13th-note 数学II

（新学習指導要領（平成 **24** 年度～）向け）

Ver3.01(2013-8-31)

目次

第1章　いろいろな数と式

多項式とは，$2x^3+x^2-1$，$\dfrac{1}{3}x^2-3$ のように，$a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ の形で表される式のことを言う．
分数式とは，$\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$，$\dfrac{1}{x-2}$ のように，分母・分子とも多項式で表された式のことを言う．
この章では，これらの式の計算を扱ったのち，「式が等しい・大小」の意味と証明について考える．
その後，これらの式に関する方程式について学ぶ．この際，複素数という新たな数が必要とされる．

A 式の計算と証明

1A.1 式の展開・因数分解と二項定理

1. 3次式の展開・因数分解

A. 立方の公式 1

$(a+b)^3$ を展開すると

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)\ (a^2+2ab+b^2)$$

$$= \overset{①}{a^3} + \overset{②}{2a^2b} + \overset{③}{ab^2} + \overset{④}{ba^2} + \overset{⑤}{2ab^2} + \overset{⑥}{b^3}$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

	a^2	$2ab$	b^2
a	a^3	$2a^2b$	ab^2
b	ba^2	$2ab^2$	b^3

となる．これを使い，たとえば $(2x+y)^3$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（○）

$$(2x+y)^3$$
$$= \underbrace{(2x)^3 + 3\cdot(2x)^2y + 3\cdot(2x)y^2 + y^3}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(2x+y)^3$$
$$= (2x+y)(2x+y)^2$$
$$= (2x+y)(4x^2+4xy+y^2)$$
$$= 8x^3 + 8x^2y + 2xy^2 + 4x^2y + 4xy^2 + y^3$$
$$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

次ページで見るように，$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ も成り立つ．

立方の公式 1

0° $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$，　$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

【例題 1】

1. $a = 5x,\ b = 2$ のとき，$3a^2b,\ 3ab^2$ の値をそれぞれ求めよ．
2. 次の多項式を展開せよ．

(a) $(x+2)^3$　　(b) $(x+4)^3$　　(c) $(2x+1)^3$　　(d) $(3x+2)^3$

【解答】

1. $3a^2b = 3\cdot(5x)^2\cdot 2 = \mathbf{150x^2}$，　$3ab^2 = 3\cdot 5x\cdot 2^2 = \mathbf{60x}$
2. (a) $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 + 2^3$

$$= \mathbf{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$$

(b) $(x+4)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 4 + 3\cdot x\cdot 4^2 + 4^3$

$$= \mathbf{x^3 + 12x^2 + 48x + 64}$$

(c) $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 1 + 3\cdot(2x)\cdot 1^2 + 1^3$

$$= \mathbf{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}$$

◀『立方の公式 1』(p.2)

(d) $(3x+2)^3 = (3x)^3 + 3\cdot(3x)^2\cdot 2 + 3\cdot(3x)\cdot 2^2 + 2^3$

$\quad = \mathbf{27x^3 + 54x^2 + 36x + 8}$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ については，公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ で処理するほうがよい．たとえば，$(a-2b)^3$ の計算は次のようになる．

$$\begin{aligned}(a-2b)^3 &= \left\{a+(-2b)\right\}^3 && \leftarrow 2b \text{ を引くことと } (-2b) \text{ を足すことは同じ}\\ &= a^3 + 3\cdot a^2(-2b) + 3\cdot a(-2b)^2 + (-2b)^3 && \leftarrow \text{慣れると省略できる}\\ &= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3\end{aligned}$$

【練習 2：多項式の展開～立方の公式 1】

次の多項式を展開せよ．

(1) $(a-4)^3$　　(2) $(3a-2)^3$　　(3) $(2a+5)^3 + (2a-5)^3$

【解答】

(1) $(a-4)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot(-4) + 3\cdot a\cdot(-4)^2 + (-4)^3$

$\quad = \mathbf{a^3 - 12a^2 + 48a - 64}$

◀ $(a-4)^3 = \left\{a+(-4)\right\}^3$

(2) $(3a-2)^3 = (3a)^3 + 3\cdot(3a)^2\cdot(-2) + 3\cdot(3a)\cdot(-2)^2 + (-2)^3$

$\quad = \mathbf{27a^3 - 54a^2 + 36a - 8}$

◀ $(3a-2)^3 = \left\{3a+(-2)\right\}^3$

(3) $(2a+5)^3 + (2a-5)^3$

$$\begin{aligned}&= (2a)^3 + \cancel{3\cdot(2a)^2\cdot 5} + 3\cdot(2a)\cdot 5^2 + \cancel{5^3}\\ &\quad + (2a)^3 + \cancel{3\cdot(2a)^2\cdot(-5)} + 3\cdot(2a)\cdot(-5)^2 + \cancel{(-5)^3}\\ &= 8a^3 + 150a + 8a^3 + 150a = \mathbf{16a^3 + 300a}\end{aligned}$$

B. 立方の公式 2

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開すると

$$\begin{aligned}(a+b)\ (a^2-ab+b^2) &= \overset{①}{a^3} - \overset{②}{a^2b} + \overset{③}{ab^2} + \overset{④}{ba^2} - \overset{⑤}{ab^2} + \overset{⑥}{b^3}\\ &= a^3 + b^3\end{aligned}$$

	a^2	$-ab$	b^2
a	a^3	$-a^2b$	ab^2
b	ba^2	$-ab^2$	b^3

となる．これを使い，たとえば $(3x+1)(9x^2-3x+1)$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（○）

$$\begin{aligned}&(3x+1)(9x^2-3x+1)\\ &= \underbrace{(3x+1)\left\{(3x)^2 - (3x)\cdot 1 + 1^2\right\}}_{\text{慣れると省略できる}}\\ &= 27x^3 + 1\end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$\begin{aligned}&(3x+1)(9x^2-3x+1)\\ &= 27x^3 - 9x^2 + 3x + 9x^2 - 3x + 1\\ &= 27x^3 + 1\end{aligned}$$

また，同様に $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ も成り立つ．

左辺の $a \pm b$ と右辺の $a^3 \pm b^3$ は符号が一致する，と覚えておこう．
ただし，この公式を展開のために使う機会は少なく，p.6 における「因数分解」で(逆方向に)よく利用される．

【例題 3】

1. $(x+2)(x^2-2x+4)$, $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)$ を展開せよ．
2. 次の中から，$8x^3+27$ になるもの，$8x^3-27$ になるものを 1 つずつ選べ．

a) $(2x+3)(4x^2+6x+9)$　b) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$　c) $(2x+3)(4x^2-6x-9)$
d) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$　e) $(2x-3)(4x^2-6x+9)$　f) $(2x-3)(4x^2-6x-9)$

【解答】

1. $(x+2)(x^2-2x+4) = x^3+2^3 = \boldsymbol{x^3+8}$　◀『立方の公式 2』(p.3)
$(ab-3)(a^2b^2+3ab+9) = (ab)^3-3^3 = \boldsymbol{a^3b^3-27}$
2. 公式と見比べて
$(2x+3)(4x^2-6x+9) = (2x)^3+3^3$
$(2x-3)(4x^2+6x+9) = (2x)^3-3^3$
であるので，$8x^3+27$ は **b)**，$8x^3-27$ は **d)** である．

◀符号に注意して選ぼう．どれが正しいか分からなくなったら，展開して確認すればよい．

C. 展開の公式のまとめ

【練習 4：展開の公式のまとめ～その１～】

次の多項式を展開せよ．

(1) $(2x-3)^2+(x-2)^3$　(2) $(x+4)(x^2-4x+16)+(x+8)(x-8)$
(3) $(2x-1)(4x^2+4x+1)+(3x-1)(4x-1)$　(4) $x(x+2)(2x+3)-(2x+1)^3$

【解答】

(1) (与式) $= (4x^2-12x+9)+(x^3-6x^2+12x-8)$　◀『立方の公式 1』(p.2)
$= \boldsymbol{x^3-2x^2+1}$

(2) (与式) $= (x^3+64)+(x^2-64) = \boldsymbol{x^3+x^2}$　◀『立方の公式 2』(p.**??**)

(3) (与式) $= (8x^3-1)+(12x^2-7x+1) = \boldsymbol{8x^3+12x^2-7x}$

(4) (与式) $= x(2x^2+7x+6)-(8x^3+12x^2+6x+1)$　◀『立方の公式 1』(p.2)
$= 2x^3+7x^2+6x-8x^3-12x^2-6x-1$
$= \boldsymbol{-6x^3-5x^2-1}$

【発展 5：展開の公式のまとめ〜その２〜】

次の多項式を展開せよ．

① $(x+1)^3(x-1)^3$　　② $(x-1)^2(x^2+x+1)^2$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$　　④ $(a+b+c)^3$

【解答】

①（与式）$=\{(x+1)(x-1)\}^3$

$=(x^2-1)^3$

$=\boldsymbol{x^6-3x^4+3x^2-1}$

②（与式）$=\{(x-1)(x^2+x+1)\}^3$

$=(x^3-1)^3$

$=\boldsymbol{x^9-3x^6+3x^3-1}$

③ $(x+y)$ と (x^2-xy+y^2) の積は計算しやすく，

$(x-y)$ と (x^2+xy+y^2) の積も計算しやすい．

（与式）$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$

$=\boldsymbol{x^6-y^6}$

◀ $(x+y)(x-y)$ を先に計算すると，$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ が余ってしまう．

◀『立方の公式 2』(p.3)

◀『和と差の積の公式』(数 I，p.50)

④ $a+b=A$ とおくと

（与式）

$=(A+c)^3$

$=A^3+3A^2c+3Ac^2+c^3$

$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3c(a^2+2ab+b^2)+3ac^2+3bc^2+c^3$

$=\boldsymbol{a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc}$

◀ 慣れたら，$a+b$ を 1 つの文字とみなして計算してもよい．

D.　『立方の公式 2』(p.3) を逆に利用した因数分解

$8x^3+y^3$ には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

$$
\begin{aligned}
&8x^3+y^3\\
&=(2x)^3+y^3\\
&=(2x+y)\left\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\right\}\\
&=(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)
\end{aligned}
$$

ii) その元となっている展開計算

$$
\begin{aligned}
&(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)\\
&=(2x+y)\left\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\right\}\\
&=(2x)^3+y^3\\
&=8x^3+y^3
\end{aligned}
$$

