】 3 つの放物線 (a)-(c) について，以下の問いに答えよ．

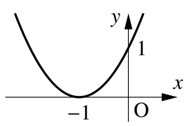
(a)



(b)



(c)



1. 上に凸なグラフ，下に凸なグラフをそれぞれすべて選びなさい．
2. 頂点の座標，軸の方程式をそれぞれ答えなさい．

[*4] 放物線とは，空中に物を放り投げたときにできる軌跡（物の通った跡）のことである．野球のホームランの打球や，サッカーのゴールキック，バレーボールのトスなど，ボールはいずれも放物線を描く．そのため，物理において投げられた物体の通り道について学ぶとき，2 次関数が用いられる．

この確認問題の (a) のグラフを「放物線 $y = x^2$」と言うことがある．
このように「2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ」のことを「放物線 $y = ax^2 + bx + c$」と言うこともある．このときの $y = ax^2 + bx + c$ は，**放物線の方程式** (equation of parabola) といわれる．

【例題 15】 y 軸上の点は，x 座標が $\boxed{\text{ア}}$ となるので，y 軸は「直線 $\boxed{\text{イ}}$」とも言われる．

D. $y = ax^2$ のグラフ

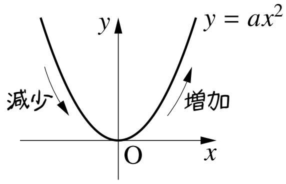
2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において $b = c = 0$ の場合，つまり $y = ax^2$ のグラフは，中学校で学んだように次のような特徴がある．

$y = ax^2$ のグラフの特徴

I) 軸は直線 $x = 0$（y 軸），頂点は原点 (0, 0) の放物線になる．

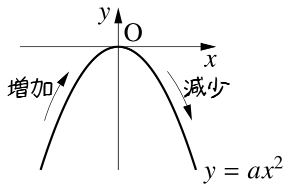
II) i) **$a > 0$ のとき**

- $y \geqq 0$ の範囲にある．
- 放物線は「下に凸」である．
- x の増加に対し $\begin{cases} x < 0 \text{ では } y \text{ は減少する} \\ x > 0 \text{ では } y \text{ は増加する} \end{cases}$



ii) **$a < 0$ のとき**

- $y \leqq 0$ の範囲にある．
- 放物線は「上に凸」である．
- x の増加に対し $\begin{cases} x < 0 \text{ では } y \text{ は増加する} \\ x > 0 \text{ では } y \text{ は減少する} \end{cases}$



【例題 16】 3 つの放物線 (a)-(c) について，以下の問いに答えよ．

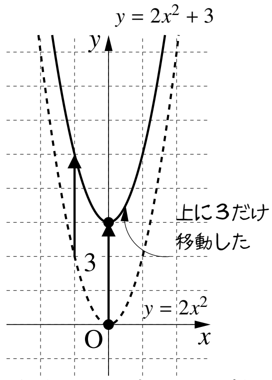
(a) 放物線 $y = x^2$　(b) 放物線 $y = -3x^2$　(c) 放物線 $y = 2x^2$

1. 上に凸なグラフ，下に凸なグラフをそれぞれすべて選びなさい．
2. $x > 0$ で y が増加するグラフをすべて求めなさい．
3. それぞれ，グラフ上における x 座標が 1 である点の座標を答えなさい．

E. $y = ax^2 + c$ のグラフ

例として，次の 2 つの 2 次関数の関係を考えてみよう．

$y = 2x^2$ ，$y = 2x^2 + 3$



x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	18	8	2	0	2	8	18	$\cdots$
$2x^2 + 3$	$\cdots$	21	11	5	3	5	11	21	$\cdots$

3 を足す

上の表から，$y = 2x^2 + 3$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを y 軸方向に +3 平行移動した放物線とわかる[*5]．

この平行移動によって，放物線の軸が y 軸から変わることはない．しかし，頂点は移動し，原点より y 軸方向に 3 大きい点 (0, 3) であることがわかる．

【例題 17】 $\boxed{}$ に適当な数・式を答え，放物線 $\boxed{ウ}$，$\boxed{キ}$，$y = 2x^2 - 4$ のグラフを書け．

1. 頂点 (0, 0) の放物線 $y = -x^2$
   $\Downarrow$ y 軸方向に +3 平行移動
   頂点 $(\boxed{ア}, \boxed{イ})$
   の放物線 $\boxed{ウ}$
   これは $\left(1, \boxed{エ}\right)$ を通る

2. 頂点 (0, 0) の放物線 $y = 3x^2$
   $\Downarrow$ y 軸方向に +5 平行移動
   頂点 $(\boxed{オ}, \boxed{カ})$
   の放物線 $\boxed{キ}$
   これは $\left(1, \boxed{ク}\right)$ を通る

3. 頂点 (0, 0) の放物線 $y = 2x^2$
   $\Downarrow$ y 軸方向に $\boxed{ケ}$ 平行移動
   頂点 $(\boxed{コ}, \boxed{サ})$
   の放物線 $y = 2x^2 - 4$
   これは $\left(1, \boxed{シ}\right)$ を通る

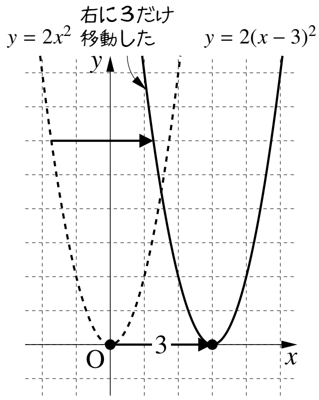
高校数学においてグラフを描くときは，方眼紙を用いず，概形を示すだけのことが多い．
放物線の場合，頂点と，他の 1 点を書き入れれば十分である．

$y = ax^2 + c$ のグラフ

$y = ax^2 + c$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを
「y 軸方向に c だけ平行移動」
した放物線である．このとき，軸は y 軸（直線 $x = 0$），頂点は $(0, c)$ となる．

[*5] このことは，式の形からも理解できる．同じ x の値を代入しても，$y = 2x^2 + 3$ の y の値の方が，$y = 2x^2$ の y の値より 3 だけ大きく計算されるからである．

F. $y = a(x-p)^2$ のグラフ



例として，次の 2 つの 2 次関数の関係を考えてみよう．

$y = 2x^2$ ，$y = 2(x-3)^2$

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	18	32	50	$\cdots$
$2(x-3)^2$	$\cdots$	50	32	18	8	2	0	2	8	$\cdots$

上の表から，$y = 2(x-3)^2$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に $+3$ 平行移動した放物線とわかる*6.

この平行移動によって，軸は x 軸方向に 3 移動し，直線 $x = 3$ に重なる．また，頂点も移動し，原点より x 軸方向に 3 大きい点 $(3,\ 0)$ であることがわかる．

【例題 18】 $\boxed{}$ に適当な数・式を答え，放物線 $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{ケ}}$, $y = -2(x-4)^2$ のグラフを書け．

1. 頂点 $(0,\ 0)$，軸 $x = 0$ の放物線 $y = 2x^2$
   $\Downarrow$ x 軸方向に $+3$ 平行移動
   頂点 $(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$，軸 $\boxed{\text{ウ}}$ の放物線 $\boxed{\text{エ}}$
   これは $\left(0,\ \boxed{\text{オ}}\right)$ を通る

2. 頂点 $(0,\ 0)$，軸 $x = 0$ の放物線 $y = -3x^2$
   $\Downarrow$ x 軸方向に -2 平行移動
   頂点 $(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}})$，軸 $\boxed{\text{ク}}$ の放物線 $\boxed{\text{ケ}}$
   これは $\left(0,\ \boxed{\text{コ}}\right)$ を通る

3. 頂点 $(0,\ 0)$，軸 $x = 0$ の放物線 $y = -2x^2$
   $\Downarrow$ x 軸方向に $\boxed{\text{サ}}$ 平行移動
   頂点 $(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}})$，軸 $\boxed{\text{セ}}$ の放物線 $y = -2(x-4)^2$
   これは $\left(0,\ \boxed{\text{ソ}}\right)$ を通る

$y = a(x-p)^2$ のグラフ

$y = a(x-p)^2$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを

「x 軸方向に p だけ平行移動」

した放物線である．このとき，軸は直線 $x = p$，頂点は $(p,\ 0)$ となる．

*6 このことは，式の形からも理解できる．$y = 2(x-3)^2$ の y の値と $y = 2x^2$ の y の値を一致させるには，$2(x-3)^2$ の x には，$2x^2$ の x より 3 大きい値を代入しなければならない．

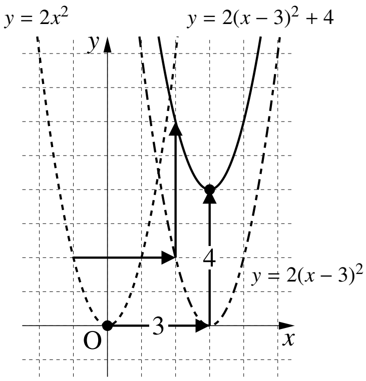
G. $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

たとえば，$y = 2(x-3)^2 + 4$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを次のように移動させればよい．

$$y = 2x^2 \xrightarrow[\text{3平行移動}]{\text{x軸方向に}} y = 2(x-3)^2$$

$$\xrightarrow[\text{4平行移動}]{\text{y軸方向に}} y = 2(x-3)^2 + 4$$

この平行移動によって，頂点は，原点より x 軸方向に 3 大きく y 軸方向に 4 大きい点 (3, 4) に移動する．軸は直線 $x = 3$ になる．



【例題 19】 $\boxed{}$ に適当な数・式を答え，放物線 $\boxed{ク}$, $\boxed{チ}$, $\boxed{ニ}$ のグラフを書け．

1. 放物線 $y = 2x^2$

$\Downarrow$ x 軸方向に +1 平行移動

頂点 ($\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$)，軸 $\boxed{ウ}$ の放物線 $\boxed{エ}$

$\Downarrow$ y 軸方向に +3 平行移動

頂点 ($\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$)，軸 $\boxed{キ}$ の放物線 $\boxed{ク}$

これは $\left(0, \boxed{ケ}\right)$ を通る

2. 放物線 $y = -x^2$

$\Downarrow$ x 軸方向に −4 平行移動

頂点 ($\boxed{コ}$, $\boxed{サ}$)，軸 $\boxed{シ}$ の放物線 $\boxed{ス}$

$\Downarrow$ y 軸方向に +7 平行移動

頂点 ($\boxed{セ}$, $\boxed{ソ}$)，軸 $\boxed{タ}$ の放物線 $\boxed{チ}$

これは $\left(0, \boxed{ツ}\right)$ を通る

3. 放物線 $y = 3x^2$

$\Downarrow$ x 軸方向に $\boxed{テ}$ 平行移動，y 軸方向に $\boxed{ト}$ 平行移動

頂点 (1, −5)，軸 $\boxed{ナ}$ の放物線 $\boxed{ニ}$

これは $\left(0, \boxed{ヌ}\right)$ を通る

$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

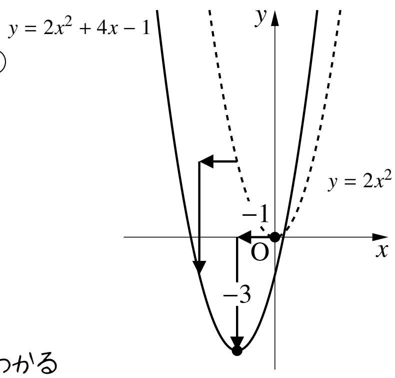
$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを

「x 軸方向に p だけ平行移動し，y 軸方向に q だけ平行移動」

した放物線である．このとき，軸は直線 $x = p$，頂点は (p, q) となる．

H. 平方完成

2 次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを，**平方完成** (completing square) という[*7]．たとえば，



$$y=2x^2+4x-1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを描くには，次のような平方完成が必要となる．

$$\begin{aligned} y &= 2x^2+4x-1 \\ &= 2\left\{x^2+2x\right\}-1 && \leftarrow x^2 \text{ の係数でくくる} \\ &= 2\left\{(x+1)^2-1\right\}-1 && \leftarrow \text{平方の形にする（平方完成）} \\ &= 2(x+1)^2-2-1 && \leftarrow \{\quad\}\text{をはずす} \\ &= 2(x+1)^2-3 && \leftarrow \text{定数項を整理する，これで頂点の座標がわかる} \end{aligned}$$

①のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 平行移動した放物線になるとわかる．

平方完成の変形のうち，平方を作る変形を取り出すと，以下のようになる．

$$x^2 + \bigcirc x$$
$$\downarrow \text{半分}$$
$$= \left(x + \frac{\bigcirc}{2} \right)^2 - \left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2$$

↑ここの 2 乗を引く↗

【例題 20】 以下の 2 次式を平方完成しなさい．

1. x^2+6x　2. x^2-4x　3. x^2-8x+5　4. $2x^2-4x$　5. $2x^2+4x+3$　6. $-3x^2-6x+1$

[*7] 変形によって，$(x-p)^2$ という平方（2 乗）を作ることから，この名称が付いている．これはたいへん重要な式変形であり，実際，2 次方程式の解の公式も，平方完成の考え方で導かれている．

【練習 21：平方完成】

以下の 2 次式を（x について）平方完成しなさい．

(1) x^2-6x (2) x^2+4x (3) x^2-3x (4) x^2-6x+3 (5) x^2-3x+1 (6) $2x^2-8x$

(7) $-2x^2-4x$ (8) $2x^2+8x+1$ (9) $-3x^2+9x+2$ (10) $\dfrac{1}{2}x^2+2x$ (11) $-\dfrac{1}{3}x^2-4x+3$

(12) $-\dfrac{3}{2}x^2-5x+1$ (13) x^2-2ax (14) $2x^2+4ax+a^2$

I. $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

次のようにして，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが必ず放物線になることが分かる．

$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

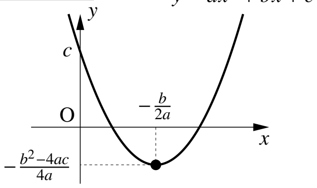
$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x\right\} + c && \leftarrow x^2 \text{ の係数でくくる} \\
&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c && \leftarrow \text{平方完成} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c && \leftarrow \{\quad\}\text{をはずす} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} && \leftarrow \text{定数項を整理する}
\end{aligned}
$$

と平方完成して，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは

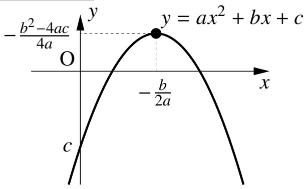
- 軸は直線 $x = -\dfrac{b}{2a}$，頂点は $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

の放物線となる．また，y 軸との交点は $(0, c)$ である．

$a > 0$ の場合



$a < 0$ の場合



上の結果を暗記する必要はない．2 次関数のグラフを考えるときは毎回，平方完成をしよう．また，2 次関数のグラフには，放物線の開き具合を決めるため，y 軸との交点を必ず書きこむ（軸が直線 $x = 0$ であった場合は，適当な 1 点を書き込む）．

【例題 22】 2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$ について，以下の問いに答えなさい．

1. $f(x)$, $g(x)$ を平方完成しなさい．
2. $y = f(x)$ の頂点の座標，軸の方程式を求め，グラフを書きなさい（y 軸との交点を書き込むこと）．
3. $y = g(x)$ の頂点の座標，軸の方程式を答え，グラフを書きなさい（y 軸との交点を書き込むこと）．

【練習 23：放物線を描く】

次の放物線の頂点の座標と軸の方程式を答え，グラフを描け．

(1) $y = x^2 - 2x + 3$　(2) $y = -3x^2 + 6x$　(3) $y = 2x^2 + 8x + 5$

(4) $y = -2x^2 - 6x - \dfrac{5}{2}$　(5) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 2$

1. 2次関数の最大・最小

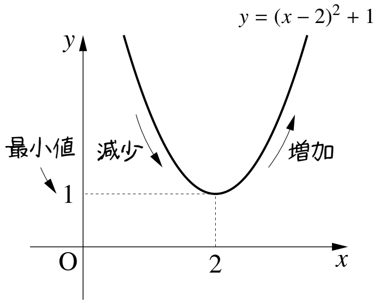
A. 2次関数の最大・最小

たとえば，2次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ の最大値・最小値を考えよう．

$y = f(x)$ とおけば，$f(x)$ の最大値・最小値は y の最大値・最小値に等しい．$y = f(x)$ のグラフを書けば

$$y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

より右図のようになる．



グラフ上で最も y 座標が小さいのは，$x = 2$ における 1 である．また，y の値はいくらでも大きくなるので，y の最大値は存在しない．

こうして，$f(x)$ は「最小値 $f(2) = 1$，最大値なし」とわかる．

【例題 24】 $f(x) = x^2 - 6x + 5$ について，$y = f(x)$ のグラフを書き，最大値・最小値を答えよ．

B. 定義域が限定された2次関数の最大・最小

定義域をすべての実数にすれば，2次関数には最大値が最小値のどちらかが存在しない．しかし，定義域が限定された場合は，そうとは限らない．

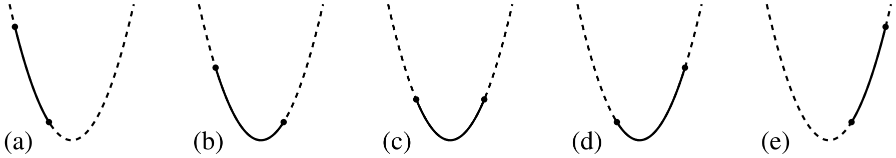
【例題 25】 $f(x) = -x^2 - x - 2$（$-1 \leqq x \leqq 2$）について，定義域内での $y = f(x)$ のグラフを書き，$f(x)$ の最大値・最小値をそれぞれ求めよ．

【練習 26：2 次関数の最大・最小〜その１〜】

2 次関数 $f(x) = x^2 - 2x - 2$ を，次の定義域において考える．

(1) $-2 \leqq x \leqq 0$　(2) $-1 \leqq x \leqq 2$　(3) $0 \leqq x \leqq 2$　(4) $0 \leqq x \leqq 3$　(5) $3 \leqq x \leqq 4$

それぞれについて，(i) $y = f(x)$ のグラフを描き，(ii) グラフの形を下の (a)-(e) から 1 つ選び，(iii) $f(x)$ の最大値・最小値をそれぞれ求めよ．

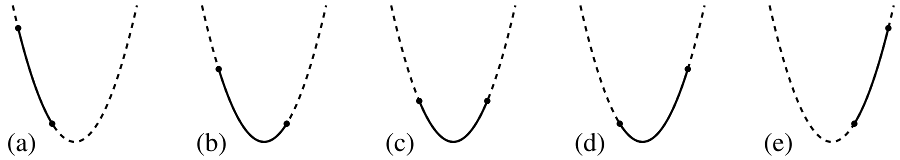


【練習 27：2 次関数の最大・最小〜その２〜】

(1)〜(3) の 2 次関数は，定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ とする．

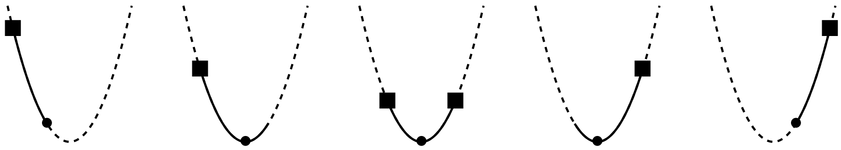
(1) $f(x) = x^2 + 4x - 3$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 3$　　(3) $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$

それぞれについて，(i) $y = f(x)$ のグラフを描き，(ii) グラフの形を下の (a)-(e) から 1 つ選び（上に凸なグラフは，上下に反転したものを考えること），(iii) $f(x)$ の最大値・最小値をそれぞれ求めよ．



C. 文字定数を含む 2 次関数の最大・最小

定義域が限定された放物線は，最大値・最小値を与えるグラフ上の点に着目すれば，結局次の 5 種類である（y 座標が最大になる点を■，最小になる点を ● で表している）.