立方の公式 2 (p.3) の逆利用

1°　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,　　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

○^{3} ± △^{3} の形の因数分解は重要度が高いが，忘れやすいので気をつけよう．展開のときと同じように，$a \pm b$ と $a^3 \pm b^3$ は符号が一致する，と覚えておくとよい．また，1，8，27，64，125，216，343，512，729 を見たら「整数の 3 乗だ」と気づけるようになるとよい．

【例題 6】 次の式を因数分解せよ．

1. x^3+27　　2. $8a^3+1$　　3. $8x^3-27y^3$　　4. $64a^3-125b^3$

【解答】

1. $x^3+27=x^3+3^3$
$\quad=\boldsymbol{(x+3)(x^2-3x+9)}$

	x^2	$-3x$	9
x	x^3	$-3x^2$	$9x$
3	$3x^2$	$-9x$	27

2. $8a^3+1=(2a)^3+1^3$
$\quad=\boldsymbol{(2a+1)(4a^2-2a+1)}$

	$4a^2$	$-2a$	1
$2a$	$8a^3$	$-4a^2$	$2a$
1	$4a^2$	$-2a$	1

3. $8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3$
$\quad=\boldsymbol{(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)}$

	$4x^2$	$6xy$	$9y^2$
$2x$	$8x^3$	$12x^2y$	$18xy^2$
$-3y$	$-12x^2y$	$-18xy^2$	$-27y^3$

4. $64a^3-125b^3=(4a)^3-(5b)^3$
$\quad=\boldsymbol{(4a-5b)(16a^2+20ab+25b^2)}$

	$16a^2$	$20ab$	$25b^2$
$4a$	$64a^3$	$80a^2b$	$100ab^2$
$-5b$	$-80a^2b$	$-100ab^2$	$-125b^3$

E.　因数分解の公式のまとめ

【発展 7：3 次式の因数分解】

次の多項式を因数分解せよ．

① ax^3-ay^3　　② $2x^3+16y^3$　　③ $a^3+(b+1)^3$　　④ a^6+1

【解答】

① (与式) $=a(x^3-y^3)=\boldsymbol{a(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

◀『立方の公式 2 の逆利用』(p.6)

② (与式) $=2(x^3+8y^3)$

$= \mathbf{2(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)}$

◂『立方の公式 2 の逆利用』(p.6)

③ （与式）$= \{a + (b + 1)\}\{a^2 - a(b + 1) + (b + 1)^2\}$

$= \mathbf{(a + b + 1)(a^2 - ab - a + b^2 + 2b + 1)}$

◂『立方の公式 2 の逆利用』(p.6)

④ （与式）$= (a^2)^3 + 1^3 = \mathbf{(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)}$

【発展 8：因数分解のまとめ〜その１〜】

次の多項式を因数分解せよ.

① $(a - b)^3 - (b - c)^3$　　② $a^3 + ac + b^3 + bc$　　③ $a^6 - 4a^4b^2 + 4a^2b^4 - b^6$

【解答】

① （与式）$= \{(a - b) - (b - c)\}\{(a - b)^2 + (a - b)(b - c) + (b - c)^2\}$

$= (a - b - b + c)$
$\quad (a^2 - 2ab + b^2 + ab - ac - b^2 + bc + b^2 - 2bc + c^2)$

$= \mathbf{(a - 2b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}$

② （与式）$= (a + b)c + (a^3 + b^3)$

$= (a + b)c + (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$= \mathbf{(a + b)(a^2 - ab + b^2 + c)}$

◂次数の低い c について降べきの順にした.

③ （与式）$= (a^6 - b^6) - 4a^4b^2 + 4a^2b^4$

$= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) - 4a^2b^2(a^2 - b^2)$

$= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2)$

$= (a - b)(a + b)(a^4 - 3a^2b^2 + b^4)$

$= (a - b)(a + b)(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2)$

$= (a - b)(a + b)\{(a^2 - b^2)^2 - (ab)^2\}$

$= (a - b)(a + b)(a^2 - b^2 + ab)(a^2 - b^2 - ab)$　　$= \mathbf{(a - b)(a + b)(a^2 + ab - b^2)(a^2 - ab - b^2)}$

◂答えはこれでもよい.

F.　式の値の計算 〜 3 次式の展開・因数分解の利用

$x^3 + y^3$ の計算も，『立方の公式 1』(p.2)『立方の公式 2』(p.3) を使って，計算を簡単にできる．

たとえば，$x = 2 + \sqrt{3}$，$y = 2 - \sqrt{3}$ のとき，$x + y = 4$, $x - y = 2\sqrt{3}$, $xy = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1$ である．

（解法１）立方の公式 1 を使う

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 14$ であるから

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= 4 \cdot (14 - 1) = 52 \end{aligned}$$

（解法２）立方の公式 2 を使う

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ を変形して

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= 4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 52 \end{aligned}$$

これを応用して，$x^5 + y^5$ の計算も，次のようにできる．

$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = x^5 + x^2y^3 + x^3y^2 + y^5$ を変形して

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^3 - x^3y^2 \\ &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 14 \cdot 52 - 1^2 \cdot 4 = 734 \end{aligned}$$

【練習 9：3 次式の公式と式の値】

$x = \sqrt{7} + \sqrt{2}$，$y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$ のとき，以下の値を計算しなさい．

(1) $x^2 + y^2$　　(2) $x^3 - y^3$　　(3) $x^4 + y^4$　　(4) $x^5 - y^5$

【解答】　まず，$x + y = 2\sqrt{7}$, $x - y = 2\sqrt{2}$, $xy = 7 - 2 = 5$ である．

(1)（与式）$= (x + y)^2 - 2xy = 28 - 10 = \mathbf{18}$

(2)（解法１）（与式）$= (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2\sqrt{2} \cdot (18 + 5) = \mathbf{46\sqrt{2}}$

（解法２）$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ を変形して

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 &= (x - y)^3 + 3xy(x - y) \\ &= \left(2\sqrt{2}\right)^3 + 3 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{2} = \mathbf{46\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(3) $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ を変形して

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \\ &= 18^2 - 2 \cdot 5^2 = 324 - 50 = \mathbf{274} \end{aligned}$$

(4) $(x^2 + y^2)(x^3 - y^3) = x^5 - x^2y^3 + x^3y^2 - y^5$ を変形して

$$\begin{aligned} x^5 - y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 - y^3) + x^2y^3 - x^3y^2 \\ &= (x^2 + y^2)(x^3 - y^3) + x^2y^2(x - y) \\ &= 18 \cdot 46\sqrt{2} - 5^2 \cdot 2\sqrt{2} = 828\sqrt{2} - 50\sqrt{2} = \mathbf{778\sqrt{2}} \end{aligned}$$

2. 2項定理

ここでは，$(a+b)^3$, $(a+b)^4, \cdots$ の展開について考える．このとき，組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ が重要な役目をする．また，逆に，${}_n\mathrm{C}_r$ のいくつかの性質も明らかになる．

A. 展開と項の個数

たとえば，$(a+b)(p+q)(x+y)$ を展開すると

$$\begin{aligned}(a+b)(p+q)(x+y) &= (ap+aq+bp+bq)(x+y)\\ &= apx+apy+aqx+aqy+bpx+bpy+bqx+bqy\end{aligned}$$

となるが，すべての項は $(a$ または $b) \times (p$ または $q) \times (x$ または $y)$ となることが分かる．

【例題 10】 式 $(a+b)(s+t+u)(x+y+z)$ について，以下の問いに答えよ．

1. この式を展開してできる項の中に含まれるものを，次の中からすべて選べ．

   $+at$，$+aty$，$+bst$，$+buy$

2. この式の展開によって，全部で何種類の項が作られるか．

【解答】

1. すべての項は 3 つの文字の掛け算になり，$(a$ か $b) \times (s$ か t か $u) \times (x$ か y か $z)$ になるので，$\boldsymbol{+aty}$，$\boldsymbol{+buy}$．
2. $2 \times 3 \times 3 = \mathbf{18}$ **種類**

【例題 11】 式 $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ について，以下の問いに答えよ．

1. この式を展開してできる項の中に含まれるものを，次の中からすべて選べ．

   $+abab$，$+abbaa$，$+a^2b$，$+a^3b$，$+ab^4$

2. この式を展開して，項 $+ab^3$ は何回作られるか．

【解答】

1. すべての項は，$(a$ か $b)$ を 4 回掛けた項になるので，$\boldsymbol{+abab}$，$\boldsymbol{+a^3b}$．
2. $+a\times b\times b\times b$，$+b\times a\times b\times b$，$+b\times b\times a\times b$，$+b\times b\times b\times a$ の 4 つが $+ab^3$ と一致するので，**4 回**作られる．

B.　2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$

たとえば，$(a+b)^5$ を展開したときの a^3b^2 の係数を次のようにして求めることができる．

$(a+b)^5$ を展開してできる項は，(a か b) を 5 回掛けた項になり，項 $+a^3b^2$ が作られるのは右のような場合がある．

結局，5 つの $(a+b)$ から b を 2 つ選べばよく，「5 ヶ所から 2 ヶ所を選ぶ組み合わせ」${}_5\mathrm{C}_2$ 通りであるので，a^3b^2 の係数は ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ と分かる．

$$\begin{array}{ccccccl} (a+b)&(a+b)&(a+b)&(a+b)&(a+b) & & \\ a&a&a&b&b&\to&+aaabb=+a^3b^2\\ a&b&a&a&b&\to&+abaab=+a^3b^2\\ b&b&a&a&a&\to&+bbaaa=+a^3b^2 \end{array}$$

5ヶ所から b を2つ選べばよい
そのような選び方は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通り

2 項係数

$(a+b)^n$ を展開したとき，$a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$ になる．このことから，${}_n\mathrm{C}_r$ のことを **2 項係数** (binomial coefficient) ともいう．

${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ であるので，$a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_{n-r}$ とも一致する．

【例題 12】 次の展開式において，[　] 内で指定された項の係数を求めよ．

1. $(a+b)^6$　$[a^3b^3]$　　2. $(x+y)^8$　$[x^5y^3]$　　3. $(x+1)^{10}$　$[x^4]$

【解答】

1. ${}_6\mathrm{C}_3 = \mathbf{20}$　　2. ${}_8\mathrm{C}_3 = \mathbf{56}$　　3. $x^4 1^6$ の係数なので ${}_{10}\mathrm{C}_4 = \mathbf{210}$

◀ ${}_{10}\mathrm{C}_6$ を計算してもよい．

C.　2 項定理

a^5	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 0 個選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_0$
a^4b	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 1 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_1$
a^3b^2	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 2 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_2$
a^2b^3	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 3 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_3$
ab^4	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 4 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_4$
b^5	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 5 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_5$

となるので，$(a+b)^5$ は次のように展開できる．

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= {}_5\mathrm{C}_0a^5 + {}_5\mathrm{C}_1a^4b + {}_5\mathrm{C}_2a^3b^2 + {}_5\mathrm{C}_3a^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5b^5\\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

2 項定理

n を自然数とするとき，$(a+b)^n$ は次のように展開できる．

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n = \sigma_{k=0}^{n}\,{}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^{k}$$ [*1]

これを **2 項定理** (binomial theorem) という．

*1 記号 σ は数学 B で学ぶ．

【例題 13】 $(a+b)^4$, $(a+b)^6$ を展開しなさい．

【解答】

$$(a+b)^4 = {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$$
$$= \boldsymbol{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^6 &= {}_6C_0a^6 + {}_6C_1a^5b + {}_6C_2a^4b^2 + {}_6C_3a^3b^3 \\ &\qquad + {}_6C_4a^2b^4 + {}_6C_5ab^5 + {}_6C_6b^6 \\ &= \boldsymbol{a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3} \\ &\qquad \boldsymbol{+15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6}\end{aligned}$$

D. 2 項定理における係数

$(2x-y)^7$ を展開したときの x^4y^3 の係数を求めてみよう．$(2x-y)^7$ を展開すると

$$\begin{aligned}(2x-y)^7 &= \{2x+(-y)\}^7 \\ &= {}_7C_0(2x)^7 + {}_7C_1(2x)^6(-y) + {}_7C_2(2x)^5(-y)^2 + \overbrace{{}_7C_3(2x)^4(-y)^3}^{x^4y^3\text{ の係数は ここで決まる}} \\ &\qquad + {}_7C_4(2x)^3(-y)^4 + {}_7C_5(2x)^2(-y)^5 + {}_7C_6 2x(-y)^6 + {}_7C_7(-y)^7\end{aligned}$$

となるので，x^4y^3 の係数は次の計算によって -560 と分かる．

$${}_7C_3(2x)^4(-y)^3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\cdot16x^4\cdot\left(-y^3\right) = -560x^4y^3$$

【練習 14：展開された式の係数～その１～】

次の展開式において，[　] 内で指定された項の係数を求めよ．

(1) $(2x+1)^6$ $[x^2]$　　(2) $(x-2y)^7$ $[x^2y^5]$　　(3) $(2x-3y)^5$ $[x^3y^2]$

【解答】

(1) $(2x+1)^6$ を展開したとき，x^2 を含む項は

$${}_6C_4(2x)^2 1^4 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\left(4x^2\right) = 60x^2$$

◀ $2x$ を 2 回掛ける項に『2 項定理』を部分的に使った

となる．よって，x^2 の係数は **60** である．

(2) $(x-2y)^7$ を展開したとき，x^2y^5 を含む項は

$${}_7C_2x^2(-2y)^5 = \frac{7\cdot6}{2\cdot1}\cdot x^2\cdot\left(-32y^5\right) = -672x^3y^5$$

◀ x を 2 回掛ける項に『2 項定理』を部分的に使った

となる．よって，x^2y^5 の係数は **−672** である．

(3) $(2x-3y)^5$ を展開したとき，x^3y^2 を含む項は

$${}_5C_2(2x)^3(-3y)^2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\left(8x^3\right)\cdot\left(9y^2\right) = 720x^3y^2$$

◀ $2x$ を 3 回掛ける項に『2 項定理』を部分的に使った

となる．よって，x^3y^2 の係数は **720** である．

$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$ を展開したときの x の係数を求めてみよう．$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$ を展開すると

$$\begin{aligned}\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7 &= \left\{2x+\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}^7\\ &= {}_7C_0(2x)^7+{}_7C_1(2x)^6\left(-\frac{1}{x}\right)+{}_7C_2(2x)^5\left(-\frac{1}{x}\right)^2+\overbrace{{}_7C_3(2x)^4\left(-\frac{1}{x}\right)^3}^{x\text{の係数はここで決まる}}\\ &\qquad +{}_7C_4(2x)^3\left(-\frac{1}{x}\right)^4+{}_7C_5(2x)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^5+{}_7C_6 2x\left(-\frac{1}{x}\right)^6+{}_7C_7\left(-\frac{1}{x}\right)^7\end{aligned}$$

となるので，x の係数は次の計算によって -560 と分かる．

$${}_7C_3(2x)^4\left(-\frac{1}{x}\right)^3=35\cdot\left(16x^4\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^3}\right)=-560x$$

【練習 15：展開された式の係数～その２～】

次の展開式において，[　　] 内で指定された項の係数を求めよ．

(1) $(3x^2+1)^7$　$[x^6]$　　(2) $\left(x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^7$　$\left[\dfrac{1}{x}\right]$　　(3) $\left(x-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{12}$　[定数項]

【解答】

(1) x^6 の項は ${}_7C_3\cdot(3x^2)^3\cdot 1^4$ を含む項から作られる．これを計算して

$$\begin{aligned}&{}_7C_3(3x^2)^3\cdot 1^4\\ &=\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\cdot(27x^6)\cdot 1=945x^6\end{aligned}$$

よって，求める係数は **945** である．

(2) $\dfrac{1}{x}$ の項は ${}_7C_2(x^2)^2\left(-\dfrac{1}{2x}\right)^5$ を含む項から作られる．これを計算して

$$\begin{aligned}&{}_7C_2\cdot(x^2)^2\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)^5\\ &=21\cdot\cancel{x^4}\cdot\left(-\frac{1}{32x^{\cancel{5}}}\right)=-\frac{21}{32}\cdot\frac{1}{x}\end{aligned}$$

よって，求める係数は $\boldsymbol{-\dfrac{21}{32}}$ である．

(3) 定数項は ${}_{12}C_4x^8\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)^4$ を含む項から作られる．これを計算して

$$\begin{aligned}&{}_{12}C_4\cdot x^8\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)^4\\ &=\frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot\cancel{10}^5\cdot 9}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\cdot\cancel{x^8}\cdot\left(\frac{1}{16\cancel{x^8}}\right)=\frac{495}{16}\end{aligned}$$

よって，求める係数は $\boldsymbol{\dfrac{495}{16}}$ である．

E. $(a+b+c)^n$ の展開

たとえば，$(a+b+c)^5$ を展開したときの a^2b^2c の係数は次のように求めることができる．

$$\begin{array}{cccccccc} (a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) & & \\ a & a & c & b & b & \to & +aacbb = +a^2b^2c \\ a & b & a & c & b & \to & +abacb = +a^2b^2c \\ \underbrace{b & b & a & a & c}_{a,\ a,\ b,\ b,\ c\ \text{の順列になって}\ \frac{5!}{2!2!1!}\ \text{通り}^{*2}} & \to & +bbaac = +a^2b^2c \end{array}$$

結局，a^2b^2c の係数は $\dfrac{5!}{2!2!1!} = 30$ と分かる．

2 項係数

$(a+b+c)^n$ を展開したとき，$a^pb^qc^r$ の係数は $\dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$ になる．

【発展 16：展開された式の係数～その３～】

次の展開式において，[　　] 内で指定された項の係数を求めよ．

① $(x+y+z)^6$ $[x^2y^2z^2]$　　② $(2x-3y+z)^5$ $[xyz^3]$　　③ $(x^2+x-1)^4$ $[x^6]$

【解答】

① $\dfrac{6!}{2!2!2!} = \dfrac{6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = \mathbf{90}$

② xyz^3 の項は，$\dfrac{5!}{1!1!3!}(2x)(-3y)z^3$ の項から作られる．これを計算すれば

$$\frac{5!}{1!1!3!}(2x)(-3y)z^3 = -120xyz^3$$

となるので，xyz^3 の係数は $\mathbf{-120}$ である．

③ x^6 の項は，$(x^2)^3\cdot x^0\cdot(-1)^1$ を含む項と $(x^2)^2\cdot x^2\cdot(-1)^0$ を含む項から作られる．

$(x^2)^3\cdot x^0\cdot(-1)^1$ の係数は $\dfrac{4!}{3!0!1!}$

$(x^2)^2\cdot x^2\cdot(-1)^0$ の係数は $\dfrac{4!}{2!2!0!}$

であるので，これらの項だけを取り出して計算すれば

$$\begin{aligned} &\frac{4!}{3!0!1!}(x^2)^3\cdot x^0\cdot(-1)^1 + \frac{4!}{2!2!0!}(x^2)^2\cdot x^2\cdot(-1)^0 \\ &= 4\cdot x^6\cdot 1\cdot(-1) + 6\cdot x^4\cdot x^2\cdot 1 \\ &= -4x^6 + 6x^6 = 2x^6 \end{aligned}$$

となるので，x^6 の係数は **2** である．

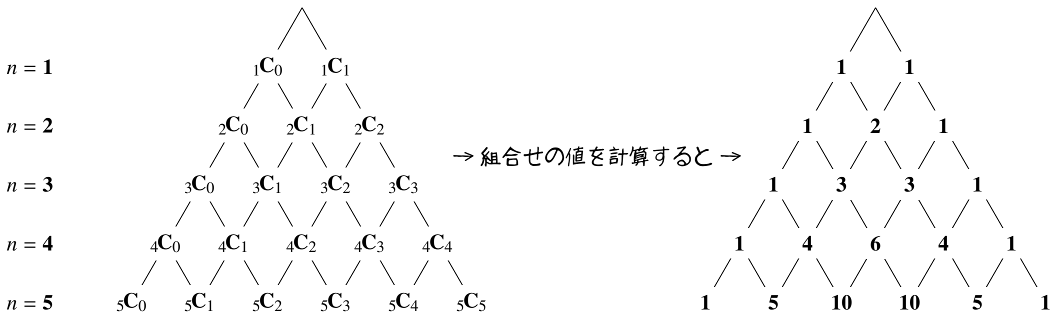
---

*2 『同じものを含むときの順列』を用いた．${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$ でも求められる．