【練習 28：文字定数を含む 2 次関数の形の判別】

放物線 $C : y = x^2 - 4ax + a^2\ \ (-5 \leqq x \leqq 5)$ について以下の問に答えよ.

(1) この放物線の軸の方程式を，a を用いて表せ.

(2) $a = 2$ のとき，y が最大・最小となるときの x の値を，それぞれ求めよ.

(3) $a = -1$ のとき，y が最大・最小となるときの x の値を，それぞれ求めよ.

(4) C の軸が定義域より左側にあるための，a の範囲を求めよ．また，定義域内における C の y 座標の最大値，最小値を求めよ.

(5) C の軸が定義域より右側にあるための，a の範囲を求めよ．また，定義域内における C の y 座標の最大値，最小値を求めよ.

(6) C の軸が定義域の中にあるための，a の範囲を求めよ.

(7) (6) のうち，定義域の左端で C の y 座標が最大となるような a の範囲を求め，このときの C の y 座標の最大値，最小値を求めよ.

上の問題において，$a = 0$ のときは定義域の両端で最大値をとる．

【練習 29：2 次関数の最大・最小（文字定数を含む場合）～その１～】

以下の場合における，2 次関数 $f(x) = x^2 - 2ax \ (-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値・最小値を求めよ．

(1) $a \leqq -1$　　(2) $1 \leqq a$　　(3) $-1 < a < 0$

【発展 30：2 次関数の最大・最小（文字定数を含む場合）〜その２〜】

2 次関数 $f(x) = -2x^2 + 4x - 3 \ (a \leqq x \leqq a+2)$ について，以下の問いに答えよ．

① $f(x)$ の最大値・最小値を求めよ．

② $f(x)$ の最大値が -3 となるときの a の値を求めよ．

【発展 31：2 次関数の最大・最小（文字定数を含む場合）〜その３〜】

$a > 0$ とする．2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5\ \ (0 \leqq x \leqq a)$ について以下の問に答えよ．

① 最小値を求めよ．

② 最大値を求めよ．

…　a の値を 0 から増やしていくとき，グラフの最大値・最小値をとる点がいつ変わるのかグラフを描いて考えて，場合分けをしよう．

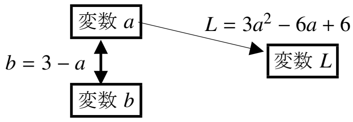
2. 2次関数の応用問題

A. x や y 以外の文字を用いて関数を表現する

$a+b=3$ のとき，式 $L=2a^2+b^2-3$ のとる値について考えてみよう．

この L の値は a のみによって決まる．実際，$b=3-a$ を L に代入すれば

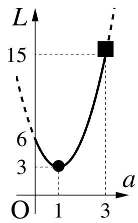
$$L=2a^2+(3-a)^2-3=3a^2-6a+6$$
$$=3(a-1)^2+3 \quad \text{←平方完成した}$$



となって，L は a のみで決まることが分かる．そのうえ，平方完成の結果，最大値は無し，最小値は $a=1$ のときの $L=3$ と分かる．このとき，$b=2$ である．

さらに，$0 \leqq a,\ 0 \leqq b$ に限れば，$b=3-a$ を $0 \leqq b$ に代入して

$$0 \leqq b \iff 0 \leqq 3-a \iff a \leqq 3$$



から，$0 \leqq a \leqq 3$ と分かるので，右上のグラフから，L の最大値は $a=3$ のときの $L=15$ と分かる．このとき，$b=0$ である．

$a=3-b$ によって a を消去して考えても，L の最大・最小について同じ結果を得る．

【例題 32】 実数 $p,\ q$ に対して，$L=p^2-q^2$ とする．

1. $p+2q=9$ であるとき，L の最大値・最小値と，そのときの $p,\ q$ の値を求めよ．
2. 1. に加えて $0 \leqq p,\ 0 \leqq q$ であるとき，L の最大値・最小値と，そのときの $p,\ q$ の値を求めよ．

B. 2 次関数の最大・最小の応用

2 次関数の知識を利用して，身近にある様々な問題を解くことができる．

【練習 33：2 次関数の身近な例への応用】

(1) 長さ 20 cm の針金を 2 つに切り，それぞれの針金で正方形を作るとき，それらの面積の和の最小値を求めよ．また，そのとき針金は何 cm ずつに切り分けられているか求めよ．

(2) ある品物の売価が 1 個 120 円のときには，1 日の売上個数は 400 個であり，売価を 1 個につき 1 円値上げするごとに，1 日の売上個数は 2 個ずつ減るという．1 日の売上金額を最大にするには，売価をいくらに設定すればよいか求めよ．

【練習 34：1 つの文字に帰着できる 2 次関数】

$0 \leqq x$，$0 \leqq y$，$2x + y = 10$ のとき，$L = x^2 + y^2 - 3$ の最大値・最小値を求めよ．また，そのときの x，y を求めよ．

C. 式の一部を置き換える

【発展 35：式の一部を文字でおく】

① $t = x^2 - 2x$ について，t の値のとりうる範囲を求めよ．

② 関数 $y = (x^2 - 2x)^2 + 4x^2 - 8x + 5$ について，y の値のとりうる範囲を求めよ．

【発展 36：2 文字 2 次式の最大・最小】

x の 2 次関数 $y=2x^2+4kx+k^2+4k-2$ について，y の最小値 m を k を用いて表せ．さらに，m の最大値とそのときの k の値を求めよ．

【発展 37：2 次関数の利用】

3 辺が 3 cm，4 cm，5 cm の直角三角形の紙から，はさみを使って鋭角を切り落とし，面積が最大の長方形を作るにはどのようにすればよいか.

3.4　2次関数の決定

1.　2次関数の決定

A.　準備１～方程式への代入

たとえば，関数 $y = x^2 + bx$ のグラフが $(2,\ 1)$ を通るならば，$y = x^2 + bx$ に $(x,\ y) = (2,\ 1)$ を代入した等式は成り立つ．つまり

$$1 = \cdot 2^2 + b \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 4 + 2b$$

より $b = -\dfrac{3}{2}$ と分かる．一般に，関数 $y = f(x)$ のグラフが $(p,\ q)$ を通るなら $q = f(p)$ が成り立つ (p.164).

【例題 38】　以下の問いに答えなさい.

1. 放物線 $y = -x^2 + bx + 3$ が $(-1, -3)$ を通るとき，b の値を求めよ.
2. 放物線 $y = 2(x - p)^2 + 3$ が $(1,\ 5)$ を通るとき，p の値を求めよ.

B.　準備２～連立３元１次方程式を解く

一般に，未知の文字を 3 つ含む，3 つの（1 次）連立方程式のことを連立 3 元 1 次方程式という．これを解くには，消去する文字を決め，代入法・加減法によって消去すればよい.

【例題 39】　連立 3 元 1 次方程式 $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x + y - z = 4 & \cdots\cdots\cdots ② \\ x - 2y + 3z = -1 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$ を解こう.

① − ② によって，$\boxed{\text{ア}}$ を消去した式 $\boxed{\text{イ}}$ を得る.

$2 \times$ ① + ③ によって，$\boxed{\text{ウ}}$ を消去した式 $\boxed{\text{エ}}$ を得る.

イ と **エ** を連立して，$(x,\ z) = \left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ を得て，最後に②から $y = \boxed{\text{キ}}$ を得る.

「連立 3 元 1 次方程式を解く」とは，上の問題でいえば「式①，②，③を全て同時に満たす $(x,\ y,\ z)$ の組を見つける」ということになる.

C.　一般型 $y = ax^2 + bx + c$ の決定〜軸や頂点について何もわかっていない場合

グラフが通る 3 点を与えるだけでも，2 次関数はただ 1 つに決まる．この場合は，求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ の形でおいて考える．

【例題 40】 (1. 5), (−1, 1), (−2, 2) を通る 2 次関数を求めてみよう．

1. 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく．これが
   (1, 5) を通るので等式 $\boxed{\text{ア}}$ を満たし，
   (−1, 1) を通るので等式 $\boxed{\text{イ}}$ を満たし，
   (−2, 2) を通るので等式 $\boxed{\text{ウ}}$ を満たす．
2. $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ ，$\boxed{\text{ウ}}$ の 3 元一次連立方程式を解いて，$(a,\ b,\ c) = \left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ を得るので，求める 2 次関数は $\boxed{\text{キ}}$ と分かる．

【練習 41：軸や頂点について何もわかっていない場合】

グラフが 3 点 A(1, 6)，B(−2, −9)，C(4, 3) を通るような 2 次関数を求めよ.

【練習 42：連立 3 元 1 次方程式】

連立 3 元 1 次方程式 $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 7 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x + 3y = -5 & \cdots\cdots\cdots ② \\ -3x + z = -7 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$ を解け.

D.　平方完成型 $y = a(x-p)^2 + q$ の決定〜軸や頂点について条件が与えられた場合

頂点とグラフが通る 1 点，もしくは，軸とグラフが通る 2 点がわかれば，2 次関数はただ 1 つに決まる．『$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ』(p.174) で学んだことを用いて考えよう．

【例題 43】　次の 4 つの 2 次関数について，問いに答えなさい．

a) $y = a(x-p)^2 + 2$　　b) $y = a(x-3)^2 + q$　　c) $y = 3(x-2)^2 + q$　　d) $y = a(x-2)^2 + 3$

1. 上の 2 次関数のうち，a, p, q の値に関係なく頂点が $(2, 3)$ であるものを選べ．また，そのグラフが $(1, 2)$ を通るとき，2 次関数を決定せよ．
2. 上の 2 次関数のうち，軸が $x = 3$ であるものを選べ．また，そのグラフが $(1, 4)$, $(-1, -2)$ を通るとき，2 次関数を決定せよ．

上の問題で，a) は「頂点の y 座標が 2 であるグラフ」，c) は「軸が $x = 2$ であり，$y = 3x^2$ を平行移動してできたグラフ」ということができる．

【例題 44】　2 点 $(0, 0)$, $(3, 6)$ を通り，軸が $x = 1$ である放物線の方程式を求めよ．

【練習 45：頂点や軸について条件が与えられた場合】

グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が $(1, -3)$ で，点 $(-1,\ 5)$ を通る．

(2) 軸が直線 $x = -2$ で，2 点 $(-3,\ 2)$，$(0, -1)$ を通る．

(3) 発展　放物線 $y = -2x^2$ を平行移動した結果，直線 $y = 2x + 1$ 上に頂点があり，$(3,\ 3)$ を通る．

【練習 46：2 次関数の決定〜頂点の移動〜】

放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを平行移動し，頂点が $(-2, -6)$ となったグラフを C とする．

(1) 放物線 C の方程式を求めよ．

(2) C を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 平行移動したグラフを C_1 とする．C_1 の頂点の座標と，C_1 の方程式を求めよ．

(3) C を平行移動した結果，頂点が $(-3,\ 2)$ にあるグラフを C_2 とする．C_2 の式を求めよ．このとき，C をどのように平行移動して C_2 になっただろうか．

2 次関数の決定にあたっては，未知の 2 次関数を

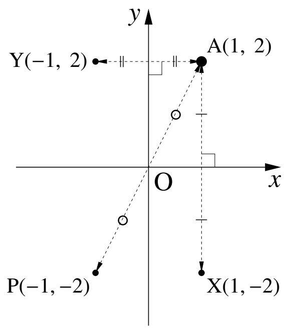
- $y = ax^2 + bx + c$（一般型）
- $y = a(x - p)^2 + q$（平方完成型）
- $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$（因数分解型）← p.211 で学ぶ

のうち，どの形で表現するかが重要になっている．

2. 2次関数の対称移動・平行移動

A. 点の対称移動

まず，点 A(1, 2) を対称移動することを考えよう．



- x 軸について対称移動したとき　A(1, 2)　→　X(1, −2)
  x 座標はそのままにし，y 座標のみ符号を逆転，と同じである．
- y 軸について対称移動したとき　A(1, 2)　→　Y(−1, 2)
  x 座標のみ符号を逆転，y 座標はそのまま，と同じである．
- 原点につして対称移動したとき　A(1, 2)　→　P(−1, −2)
  x 座標も y 座標も符号を逆転させることと同じである．

たとえば，y 軸について対称移動しても対称の中心となる y (座標) はそのままと理解できる．

【例題 47】

1. Z(2, −1) を x 軸について対称移動した点 Z_x，y 軸について対称移動した点 Z_y，原点について対称移動した点 Z_0 をそれぞれ求めよ．
2. 以下の点について，x 軸対称な 2 点の組，y 軸対称な 2 点の組，原点対称な 2 点の組をそれぞれすべて答えよ．

   A(4, 1),　B(−4, 2),　C(4, −1),　D(4, −2),　E(−4, 1)

【練習 48：点の対称移動】

次の 2 点は，x 軸，y 軸，原点のうち，何について対称か，それぞれ答えよ．

a) $(-3,\ 5)$ と $(3, 5)$　　b) $(1,\ 3)$ と $(-1, -3)$　　c) $(-2, -3)$ と $(2, -3)$

d) $(3,\ 5)$ と $(3, -5)$　　e) $(-2,\ 3)$ と $(2, -3)$　　f) $(0,\ 3)$ と $(0, -3)$

B.　文字の置き換えで対称移動を考える

点の対称移動について，以下のことが成り立っていた（p.196）．

- x 軸について対称移動するには，y 座標のみ符号を逆転させればよい．
- y 軸について対称移動するには，x 座標のみ符号を逆転させればよい．
- 原点につして対称移動するには，x 座標も y 座標も符号を逆転させればよい．

同じことを，グラフの対称移動にもあてはめることができる．

たとえば，放物線 $y = x^2 + 3x + 2$ の対称移動は次のようになる．

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{（} x \text{軸対称移動）}]{y \text{を} -y \text{に代える}} -y = x^2 + 3x + 2 \qquad \left(\Leftrightarrow\ y = -x^2 - 3x - 2\right)$$

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{（} y \text{軸対称移動）}]{x \text{を} -x \text{に代える}} y = (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 2 \qquad \left(\Leftrightarrow\ y = x^2 - 3x + 2\right)$$

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{（原点対称移動）}]{x \text{を} -x \text{に代えて，} y \text{を} -y \text{に代える}} -y = (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 2 \qquad \left(\Leftrightarrow\ y = -x^2 + 3x - 2\right)$$

【例題 49】　放物線 $y = 2x^2 - 8x + 9$ を C とする．

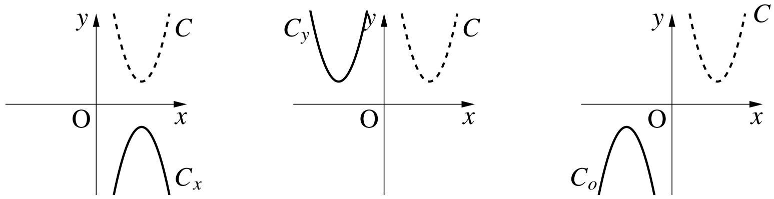
- C を x 軸に関して対称移動した放物線 C_x の方程式は $\boxed{\text{ア}}$ であり，頂点は $\boxed{\text{イ}}$ になる．
- C を y 軸に関して対称移動した放物線 C_y の方程式は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，頂点は $\boxed{\text{エ}}$ になる．
- C を原点に関して対称移動した放物線 C_o の方程式は $\boxed{\text{オ}}$ であり，頂点は $\boxed{\text{カ}}$ になる．
- C の頂点は $\boxed{\text{キ}}$ である．C と C_x の頂点を比べると，たしかに $\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ が x 軸対称になっているのが分かる．同様に，$\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ は y 軸対称，$\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ は原点対称であるのが分かる．

一般に，次のことがどんな関数のグラフでも成り立つ．特に，1 次関数や 2 次関数でも正しい．詳しい証明については，『一般の対称移動について』(p.238) を参照すること．

グラフの対称移動

- x 軸について対称移動するには，y を $-y$ に代えればよい．
- y 軸について対称移動するには，x を $-x$ に代えればよい．
- 原点について対称移動するには，x を $-x$ に代え，y を $-y$ に代えればよい．

前ページの**【例題 49】** におけるグラフの移動を実際に図示すると，次のようになる．



C.　文字の置き換えで平行移動を考える

『$y = a(x-p)^2$ のグラフ』(p.173) は放物線 $y = ax^2$ を「x 軸方向に p 平行移動」したグラフであり

$$y = ax^2 \xrightarrow{\text{x を x − p に代える}} y = a(x-p)^2$$

と考えられる．同様に，「y 軸方向に q 平行移動」することは y を $y-q$ におきかえることと同じである．

たとえば，放物線 $y = x^2 + 3x + 2$ を x 軸方向に 4，y 軸方向に -1 移動すれば，次のようになる．

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{(x 軸方向に 4 移動)}]{\text{x を x − 4 に代える}} y = (x-4)^2 + 3(x-4) + 2 \quad \left(\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 5x + 6 \right)$$

$$\xrightarrow[\text{(y 軸方向に −1 移動)}]{\text{y を y + 1 に代える}} y + 1 = (x-4)^2 + 3(x-4) + 2 \quad \left(\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 5x + 5 \right)$$