3. パスカルの三角形と $_n\mathrm{C}_r$ の性質

A. パスカルの三角形とは

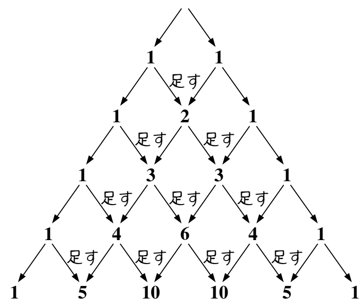
下図のように，2 項係数 $_n\mathrm{C}_0$，$_n\mathrm{C}_1$，$_n\mathrm{C}_2$，$\cdots$，$_n\mathrm{C}_n$ の値を，上から順に $n = 1, 2, 3, \cdots$ の場合について三角形の形に並べたものを，**パスカルの三角形** (Pascal's triangle) という．



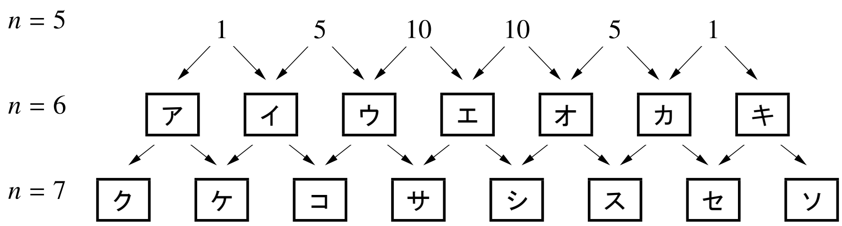
パスカルの三角形は次のような特徴を持つ．

i) 各行の左右両端の数字は 1 である．
ii) 各行は左右対称である．
iii) 左右両端以外の数字は，その左上の数と右上の数を足したものとなる．

このことは，パスカルの三角形のすべてにおいて成り立つ．



【例題 17】 パスカルの三角形から $n = 5, 6, 7$ のみを記した下の図式のうち，$\boxed{}$ にあてはまる値を答えよ．



【解答】 ア : **1**，イ : **6**，ウ : **15**，エ : **20**，オ : **15**，カ : **6**，キ : **1**
ク : **1**，ケ : **7**，コ : **21**，サ : **35**，シ : **35**，ス : **21**，セ : **7**，ソ : **1**

B. $_n\mathrm{C}_r$ の性質

パスカルの三角形の iii) の性質が成り立つ理由を考えるため，例として，$n = 4$ のときの 2 項係数と，$n = 5$ のときの 2 項係数の関係を見てみよう．

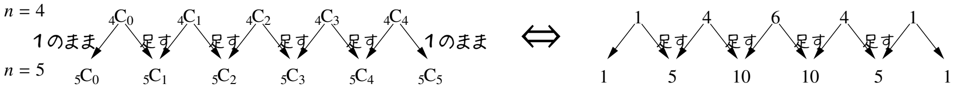
$(a+b)^5$ は 2 項定理によって

$$(a+b)^5 = {}_5\mathrm{C}_0a^5 + {}_5\mathrm{C}_1a^4b + {}_5\mathrm{C}_2a^3b^2 + {}_5\mathrm{C}_3a^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5b^5$$

となるが，一方で，$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4$ であるので

$$
\begin{aligned}
(a+b)^5 &= (a+b)\left({}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4\right)\\
&= {}_4C_0a^5 + {}_4C_1a^4b + {}_4C_2a^3b^2 + {}_4C_3a^2b^3 + {}_4C_4ab^4\\
&\qquad + {}_4C_0a^4b + {}_4C_1a^3b^2 + {}_4C_2a^2b^3 + {}_4C_3ab^4 + {}_4C_4b^5\\
&= {}_4C_0a^5 + \underbrace{({}_4C_0 + {}_4C_1)}_{{}_5C_1\text{ に等しい}}a^4b + \underbrace{({}_4C_1 + {}_4C_2)}_{{}_5C_2\text{ に等しい}}a^3b^2 + \underbrace{({}_4C_2 + {}_4C_3)}_{{}_5C_3\text{ に等しい}}a^2b^3 + \underbrace{({}_4C_3 + {}_4C_4)}_{{}_5C_4\text{ に等しい}}ab^4 + {}_4C_4b^5
\end{aligned}
$$

このことから，パスカルの三角形の $n = 4,\ 5$ の部分について以下のことが成り立つ．



パスカルの三角形

パスカルの三角形には次のような特徴があり，これは ${}_nC_r$ の性質に置き換えることもできる．

i) 各行の左右両端の数字は 1 である．つまり，${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$ である．

ii) 各行は左右対称である．つまり，${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ である．

iii) 左右両端以外の数字は，その左上の数と右上の数を足したものとなる．つまり，${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ である．

【練習 18：パスカルの三角形】

次の $\boxed{}$ にあてはまる値を答えよ．

(1) ${}_6C_3 = {}_5C_{\boxed{ア}} + {}_5C_{\boxed{イ}}$　(2) ${}_7C_4 = {}_6C_{\boxed{ウ}} + {}_6C_{\boxed{エ}}$　(3) ${}_{\boxed{オ}}C_{\boxed{カ}} = {}_8C_3 + {}_8C_4$

【解答】

(1) ア : **2**，イ : **3**（順不同）　(2) ウ : **3**，エ : **4**（順不同）

(3) オ : **9**，カ : **4**

C. 2 項係数の和

2 項定理において，a や b に具体的な値を入れると，様々な等式が得られる．

【発展 19：2 項係数の和】

2 項定理を用いて次の等式を証明せよ．

① $2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n$

② $0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^{n-1}{}_nC_{n-1} + (-1)^n{}_nC_n$

③ $(-1)^n = {}_nC_0 - 2{}_nC_1 + 2^2{}_nC_2 - \cdots + (-2)^{n-1}{}_nC_{n-1} + (-2)^n{}_nC_n$

【解答】 2 項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n$$

において

① $a = b = 1$ とおくと

（左辺）$= (1+1)^n = 2^n$

（右辺）$= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$

となり，確かに成立する． ■

② $a = 1$，$b = -1$ とおくと

（左辺）$= \{1 + (-1)\}^n = 0^n = 0$

（右辺）$= {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$

となり，確かに成立する． ■

③ $a = 1$，$b = -2$ とおくと

（左辺）$= (-1)^n$

（右辺）$= {}_n\mathrm{C}_0 - 2{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2{}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-2)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-2)^n{}_n\mathrm{C}_n$

となり，確かに成立する． ■

上の等式から，たとえば，次のような等式が成り立つ（$n = 5$ とおいた）．

① $2^5 = {}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4 + {}_5\mathrm{C}_5$

② $0 = {}_5\mathrm{C}_0 - {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 - {}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4 - {}_5\mathrm{C}_5$

③ $-1 = {}_5\mathrm{C}_0 - 2{}_5\mathrm{C}_1 + 4{}_5\mathrm{C}_2 - 8{}_5\mathrm{C}_3 + 16{}_5\mathrm{C}_4 - 32{}_5\mathrm{C}_5$

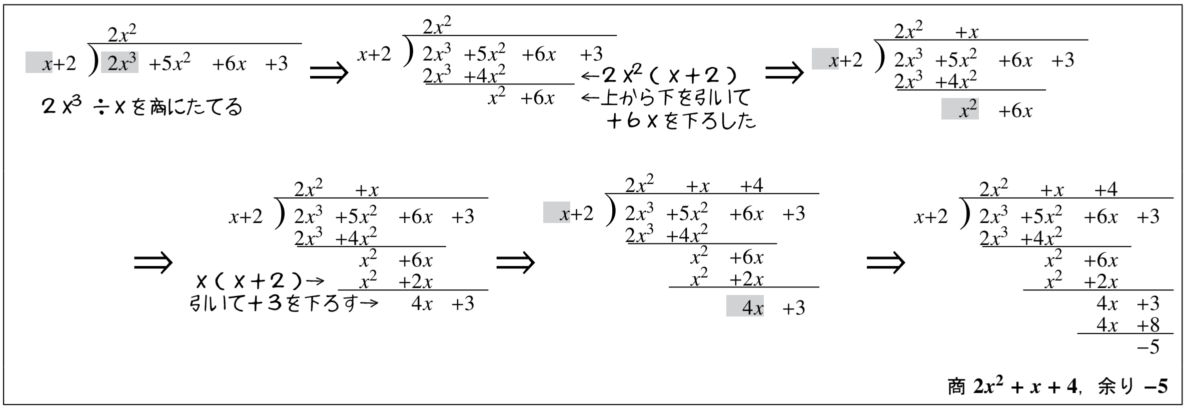
1A.2 式の割り算

$31 \div 6$ という割り算には「5 余り 1」「$5.1\dot{6}(= 5.16666\cdots)$」「$\dfrac{31}{6}$」という 3 つの答え方がある．一方，式の割り算の場合は「余り」「分数式」の 2 通りの答え方がある．

1. 式の除法

A. 2 式の割り算 〜 筆算の書き方・その 1

式の割り算は，筆算を用いて計算できる．たとえば，$(2x^3 + 5x^2 + 6x + 3) \div (x + 2)$ という割り算は，次のようになる．余りが負の数になっていることに注意しよう．



$(2x^3+3x^2-3x+4)$
$\div(x^2+2x+4)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & 2x & -1 & \\ \hline
x^2+2x+4 & 2x^3 & +3x^2 & -3x & +4 \\
 & 2x^3 & +4x^2 & +8x & \\
 & & -x^2 & -11x & +4 \\
 & & -x^2 & -2x & -4 \\
 & & & -9x & +8
\end{array}
$$

商 $2x-1$，余り $-9x+8$

左のように，商に負の数が表われる場合もあるので，注意しよう．

また，ある次数の項がないとき，たとえば $(x^3+x+2)\div(x-1)$ の筆算は，x^2 の係数の列を空けて右のようにする．

…… 右の場合，$(x^3\ \boldsymbol{+0x^2}+x+2)\div(x-1)$ を計算していると考えればよい．

$(x^3+x+2)\div(x-1)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +x & +2 & \\ \hline
x-1 & x^3 & & +x & +2 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\
 & & x^2 & +x & \\
 & & x^2 & -x & \\
 & & & 2x & +2 \\
 & & & 2x & -2 \\
 & & & & 4
\end{array}
$$