【例題 50】 放物線 $y = 2x^2 - 8x + 9$ を C とする．
C を x 軸方向に 1 移動した放物線 C_1 の方程式は $\boxed{\text{ア}}$ であり，さらに，C_1 を y 軸方向に -4 に移動した放物線 C_2 の方程式は $\boxed{\text{イ}}$ である．C の頂点は $\boxed{\text{ウ}}$，C_2 の頂点は $\boxed{\text{エ}}$ であり，たしかに，$\boxed{\text{ウ}}$ の x 座標に $+1$，y 座標に -4 すると $\boxed{\text{エ}}$ になる．

グラフの平行移動と方程式

- 「x 軸方向に p 平行移動する」には，方程式の x を $x-p$ に代えればよい．
- 「y 軸方向に q 平行移動する」には，方程式の y を $y-q$ に代えればよい．

一般のグラフの平行移動については，『一般の平行移動について』(p.239) を参照のこと．

【練習 51：平行移動・対称移動と 2 次関数の決定】

2 次関数 $y=\frac{1}{2}x^2+2x-4$ のグラフを C とする．

(1) C を y 軸について対称移動し，y 軸方向に 2 平行移動したグラフ C_1 の式を求めよ．

(2) 発展 グラフ C_2 を x 軸について対称移動し，x 軸方向に 2 平行移動したら C と一致した．C_2 の式を求めよ．

頂点の移動に着目して，放物線の移動を考えることもできる．くわしくは『頂点の移動を用いて 2 次関数の移動を考える』(p.239) を参照のこと．

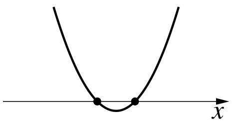
3.5 判別式 D

1. 放物線と x 軸の位置関係 — 判別式 D

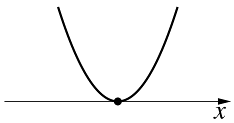
A. 放物線と x 軸の共有点

放物線と x 軸の共有点は，最大で 2 個になる．たとえば，下に凸な放物線ならば以下のようになる．

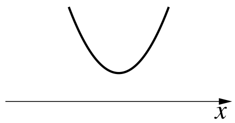
i) **x 軸と 2 つの共有点をもつ**



ii) **x 軸と 1 つの共有点をもつ**



iii) **x 軸と共有点をもたない**



放物線が上に凸の場合も，上下が逆になる以外は同様の結果になる．

【例題 52】 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を，それぞれ答えよ．

1. $y = (x-1)^2 - 5$　　2. $y = -(x-3)^2 - 2$　　3. $y = 2x^2 + 8x + 1$

B. 放物線の判別式 D

放物線と x 軸の共有点の個数は，放物線の頂点の y 座標が正であるか，0 であるか，負であるかによって決定される．一般の放物線 $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ の平方完成は

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

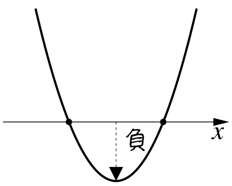
となり，頂点の y 座標は．$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ である（p.177）．よって，$a > 0$ の場合は次のようになる．

$a > 0$ の場合

i) **$b^2 - 4ac > 0$ のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(\text{正})}{(\text{正})}$$

より，頂点の y 座標は負．

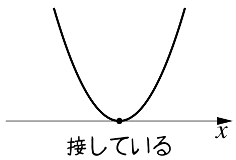


x 軸との共有点は 2 つ

ii) **$b^2 - 4ac = 0$ のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{0}{(\text{正})}$$

より，頂点の y 座標は 0.

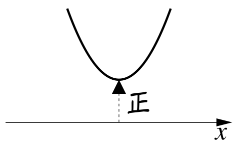


x 軸との共有点は 1 つ
放物線の頂点が共有点

iii) **$b^2 - 4ac < 0$ のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(\text{負})}{(\text{正})}$$

より，頂点の y 座標は正．



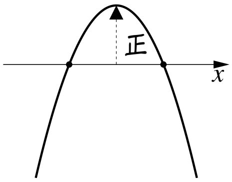
x 軸との共有点はない

【例題 53】 $a<0$ とする．以下の $\boxed{}$ に「正」「負」「0」「1」「2」のいずれかを入れよ．

i) $b^2-4ac>0$ のとき

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

より，頂点の y 座標は $\boxed{\text{ウ}}$．

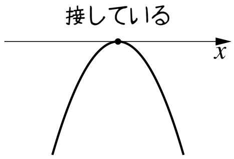


x 軸との共有点は $\boxed{\text{エ}}$ 個

ii) $b^2-4ac=0$ のとき

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

より，頂点の y 座標は $\boxed{\text{キ}}$．

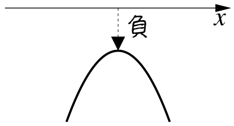


x 軸との共有点は $\boxed{\text{ク}}$ 個

iii) $b^2-4ac<0$ のとき

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

より，頂点の y 座標は $\boxed{\text{サ}}$．



x 軸との共有点は $\boxed{\text{シ}}$ 個

放物線の判別式 D

放物線 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ と x 軸の共有点の個数は，判別式 $D=b^2-4ac$ を用いて判別できる．

i) **$D>0$ のとき**

放物線 $y=f(x)$ は x 軸と「2 つの共有点をもつ」

ii) **$D=0$ のとき**

放物線 $y=f(x)$ は x 軸と「1 つの共有点をもち」，「x 軸と**接する** (contact)」．

ただ 1 つの共有点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ 0\right)$ は**接点** (point of contact) とよばれ，放物線の頂点に一致する．

iii) **$D<0$ のとき**

放物線 $y=f(x)$ は x 軸と「共有点をもたない」

「x 軸との共有点の個数を判別する」2 次関数の判別式 D と，「実数解の個数を判別する」2 次方程式の判別式 D（p.235）の関係については p.200 で学ぶ．

【例題 54】 以下の $\boxed{}$ に適当な数値を入れよ．

1. 放物線 $y=2x^2+5x-1$ は，判別式 D の値が $\boxed{\text{ア}}$ なので，x 軸との共有点は $\boxed{\text{イ}}$ 個である．
2. 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-4x+8$ は，判別式 D の値が $\boxed{\text{ウ}}$ なので，x 軸との共有点は $\boxed{\text{エ}}$ 個である．
3. 放物線 $y=\dfrac{2}{3}x^2+3x+5$ は，判別式 D の値が $\boxed{\text{オ}}$ なので，x 軸との共有点は $\boxed{\text{カ}}$ 個である．

【練習 55：放物線と x 軸との共有点の個数の判別】

2 次関数 $y = x^2 - (k-1)x + \dfrac{1}{4}k^2 + k + 1$ のグラフ C について，以下の問いに答えよ．

(1) $k = -4$ のとき，放物線 C と x 軸との共有点の個数はいくつあるか．

(2) $k = 2$ のとき，放物線 C と x 軸との共有点の個数はいくつあるか．

(3) C と x 軸との共有点の個数が 2 個，1 個，0 個であるための，定数 k の条件をそれぞれ答えよ．

2. 2 次方程式の解の個数〜判別式 D

A. 2 次方程式の解を判別する

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ において，根号 $\sqrt{}$ 内の b^2-4ac を 2 次方程式の**判別式** (discriminant) といい，D で表す．

2 次方程式の判別式と解の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の個数を調べるには判別式 $D=b^2-4ac$ の符号を調べればよい．

i) $D=b^2-4ac>0$ のとき，解は 2 つ存在する．

ii) $D=b^2-4ac=0$ のとき，解は 1 つ存在する．
このただ 1 つの解は**重解** (multiple solution) とよばれる．

iii) $D=b^2-4ac<0$ のとき，解は存在しない．

$D=0$ のとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b+\sqrt{0}}{2a},\ \dfrac{-b-\sqrt{0}}{2a}$ であり，どちらも $x=-\dfrac{b}{2a}$ に等しくなり，解が重なってしまう．これが，重解の語源である[*8]．

【例題 56】 2 次方程式 $x^2-(k-1)x+\dfrac{1}{4}k^2+k+1=0$ について，以下の問いに答えよ．

1. $k=2$ のとき，解はいくつあるか．
2. $k=-4$ のとき，解はいくつあるか．
3. 判別式 D を k の式で表せ．
4. 解が 2 個存在するための k の範囲を求めよ．

[*8] 厳密な数学の定義によれば，本来は**重根** (multiple root) とよぶべきである．しかし，高校数学においては「重解」という言葉が慣用的に用いられている．13th-note 数学 I も現状に従うこととする．

B. 2次方程式の解と因数分解

2次方程式の2つの解法を見比べてみよう.

i) 因数分解を利用した解法

$$x^2-3x-18=0$$
$$(x-6)(x+3)=0 \quad \text{←左辺の因数分解→}$$
$$x=6,-3 \quad \text{←方程式の解→}$$

ii) 解の公式を用いた解法

$$x^2-5x-3=0$$
$$？？？$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2} \quad \text{←「解の公式」で求めた}$$

i), ii) を見比べて, x^2-5x-3 の因数分解を得る.

$$x^2-3x-18=(x-\underbrace{6}_{\text{解の1つ}})(x-\underbrace{(-3)}_{\text{もう1つの解}}) \qquad x^2-5x-3=\left(x-\underbrace{\frac{5+\sqrt{37}}{2}}_{\text{解の1つ}}\right)\left(x-\underbrace{\frac{5-\sqrt{37}}{2}}_{\text{もう1つの解}}\right)$$

…… 実際, $\left(x-\frac{5+\sqrt{37}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)$ を展開すれば, この因数分解が正しいと分かる.

【例題 57】 x^2-3x+1 を実数の範囲で因数分解しなさい (因数には無理数が含まれてもよい).

【練習 58 : 2次方程式の解と因数分解】

以下の2次式を, 実数の範囲で因数分解せよ.

(1) x^2+7x-4　(2) x^2-2x-5　(3) $2x^2-4x+1$

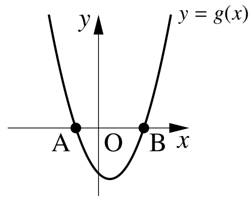
3. 2 次方程式の判別式 D と 2 次関数の判別式 D を同一視する

A. 放物線と x 軸の共有点

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ において，判別式 $D = b^2 - 4ac$ が 0 以上であれば，放物線 $y = f(x)$ が x 軸と共有点をもつ (p.201)．このとき，「共有点の x 座標」を求めてみよう．

【暗記 59：2 次関数と x 軸の共有点の座標〜その 1〜】

以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値・式・言葉を答えよ．



1. 2 次関数 $y = x^2 - x - 2$ のグラフにおいて，y 座標が 0 になる点を求めるには，2 次方程式

   $\boxed{ア} = 0$

   を解けばよい．その結果，A($\boxed{イ}$, 0)，B($\boxed{ウ}$, 0) と分かる．
2. 2 次関数 $y = x^2 - 2x - 4$ のグラフと $\boxed{エ}$ 軸の共有点を求めるには，2 次方程式

   $x^2 - 2x - 4 = 0$

   を解けばよい．その結果，($\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$)，($\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$) と分かる．
3. 2 次関数 $y = x^2 - 2x + 4$ のグラフにおいて y 座標が 0 になる点を求めるには

   $\boxed{ケ} = 0$ ……………………… ①

   という 2 次方程式を解けばよい．この 2 次方程式の判別式 D を計算すると 0 より $\boxed{コ}$ ため，① は解を持たない．つまり，2 次関数 $y = x^2 - 2x + 4$ のグラフは y 座標が 0 になることはない．

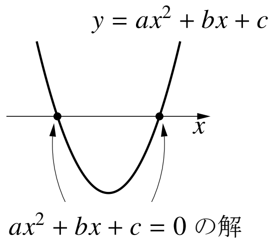
放物線と x 軸との共有点

判別式 D が 0 以上である 2 次関数

$y = ax^2 + bx + c$

のグラフと x 軸 ($y = 0$) との共有点の x 座標は，次の 2 次方程式の解である．

$ax^2 + bx + c = 0$



【練習 60：放物線と x 軸との共有点を調べる】

次の放物線と x 軸との共有点があるならば，その共有点の座標を求めよ．

(1) $y = x^2 - x - 1$　　(2) $y = -4x^2 + 4x - 1$　　(3) $y = x^2 - x + 1$

【練習 61：x 軸と接するための条件】

放物線 $y = 4x^2 + 2(k-1)x - k + 4$ が x 軸と接するよう定数 k の値を定めよ．また，そのときの接点を求めよ．

B.　2 次方程式の解をグラフで表す

『放物線と x 軸との共有点』(p.205) を逆に考えれば，次のことがわかる．

2 次方程式の解をグラフに表す

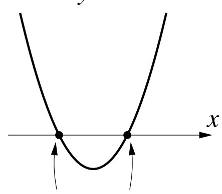
判別式 D が 0 以上である 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解は，2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

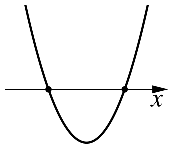
のグラフと x 軸との「共有点の x 座標」に表れる．



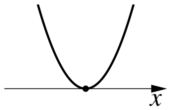
【暗記 62：2 次方程式の解をグラフで表す】

次の空欄に適当な数字または文字を入れよ．

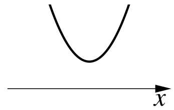
(a)



(b)



(c)



1. 2 次方程式 $x^2 - 4x - 5 = 0$ の解は

　2 次関数 $\boxed{\text{ア}}$ ……………………… ①

　と x 軸との「共有点の x 座標」に一致し，$\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ である．

　また，2 次関数①のグラフは，上の (a), (b), (c) のうち，$\boxed{\text{エ}}$ に一番近い．

2. 2 次方程式 $9x^2 - 6x + 1 = 0$ の解は

　2 次関数 $\boxed{\text{オ}}$ ……………………… ②

　と x 軸との「共有点の x 座標」に一致し，$\boxed{\text{カ}}$ である．

　また，2 次関数②のグラフは，上の (a), (b), (c) のうち，$\boxed{\text{キ}}$ に一番近い．

3. 2 次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の解は

　2 次関数 $\boxed{\text{ク}}$ ……………………… ③

　と x 軸との「共有点の x 座標」に一致するが，これは存在しない．

　2 次関数③のグラフは，上の (a), (b), (c) のうち，$\boxed{\text{ケ}}$ に一番近い．

C. 判別式 D

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ においても，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ においても，判別式 D は同一の式

$D=b^2-4ac$

で定義され，以下のことが成り立つ．

「2 次方程式の解」と「放物線と x 軸との共有点の x 座標」の対応

$a\neq 0$ である 2 次式 ax^2+bx+c に対し

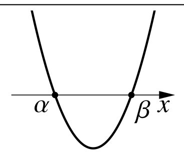
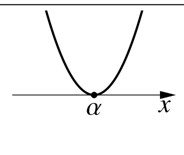
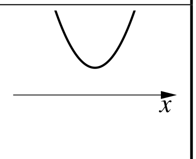
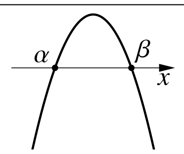
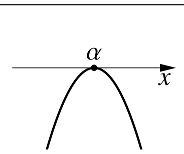
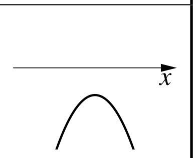
- 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸の共有点の個数
- 方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の個数

は一致し，判別式 $D=b^2-4ac$ に対して

$D>0$ ならば 2 個，$D=0$ ならば 1 個[*9]，$D<0$ ならば 0 個

である．また，$D\geqq 0$ ならば次も一致する．

- 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との共有点の x 座標
- 方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の値

判別式 D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフ（$a>0$ のとき）			
$y=ax^2+bx+c$ のグラフ（$a<0$ のとき）			
$ax^2+bx+c=0$ の解	2 解 $\alpha,\ \beta$	重解 α	なし

【例題 63】 以下の $\boxed{}$ に当てはまる語句・式・値を答えよ．

- 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 D は $\boxed{\text{ア}}$ を判別する式である．
- 放物線 $y=ax^2+bx+c$ の判別式 D は $\boxed{\text{イ}}$ を判別する式である．
- これら 2 つの判別式は一致する．なぜなら，$\boxed{\text{イ}}$ を判別するには，$y=ax^2+bx+c$ の $\boxed{\text{ウ}}$ に $\boxed{\text{エ}}$ を代入して得られる方程式 $\boxed{\text{オ}}$ を解くからである．

*9 ここでは重解を「1 個」と数えている．一般的には，重複度を込めて「2 個」と数えることが多い．

§3.6 で学ぶ 2 次不等式において，前ページの内容は必要不可欠になる．

4. 2 次方程式・2 次関数の応用

A. 放物線と直線・放物線の共有点

放物線と直線・放物線の共有点についても，p.168 のときと同じことが成り立つ．

つまり，グラフの共有点の座標と連立方程式の解は一致する．

連立方程式の解が無い場合は，グラフの共有点も無い．解の個数も，解の数値も，「グラフの共有点の座標と連立方程式の解は一致する」．

たとえば，放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ と直線 $y = 2x - 3$ の共有点の座標 $(x,\ y)$ は

$y = x^2 - 4x + 5$ ……… ①

$y = 2x - 3$ ……… ②

を同時に満たす $(x,\ y)$ と等しい．つまり，連立方程式①，②を解けばよい．①を式②の左辺に代入して解けば

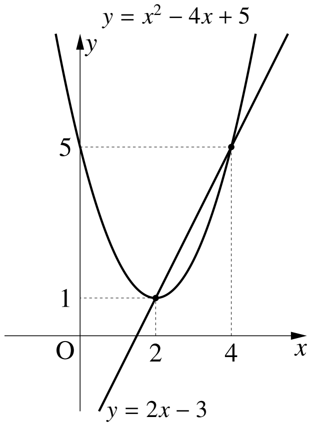
$$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 - 6x + 8 = 0 \qquad \therefore\ \ x = 2,\ 4$$

となる．そこで，②に代入して y を求めれば

$x = 2$ のとき $y = 1$，$x = 4$ のとき②より $y = 5$

であるので，共有点の座標は $(2,\ 1)$，$(4,\ 5)$ とわかる．



【例題 64】 放物線 C : $y = x^2 - 2x + 3$ と直線 L : $y = -x + 5$ との共有点を求め，C と L のグラフを描け．

【練習 65：放物線と直線・放物線の共有点】

放物線 C : $y = x^2 - 2x + 3$ について

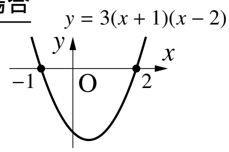
(1) 放物線 C_1 : $y = -x^2 - x + 6$ との共有点を求め，C と C_1 のグラフを描け．