商 x^2+x+2，余り 4

【例題 20】 次の割り算を計算し，商と余りを答えなさい．

1. $(x^3+2x^2-2x-10)\div(x-2)$　　2. $(2x^3+x+5)\div(x+1)$　　3. $(x^3+x^2y+y^3)\div(x-y)$

【解答】 1.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +4x & +6 & \\ \hline
x-2 & x^3 & +2x^2 & -2x & -10 \\
 & x^3 & -2x^2 & & \\
 & & 4x^2 & -2x & \\
 & & 4x^2 & -8x & \\
 & & & 6x & -10 \\
 & & & 6x & -12 \\
 & & & & 2
\end{array}
$$

商 x^2+4x+6，余り 2

2.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & -2x & +3 & \\ \hline
x+1 & 2x^3 & & +x & +5 \\
 & 2x^3 & +2x^2 & & \\
 & & -2x^2 & +x & \\
 & & -2x^2 & -2x & \\
 & & & 3x & +5 \\
 & & & 3x & +3 \\
 & & & & 2
\end{array}
$$

商 $2x^2-2x+3$，余り 2

3.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +2xy & +2y^2 & \\ \hline
x-y & x^3 & +x^2y & & +y^3 \\
 & x^3 & -x^2y & & \\
 & & 2x^2y & & \\
 & & 2x^2y & -2xy^2 & \\
 & & & 2xy^2 & +y^3 \\
 & & & 2xy^2 & -2y^3 \\
 & & & & 3y^3
\end{array}
$$

商 $x^2+2xy+2y^2$，余り $3y^3$

B. $A=BQ+R$

たとえば，「$(2x^3+5x^2+6x+3)\div(x+2)=2x^2+x+4$ 余り -5」という結果は，次のように表せる．

$2x^3+5x^2+6x+3=(x+2)(2x^2+x+4)-5$

このように，「$A\div B=Q$ 余り R」の結果は「$A=BQ+R$」の形で表わすことができる．

【練習 21：多項式の割り算の筆算〜その１〜】

次の割り算を行い，$A=BQ+R$ の形で答えよ．

(1) $(4x^3+2x^2+3)\div(x+2)$　　(2) $(3x^3-2x^2+x+2)\div(x^2-x-2)$　　(3) $(x^3+3xy^2+2y^3)\div(x+2y)$

【解答】 1.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 4x^2 & -6x & +12 & \\ \hline
x+2 & 4x^3 & +2x^2 & & +3 \\
 & 4x^3 & +8x^2 & & \\
 & & -6x^2 & & \\
 & & -6x^2 & -12x & \\
 & & & 12x & +3 \\
 & & & 12x & +24 \\
 & & & & -21
\end{array}
$$

2.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & 3x & +1 & \\ \hline
x^2-x-2 & 3x^3 & -2x^2 & +x & +2 \\
 & 3x^3 & -3x^2 & -6x & \\
 & & x^2 & +7x & +2 \\
 & & x^2 & -x & -2 \\
 & & & 8x & +4
\end{array}
$$

3.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -2xy & +7y^2 & \\ \hline
x+2y & x^3 & & +3xy^2 & +2y^3 \\
 & x^3 & +2x^2y & & \\
 & & -2x^2y & +3xy^2 & \\
 & & -2x^2y & -4xy^2 & \\
 & & & 7xy^2 & +2y^3 \\
 & & & 7xy^2 & +14y^3 \\
 & & & & -12y^3
\end{array}
$$

1. $\boldsymbol{4x^3+2x^2+3=(x+2)(4x^2-6x+12)-21}$　　2. $\boldsymbol{3x^3-2x^2+x+2=(x^2-x-2)(3x+1)+8x+4}$

3. $\boldsymbol{x^3+3xy^2+2y^3=(x+2y)(x^2-2xy+7y^2)-12y^3}$

C.　割り算の結果が 1 つに定まるには？

「$13 \div 6 = 2 \cdots 1$」は正しいが，「$13 \div 6 = 1 \cdots 7$」は間違っている．このように，余りのある割り算は，余りの値が，割る数の値が小さいために，商と余りは 1 つに定まる．

式の割り算の場合には，「式の次数[*3]」が小さくなるようにする．

割り算の一意性

割られる式 $A(x)$，割る式 $B(x)$ に対し，次を満たす商 $Q(x)$，余り $R(x)$ は 1 つに定まる．

$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$　　　　（ただし，$R(x)$ の次数は $B(x)$ の次数より小さい）

さらに，商 $Q(x)$ の次数は，$A(x)$ の次数から，$B(x)$ の次数を引いた値になる（$A(x)$ の次数が $B(x)$ の次数より大きいとする）．

（証明）は p.70 を参照のこと．

【暗記 22：余りの次数】

5 次式の $A(x)$ を，2 次式の $B(x)$ で割るとき，商 $Q(x)$ は何次式，余り $R(x)$ は何次式になるだろうか．

【解答】　$Q(x)$ は $5 - 2 =$ **3 次式**，余りは割る式 $B(x)$ より次数が低いので **1 次式または 0 次式**．

D.　筆算の書き方・その 2 ～係数だけを書く～

右のように，式の割り算の筆算は，係数だけを記しても計算できる．

商の次数に気をつけて答えよう．

$(2x^3 + 3x^2 - 3x + 4) \div (x^2 + 2x + 4)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & & \\
\hline
1\ 2\ 4 & 2 & 3 & -3 & 4 \\
 & 2 & 4 & 8 & \\
\hline
 & & -1 & -11 & 4 \\
 & & -1 & -2 & -4 \\
\hline
 & & & -9 & 8
\end{array}
$$

商 $2x - 1$，余り $-9x + 8$

$2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$
$= (x^2 + 2x + 4)(2x - 1) - 9x + 8$

$(x^3 + x + 2) \div (x - 1)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & 2 & \\
\hline
1\ \ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 & 1 & -1 & & \\
\hline
 & & 1 & 1 & \\
 & & 1 & -1 & \\
\hline
 & & & 2 & 2 \\
 & & & 2 & -2 \\
\hline
 & & & & 4
\end{array}
$$

商 $x^2 + x + 2$，余り 4

$x^3 + x + 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2) + 4$

[*3] 一般に，式 $f(x)$ の次数は $\deg f(x)$ で表される．この記号を使えば，「割り算の一意性」は次のように表される．
「$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$，$\deg B(x) > \deg R(x)$ となる商 $Q(x)$，余り $R(x)$ は 1 つに定まり，$\deg Q(x) = \deg A(x) - \deg B(x)$ となる（ただし，$\deg A(x) > \deg B(x)$ とする）．」

【例題 23】 次の割り算を，上の方法で計算し，結果を $A = BQ + R$ の形で答えなさい．

1. $(x^3+2x^2-2x-10)\div(x-2)$　　2. $(2x^3+x+5)\div(x+1)$　　3. $(x^3+x^2y+y^3)\div(x-y)$

【解答】 1.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 1 & 4 & 6 & \\ \cline{3-6}
1 & -2 \,\Big) & 1 & 2 & -2 & -10 \\
 & & 1 & -2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 4 & -2 & \\
 & & & 4 & -8 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 6 & -10 \\
 & & & & 6 & -12 \\ \cline{4-6}
 & & & & & 2
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2 & -2 & 3 & \\ \cline{3-6}
1 & 1 \,\Big) & 2 & \boxed{0} & 1 & 5 \\
 & & 2 & 2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & -2 & 1 & \\
 & & & -2 & -2 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 3 & 5 \\
 & & & & 3 & 3 \\ \cline{4-6}
 & & & & & 2
\end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 1 & +2y & +2y^2 & \\ \cline{3-6}
1 & -y \,\Big) & 1 & +y & \boxed{0} & +y^3 \\
 & & 1 & -y & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2y & 0 & \\
 & & & 2y & -2y^2 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 2y^2 & +y^3 \\
 & & & & 2y^2 & -2y^3 \\ \cline{4-6}
 & & & & & 3y^3
\end{array}$$

1. $\boldsymbol{x^3+2x^2-2x-10=(x-2)(x^2+4x+6)+2}$　　2. $\boldsymbol{2x^3+x+5=(x+1)(2x^2-2x+3)+2}$

3. $\boldsymbol{x^3+x^2y+y^3=(x-y)(x^2+2xy+2y^2)+3y^3}$

E. $A = BQ + R$ の利用

もし，多項式 $F(x)$ を $(2x+1)$ で割った商が x^2-2x+2，余りが -4 になったならば

$$F(x) = (2x+1)(x^2-2x+2)-4$$

と表せる．この右辺を計算して $F(x) = 2x^3-3x^2+2x-2$ とわかる．

また，多項式 $x^3-4x^2+6x-15$ を $B(x)$ で割って商が $x-3$，余りが -6 になるならば，次のように書ける．

$$x^3-4x^2+6x-15 = B(x)(x-3)-6 \quad\Leftrightarrow\quad x^3-4x^2+6x-9 = B(x)(x-3)$$

つまり，$B(x) = (x^3-4x^2+6x-9)\div(x-3) = x^2-x+3$ と分かる．

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -x & +3 & \\ \cline{2-5}
x-3 \,\Big) & x^3 & -4x^2 & +6x & -9 \\
 & x^3 & -3x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -x^2 & +6x & \\
 & & -x^2 & +3x & \\ \cline{3-5}
 & & & 3x & -9 \\
 & & & 3x & -9 \\ \cline{3-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

【練習 24：$A = BQ + R$ の利用】

(1) $A(x)$ を x^2-6x-1 で割ると，商が $x+2$，余りが -4 である．$A(x)$ を求めなさい．

(2) $2x^3-4x^2+1$ を $B(x)$ で割ると，商が $x-1$，余りが $x-2$ になる．$B(x)$ を求めなさい．

(3) $6x^4+3x^3+x^2-1$ を $C(x)$ で割ると，商は $3x^2+2$，余りは $-2x+1$ になる．$C(x)$ を求めなさい．

【解答】

(1) $A(x) = (x^2-6x-1)(x+2)-4 = \boldsymbol{x^3-4x^2-13x-6}$

(2) $2x^3-4x^2+1 = B(x)(x-1)+x-2 \;\Leftrightarrow\; B(x)(x-1) = 2x^3-4x^2-x+3$

　であるから，$B(x) = (2x^3-4x^2-x+3)\div(x-1) = \boldsymbol{2x^2-2x-3}$ ◀

(3) $6x^4+3x^3+x^2-1 = C(x)(3x^2+2)-2x+1$

　$\Leftrightarrow\; C(x)(3x^2+2) = 6x^4+3x^3+x^2+2x-2$

　であるから，$C(x) = (6x^4+3x^3+x^2+2x-2)\div(3x^2+2) = \boldsymbol{2x^2+x-1}$ ◀

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2 & -2 & -3 & \\ \cline{3-6}
1 & -1 \,\Big) & 2 & -4 & -1 & 3 \\
 & & 2 & -2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & -2 & -1 & \\
 & & & -2 & 2 & \\ \cline{4-6}
 & & & & -3 & 3 \\
 & & & & -3 & 3 \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & 2 & 1 & -1 & & \\ \cline{4-8}
3 & \boxed{0} & 2 \,\Big) & 6 & 3 & 1 & 2 & -2 \\
 & & & 6 & 0 & 4 & & \\ \cline{4-6}
 & & & & 3 & -3 & 2 & \\
 & & & & 3 & 0 & 2 & \\ \cline{5-8}
 & & & & & -3 & 0 & -2 \\
 & & & & & -3 & 0 & -2 \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 0
\end{array}$$

1 次式で割る多項式の割り算の場合には，『組立除法』(p.61) を用いると，計算がより簡単になる．

【練習 25：多項式の割り算の筆算〜その２〜】

$A = 2x^3 + 2x^2 + 1$, $B = 2x + 1$ のとき，$A \div B$ を計算し，結果を $A = BQ + R$ の形で表わせ.

【解答】 右の筆算から

$$\boldsymbol{2x^3 + 2x^2 + 1}$$
$$\boldsymbol{= (2x+1)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4}}$$

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \\
\hline
2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\
 & & 2 & 1 & & \\
\hline
 & & & 1 & 0 & \\
 & & & 1 & \frac{1}{2} & \\
\hline
 & & & & -\frac{1}{2} & 1 \\
 & & & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\
\hline
 & & & & & \frac{5}{4}
\end{array}
$$

F. 式が「割り切れる」

多項式の割り算 $F(x) \div G(x)$ の余りが 0 になるとき，$F(x)$ は $G(x)$ で**割り切れる** (devisible) という.

【練習 26：割り切れる】

$A(x) = x^3 + 2ax^2 + b$, $B(x) = x^2 + x + 2$ のとき，$A(x) \div B(x)$ の商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とする.

(1) $Q(x)$, $R(x)$ を a, b を含む式で答えよ.　　(2) $A(x) \div B(x)$ が割り切れるとき，a, b を答えよ.

【解答】

(1) 右の筆算から

商について

$\boldsymbol{Q(x) = x + (2a - 1)}$

余りについて

$\boldsymbol{R(x) = (-2a - 1)x + (b - 4a + 2)}$

(2) $R(x)$ の x の係数について $-2a - 1 = 0$ より $a = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$,

$R(x)$ の定数項について $b - 4a + 2 = 0$ より $b = 4a - 2 = \boldsymbol{-4}$.

$$
\begin{array}{ccc|cccc}
 & & & 1 & 2a-1 & & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 1 & 2a & 0 & b \\
 & & & 1 & 1 & 2 & \\
\hline
 & & & & 2a-1 & -2 & b \\
 & & & & 2a-1 & 2a-1 & 4a-2 \\
\hline
 & & & & & -2a-1 & b-4a+2
\end{array}
$$

係数だけ書く筆算のやり方は，係数に文字がある式の割り算がやりやすく，ミスもしにくくなる.

2. 分数式

A. 分数式とは

$(2x^3 + 5x^2 + 6x + 3) \div (x + 2)$ の結果は，$\dfrac{2x^3 + 5x^2 + 6x + 3}{x + 2}$ と表わしてもよい．また，$1 \div (x + 2) = \dfrac{1}{x + 2}$ と表すこともできる.

このように，分母に多項式を含むような式を，**分数式** (fraction equation) という．たとえば，$\dfrac{x-2}{x+3}$, $\dfrac{a+3}{a^2+a}$, $\dfrac{a}{bx}$ のような式は分数式である.

B.　分数式における約分・通分

また，分母と分子はできるだけ因数分解をする．約分できる場合も約分する．

$$(x^2-6x+5)\div(x^2+2x-3)=\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x-3}=\frac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{(x+3)\cancel{(x-1)}}=\frac{x-5}{x+3}$$

分数式がこれ以上できないとき，**既約** (irreducible) であるという．

【例題 27】　以下の割り算・分数式を約分して，既約な分数式か，多項式にしなさい．

1. $\dfrac{a^2b^3}{a^3b}$　　2. $6a^2b^2\div 3a^3b^3$　　3. $\dfrac{3x-6}{x^2-5x+6}$　　4. $(ka^2-kb^2)\div(ka-kb)$

【解答】

1.（与式）$=\dfrac{\cancel{a^2}\cancel{b^3}^{\,b^2}}{\cancel{a^3}^{\,a}\cancel{b}}=\boldsymbol{\dfrac{b^2}{a}}$

2.（与式）$=\dfrac{\cancel{6}^{\,2}\cancel{a^2}\cancel{b^2}}{\cancel{3}\cancel{a^3}^{\,a}\cancel{b^3}^{\,b}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{ab}}$

3.（与式）$=\dfrac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\boldsymbol{\dfrac{3}{x-3}}$

4.（与式）$=\dfrac{k(a^2-b^2)}{k(a-b)}=\dfrac{\cancel{k(a-b)}(a+b)}{\cancel{k(a-b)}}=\boldsymbol{a+b}$

C.　分数式の掛け算・割り算

分数式の掛け算・割り算は，数と同じように出来る．分母と分子に公約数（共通因子）があれば約分する．

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}\times\frac{x^2+5x}{x^2+x-6}=\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+5)}}\times\frac{x\cancel{(x+5)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}$$ ←分母も分子も因数分解した

$$=\frac{x}{x+3}$$ ←約分した

$$\frac{x^2-x-2}{x^2+2x-3}\div\frac{x^2-1}{x^2+5x+6}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+3)}(x-1)}\times\frac{\cancel{(x+3)}(x+2)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}$$ ←割り算を掛け算に直し，因数分解した

$$=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2}$$ ←答えは展開しない

【例題 28】

1. $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-4x+3}\times\dfrac{x-1}{x+4}$　　2. $\dfrac{2x+1}{x^2-9x+20}\times\dfrac{x^2-3x-4}{2x^2-5x-3}$　　3. $\dfrac{x+2}{2x+2}\div\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-1}$

4. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}\div\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$　　5. $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+5x+6}\div\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-6}\times\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-8}$

【解答】

1.（与式）$=\dfrac{(x+2)\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x-1)}(x-3)}\times\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{x+4}}=\boldsymbol{\dfrac{x+2}{x-3}}$

2.（与式）$=\dfrac{\cancel{2x+1}}{\cancel{(x-4)}(x-5)}\times\dfrac{\cancel{(x-4)}(x+1)}{\cancel{(2x+1)}(x-3)}=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{(x-5)(x-3)}}$

3.（与式）$=\dfrac{\cancel{x+2}}{2\cancel{(x+1)}}\times\dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+2)}(x+5)}=\boldsymbol{\dfrac{x-1}{2(x+5)}}$

4.（与式）$=\dfrac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}\times\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x+2)}(x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{x+3}{(x-3)(x-1)}}$

5.（与式）$=\dfrac{(x+1)\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x+3)}}\times\dfrac{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-1)}(x-3)}\times\dfrac{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+4)}\cancel{(x-2)}}=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{x-3}}$

D.　分数式の足し算・引き算

通分を用いて，分数式どうしの足し算・引き算も計算する．

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x^2+3x+2}-\frac{x-2}{x^2+4x+3}&=\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}-\frac{x-2}{(x+1)(x+3)}\\&=\frac{(x-1)\boldsymbol{(x+3)}}{(x+1)(x+2)\boldsymbol{(x+3)}}-\frac{(x-2)\boldsymbol{(x+2)}}{(x+1)(x+3)\boldsymbol{(x+2)}}\\&=\frac{(x^2+2x-3)-(x^2-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\end{aligned}$$

←分子の−（　）に注意！

数の場合と同じように，通分によって分母を揃えて計算すればよい．

【例題 29】

1. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}$
2. $\dfrac{x^2-3}{x-1}+\dfrac{2x}{x-1}$
3. $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}+\dfrac{x-2}{x^2+4x+3}$
4. $\dfrac{6x-9}{x^2-x-2}-\dfrac{5}{x+1}$
5. $\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x^2+3x+2}$
6. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^3}$

【解答】

1. （与式）$=\dfrac{(x+2)+2(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\boldsymbol{\dfrac{3x}{(x-1)(x+2)}}$

2. （与式）$=\dfrac{(x^2-3)+2x}{x-1}=\dfrac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\boldsymbol{x+3}$

3. （与式）$=\dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{x-2}{(x+1)(x+3)}$

$$=\frac{(x-1)(x+3)+(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+3)(x+2)}$$

$$=\frac{(x^2+2x-3)+(x^2-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\boldsymbol{\frac{2x^2+2x-7}{(x+1)(x+2)(x+3)}}$$

4. （与式）$=\dfrac{6x-9}{(x-2)(x+1)}-\dfrac{5}{x+1}$

$$=\frac{6x-9-5(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{\cancel{x+1}}{(x-2)\cancel{(x+1)}}=\boldsymbol{\frac{1}{x-2}}$$

5. （与式）$=\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

$$=\frac{3(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{2x+4}{(x+1)(x+2)(x-1)}=\frac{2\cancel{(x+2)}}{(x+1)\cancel{(x+2)}(x-1)}=\boldsymbol{\frac{2}{(x+1)(x-1)}}$$