(2) 直線 L : $y = -2x - k$ との共有点が 1 つであるように，k の値を定めよ．
また，そのときの C と L のグラフを描け．

放物線と直線・放物線の共有点が 1 点のときも，その 2 つのグラフは「接している」といい，その共有点をやはり「接点」という．たとえば，(2) において，直線 L と放物線 C は接していて，その接点は (0, 3) である．

B. 2 次関数・因数分解型 $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ の決定〜x 軸との共有点が与えられた場合

たとえば，2 次関数 $y = 3(x+1)(x-2)$ と x 軸の共有点を考えよう．これは 2 次方程式 $3(x+1)(x-2) = 0$ の 2 解であり，ただちに $x = -1,\ 2$ を得て，右図のようなグラフを描くことができる．



【例題 66】 次の 2 次関数と x 軸の共有点を求めよ．

1. $y = (x+2)(x-3)$
2. $y = 2(x-1)(x+3)$
3. $y = -3(x-4)(x+1)$

上の事実を逆に応用して，『2 次関数の決定』(p.190) をすることができる．

【例題 67】 放物線 C と x 軸との共有点の x 座標が 1，3 であったならば，C の方程式は

$y = a(x - \boxed{\text{ア}})(x - \boxed{\text{イ}})$

と書ける．もし，C が $(2, -2)$ を通るならば，C の方程式は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

【練習 68：2 次関数の決定（x 軸との共有点の座標が与えられた場合）】

x 軸と $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，点 $(1,\ 2)$ を通る放物線の方程式を求めよ．

3.6 2次不等式と2次関数

この節では，2 次式で表された不等式「2 次不等式」について学ぶ．p.169 で学んだように，1 次不等式は 1 次関数と 1 次方程式と深い関係があった．

2 次不等式の場合は，むしろ，2 次関数と 2 次方程式を用いて解くことになる．

1. 2次不等式の解法の基礎

2 次式を含む不等式を **2 次不等式** (quadratic inequality) といい，不等式を満たす x の値の範囲をその不等式の解，解を求めることを不等式を解くという．たとえば，2 次不等式

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x の値について考えてみると，$x = 2,\ 3$ は①を満たすので解であり，$x = 0,\ 5$ は解ではない．

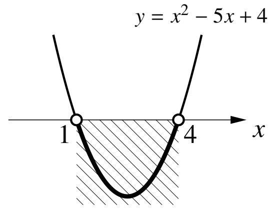
A. 2次不等式の解法の基本

2 次不等式を解くには，次のように考えるのが最もよい．

「2 次不等式 $x^2 - 5x + 4 < 0$ を解け」

$\leftrightarrow$ $y = x^2 - 5x + 4$ とおいたとき，$y < 0$ であるような x の範囲を求めよ

$\leftrightarrow$ 「2 次関数 $y = x^2 - 5x + 4$ のグラフにおいて，
y 座標が 0 より小さいときの x 座標の範囲を求めよ」



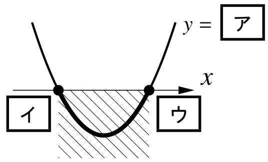
こうして，2 次不等式を解くことを，2 次関数と 2 次方程式の問題として考えることができる．①の場合

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x-1)(x-4)}_{y\text{とおく}} < 0 \leftarrow \text{因数分解した}$$

であるので，この左辺を y とおいた，2 次関数 $y = (x-1)(x-4)$ のグラフを描けば右上図のようになる．$y < 0$ となる x の範囲は $1 < x < 4$ であるので，①の解は $\mathbf{1 < x < 4}$ となる．

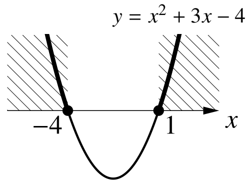
【例題 69】 2 次不等式 $x^2 - 6x + 8 \leqq 0$ を解こう．

1. 左辺を因数分解すると $\boxed{\text{ア}}$ $\leqq 0$ となるので，$y =$ $\boxed{\text{ア}}$ のグラフは右欄外のようになる．
2. $y \leqq 0$ となる x の範囲が解なので，$\boxed{\text{エ}}$ が解になる．



2 次不等式を解くためには，2 次関数の頂点を求める必要がない．x 軸との共有点の座標さえ求めれば十分である．

2 次不等式 $x^2+3x-4 \geqq 0$ の場合は

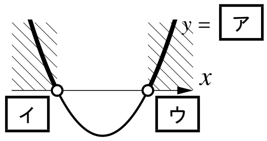


$$
\begin{aligned}
& x^2+3x-4 \geqq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{(x+4)(x-1)}_{y\text{ とおく}} \geqq 0 \qquad \text{←因数分解した}
\end{aligned}
$$

であるので，この左辺を y とおいた，2 次関数 $y=(x+4)(x-1)$ のグラフを描けば右上図のようになる．$y \geqq 0$ となる x の範囲は $x \leqq -4,\ 1 \leqq x$ であるので，$x^2+3x-4 \geqq 0$ の解は $\boldsymbol{x \leqq -4,\ 1 \leqq x}$ となる．

【例題 70】 2 次不等式 $x^2-x-6>0$ を解こう．

1. 左辺を因数分解すると $\boxed{\text{ア}} > 0$ となるので，$y = \boxed{\text{ア}}$ のグラフは右欄外のようになる．
2. $y>0$ となる x の範囲が解なので，$\boxed{\text{エ}}$ が解になる．



【例題 71】

1. 2 次関数 $y=x^2-2x-3$ のグラフと x 軸との共有点があれば求めよ．
2. 次の 2 次不等式を解け．

   i) $x^2-2x-3>0$　　ii) $x^2-2x-3 \geqq 0$　　iii) $x^2-2x-3<0$　　iv) $x^2-2x-3 \leqq 0$

【練習 72：2 次不等式〜その１〜】

次の 2 次不等式を解け.

(1) $(x-3)(x+2) \leqq 0$　(2) $x^2-6x+8<0$　(3) $x^2+3x+2 \geqq 0$　(4) $2x^2+3x-2>0$

(5) $x^2-16<0$　(6) $-x^2-2x+8 \geqq 0$　(7) $-2x^2+3x-1<0$　(8) $1-x^2>0$

x^2 の係数が負の場合は両辺を (-1) 倍して，x^2 の係数を正にすれば，下に凸なグラフだけを考えればよい，

B.　解の公式が必要な 2 次不等式

2 次式を有理数の範囲で因数分解できないときは，解の公式を用いればよい（p.234）．

【例題 73】

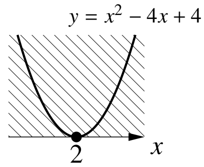
1. 2 次関数 $y = x^2 - 2x - 1$ のグラフと x 軸との共有点の座標を求めなさい．
2. 2 次不等式 $x^2 - 2x - 1 < 0$ を解け．

【練習 74：2 次不等式〜その２〜】

次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2 - x - 5 \leqq 0$　(2) $x^2 - 4x + 1 < 0$　(3) $2x^2 - 3x - 4 \geqq 0$　(4) $x^2 - 13 > 0$

C. 判別式 $D = 0$ の場合の 2 次不等式



2 次不等式 $x^2 - 4x + 4 \geqq 0$ の場合は

$$x^2 - 4x + 4 \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x-2)^2}_{y\text{とおく}} \geqq 0 \leftarrow \text{因数分解した}$$

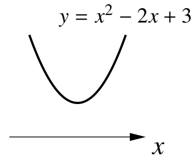
であるので，この左辺を y とおいた，2 次関数 $y = (x-2)^2$ のグラフを描けば右上図のようになる．$y \geqq 0$ となる x の範囲はすべての実数であるので，$x^2 - 4x + 4 \geqq 0$ の解は「すべての実数」となる．

【例題 75】

1. 2 次関数 $y = 4x^2 - 4x + 1$ のグラフと x 軸との共有点があれば求めよ．
2. 次の 2 次不等式を解け．

   i) $4x^2 - 4x + 1 > 0$　　ii) $4x^2 - 4x + 1 \geqq 0$　　iii) $4x^2 - 4x + 1 < 0$　　iv) $4x^2 - 4x + 1 \leqq 0$

D. 判別式 $D<0$ の場合の 2 次不等式



2 次不等式 $x^2-2x+3<0$ の場合, 左辺を因数分解できない．そこで, $x^2-2x+3=0$ を解の公式を用いて解くと，$x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 3}}{2}=1\pm\sqrt{-2}$ となる．

つまり，$x^2-2x+3<0$ の左辺を y とおいた，2 次関数 $y=x^2-2x+3$ のグラフは右上図のようになる．$y<0$ となる x の範囲はないので，$x^2-2x+3<0$ の解は「解なし」となる．

逆に，2 次不等式 $x^2-2x+3>0$ の解は「すべての実数」となる．必ず，グラフを描いて考える癖をつけよう．

【例題 76】

1. 2 次関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフと x 軸との共有点があれば求めよ．
2. 次の 2 次不等式を解け．

i) $x^2-4x+5>0$　　ii) $x^2-4x+5\geqq 0$　　iii) $x^2-4x+5<0$　　iv) $x^2-4x+5\leqq 0$

不等式 $x^2-2x+3<0$ が解なしであることは，$x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ と変形して，$(x-1)^2$ が非負であることからも理解できる．

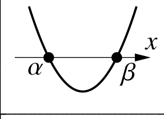
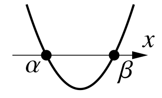
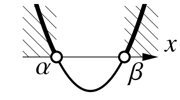
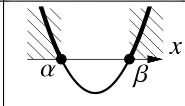
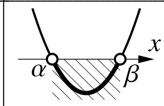
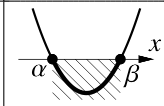
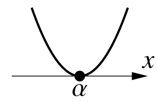
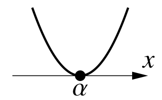
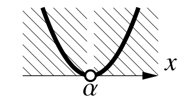
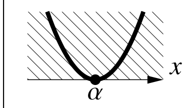
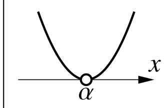
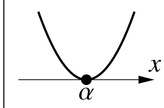
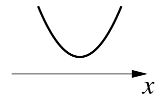
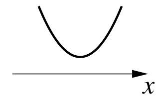
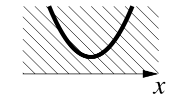
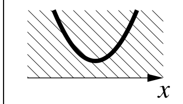
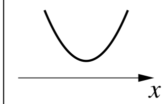
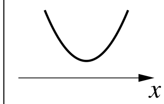
E. 2 次不等式の解法のまとめ

結局，2 次不等式を解くには，次の手順を踏めばよい．

- 片方の辺を 0 にし，他方の **x^2 の係数を正**にする．
- 2 次式を因数分解する．整数の範囲で因数分解できない場合は解の公式を用いる (p.235)．ただし，解を持たない場合もある（判別式 $D < 0$ の場合）．
- 簡単なグラフを書き，適する範囲を答える．

2 次不等式の解

$a > 0$ の場合の，2 次不等式の解はつぎのようにまとめることができる．

	$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ	$ax^2 + bx + c = 0$ の解	$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$ax^2 + bx + c \geqq 0$ の解	$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$ax^2 + bx + c \leqq 0$ の解
$D > 0$		 2 解 α, β	 $x < \alpha$, $\beta < x$	 $x \leqq \alpha$, $\beta \leqq x$	 $\alpha < x < \beta$	 $\alpha \leqq x \leqq \beta$
$D = 0$		 重解 α	 α 以外の実数	 すべての実数	 なし	 $x = \alpha$
$D < 0$		 解なし	 すべての実数	 すべての実数	 なし	 なし

この結果を暗記する必要はない．結果を確認できればよい．

【練習 77：2 次不等式〜その３〜】

次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2 - 2x - 1 < 0$　(2) $-2x^2 - x - 6 \geqq 0$　(3) $x^2 - 2x + 1 \geqq 0$　(4) $x^2 < 8$

(5) $x^2 \geqq 2x$　(6) $-2x^2 - 4 > 0$　(7) $\dfrac{1}{3}x^2 + x + \dfrac{2}{3} \geqq 0$　(8) $x^2 - x - 6 \geqq 2x - 4$

(9) $-x^2 - x - 9 < x - 3$　(10) $\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{5}{3} \geqq \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x + 1$

F. 連立 2 次不等式

連立 2 次不等式を解くときも，『連立 1 次不等式』(p.78) の場合と同じように，数直線を必ず描こう.

【練習 78：連立 2 次不等式】

次の不等式を解け.

(1) $\begin{cases} x^2-5x-14 \geqq 0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x^2-11x-40<0 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 25-9x^2>0 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ 3x^2+4x-6<0 & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$

2. 2次関数・2次方程式・2次不等式の応用問題

A. 範囲に注意すべき2次関数の最大・最小

【練習 79：範囲に注意すべき 2 次関数の最大・最小】

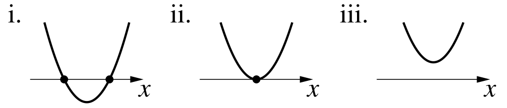
$x^2+y^2=1$ のとき，$L=x+y^2-1$ の最大値・最小値，そのときの x，y を求めよ．

x^2+y^2 を含む条件式があるときは，$0 \leqq x^2$，$0 \leqq y^2$ に注意しよう．

B. 2 次不等式の解からグラフを考える

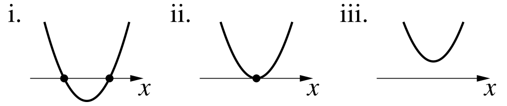
【例題 80】 2 次不等式 $x^2 - kx + 1 > 0$ の解が「すべての実数」であったという．

1. 左辺を y とおいた 2 次関数 $y = x^2 - kx + 1$ のグラフは，右のうちどれになるか．
2. 条件を満たす k の範囲を答えよ．



【例題 81】 2 次不等式 $x^2 + ax + b < 0$ の解が $-2 < x < 1$ であったという．

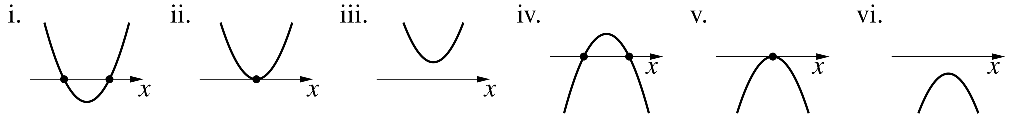
1. 左辺を y とおいた 2 次関数 $y = x^2 + ax + b$ のグラフの概形は，右のうちどれになりうるか．
2. a, b の値を答えよ．



【練習 82：2 次不等式の解からグラフを考える】

2 次不等式 $ax^2 - 2x + a > 0$ の解が「解なし」であったという．

(1) 左辺を y とおいた 2 次関数 $y = ax^2 - 2x + a$ のグラフは，下のうちどれになりうるか．



(2) 条件を満たす a の範囲を答えよ．

【練習 83：2 次不等式の解】

$2x^2 + kx + 3 > 0$ がすべての実数で成り立つような k の範囲を求めよ．

【練習 84：放物線と x 軸の大小関係】

放物線 $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$ のグラフについて，以下の問いに答えよ．

(1) このグラフが x 軸と共有点をもつように a の範囲を定めよ．

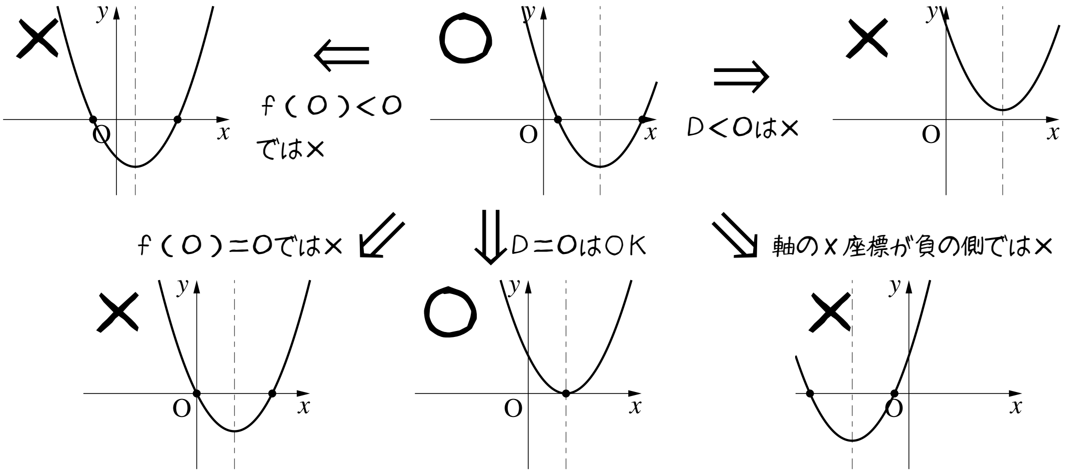
(2) このグラフが x 軸よりも下にあり，かつ x 軸と共有点をもたないように a の範囲を定めよ．

(3) 2 次不等式 $ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5 < 0$ の解が存在しないとき，a の範囲を定めよ．

C. 2 次方程式の解の配置

2 次方程式 $x^2 - ax + (a^2 - 3) = 0$ が正の解だけをもつような a の条件を考えよう.

これは, $y = f(x) = x^2 - ax + (a^2 - 3)$ と x 軸が, 正の部分で交わる条件に一致する. そのようなグラフを描いてみよう.



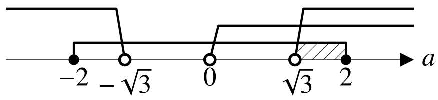
結果的に, 次の条件をすべて同時に満たせばよい.

$D \geqq 0$, (軸の x 座標) > 0, $f(0) > 0$

それらをそれぞれ解こう. $f(x) = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + a^2 - 3$ から, 軸の方程式は $x = \dfrac{a}{2}$ であるから

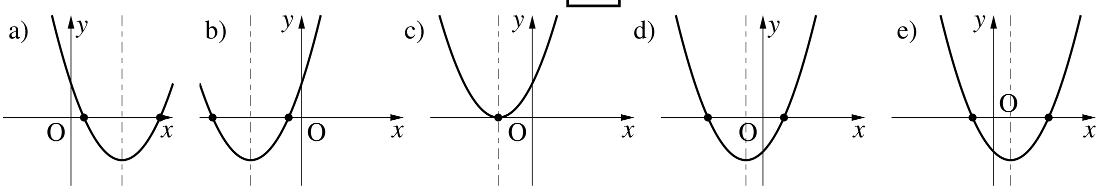
$$\begin{cases} D \geqq 0 \\ (\text{軸の } x \text{ 座標}) > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geqq 0 \\ \dfrac{a}{2} > 0 \\ f(0) = a^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 \leqq 0 \\ a > 0 \\ (a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqq a \leqq 2 \\ 0 < a \\ a < -\sqrt{3},\ \sqrt{3} < a \end{cases}$$

と分かる. これらを数直線上に表わせば右のようになるので, $\sqrt{3} < a \leqq 2$ が求める条件であると分かる.