6. （与式）$=\dfrac{(x+1)^2+(x+1)-1}{(x+1)^3}$

$$=\frac{x^2+2x+1+x+1-1}{(x+1)^3}=\boldsymbol{\frac{x^2+3x+1}{(x+1)^3}}$$

E. 発展 分数式における「帯分数」

たとえば，$29 \div 7 = 4$ 余り 1 であるから，$\dfrac{29}{7} = 4\dfrac{1}{7}$ と帯分数で表わすことができる．

同じように，次のように分数式を考えることもできる．

$$\frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{x(x+1)+x}{x+1} = \frac{x(x+1)+(x+1)-1}{x+1} = x+1-\frac{1}{x+1}$$

これは，$(x^2+2x) \div (x+1) = x+1$ 余り -1 と対応しており，$\dfrac{x^2+2x}{x+1}$ を帯分数に直したと考えられる．

【練習 30：分数式の帯分数】

以下の等式が成り立つように，(　) には式または数値を，$\boxed{}$ には数値を入れなさい．

(1) $\dfrac{x+3}{x+1} = (\text{ ア }) + \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{x+1}$　　(2) $\dfrac{2x+3}{x+1} = (\text{ ウ }) + \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{x+1}$

(3) $\dfrac{x^3+2x^2+x+3}{x+1} = (\text{ オ }) + \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{x+1}$

【解答】

(1) $\dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{(x+1)+2}{x+1} = {}_{(\text{ア})}\underline{\mathbf{1}} + \dfrac{\underline{\mathbf{2}}_{(\text{イ})}}{x+1}$

◀ $(x+3) \div (x+1) = 1$ 余り 2 に対応している．

(2) $\dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+1}{x+1} = {}_{(\text{ウ})}\underline{\mathbf{2}} + \dfrac{\underline{\mathbf{1}}_{(\text{エ})}}{x+1}$

◀ $(2x+3) \div (x+1) = 2$ 余り 1 に対応している．

(3)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{x^2(x+1)+x^2+x+3}{x+1} \\ &= \frac{x^2(x+1)+x(x+1)+3}{x+1} = {}_{(\text{オ})}\underline{\boldsymbol{x^2+x}} + \frac{\underline{\mathbf{3}}_{(\text{カ})}}{x+1}\end{aligned}$$

◀ $(x^3+2x^2+x+3) \div (x+1) = x^2+x$ 余り 3 に対応している．

たとえば，$\dfrac{29}{7} - \dfrac{53}{13}$ は，帯分数に直すと計算がしやすい．

(I) 仮分数のまま計算する ←計算が多い

$$\begin{aligned}&\frac{29}{7} - \frac{53}{13} \quad \text{←分母の最小公倍数は91} \\ =\ &\frac{377}{91} - \frac{371}{91} \quad \text{←分子はとても大きな数} \\ =\ &\frac{6}{91}\end{aligned}$$

(II) 帯分数を使う ←$29 \div 7 = 4$余り1から $\dfrac{29}{7} = 4\dfrac{1}{7}$ など

$$\begin{aligned}&\frac{29}{7} - \frac{53}{13} \\ =\ &4\frac{1}{7} - 4\frac{1}{13} \\ =\ &\frac{13}{91} - \frac{7}{91} = \frac{6}{91} \quad \text{←通分も簡単}\end{aligned}$$

同じようにして，$\dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{x+3}{x+2}$ は次のように計算するとよい．

(I) そのまま計算する ←計算が多い

$$\begin{aligned}&\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} \\ =\ &\frac{(x+2)^2}{(x+1)(x+2)} - \frac{(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ =\ &\frac{x^2+4x+4-(x^2+4x+3)}{(x+1)(x+2)} \\ =\ &\frac{1}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

(II) 帯分数を使う

$$\begin{aligned}&\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} \\ =\ &\frac{(x+1)+1}{x+1} - \frac{(x+2)+1}{x+2} \\ =\ &1 + \frac{1}{x+1} - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) \\ =\ &\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

【発展 31：帯分数を利用した計算】

帯分数を利用して，次の計算をしなさい．

① $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}$　　② $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

【解答】

① $(\text{与式}) = \dfrac{(x+1)+1}{x+1}-\dfrac{(x+2)+1}{x+2}$

$= 1+\dfrac{1}{x+1}-\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)$

◀1 同士で消し合う

$= \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \boldsymbol{\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}}$

② $(\text{与式}) = \dfrac{x(x+1)+1}{x+1}-\dfrac{x(x-1)+1}{x-1}$

$= x+\dfrac{1}{x+1}-\left(x+\dfrac{1}{x-1}\right)$

◀x 同士で消し合う

$= \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \boldsymbol{-\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}}$

1A.3 恒等式・等式の証明

1. 恒等式 ～ 等しい 2 つの式

A. 式が「等しい」とは？

どんな x でも $F(x)=G(x)$ が成立するとき，$F(x)$ と $G(x)$ は等しいと定義する．詳しくは次のようになる．

恒等式～式が「等しい」

（多項式とは限らない）2 つの式 $F(x)$, $G(x)$ があったとする．$F(x)$, $G(x)$ の定義域が等しく

定義域内のすべての x に対して　　$F(x)=G(x)$　　……………………… ①

が成り立つとき，$F(x)$ と $G(x)$ は等しいと定義し，①を（x についての）**恒等式**（こうとうしき）(identity) という．

恒等式の例：$(x+2)(x-1)=x^2+x-2$,　　$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

恒等式でない例：$x^2-x+2=x+5$　　←x＝0など，ほとんどのxで等しくない

【例題 32】 次の等式について，恒等式かどうか答えなさい．

1. $x^2-1=(x-1)(x+1)$　　2. $x^2-2x+1=0$　　3. $x^2+y^2=x+y$

【解答】

1. （右辺）$=x^2-1$ となり，左辺と式が一致し，**恒等式である**.
2. $x=0$ のとき（左辺）$=1\neq$（右辺）となるので**恒等式でない**.
3. $(x, y)=(1,-1)$ のとき，（左辺）$=2$,（右辺）$=0$ となり**恒等式でない**.

◀$x\neq1$ のとき（左辺）$\neq$（右辺）になる．

◀（左辺）$\neq$（右辺）になる x, y は他にも多数ある．

B. 「数値代入法」と「係数比較法」

2 つの多項式 $f(x) = x^2 + ax - 4$, $g(x) = x^2 + 2x + b$ が「等しい」ための a, b の条件を求めよう.

これには，2 つの方法がある.

i. 数値代入法

$f(0) = g(0)$ が等しいから $-4 = b$

$f(1) = g(1)$ が等しいから $a - 3 = -1$.

よって，$a = 2$, $b = -4$ が必要と分かる.

このとき[*4]，$f(x) = x^2+2x-4$, $g(x) = x^2+2x-4$

となるから $f(x) = g(x)$ は正しい.

ii. 係数比較法

$f(x) = x^2 + ax - 4 = x^2 + 2x + b = g(x)$ において

x の係数を見比べて $a = 2$.

定数項を見比べて $-4 = b$.

よって，$a = 2$, $b = -4$ と求められる.

$\cdots$ 後に見るように，上の 2 つのやり方は，どちらも身につけておくのがよい.

【例題 33】 $f(x) = x^2 + ax + 2$, $g(x) = (x - 1)^2 + b(x - 1)$ とする．$f(x) = g(x)$ が恒等式となる条件について，以下の $\boxed{}$ に適当な数値・式を答えなさい.

1. 数値代入法で求めよう．$f(0) = \boxed{ア}$, $g(0) = \boxed{イ}$ から $b = \boxed{ウ}$ であり，
   $f(1) = \boxed{エ}$, $g(1) = \boxed{オ}$ から $a = \boxed{カ}$ とわかる.
   $a = \boxed{カ}$, $b = \boxed{ウ}$ のとき，$f(x) = g(x) = \boxed{キ}$ となって，確かに等しい.
2. 係数比較法で求めよう．$g(x)$ を展開して降べきの順にすると $g(x) = \boxed{ク}$ になる.
   $f(x)$, $g(x)$ の x の係数を比べて式 $\boxed{ケ}$ を得て，定数項を比べて式 $\boxed{コ}$ を得る.
   この 2 式を連立して，$a = \boxed{サ}$, $b = \boxed{シ}$ を得る.

【解答】

1. $f(0) = \underline{\mathbf{2}}_{(ア)}$, $g(0) = (-1)^2 + b \cdot (-1) = \underline{\mathbf{1 - b}}_{(イ)}$ から，$2 = 1 - b$ を解いて $b = \underline{\mathbf{-1}}_{(ウ)}$ を得る．$f(1) = 1^2 + a + 2 = \underline{\mathbf{a + 3}}_{(エ)}$, $g(1) = \underline{\mathbf{0}}_{(オ)}$ から，$a + 3 = 0$ を解いて $a = \underline{\mathbf{-3}}_{(カ)}$ とわかる.
   $a = -3$, $b = -1$ のとき, $f(x) = \underline{\mathbf{x^2 - 3x + 2}}_{(キ)}$, $g(x) = (x-1)^2-(x-1) = x^2 - 3x + 2$ となるから，確かに等しい.
2. $g(x) = (x^2 - 2x + 1) + bx - b = \underline{\mathbf{x^2 + (b - 2)x + 1 - b}}_{(ク)}$ になる.
   $f(x)$, $g(x)$ の x の係数を比べて式 $\underline{\mathbf{a = b - 2}}_{(ケ)}$ を得て，定数項を比べて式 $\underline{\mathbf{2 = 1 - b}}_{(コ)}$ を得る.
   この 2 式を連立して，$a = \underline{\mathbf{-3}}_{(サ)}$, $b = \underline{\mathbf{-1}}_{(シ)}$ を得る.

◀ 数値代入法は逆の確認が必要である (26)

◀ $g(x)$ を展開して降べきの順にした.

[*4] 「このとき」以下の一文は，次ページで見るように，「数値代入法」を用いた場合は必ず書かなければならない.