上のように, 2 次方程式 $f(x) = 0$ の解の配置を調べる問題では,「判別式 D」「軸の x 座標」「$f(a)$ ($x = a$ を境に解の適・不適が定まる)」の 3 点を必ず調べよう. ただし, 後で見るように, このうち 1 つまたは 2 つが不要になることもある.

【例題 85】 $f(x) = x^2 + 2ax + a + 2 = 0$ が負の解だけをもつ (········ ①) ような a の条件を求めるため, ( ) には「<」「≦」「>」「≧」のいずれかを, $\boxed{}$ には記号・条件を入れなさい.



①を満たすときの $f(x) = 0$ のグラフとして, 適しているものを上からすべて選ぶと $\boxed{\text{ア}}$ になる.

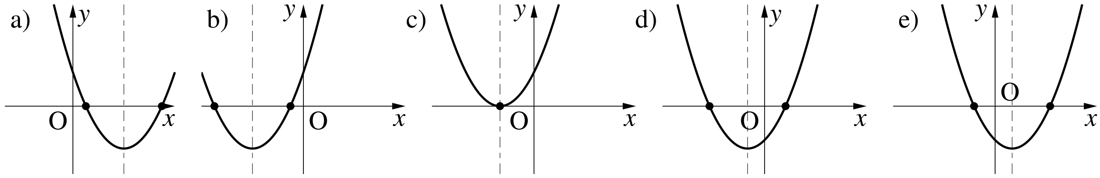
よって, ①を満たすには D (イ) 0, (軸の方程式) (ウ) 0, $f(0)$ (エ) 0 が成り立てばよい.

これらをすべて計算し連立して解けば, $\boxed{\text{オ}}$ が求める条件と分かる.

【練習 86：2 次方程式の解の配置〜その１〜】

$f(x) = 2x^2 + 3ax + a - 3 = 0$ が正の解と負の解を 1 つずつ持つとき，以下の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフとして適切なものをすべて選べ.



(2) 条件を満たすような a の範囲を求めよ.

【練習 87：2 次方程式の解の配置〜その２〜】

$x^2 - 4cx + c^2 + 4c = 0$ が，2 よりも大きな，2 つの異なる解をもつような c の条件を求めよ.

D. 放物線と他のグラフの大小関係を調べる

【練習 88：2 次関数と直線・放物線の大小関係】

2 次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax - 1$ とが共有点をもつための a の範囲を求めよ．

(2) 発展 $g(x) = bx^2 - x + 2$ とする．$f(x) > g(x)$ が常に成立するための定数 b の範囲を求めよ．

3. 絶対値を含む 2 次関数・方程式・不等式

場合に分けて絶対値を外して，考えていこう．

【練習 89：絶対値を含む 2 次関数】

次の式で与えられた関数のグラフを描け．

(1) $y = 2x - |x^2 - 4|$ (2) $y = |x^2 - 4x - 6|$

……この問の (2) のグラフは，$y = x^2 - 4x - 6$ のグラフのうち x 軸より下にある部分を x 軸について上側へ折り返したものになっている．これは，右辺の関数全体に絶対値がついている式の形からも理解できる．

【練習 90：絶対値を含む 2 次方程式】

次の方程式を解け．

(1) $\left|x^2-2x-8\right|=6x+1$　　(2) $\left|x^2-4x+3\right|=2-x$

【㊗展 91：絶対値を含む 2 次不等式】

次の不等式を解け．

① $3x^2 + |x^2 - 9| < 16x$

② $|x^2 - 8x - 3| - 2x - 8 > 0$

【発展 92：絶対値記号を複数含む式】

(1) 関数 $y = |2x-4| + |x-5|$ のグラフを書け．

(2) 方程式 $|x-3| + |x-5| = 3$ を解け．

(3) 不等式 $|x^2-4x+3| + |x-2| < x$ を解け．

表などで場合分けを整頓して，解答を作ろう．複雑な場合分けをしてもミスをしないためには，暗算に頼りすぎず，適度にメモを残しながら解くことが大事である．

1. 2次方程式の解法の基礎

ここでは，中3で既習の「2次方程式の解法」を復習できるよう取りあげる．

A. 2次方程式とは

（x についての）**2次方程式** (quadratic equation) とは，$a\ (\fallingdotseq 0)$，b，c を定数として

$ax^2 + bx + c = 0$

という形で表せる方程式のことである．与えられた2次方程式を満たす x の値をすべて求めることを「2次方程式を解く」といい，その x の値をその「2次方程式の解」とよぶ．

B. 因数分解を利用した解法

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の左辺が因数分解できる場合には，中学までで学んだように，因数分解を用いて解くのが一番よい．たとえば，$2x^2 - x - 3 = 0$ を解くと，次のようになる．

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow {}^{*10}\,2x - 3 = 0 \quad \text{または} \quad x + 1 = 0 \qquad \therefore x = \frac{3}{2}, -1 \ {}^{*11}$$

【練習 93：2次方程式を解く（因数分解の利用）】

次の2次方程式を解け．

(1) $x^2 - 2x - 15 = 0$　(2) $x^2 - 8x + 16 = 0$　(3) $12x^2 - 17x + 6 = 0$

(4) $3x^2 + 2x - 3 = -2x + 1$　(5) $\frac{1}{9}x^2 + x + 2 = 0$

[*10] ここで用いられる性質は，実数 A，B についての積の性質
$AB = 0 \iff A = 0$ または $B = 0 \iff A = 0$ か $B = 0$ の一方でも成り立てばよい（両方でもよい）
である．通常の会話における「または」の意味は，「どちらかが正しく，残りは間違い」の意味であることが多い．しかし，数学における「または」は「少なくともどちらかが正しい（両方とも正しい場合を含む）」の意味で使われる．「または」の扱いについては，p.12 において詳しく学ぶ．

[*11] 2つの解の間にあるカンマ「,」は，「または」の代わりに使われている．

C. （x の式）^{2} =（定数）の形にする解法

2 次方程式 $x^2+4x-3=0$ は，左辺を因数分解できないが，次のように解くことができる．

$x^2+4x=3$ ←定数項を右辺に移項

$x^2+4x+4=3+4$ ←両辺に 4 を足すと

$(x+2)^2=7$ ←左辺を 2 乗の形にできる

$x+2=\pm\sqrt{7}$ ←つまり，$x+2=\sqrt{7}$ または $x+2=-\sqrt{7}$

$x=-2\pm\sqrt{7}$ ←つまり，$x=-2+\sqrt{7}$ または $x=-2-\sqrt{7}$

【例題 94】 上と同じようにして $x^2+6x-13=0$ を解こう． $\boxed{}$ には

$x^2+6x=\boxed{ア}$ ←定数項を右辺に移項

$x^2+6x+\boxed{イ}=\boxed{ア}+\boxed{イ}$ ←両辺に $\boxed{イ}$ を足す

$(x+\boxed{ウ})^2=\boxed{エ}$ ←左辺が 2 乗の形になった

$x+\boxed{ウ}=\pm\sqrt{\boxed{エ}}$

$x=\boxed{オ}\pm\sqrt{\boxed{エ}}$

これは，x の解が $\boxed{カ}$, $\boxed{キ}$ の 2 つあることを意味している．

D. 2 次方程式の解の公式

x^2 の係数が 1 でなくても，次のようにして（x の式）^{2} =（定数）の形にして解くことができる．

具体的な 2 次方程式		一般の 2 次方程式
$3x^2+2x-8=0$		$ax^2+bx+c=0$
$3x^2+2x=8$	← 定数項を移項 →	$ax^2+bx=-c$
$x^2+\dfrac{2}{3}x=\dfrac{8}{3}$	← x^2 の係数を 1 にする →	$x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$
$x^2+\dfrac{2}{3}x+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$	← x の係数の半分の 2 乗を両辺に足す →	$x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2=-\dfrac{c}{a}+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$
$\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{25}{9}$	← $(x+\bigcirc)^2$ を作る →	$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$
$x+\dfrac{1}{3}=\pm\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\pm\dfrac{5}{3}$	← 平方根を求める（ただし，b^2-4ac の値は 0 以上とする）→	$x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ……… ①
$x=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}$	← x について解く →	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x=\dfrac{4}{3},-2$		$\left(\text{つまり},x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

①より下の変形は，右辺にある「b^2-4ac」の値が 0 以上でないといけない．

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ となる．この式を 2 次方程式の**解の公式** (formula of solution) という．ただし，この解は $b^2 - 4ac \geqq 0$ のときに限る．
$b^2 - 4ac < 0$ のときは $\sqrt{b^2 - 4ac}$ が意味をもたず，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は存在しない．

【練習 95：2 次方程式を解く（解の公式の利用）】

次の 2 次方程式を解け．

(1) $x^2 + 7x + 2 = 0$　(2) $x^2 + 8x - 3 = 0$　(3) $x^2 - x - 3 = 0$

(4) $x^2 - 4x + 5 = 0$　(5) $4x^2 + 6x + 1 = 0$　(6) $\dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3} = 0$

解の公式は暗記して，正確に使いこなせるようにしよう．
また，$\sqrt{}$ の中が負になったとき（$b^2 - 4ac < 0$ のとき）は，「解なし」と答えればよい．

E. 2次方程式の解と因数分解

2次方程式の2つの解法を見比べてみよう．

i) 因数分解を利用した解法

$$x^2-3x-18=0$$
$$(x-6)(x+3)=0 \quad \leftarrow\text{左辺の因数分解}\rightarrow$$
$$x=6,-3 \quad \leftarrow\text{方程式の解}\rightarrow$$

ii) 解の公式を用いた解法

$$x^2-5x-3=0$$
？？？
$$x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2} \leftarrow \text{『解の公式』で求めた}$$

i), ii) を見比べて，x^2-5x-3 の因数分解を得る．

$$x^2-3x-18=(x-\underbrace{6}_{\text{解の 1 つ}})(x-\underbrace{(-3)}_{\text{もう 1 つの解}}) \qquad x^2-5x-3=\left(x-\underbrace{\frac{5+\sqrt{37}}{2}}_{\text{解の 1 つ}}\right)\left(x-\underbrace{\frac{5-\sqrt{37}}{2}}_{\text{もう 1 つの解}}\right)$$

……実際，$\left(x-\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}\right)$ を展開すれば，この因数分解が正しいと分かる．

F. 2次方程式の解の個数〜判別式 D

解の公式の根号 $\sqrt{\ }$ 内の b^2-4ac を，2次方程式の**判別式** (discriminant) といい，D で表す．

2次方程式の判別式と解の個数

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の個数を調べるには判別式 $D=b^2-4ac$ の符号を調べればよい．

i) $D=b^2-4ac>0$ のとき，解は2つ存在する．

ii) $D=b^2-4ac=0$ のとき，解は1つ存在する．
このただ1つの解は**重解** (multiple solution) とよばれる．

iii) $D=b^2-4ac<0$ のとき，解は存在しない．

……$D=0$ のとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b+\sqrt{0}}{2a}$, $\dfrac{-b-\sqrt{0}}{2a}$ であり，どちらも $x=-\dfrac{b}{2a}$ に等しくなり，解が重なってしまう．これが，重解の語源である[*12]．

【練習 96：2次方程式の解の個数の判別】

2次方程式 $x^2+(2a-1)x+a^2-2a+4=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 判別式 D を a の式で表せ．

(2) 解が存在しないための a の条件を求めよ．

*12 厳密な数学の定義によれば，本来は**重根** (multiple root) とよぶべきである．しかし，高校数学においては「重解」という言葉が慣用的に用いられている．13th-note 数学 I も現状に従うこととする．

G. x の係数が偶数の場合

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において b が偶数の場合を考えよう．$b=2b'$ とおいて，$ax^2+2b'x+c=0$ に解の公式を用いると，次のようになる．

具体的な 2 次方程式

$x^2+8x+3=0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot3}}{2} \\ &= \frac{-8\pm\sqrt{64-12}}{2} \\ &= \frac{-8\pm2\sqrt{13}}{2} \\ &= -4\pm\sqrt{13} \quad \leftarrow 2\text{で約分} \end{aligned}$$

一般の 2 次方程式

$ax^2+2b'x+c=0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a} \\ &= \frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a} \quad \leftarrow 2\text{で約分} \end{aligned}$$

こうして，必ず計算の最後に 2 で約分する必要があるとわかる．そのため，b が偶数の場合には，解の公式を別に用意して，この手間をはじめから回避することができる．

x の係数が偶数の場合の解の公式・判別式

$D \geqq 0$ のとき，2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ である（$D<0$ のときは解なし）．また，解の個数は，$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ の符号を調べればよい．

$\dfrac{D}{4}$ による解の判別は慣れると大変使いやすい．一方，$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ は使いにくいと感じる人もいる．そのような人は，通常の解の公式で代用すればよい．

【例題 97】 2 次方程式 $x^2-6x+4=0$ を解け．

【例題 98】 エ，ケには「ある」「ない」のいずれかを答えなさい．

1. $x^2+14x+4=0$ の判別式を D とする．$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ に，$b'=\boxed{\text{ア}}$，$a=1$，$c=\boxed{\text{イ}}$ を代入して，$\dfrac{D}{4}=\boxed{\text{ウ}}$ と分かる．よって，この 2 次方程式の解は $\boxed{\text{エ}}$．
2. $3x^2-16x+12=0$ の判別式を D とする．$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ に，$b'=\boxed{\text{オ}}$，$a=\boxed{\text{カ}}$，$c=\boxed{\text{キ}}$ を代入して，$\dfrac{D}{4}=\boxed{\text{ク}}$ と分かる．よって，この 2 次方程式は解を $\boxed{\text{ケ}}$．

【練習 99：2 次方程式の解の個数の判別（x の係数が偶数の場合）】

$3x^2 - 2(m+1)x + \dfrac{1}{3}m^2 + m = 0$ の解の個数は，定数 m の値によってどのように変わるか調べよ．

【発展 100：2 次方程式を解く（係数に根号を含む場合）】

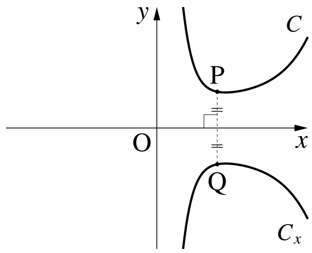
次の 2 次方程式を解け．

① $\sqrt{2}x^2 - 4x - \sqrt{2} = 0$　　② $2\left(2-\sqrt{3}\right)x^2 + 2\left(1-\sqrt{3}\right)x + 1 = 0$

2. 一般のグラフの移動について

ここで示される内容は，数学 II 以降で学ぶ関数についても成立するが，特に，$f(x)$ が 1 次関数，2 次関数であっても成立する．

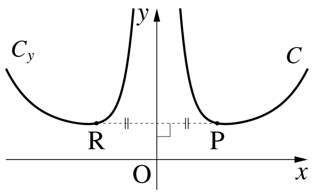
A. 一般の対称移動について



関数 $y = f(x)$ のグラフ C を，x 軸に関して対称に移動したグラフ C_x を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ v)$ を，x 軸に関して対称に移動して C_x 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y = f(x)$ 上にある」 $\iff$ $v = f(x)$
ii. 「P と Q は x 軸対称」 $\iff$ $v = -y$

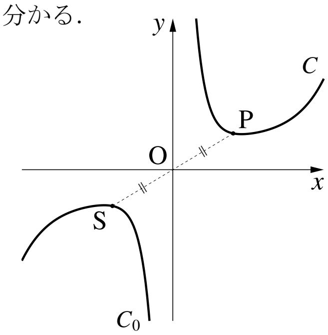
ii. を i. に代入して，$-y = f(x)$ となり，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ がグラフ $-y = f(x)$ 上にあると分かる[*13]．



また，関数 $y = f(x)$ のグラフ C を，y 軸に関して対称に移動したグラフ C_y を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(u,\ y)$ を，y 軸に関して対称に移動して C_y 上の点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y = f(x)$ 上にある」 $\iff$ $y = f(u)$
ii. 「P と R は y 軸対称」 $\iff$ $u = -x$

ii. を i. に代入して，$y = f(-x)$ となり，$\mathrm{R}(x,\ y)$ がグラフ $y = f(-x)$ 上にあると分かる．



最後に，関数 $y = f(x)$ のグラフ C を，原点に関して対称に移動したグラフ C_0 を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(u,\ v)$ を，原点に関して対称に移動して C_0 上の点 $\mathrm{S}(x,\ y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y = f(x)$ 上にある」 $\iff$ $v = f(u)$
ii. 「P と S は原点対称」 $\iff$ $u = -x,\ v = -y$

ii. を i. に代入して，$-y = f(-x)$ となり，$\mathrm{S}(x,\ y)$ がグラフ $-y = f(-x)$ 上にあると分かる．

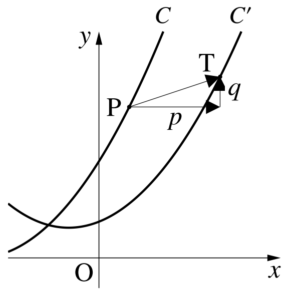
関数 $y = f(x)$ の対称移動

関数 $y = f(x)$ のグラフを，x 軸に関して，y 軸に関して，原点に関して対称移動したグラフを表す関数は，それぞれ次のようになる．

$-y = f(x)$	x 軸に関する対称移動	←y を $-y$ に代えた
$y = f(-x)$	y 軸に関する対称移動	←x を $-x$ に代えた
$-y = f(-x)$	原点に関する対称移動	←x を $-x$ に，y を $-y$ に代えた

*13 厳密には，$-y = f(x)$ を満たす任意の点 Q をとり，その対称移動した点が C 上にあることを示さないといけないが，ここでは省略した．C_y, C_0 についても同様である．詳しくは，数学 II の「軌跡」で学ぶ．

B. 一般の平行移動について



関数 $y=f(x)$ のグラフ C を，x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動したグラフ C' を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(u,\ v)$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動して C' 上の点 $\mathrm{T}(x,\ y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y=f(x)$ 上にある」 $\iff$ $v=f(u)$

ii. 「P を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動して T になる」

$\iff$ $x=u+p,\ y=v+q$ $\iff$ $u=x-p,\ v=y-q$

ii. を i. に代入して，$\mathrm{S}(x,\ y)$ がグラフ $y-q=f(x-p)$ 上にあると分かる．

関数 $y=f(x)$ の平行移動

関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフを表す関数は

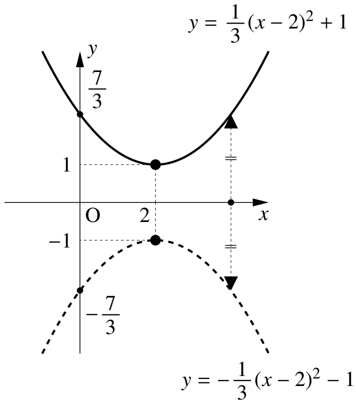
$y-q=f(x-p)$ 　　←xをx−pに，yをy−qに代えた

で表される．

3. 頂点の移動を用いて2次関数の移動を考える

2 次関数の移動については，頂点の移動を用いて考えることもできる．ただし，x^2 の係数には気をつけることになる．

A. 頂点の移動から 2 次関数の対称移動を考える（x 軸）



まず，x 軸についての対称移動を考えよう．

たとえば，2 次関数 $y=\dfrac{1}{3}(x-2)^2+1$ のグラフを x 軸について対称移動すると，頂点は

$(2,\ 1) \xrightarrow{\text{x軸対称移動}} (2,\ -1)$

と移動し，さらに x^2の係数の符号が反対になる．つまり，点線 ------ のグラフの式は，$y=-\dfrac{1}{3}(x-2)^2-1$ と分かる．

【例題 101】 放物線 C : $y=(x+3)^2+1$ を x 軸について対称移動してできる放物線 C_x の方程式，頂点の座標，軸の方程式を求めよ．

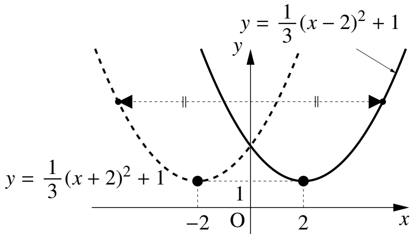
B.　頂点の移動から 2 次関数の対称移動を考える（y 軸，原点）

次に，x 軸についての対称移動を考えよう．

たとえば，2 次関数 $y=\dfrac{1}{3}(x-2)^2+1$ のグラフを y 軸について対称移動すると，頂点は

$$(2,1)\xrightarrow{y\text{ 軸対称移動}}(-2,1)$$

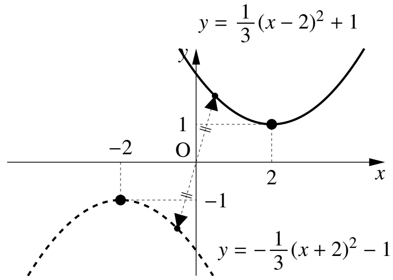
と移動する．x^2 の係数は変化しない．つまり，点線 ------ のグラフの式は，$y=\dfrac{1}{3}(x+2)^2+1$ と分かる．



最後に，2 次関数 $y=\dfrac{1}{3}(x-2)^2+1$ のグラフを原点について対称移動すると，頂点は

$$(2,\ 1)\xrightarrow{\text{原点対称移動}}(-2,-1)$$

と移動し，さらに x^2 の係数の符号が反対になる．つまり，点線 ------ のグラフの式は，$y=-\dfrac{1}{3}(x+2)^2-1$ と分かる．



【例題 102】 放物線 C： $y=(x+3)^2+1$ について，以下の問いに答えよ．

1. 放物線 C を y 軸について対称移動した放物線 C_y の方程式，頂点の座標，軸の方程式を求めよ．
2. 放物線 C を原点について対称移動した放物線 C_0 の方程式，頂点の座標，軸の方程式を求めよ．

第4章　データの分析

たくさんの数が集まったデータを，どのようにまとめたり，表すか，学ぶ，

4.1 データの代表値

1. データのまとめ方と代表値

A. データの大きさ・代表値

ある量についての，数値の集まりを**データ** (data) と言い，データに含まれる値を**変量** (value) という．また，データに含まれる数値の個数をデータの**大きさ** (the number of data) という．

中学までで学んだように，データの特徴を捉えた 1 つの値を，そのデータの**代表値**[*1]と言う．

データの代表値

データの代表値として，次の 3 つがよく用いられる．

(1) 変量 x についてのデータの値が x_1，x_2，$\cdots$，x_n ならば，その**平均値** (mean, value) を $\bar{x}$ で表し，$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$ で計算される．

(2) データを小さい順に並べたとき，中央の値，または，中央の 2 数の平均を**中央値** (median) という．

$7,\ 8,\ 11,\ 14,\ 9 \Rightarrow 7\quad 8\quad \boxed{9}\quad 11\quad 14$

中央値は 9

$7,\ 8,\ 11,\ 14,\ 9,\ 13 \Rightarrow 7\quad 8\quad \boxed{9\quad 11}\quad 13\quad 14$

中央値は $\dfrac{9+11}{2} = 10$

(3) データの中に繰り返し現れる回数の最も多い値を，**最頻値** (mode) という．

【例題 1】 次のデータの，平均値・中央値・最頻値をそれぞれ求めよ．

a) 4, 3, 6, 3, 9, 14, 10　　　b) 9, 3, 5, 9, 4, 6

B. データのまとめ方

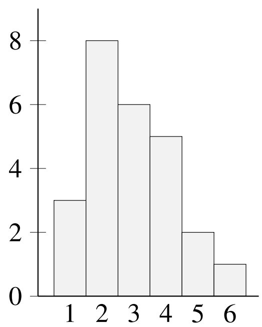
昨日のテスト勉強の時間 (単位：時間)				
3	4	2	2	1
2	3	4	3	2
1	2	1	3	5
6	4	2	4	2
5	4	3	3	2

たとえば,「あなたは昨日，テスト勉強を何時間しましたか？」という質問に対して, あるクラスで左の結果を得たとしよう．このようなデータは，下の**度数分布表** (frequency distribution table) や，右の**ヒストグラム** (histogram) にまとめることができる．

⇒

時間	1	2	3	4	5	6
人数	3	8	6	5	2	1

⇒



[*1] 英語では central tendency（中心傾向）という用語が，結果的にはほぼ同じものを表している．

このデータの代表値は，それぞれ次のようになる．

(1) 平均値は $\dfrac{1\cdot 3+2\cdot 8+3\cdot 6+4\cdot 5+5\cdot 2+6\cdot 1}{25}=\dfrac{73}{25}=2.92$ 時間．

(2) 25 人の中央は 13 人目なので，中央値は，上から 13 番目の 3 時間．

(3) 最頻値は，8 人で一番多い，2 時間．

【例題 2】 割り切れないときは四捨五入して上から 3 桁まで答えよ．

1. 10 人による 5 点満点のテストの結果が，5, 3, 1, 5, 3, 4, 2, 5, 2, 4 になった．平均値，中央値，最頻値を求めよ．
2. 右のデータは，2010 年に J リーグで優勝した名古屋グランパスが，公式戦で上げた得点のデータ*2である．このデータの平均値，中央値，最頻値を求めよ．

1 試合での得点数

3	1	1	2	3	2	1
1	3	2	2	2	2	2
0	1	2	2	1	0	0
5	0	2	1	1	2	1
1	2	2	1	2	1	

C. 代表値の限界

たとえば，次のデータは 2009 年に横浜港から出国した日本人の数を月ごとにまとめたデータ*3である．

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合計
人数	1,112	12	58	1,459	21	2	3	702	143	509	79	1,330	5,430

平均値は $5430\div 12=452.5$ 人であるが，10 月以外はこの人数から遠く，このデータを表す値として適切とは言えない．このように，平均値がデータにほとんど合わないことがあるので注意が必要である．

次に，中央値は $\dfrac{143+79}{2}=111$ 人である．150 人以下が 7 ヶ月あるので，平均値よりはこのデータを表すにはふさわしいと言えるが，1000 人を超える 1，4，12 月からはかけ離れており，十分とは言えない．

そこで「中央値 111 人，平均値 452.5 人」と表現すると，「半分の月が 111 人以下なのに，平均値がそれよりとても大きい，つまり，111 人よりずっと多い月が存在する」ことを表すことができる．このように，代表値は複数組み合わされると，より多くのことを表現することができる．

結局のところ，平均値や中央値がデータを表しきれない原因は，データの変量が上下に散らばっていることにある．このような散らばりのあるデータを表す方法は，p.246 以降で学ぶ．

*2 J リーグ公式サイト（http://www.j-league.or.jp/data/，以降の J リーグのデータも同様）

*3 法務省 HP（http://www.moj.go.jp/housei/toukei/toukei_ichiran_nyukan.html，以後の出国者数のデータも同様）

2. 仮平均

A. 仮平均とは

例として，101, 104, 99, 109, 95 の平均 $\bar{x}$ を求めよう．

	101	104	99	109	95
100 との違い	1	4	−1	9	−5

平均は1.6

100 を基準に考えて，右の表から

「100 との違い」の平均 $\dfrac{1+4+(-1)+9+(-5)}{5} = \dfrac{8}{5} = 1.6$

と計算でき，求める平均値は $\bar{x} = 100 + 1.6 = 101.6$ と分かる．

このように，データ全体から引く適当な値（上の例では 100）のことを**仮平均**という．

【例題 3】 右の表は，2007 年 8 月中旬の，那覇市と京都市の湿度を表にまとめたものである[*4]．那覇市，京都市の湿度について，それぞれ，平均値を求めよ．

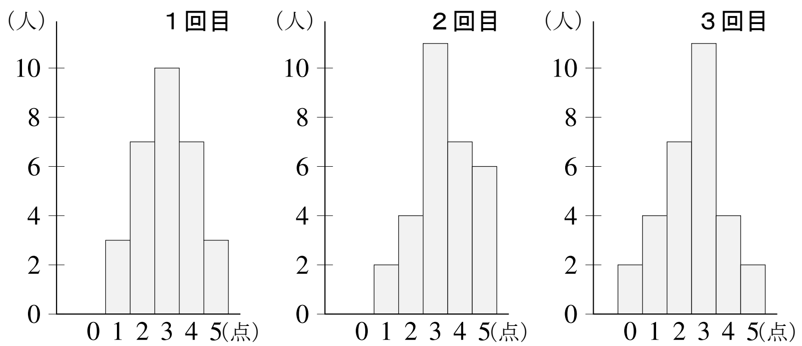
日	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
那覇	89	86	80	80	77	78	77	78	82	81
京都	55	54	60	64	61	54	52	57	61	60

B. ヒストグラムから平均値・中央値・最頻値を読み取る 〜 仮平均の利用（１）

たとえば，30 人のクラスで 5 点満点の小テストを 3 回行い，右下のような結果を得たとしよう．最頻値は，どの回も 3 点になっている．

1 回目は「平均値＝中央値＝最頻値」である．

2 回目の平均値は 3 点より高い．なぜなら，仮平均を 3 点とし，3 点より高い人数が多いからである．一方，中央値は 3 点である．なぜなら，3 点より多い人が 7 + 6 = 13 人いて，半数の 15 人に満たないためである．つまり「最頻値＝中央値＜平均値」となっている．

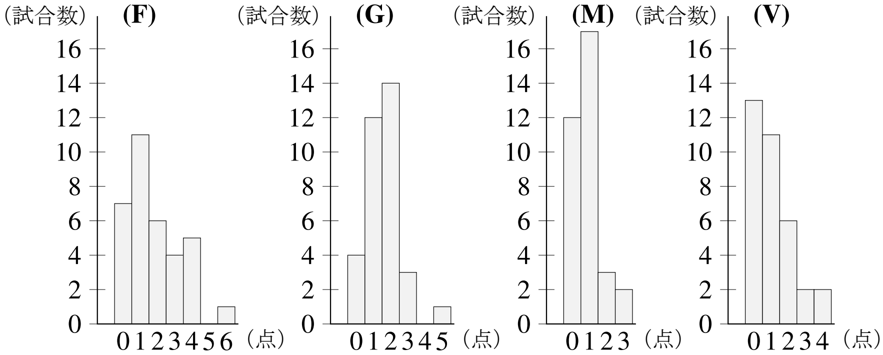


（平均値＝中央値）　（中央値＜平均値）　（平均値＜中央値）

3 回目の平均は 3 点より低い．なぜなら，仮平均を 3 点とし，3 点より低い人数が多いからである．一方，2 回目と同様に考えて中央値は 3 点なので「平均値＜最頻値＝中央値」となっている．

[*4] 気象庁「過去の気象データ検索」（http://www.data.jma.go.jp/obd/stats/etrn/index.php，以後の気象データも同様）

【例題 4】 右のデータは，サッカーリーグ J1 の 4 チームが挙げた得点を，2010 年のリーグ戦（総試合数 34）について集計したものである．



それぞれのチームについて「平均値＝中央値＜最小値」のようにして平均値・中央値・最頻値の大小関係を答えよ．

C. 幅のある度数分布表 ～ 仮平均の利用（2）

【練習 5 : 幅のある度数分布表】

2007 年 8 月の名古屋の最高気温をまとめて，次の表を得た．

最高気温 (度)	29.0 以上 29.9 以下	30.0 以上 30.9 以下	31.0 以上 31.9 以下	32.0 以上 33.2 以下	33.0 以上 33.9 以下	34.0 以上 34.9 以下	35.0 以上 35.9 以下	36.0 以上 36.9 以下	37.0 以上 37.9 以下	38.0 以上 38.9 以下	39.0 以上 39.9 以下	計
日数	3	2	2	1	5	4	4	4	4	1	1	31

この月の名古屋の最高気温の平均は，何度以上何度以下か．四捨五入して上から 3 桁まで答えよ．

4.2 データの散らばりを表す値

1. 範囲・四分位数・四分位偏差

A. 範囲

データの値のうち最も大きな値を**最大値** (maximum)，最も小さな値を**最小値** (minimum) と言う．また，最大値と最小値の差を，そのデータの**範囲** (range) という．

B. 四分位数

データを小さい順に並べ，4 等分した位置にくる値を**四分位数** (quartile) といい，次のように定義される．

まず，値の小さい順に左から一列に並べ，左半分のデータ，右半分のデータに二等分する．ただし，データの個数が奇数の時，中央値はどちらにも含めない．

そして，左半分のデータの中央値[*5]を**第 1 四分位数** (first quartile, lower quartile) と言い，Q_1 で表す．

データ全体の中央値を**第 2 四分位数** (second quartile, median) という．これは，Q_2 で表される．

右半分のデータの中央値[*5]を**第 3 四分位数** (third quartile, upper quartile) と言い，Q_3 で表す．

Q_1，Q_2，Q_3 をまとめて，四分位数という．

データの個数が奇数の時

16, 11, 5, 7, 3, 8, 12, 4, 18, 12, 14

⇓小さい順に左から並べる

下半分のデータ	中央値	上半分のデータ
3 4 5 7 8	11	12 12 14 16 18
中央値は5		中央値は14

$Q_1 = 5$, $Q_2 = 11$, $Q_3 = 14$

最大値は 18，最小値は 3，範囲は $18 - 3 = 15$

四分位範囲 $14 - 5 = 9$，四分位偏差 $9 \div 2 = 4.5$

データの個数が偶数の時

16, 11, 5, 7, 3, 8, 12, 4, 18, 12, 14, 10

⇓小さい順に左から並べる

下半分のデータ	中央値は $\frac{10+11}{2} = 10.5$	上半分のデータ
3 4 5 7 8 10		11 12 12 14 16 18
中央値は$\frac{5+7}{2} = 6$		中央値は$\frac{12+14}{2} = 13$

$Q_1 = 6$, $Q_2 = 10.5$, $Q_3 = 13$

最大値は 18，最小値は 3，範囲は $18 - 3 = 15$

四分位範囲 $13 - 6 = 7$，四分位偏差 $7 \div 2 = 3.5$

C. 四分位範囲と四分位偏差

$Q_3 - Q_1$ を**四分位範囲** (interquartile range, IQR) と言い，それを 2 で割った値 $\dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$ を**四分位偏差** (quartile deviation) と言う．

【例題 6】 最大値，最小値，範囲，四分位数 Q_1，Q_2，Q_3，四分位範囲，四分位偏差をそれぞれ求めよ．

a) 4, 3, 6, 3, 9, 14, 10　　b) 9, 3, 5, 9, 4, 6

[*4] 第一四分位数，第三四分位数の定義は他の場合もあるが，高校数学ではこのように定められている．

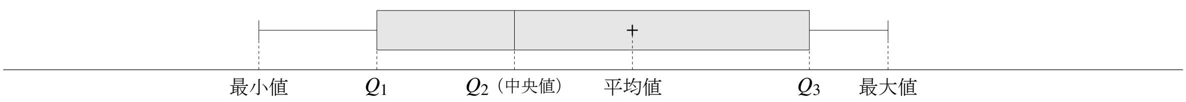
【練習 7：範囲・四分位数・四分位偏差】

最大値，最小値，範囲，四分位数 Q_1，Q_2，Q_3，四分位範囲，四分位偏差をそれぞれ求めよ．

(1) 11, 2, 19, 8, 10, 6, 15, 9, 21　　　　(2) 18, 26, 29, 24, 15, 31, 20, 30

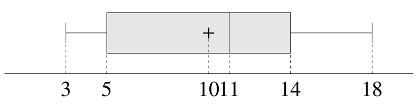
D.　箱ひげ図

データの平均値・中央値・四分位数は，次のような**箱ひげ図** (box plot) にまとめることができる．



たとえば，次のように箱ひげ図にまとめられる．

16, 11, 5, 7, 3, 8, 12, 4, 18, 12, 14 ⇒ 3 4 5 7 8 11 12 12 14 16 18
中央値は5 $= Q_1$　Q_2　中央値は14 $= Q_3$
（合計 110 より平均値 $110 \div 11 = 10$）⇒



2 つ以上のデータを，下のように箱ひげ図に表して比べることもある．

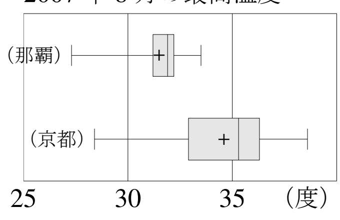
日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
那覇	32.0	33.2	33.5	33.5	33.3	32.7	31.8	32.2	32.2	28.9
京都	33.4	32.9	32.0	32.7	35.6	35.1	34.6	34.8	35.3	36.1
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
27.3	28.9	31.6	31.0	32.4	31.5	31.9	31.9	31.5	29.3	30.3
37.7	35.9	35.7	34.7	36.5	38.6	37.7	38.0	37.1	36.4	35.2
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
31.9	31.9	31.8	31.5	32.0	32.1	30.5	31.2	31.4	31.9	
36.1	29.8	34.5	36.3	36.1	35.8	30.8	30.7	28.4	29.4	

⇒

	那覇	京都
最大値	33.5	38.6
Q_3	32.2	36.3
Q_2	31.9	35.3
Q_1	31.2	32.9
最小値	27.3	28.4
平均	31.5	34.6

⇒

2007 年 8 月の最高温度



【練習 8：箱ひげ図を書く】

那覇市と京都市の，8 月の最低気温は左下のようになり，高かった順に並べて右下のようになった.