C.　「数値代入法」の十分性

「数値代入法」を用いて，前ページのように $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ から a, b の値を求めるだけでは，0, 1 以外の値で $f(x) = g(x)$ を満たすかどうかわからない．

そのため，十分性を確かめるため実際に $f(x) = g(x)$ を満たしているかどうか確認しなければならない[*5]．

【例題 34】　次の等式が恒等式となるように，数値代入法を用いて a, b, c, d の値を定めなさい．

1. $x^2 + x + 1 = (x-1)^2 + a(x-1) + b$
2. $x^3 + ax^2 + x + 1 = (x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$
3. $(x+1)^3 + ax^2 + b(x-1) = x^3 + 4x^2 - cx - 5$

【解答】

1. 与式に $x = 1$ を代入して $3 = b$,
   与式に $x = 0$ を代入して $1 = 1 - a + b \iff a = 3$.
   $a = 3$, $b = 3$ のとき（右辺）$= x^2 + x + 1$ となるので，$\boldsymbol{a = b = 3}$ は条件を満たす．　◀ 十分性の確認
2. 与式に $x = -1$ に代入して $-1 + a - 1 + 1 = 0$ より $a = 1$,
   与式に $x = 0$ に代入して $1 = 1 + b + c \iff c = -b$,
   与式に $x = -2$ に代入して
   $$(-2)^3 + a\cdot(-2)^2 + (-2) + 1 = (-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1)$$
   $$\iff -8 + 4a - 1 = -1 + b - c$$
   $$\iff -8 + 4 - 1 = -1 + b + b \qquad \therefore\ b = -2,\ c = 2$$
   ◀ $a = 1$, $c = -b$ を代入した
   $(a, b, c) = (1, -2, 2)$ のとき，（右辺）$= x^3 + x^2 + x + 1 =$（左辺）になるので，$\boldsymbol{(a, b, c) = (1, -2, 2)}$ は条件を満たす．　◀ 十分性の確認
3. 与式に $x = -1$ を代入して
   $a - 2b = -1 + 4 + c - 5 \iff a - 2b - c = -2$ ········ ①
   与式に $x = 0$ を代入して，$1 - b = -5 \iff b = 6$ ········ ②
   与式に $x = 1$ を代入して，$8 + a = 1 + 4 - c - 5 \iff a + c = -8$ ········ ③
   ②を①に代入して $a - c = 10$，これと③を連立して，$a = 1$, $c = -9$.
   $(a, b, c) = (1, 6, -9)$ のとき（左辺）$= x^3 + 4x^2 + 9x - 5 =$（右辺）になるので，$\boldsymbol{(a, b, c) = (1, 6, -9)}$ は条件を満たす．　◀ 十分性の確認

*5 多項式の場合は「このとき $f(x) = g(x)$ を確かに満たしている」の一言があればよい．

D. 「係数比較法」の必要性

「係数比較法」から得られる条件は，恒等式であるための十分条件である．

そして，多項式の場合は，これが恒等式であるための必要条件でもある．

「係数比較法」の必要性

2 つの多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,　$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ があったとき，$f(x) = g(x)$ が恒等式となる必要十分条件は

「すべての係数が等しくなること」（$a_n = b_n$，$a_{n-1} = b_{n-1}$，$\cdots$，$a_1 = b_1$，$a_0 = b_0$）である．

この命題の証明は難しい．詳しくは p.71 を参照のこと．

…… 多項式以外では，同様の命題が成り立たないことがある．

【例題 35】 次の等式が恒等式となるように，係数比較法を用いて a, b, c, d の値を定めなさい．

1. $x^3 - x^2 + ax + b = (x^2 - 2x - 5)(x + c)$
2. $5x^3 + ax^2 + bx + c = (x + 3)(dx^2 - 3x - 3)$

【解答】

1. （右辺）$= x^3 + cx^2 - 2x^2 - 2cx - 5x - 5c$

$= x^3 + (c - 2)x^2 + (-2c - 5)x - 5c$ であるので

x^2 の係数を比べて $-1 = c - 2$，よって $c = 1$

x の係数を比べて $a = -2c - 5 = -7$

定数項を比べて $b = -5c = -5$ より，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (-7, -5,\ 1)}$

2. （右辺）$= dx^3 - 3x^2 + 3dx^2 - 9x - 3x - 9$

$= dx^3 + (-3 + 3d)x^2 - 12x - 9$ であるので

x^3 の係数を比べて $5 = d$

x^2 の係数を比べて $a = -3 + 3d = -3 + 3 \cdot 5 = 12$

x の係数を比べて $b = -12$

定数項を比べて $c = -9$ より，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d) = (12, -12, -9,\ 5)}$

◀ 展開した

◀ 降べきの順に揃えた，これで係数が比較できる

【練習 36：恒等式〜その１〜】

$\dfrac{p}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{q}{x^2-1}$ が恒等式となるように p, q の値を定めなさい．

【解答】 左辺を通分すると $\dfrac{p(x+1)+(x-1)}{x^2-1} = \dfrac{(p+1)x+(p-1)}{x^2-1}$ となるので，両辺の分子を比べて $(p+1)x + (p-1) = q$ が恒等式になればよいと分かる．

x の係数から $p + 1 = 0 \Leftrightarrow p = -1$，定数項から $p - 1 = q \Leftrightarrow q = -2$ となる．つまり，$\boldsymbol{p = -1,\ q = -2}$.

◀ これを数値代入法で解いてもよいが，$x = 1, -1$ を代入するときには，分子どうしが恒等式になるための計算でないといけない．なぜなら，もとの分数式には $x = 1, -1$ を代入できない．

「数値代入法」と「係数比較法」は問題に応じて使い分けられるとよい．

【練習 37：恒等式〜その２〜】

次の等式が恒等式となるように，a, b, c, d の値を定めなさい．

(1) $a(x+1)^3 + 2(x+1)^2 = b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x-1)$

(2) $(x+1)(x^2+ax+2) = (x+b)(x^2+cx+1)$

(3) $a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-4) = 1$

(4) $\dfrac{1}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x-1}$

【解答】

(1) $x=-1$ を両辺に代入して，$0 = -8b+4c-2d$ ········ ①

$x=1$ を両辺に代入して，$8a+8=0 \Leftrightarrow a=-1$ ········ ②

$x=0$ を両辺に代入して，$a+2 = -b+c-d$ ········ ③

$x=2$ を両辺に代入して，$27a+18 = b+c+d$ ········ ④

②を①，③，④ に代入して整理すると

$$\begin{cases} 4b-2c+d=0 & \cdots\cdots\cdots ⑤ \\ b-c+d=-1 & \cdots\cdots\cdots ⑥ \\ b+c+d=-9 & \cdots\cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

◀ この問題は，両辺とも展開に手間がかかる．

⑦ − ⑥ から $2c=-8$ なので $c=-4$

⑤ − ⑥ から $3b-c=1$ なので $3b-(-4)=1 \Leftrightarrow b=-1$,

⑦から $(-1)+(-4)+d=-9 \Leftrightarrow d=-4$，これらを左辺，右辺に代入して展開すると一致するので，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d) = (-1, -1, -4, -4)}$.

◀ 十分性の確認

(2) （左辺）$= x^3+ax^2+2x+x^2+ax+2 = x^3+(a+1)x^2+(2+a)x+2$

（右辺）$= x^3+cx^2+x+bx^2+bcx+b = x^3+(b+c)x^2+(bc+1)x+b$

の両辺を見比べて，定数項から $b=2$

x の係数から $2+a=2c+1$，x^2 の係数から $a+1=2+c$

この 2 式を連立して解いて，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (3,\ 2,\ 2)}$

(3) $x=2$ を両辺に代入して $c\cdot(-1)\cdot(-2)=1 \Leftrightarrow c=\dfrac{1}{2}$,

$x=3$ を両辺に代入して $a\cdot 2\cdot 1 = 1 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$,

$x=1$ を両辺に代入して $b\cdot 2+\dfrac{1}{2}\cdot 6 = 1 \Leftrightarrow 2b=-2$ から $b=-1$，これらを代入すると（左辺）$=1$ となり，両辺が一致するので，

$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = \left(\dfrac{1}{2}, -1,\ \dfrac{1}{2}\right)}$.

◀ 十分性の確認

(4) （右辺）$= \dfrac{a(x-1)+b(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{(a+b)x+(-a+2b)}{(x+2)(x-1)}$

◀ 分子を x について降べきの順に並べた

これと左辺の分子どうしを見比べて x の係数から $a+b=0$ なので $b=-a$，定数項から $-a+2b=1 \Leftrightarrow -a-2a=1$，よって，$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{1}{3}}$.

【暗記 38：k の値に関わらず直線が通る点】
直線 $kx-2x+y-2k=0$ が，k の値に関わらず通る点 $(x,\ y)$ を求めよ．

【解答】　等式 $kx-2x+y-2k=0$ が k についての恒等式となればよいので

$$kx-2x+y-2k=0 \Leftrightarrow (x-2)k-2x+y=0$$

◀ 係数比較をするため k について降べきの順にした．

k の係数から $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$，定数項から $-2x+y=0 \Leftrightarrow y=2x=4$．以上から，等式 $kx-2x+y-2k=0$ は k の値に関わらず $\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 4)}$ を満たすので，これが求める点になる．

上の例題について，『一定の条件を満たす直線の集まり（p.99）』において，より詳しく学ぶ.

2. 多項式の割り算と恒等式

A. 剰余の定理

多項式を 1 次式で割った場合を考えて，次の**剰余の定理**（polynomial remainder theorem）を得る．

剰余の定理

$F(x)$ を $x-a$ で割った余りは $F(a)$ になる．また，$F(x)$ を $ax-b$ で割った余りは $F\left(\dfrac{b}{a}\right)$ になる．

（証明）$F(x)$ を $ax-b$ で割って，商が $Q(x)$，余りは r になったとする．このとき，$F(x)=(ax-b)Q(x)+r$ という恒等式が成り立ち，$x=\dfrac{b}{a}$ のとき

$$（左辺）=F\left(\frac{b}{a}\right),\qquad （右辺）=\left(a\cdot\frac{b}{a}-b\right)Q\left(\frac{b}{a}\right)+r=0+r=r$$

となるので，$F\left(\dfrac{b}{a}\right)=r$ が分かり後半部分が示された．$a=1$ とすれば，前半部分も示された．■

【例題 39】　$F(x)=4x^4-2x^3+1,\ G(x)=x^4+ax^2+1$ とする．
1. $F(x)$ を $x-1$ で割った余りを求