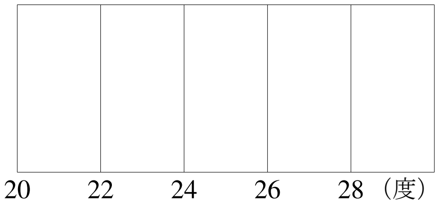
日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
那覇 京都	26.5 20.8	28.9 26.6	28.0 26.2	27.9 25.7	27.5 25.1	27.5 24.5	27.7 25.2	27.2 25.3	26.6 24.7	24.5 25.5
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
24.6 25.6	25.0 25.2	28.1 26.4	27.6 26.4	27.1 26.6	27.0 25.9	28.1 25.7	26.1 25.3	25.9 25.4	24.6 23.8	25.7 26.0
22	23	24	25	26	27.0	28	29	30	31	
25.6 23.7	26.1 22.7	26.3 23.3	24.5 24.6	27.0 22.4	26.3 24.1	26.2 26.2	25.6 23.7	27.0 22.6	25.5 22.8	

高い順に
$\longrightarrow$
並べた

那覇	27.5	26.5	25.6	京都	25.9	25.2	23.7
28.9	27.5	26.3	25.6	26.6	25.7	25.2	23.7
28.1	27.2	26.3	25.5	26.6	25.7	25.1	23.3
28.1	27.1	26.2	25.0	26.4	25.6	24.7	22.8
28.0	27.0	26.1	24.6	26.4	25.5	24.6	22.7
27.9	27.0	26.1	24.6	26.2	25.4	24.5	22.6
27.7	27.0	25.9	24.5	26.2	25.3	24.1	22.4
27.6	26.6	25.7	24.5	26.0	25.3	23.8	20.8

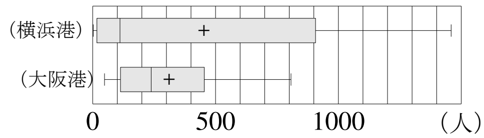
右の表を埋め，那覇市のデータ，京都市のデータを，1 つの箱ひげ図に表しなさい.

	那覇	京都
最大値		
Q_3		
Q_2		
Q_1		
最小値		
平均	26.5	24.8



【練習 9：箱ひげ図から読み取る】

2009 年に横浜港，大阪港から出国した日本人の数を各月に集計し，箱ひげ図をまとめたところ，右のようになった．それぞれの設問について，最もふさわしいものを答えよ（**複数回選択してもよい**）．ただし，どちらの港も違う月で同じ人数になることはなかった.



(1) 中央値より小さい月

(2) 第一四分位数 Q_1 より小さな月

(3) 横浜港からの出国者数が 200 名より少ない月

(4) 大阪港からの出国者数が 200 名より多い月

(5) 横浜港からの出国者数が大阪港より少ない月

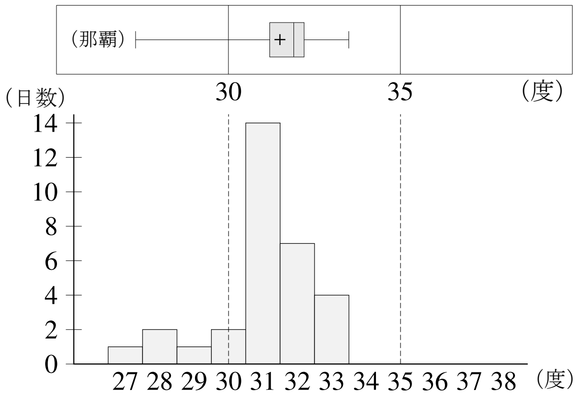
(6) 横浜港からの出国者数が大阪港より多い月

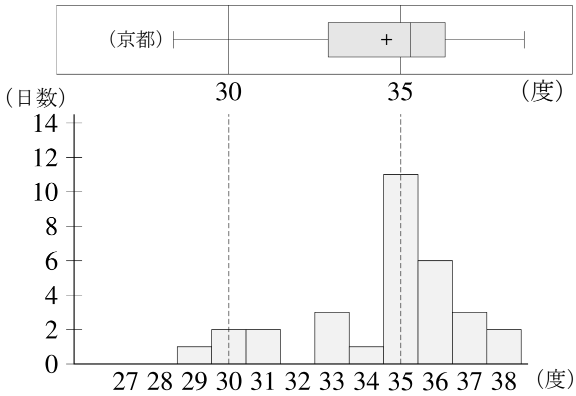
a. 3 ヶ月以下ある　b. ちょうど 3 ヶ月ある　c. 3 ヶ月以上ある　d. 6 ヶ月以下ある

e. ちょうど 6 ヶ月ある　f. 6 ヶ月以上ある

E.　ヒストグラムと箱ひげ図

p.247 で箱ひげ図に表した「2007 年 8 月の最高温度」のデータと，1 度刻みのヒストグラフを比べてみよう．すると，箱ひげ図はデータのばらつきをある程度表せると分かる．





2. 分散と標準偏差

A.　分散とは何か

平均値よりいくつ大きいかを**偏差** (deviation) という．

たとえば，5, 12, 11, 7, 10 の平均値を計算すると $\dfrac{5+12+11+7+10}{5}=9$ であり，偏差は右のようになる．

	5	12	11	7	10
偏差	-4	3	2	-2	1
偏差の 2 乗	$(-4)^2$	3^2	2^2	$(-2)^2$	1^2

「偏差の2乗の平均値」＝分散

偏差の 2 乗の平均値を**分散** (variance) と言い，しばしば s^2 で表される[*6]．上の例の分散 s^2 を計算すると

$$\frac{(-4)^2+3^2+2^2+(-2)^2+1^2}{5}=\frac{34}{5}=6.8$$

となる．さらに，分散の平方根を**標準偏差** (standard deviation) といい，しばしば記号 s で表される．上の例では，$s=\sqrt{6.8}\fallingdotseq 2.61$ となる ▦．

以下，▦ のあるものは，電卓を用いよう．開平法 (p.87) を用いない限り筆算では難しい．

【例題 10】　右の表は，2012 年 4 月 4 日からの中日ドラゴンズの 5 連戦における得点と失点をまとめたものである．

1. 右表の空欄を埋め，得点の分散・▦ 標準偏差を求めなさい．
2. 失点は 0, 0, 0, 2, 3 だった．失点の分散・▦ 標準偏差を求めよ．

日	4	5	6	7	8
得点	4	3	1	1	1
偏差					
偏差の 2 乗					

*6 実際には，最後の割る数を「データの大きさより 1 小さい数」とした方が，統計的にはよいことが知られている．

B. 度数分布表・ヒストグラムと分散・標準偏差

たとえば，5 点満点の小テストの結果が右の度数分布表にまとめられたとき，このデータの分散と標準偏差を求めてみよう．

点数	1	2	3	4	5
人数	2	8	11	6	3

このデータの「平均」$\bar{x} = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 8 + 3\cdot 11 + 4\cdot 6 + 5\cdot 3}{2+8+11+6+3} = \dfrac{90}{30} = 3$ であるから，偏差は右表のようにまとめられ，分散・標準偏差は次のようになる．

偏差の 2 乗	$(-2)^2$	$(-1)^2$	0^2	1^2	2^2
人数	2	8	11	6	3

$$s^2 = \frac{(-2)^2\cdot 2 + (-1)^2\cdot 8 + 1^2\cdot 6 + 2^2\cdot 3}{30} = \frac{34}{30} \fallingdotseq 1.13$$

$$s = \sqrt{\frac{34}{30}} \fallingdotseq 1.06$$

平均値が整数とならない場合は，p.251 で学ぶ「分散の公式」を用いるとよい．

C. 分散・標準偏差の表す意味

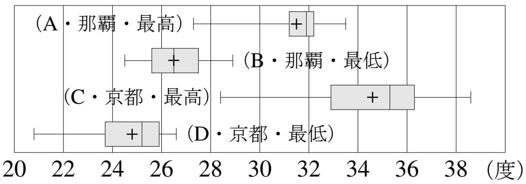
「平均との違い」を表す偏差の 2 乗を平均しているので，分散は次の性質を持つ．

分散・標準偏差の性質

「偏差の 2 乗」の平均値である分散 s^2，分散の正の平方根である標準偏差 s は，一般に次の性質を持つ．

- データの変量の散らばりが大きく，平均値から離れた値が多いほど，s^2，s は大きい．
- データの変量の散らばりが小さく，平均値から離れた値が少ないほど，s^2，s は小さい．

【例題 11】 2007 年 8 月の沖縄・京都の最高気温・最低気温を箱ひげ図にまとめ，右のデータを得た．
A，B，C，D を分散の大きい順に並べると，どのようになっていると予想できるか．



【練習 12：度数分布表から分散を求める】

右の表は，サッカーリーグ J1 のジュビロ磐田が 2006 年のリーグ戦の各試合で挙げた得点をまとめたものである．
1 試合あたりの得点の分散と▦標準偏差を求めよ．

得点	0	1	2	3	4	5	6	7	計
試合	3	12	7	9	2	0	0	1	34

3. 分散の計算の工夫

A. 分散の公式

たとえば，大きさ 3 のデータを考え，3 つの変量 $a+b+c$ の平均を $\bar{x}$ としよう．つまり，$3\bar{x} = a+b+c$ ……… ① とする．このとき，分散 s^2 は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{3}\{(a-\bar{x})^2+(b-\bar{x})^2+(c-\bar{x})^2\}\\
&= \frac{1}{3}(a^2-2a\bar{x}+\bar{x}^2+b^2-2b\bar{x}+\bar{x}^2+c^2-2c\bar{x}+\bar{x}^2)\\
&= \frac{1}{3}\{a^2+b^2+c^2-2\bar{x}(a+b+c)+3\bar{x}^2\}\\
&= \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2-2\bar{x}\cdot 3\bar{x}+3\bar{x}^2) \quad \text{←①を代入}\\
&= \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2-6\bar{x}^2+3\bar{x}^2)\\
&= \underbrace{\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)}_{a^2,\ b^2,\ c^2\ \text{の平均}} - \underbrace{\bar{x}^2}_{\text{平均の２乗}}
\end{aligned}$$

これは，3 数でなく，何個の数でも成り立つ．

分散の公式

変量 x の分散 s^2 について，分散の公式 $s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ が成り立つ．
つまり，「2 乗の平均」から「平均の 2 乗」を引くと分散に一致する．

たとえば，4, 2, 5, 1, 7 という 5 数のデータの分散を求めてみよう．
この 5 数の平均は $\dfrac{4+2+5+1+7}{5} = \dfrac{19}{5} = 3.8$ から偏差が小数となり，2 乗を筆算で計算しづらい．
そこで，「分散の公式」を用いると，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
s^2 &= (2\text{ 乗の平均}) - (\text{平均の 2 乗})\\
&= \frac{4^2+2^2+5^2+1^2+7^2}{5} - \left(\frac{4+2+5+1+7}{5}\right)^2 = \frac{95}{5} - 3.8^2 = 19 - 14.44 = 4.56
\end{aligned}$$

【例題 13】 右の表は，2012 年 8 月 14 日からの中日ドラゴンズの 6 連戦における得点と失点をまとめたものである．
この 6 連戦における，得点の分散・🖩 標準偏差，失点の分散・🖩 標準偏差をそれぞれ求めよ．

日	14	15	16	17	18	19
得点	0	6	1	4	4	0
失点	9	1	0	3	3	2

【練習 14：度数分布表から分散を求める】

p.242 の例「昨日のテスト勉強の時間」は右のような度数分布表にまとめられた．
「分散の公式」を用いて，このデータの分散と🖩 標準偏差を求めよ．

時間	1	2	3	4	5	6
人数	3	8	6	5	2	1

B. 仮平均の利用

たとえば，100，104，99，109，95 というデータについて次の 2 つを比べてみよう．

(1) 仮平均を用いない場合

						合計
もとの変量	101	104	99	109	95	508
偏差（平均 101.6）	−0.6	2.4	−2.6	7.4	−6.6	

（平均 101.6 は $508 \div 5 = 101.6$ で求められる）

(2) 仮平均を用いた場合

もとの変量	101	104	99	109	95	合計
100 との差	1	4	−1	9	−5	8
偏差（平均 1.6）	−0.6	2.4	−2.6	7.4	−6.6	

（平均 1.6 は $8 \div 5 = 1.6$ で求められる）

つまり，仮平均を用いた後も偏差は変わらない．さらに「分散の公式」も用いると，分散の値を次のように簡単に計算できる．

もとの変量	101	104	99	109	95	合計	平均
100 との差	1	4	-1	9	-5	8	1.6
100 との差の 2 乗	1	16	1	81	25	124	24.8

（「もとの変量」$101 + 104 + 99 + 109 + 95$ の分散）

$=$（「100 との差」$1, +4, -1, +9, -5$ の分散」）

$=$（「100 との差」の 2 乗の平均）$-$（「100 との差」の平均の 2 乗）$= 24.8 - 1.6^2 = 22.24$

【練習 15：分散の計算の工夫】

右の表は，2 人以上の勤労者世帯の，ここ 10 年間における 3 月の保健医療費・光熱水道費をまとめたものである（平成 22 年の年間平均を 100 としている）[*7]．それぞれの，データの分散と🖩標準偏差を求めよ．

年（平成）	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
保健医療費	98	90	104	97	98	101	102	99	99	105
光熱水道費	121	119	124	121	117	125	120	120	120	120

以上をまとめると，分散の計算方法は次のようになる．

分散の定義・公式

分散を求める式は，主に次の 2 つある．

- **（分散の定義）** 偏差の 2 乗の平均，つまり，$s^2 = \overline{(x - \bar{x})^2}$
- **（分散の公式）** 「2 乗の平均」から「平均の 2 乗」を引いた値，つまり，$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$

  平均値が整数にならない場合は，この（分散の公式）を用いるとよい．

また，仮平均をとった後も分散の値は変わらない．変量の値が大きいときは仮平均を用いるとよい．

*7 総務省 統計局（http://www.stat.go.jp/data/gousei/soku10/zuhyou/1n.xls）

4.3 2つのデータの相関

この章では，2 変量のデータを扱う．たとえば「1 日の最高気温と最低気温」「クラスの国語と数学のテストの点数」のようなデータについて考える．

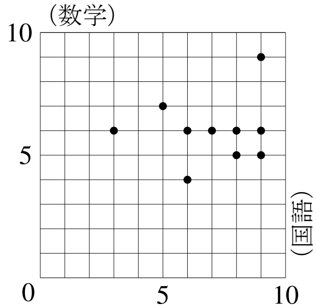
1. 正の相関・負の相関 ～ 2 変量のデータの図示

A. 散布図

たとえば，出席番号 1 から 10 までの人が受けたテスト結果が左下の表になったとき，右のような**散布図** (scatter plot) と呼ばれる図にまとめられる．

出席番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
国語	9	6	3	9	5	8	9	6	7	8
数学	6	4	6	5	7	5	9	6	6	6

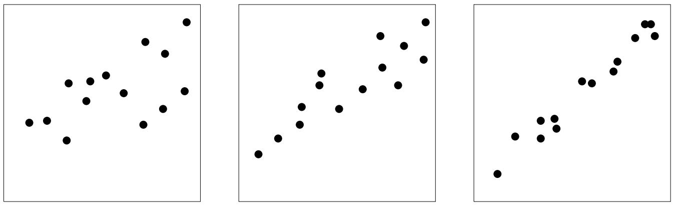
$\Rightarrow$



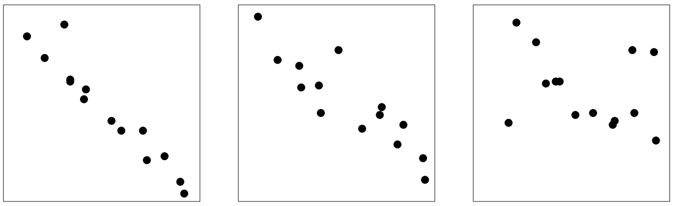
たとえば，出席番号 1 の人は国語 9 点，数学 6 点なので，散布図の対応する点に黒丸 ● がある．

B. 正の相関関係・負の相関関係 ～ 2 つのデータの関係

一方のデータが大きいほど，他方のデータも大きい傾向があるとき，**正の相関関係** (positive correlation) があるという．散布図で表すと，右図のように，正の相関関係が強ければ強いほど，黒点 ● が左下から右上にかけて集中する．



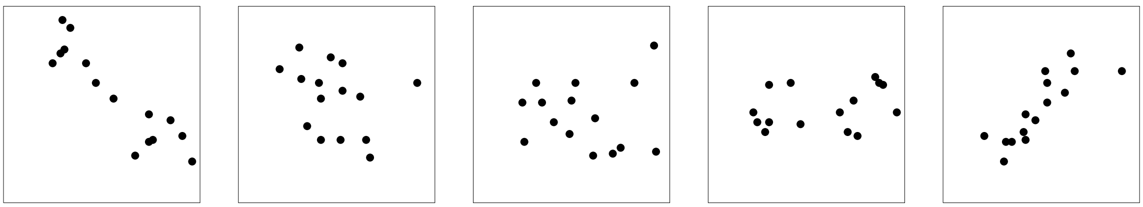
→→→→ 正の相関が強い →→→→



←←←← 負の相関が強い ←←←←

逆に，一方のデータが大きいほど，他方のデータも小さい傾向があるとき，**負の相関関係** (negative correlation) があるという．散布図で表すと，左図のように，負の相関関係が強ければ強いほど，黒点 ● が左上から右下にかけて集中する．

正の相関関係，負の相関関係，どちらの傾向も見られないときは**相関関係がない**という．これらをまとめると，それぞれ以下のような散布図になる．

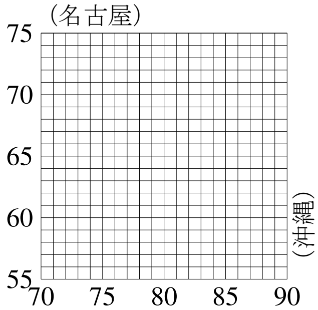


強い負の相関関係 → 弱い負の相関関係 → 相関関係がない → 弱い正の相関関係 → 強い正の相関関係

【例題 16】 2007 年 8 月のある 10 日間，沖縄と名古屋の平均湿度は次の表のようになった．

沖縄	71	71	74	74	76	82	89	86	80	80
名古屋	65	68	67	67	65	60	61	59	62	70

⇒



1. 右の散布図に表しなさい．
2. この 2 つのデータの相関関係は正か，負か．

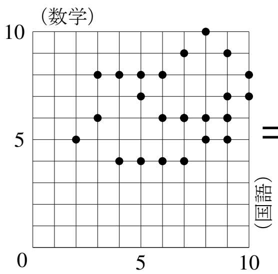
C. 相関表

p.254 の例は 10 人だったが，次の表のようにもっと多かったとしよう．

出席番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
国語	9	6	3	9	5	8	9	6	7	8	10	9	7	4	9	9	7	6	5	10	6	7	8	9	2	3	7	5	7	4
数学	6	4	6	5	7	5	9	6	6	6	7	6	6	4	6	7	4	8	4	8	4	4	10	6	5	8	6	8	9	8

すると，たとえば出席番号 1，12，15，24 の 4 人は国語 9 点，数学 6 点で同じため，散布図では 1 つの黒丸になってしまい，不十分である．

このような場合は，右のように，度数分布表を 2 つ組み合わせた，**相関表** (correlation table) を用いるとよい．相関表ならば，散布図のときに黒点が重なってしまう場合も詳細に表せる．



⇒

(数学)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10									1		
9								1		1	
8				1	1	1	1				1
7						1				1	1
6				1			1	3	1	4	
5			1						1	1	
4					1	1	2	2			
3											
2											
1											
0											

(国語)

【例題 17】 次のデータは，2008 年 3 月の J リーグの結果を並べたものです．

2-0　0-2　3-0　4-1　1-2　2-3　1-2　2-1　0-2

0-0　1-1　1-1　1-0　1-2　4-0　2-0　1-1　2-0

2-1　0-0　3-3　2-0　1-2　3-0　2-1　2-1　3-2

このデータを，横をホームチーム，縦をアウェイチームにした相関表にまとめなさい．

2. 相関係数

「正の相関」「負の相関」は，「相関係数」という数値で表現できることを学ぶ.

A. 偏差の積を考える

たとえば，p.254 のデータについて考えよう．国語の変量を x，数学の変量を y とおく．まず，国語と数学の偏差を求めるため，平均値を計算すると

出席番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
国語 (x)	9	6	3	9	5	8	9	6	7	8
数学 (y)	6	4	6	5	7	5	9	6	6	6

国語 $\bar{x} = \dfrac{10+7+3+9+4+7+9+6+7+8}{10} = 7$ 点

数学 $\bar{y} = \dfrac{6+5+6+5+7+7+8+4+8+4}{10} = 6$ 点

となる．よって，偏差は右下のようになる．

国語の偏差 $(x-\bar{x})$	2	-1	-4	2	-2	1	2	-1	0	1
数学の偏差 $(y-\bar{y})$	0	-2	0	-1	1	-1	3	0	0	0
偏差の積 $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	0	2	0	-2	-2	-1	6	0	0	0

ここで，「偏差の積」を考える．たとえば，出席番号 2 は $(-1)\times(-2)=2$ となる．

この「偏差の積」は次の性質を持っている．

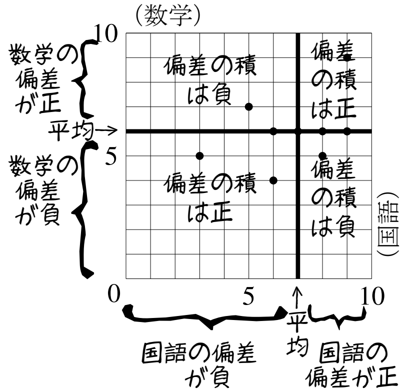
(1) 「偏差の積」が正

$\Longleftrightarrow$「国語の偏差」「数学の偏差」の正負が一致

(2) 「偏差の積」が負

$\Longleftrightarrow$「国語の偏差」「数学の偏差」の正負が異なる

これを散布図にまとめると右のようになり，次のことが分かる．



(1) 「偏差の積」が正の点は，正の相関関係を強くする．

(2) 「偏差の積」が負の点は，負の相関関係を強くする．

このように，「偏差の積」を，相関関係と対応づけることができる．

B. 共分散・相関係数

「偏差の積」の平均を**共分散** (covariance) といい，しばしば s_{xy} のように表す．右の例では次のようになる．

$$s_{xy} = \frac{0+2+0+(-2)+(-2)+(-1)+6+0+0+0}{10} = 0.3$$

出席番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(x-\bar{x})$	2	-1	-4	2	-2	1	2	-1	0	1
$(y-\bar{y})$	0	-2	0	-1	1	-1	3	0	0	0
$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	0	2	0	-2	-2	-1	6	0	0	0

「偏差の積の平均値」= 共分散

さらに，共分散を標準偏差の積で割った値を**相関係数** (correlation coefficient) といい，しばしば記号 r で表される．上の例では

国語の分散 $s_x^2 = \dfrac{2^2+(-1)^2+(-4)^2+2^2+(-2)^2+1^2+2^2+(-1)^2+0^2+1^2}{10} = \dfrac{36}{10} = 3.6$，標準偏差は $\sqrt{3.6}$

数学の分散 $s_y^2 = \dfrac{0^2+(-2)^2+0^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2+3^2+0^2+0^2+0^2}{10} = \dfrac{16}{10} = 1.6$，標準偏差は $\sqrt{1.6}$

であるから，相関係数は $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = \dfrac{0.3}{\sqrt{3.6}\sqrt{1.6}} = \dfrac{0.3}{0.1\sqrt{36}\sqrt{16}} = \dfrac{3}{6\cdot 4} = 0.125$ と求められる．

たとえば上の例で言えば $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\sqrt{\frac{36}{10}}\sqrt{\frac{16}{10}}}$ における分母分子の $\frac{}{10}$ は，いつも一致し約分できる．一般に，相関係数は $\dfrac{(\text{偏差の積の合計})}{\sqrt{(x\text{ の偏差の 2 乗の合計})}\sqrt{(y\text{ の偏差の 2 乗の合計})}}$ で計算できる．

【例題 18】 以下の問に答えよ．

x	4 5 3 2 6
y	3 6 5 7 4

ホームチーム	2 3 7 9 7 2
ビジターチーム	1 4 4 0 2 7

1. 右表で与えられた x, y のデータについて，相関係数を求めよ．
2. 2012 年 6 月 2 日のプロ野球の結果は右表のようになった．ホームチーム・ビジターチームの得点の，それぞれの分散，共分散，▦相関係数を求めよ．

C. 相関係数の性質

相関係数は次の性質を持つと分かっている．

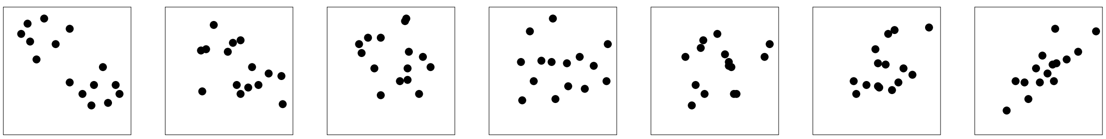
相関係数の性質

2 つの変量 x, y の相関係数 r は $\dfrac{(x,\ y\ \text{の偏差の積の平均（＝共分散）})}{(x\ \text{の標準偏差}) \times (y\ \text{の標準偏差})}$ で定義され，次の性質を持つ．

(1) $-1 \leqq r \leqq 1$

(2) $r > 0$ のとき[*8]，x, y は正の相関関係であり，r が大きいほど正の相関関係は強い．

(3) $r < 0$ のとき[*8]，x, y は負の相関関係であり，r が小さいほど負の相関関係は強い．

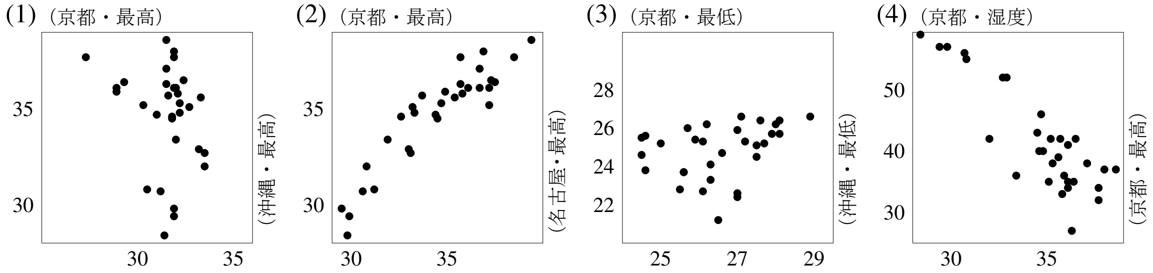


$r = -0.8$　$r = -0.5$　$r = -0.2$　$r = 0$　$r = 0.2$　$r = 0.5$　$r = 0.8$

強い ← 負の相関関係 ← 弱い ← 相関関係がない → 弱い → 正の相関関係 → 強い

[*8] 実際には，$-0.1 < r < 0.1$ ないし $-0.2 < r < 0.2$ の範囲にある場合は，「ほとんど相関関係がない」とみなされる．また，$0.7 < r$, $r < -0.7$ の場合に，それぞれ「強い正の相関関係」「強い負の相関関係」とみなされることが多い．

【例題 19】 次の散布図は，2007 年 8 月の沖縄・京都・名古屋における，気温・湿度などの散布図である．それぞれについて，相関係数を $-0.8, -0.3, 0.3, 0.8$ の中から一番近い値を選べ．



D. 共分散の公式・仮平均の利用

たとえば，大きさ 3 の 2 つのデータ x, y があり，変量は $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$，平均値は $\bar{x}, \bar{y}$ とする．つまり，$3\bar{x} = x_1 + x_2 + x_3$, $3\bar{y} = y_1 + y_2 + y_3$ ……… ① とする．このとき共分散 s_{xy} を計算すると

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{3}\{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y}) + (x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y}) + (x_3-\bar{x})(y_3-\bar{y})\} \\ &= \frac{1}{3}\{(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - (x_1+x_2+x_3)\bar{y} - \bar{x}(y_1+y_2+y_3) + 3\bar{x}\bar{y}\} \\ &= \frac{1}{3}\{(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - 3\bar{x}\bar{y} - 3\bar{x}\bar{y} + 3\bar{x}\bar{y}\} \quad \leftarrow \text{①を代入} \\ &= \underbrace{\frac{1}{3}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)}_{x,\ y\ \text{の積の平均}} - \underbrace{\bar{x}\bar{y}}_{\text{平均の積}} \end{aligned}$$

となる．これは，3 数でなく，何個の数でも成り立つ．

さらに，分散のときと同じように (p.252)，仮平均を用いても共分散の値は変わらない．

以上から，相関係数の計算方法について, 以下のようにまとめられる．

共分散・相関係数の定義・公式

変量 x, y の共分散 s_{xy}，相関係数 r を求める式は主に次の 2 つである．

- **（定義）**共分散は「（x の偏差）×（y の偏差）の平均」である．つまり $s_{xy} = \overline{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}$.
  相関係数は $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = \dfrac{\overline{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}}{\sqrt{\overline{(x-\bar{x})^2}}\sqrt{\overline{(y-\bar{y})^2}}}$ である．
  ただし，相関係数を求めるときの分母・分子は「平均」でなく「合計」でよい (p.256).
- **（公式の利用）** 共分散は「積 xy の平均」引く「平均の積 $\bar{x}\bar{y}$」になり，$s_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$
  「分散の公式」も用いると，相関係数は $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}\sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}}$ である．
  平均値が整数にならない場合は，この公式を用いるとよい．

また，仮平均を用いた後も共分散・相関係数の値は変わらない．

【練習 20：相関係数の計算〜その１〜】

右表は 2011 年 6 月 8 日のプロ野球の結果である．ホームチーム・ビジターチームの得点の，それぞれの分散，共分散，▦ 相関係数を求めよ．

ホームチーム	1	5	3	7	7
ビジターチーム	0	1	6	0	3

【練習 21：相関係数の計算〜その２〜】

右の表は，1992〜2001 年の 10 年間において，日本国内で収入の中央値 20%（2 人以上の勤労者世帯）の世帯について，収入と支出を，月平均でまとめたものである[*9]．この表の収入・支出それぞれの分散，共分散，▦ 相関係数を求めよ．

年	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01
収入	54	54	53	55	54	56	56	55	52	51
支出	42	43	41	42	41	43	42	42	40	40

[*9] 単位は十万円．総務省 統計局（http://www.stat.go.jp/data/kakei/longtime/zuhyou/j1602000.xls）

【発展 22：相関係数の計算～その３～】

p.255 において，2008 年 3 月の J リーグの結果をまとめ，右の相関表を得ていた．
この相関表を元に，ホームチーム・アウェイチームの得点の，それぞれの分散，共分散，相関係数を求めよ．

（アウェイ）

（ホーム）	0	1	2	3	4
3			1	1	
2	2	4		1	
1		3	4		1
0	2	1	4	2	1

3. 「相関」の意味すること

「A と B に相関がある」ことは，単に「A の値と B の値にある傾向が見られる」ことしか意味しない．その傾向の意味や原因は，相関係数を計算しても明らかにはならない．

たとえば，「京都の最高気温」「名古屋の最高気温」には強い正の相関がある (p.258)．これは，1 つの要因[*10]が名古屋と京都の気温の高低を同時に左右するからであろう．つまり，2 つの変量に 1 つの原因がある．

一方，家庭の「収入」と「支出」に強い正の相関があった (p.259)．これは，多くの家庭が「収入」の増減に合わせ「支出」を増減させるからであろう[*11]．これは，変量の 1 つがもう 1 つの変量に影響する例である．

また，ある日の野球の結果には弱い負の相関関係があった (p.257)．しかし，これは偶然の要素が強いだろう．他の日を計算すれば，全く別の結果かもしれない．

いずれにせよ，相関を生む背景についての考察は，数学とは別の問題となる．とはいえ，相関係数を計算した結果が，新たな考察のきっかけを与える方法になりうるのは確かである．

[*10] おそらく日本の本州・四国・九州の夏を蒸し暑くしている小笠原気団のこと

[*11] ただし，あくまで「一つの」考えにすぎない．「支出」が増えたから「収入」が増えたという考えもあり得るし，他の要因が「収入」「支出」双方を増やしたという考えもあり得る．

三角比の表

0°	1.0000	0.0000	0.0000	**角**	**cos**	**sin**	**tan**
1°	0.9998	0.0175	0.0175	46°	0.6947	0.7193	1.0355
2°	0.9994	0.0349	0.0349	47°	0.6820	0.7314	1.0724
3°	0.9986	0.0523	0.0524	48°	0.6691	0.7431	1.1106
4°	0.9976	0.0698	0.0699	49°	0.6561	0.7547	1.1504
5°	0.9962	0.0872	0.0875	50°	0.6428	0.7660	1.1918
6°	0.9945	0.1045	0.1051	51°	0.6293	0.7771	1.2349
7°	0.9925	0.1219	0.1228	52°	0.6157	0.7880	1.2799
8°	0.9903	0.1392	0.1405	53°	0.6018	0.7986	1.3270
9°	0.9877	0.1564	0.1584	54°	0.5878	0.8090	1.3764
10°	0.9848	0.1736	0.1763	55°	0.5736	0.8192	1.4281
11°	0.9816	0.1908	0.1944	56°	0.5592	0.8290	1.4826
12°	0.9781	0.2079	0.2126	57°	0.5446	0.8387	1.5399
13°	0.9744	0.2250	0.2309	58°	0.5299	0.8480	1.6003
14°	0.9703	0.2419	0.2493	59°	0.5150	0.8572	1.6643
15°	0.9659	0.2588	0.2679	60°	0.5000	0.8660	1.7321
16°	0.9613	0.2756	0.2867	61°	0.4848	0.8746	1.8040
17°	0.9563	0.2924	0.3057	62°	0.4695	0.8829	1.8807
18°	0.9511	0.3090	0.3249	63°	0.4540	0.8910	1.9626
19°	0.9455	0.3256	0.3443	64°	0.4384	0.8988	2.0503
20°	0.9397	0.3420	0.3640	65°	0.4226	0.9063	2.1445
21°	0.9336	0.3584	0.3839	66°	0.4067	0.9135	2.2460
22°	0.9272	0.3746	0.4040	67°	0.3907	0.9205	2.3559
23°	0.9205	0.3907	0.4245	68°	0.3746	0.9272	2.4751
24°	0.9135	0.4067	0.4452	69°	0.3584	0.9336	2.6051
25°	0.9063	0.4226	0.4663	70°	0.3420	0.9397	2.7475
26°	0.8988	0.4384	0.4877	71°	0.3256	0.9455	2.9042
27°	0.8910	0.4540	0.5095	72°	0.3090	0.9511	3.0777
28°	0.8829	0.4695	0.5317	73°	0.2924	0.9563	3.2709
29°	0.8746	0.4848	0.5543	74°	0.2756	0.9613	3.4874
30°	0.8660	0.5000	0.5774	75°	0.2588	0.9659	3.7321
31°	0.8572	0.5150	0.6009	76°	0.2419	0.9703	4.0108
32°	0.8480	0.5299	0.6249	77°	0.2250	0.9744	4.3315
33°	0.8387	0.5446	0.6494	78°	0.2079	0.9781	4.7046
34°	0.8290	0.5592	0.6745	79°	0.1908	0.9816	5.1446
35°	0.8192	0.5736	0.7002	80°	0.1736	0.9848	5.6713
36°	0.8090	0.5878	0.7265	81°	0.1564	0.9877	6.3138
37°	0.7986	0.6018	0.7536	82°	0.1392	0.9903	7.1154
38°	0.7880	0.6157	0.7813	83°	0.1219	0.9925	8.1443
39°	0.7771	0.6293	0.8098	84°	0.1045	0.9945	9.5144
40°	0.7660	0.6428	0.8391	85°	0.0872	0.9962	11.4301
41°	0.7547	0.6561	0.8693	86°	0.0698	0.9976	14.3007
42°	0.7431	0.6691	0.9004	87°	0.0523	0.9986	19.0811
43°	0.7314	0.6820	0.9325	88°	0.0349	0.9994	28.6363
44°	0.7193	0.6947	0.9657	89°	0.0175	0.9998	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	0.0000	1.0000	な　し
角	**cos**	**sin**	**tan**	**角**	**cos**	**sin**	**tan**

これらの値を計算するには，大学で学習することになるテイラー展開（または，マクローリン展開）が必要となる．

索引

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 I で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グサイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π, ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ, ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω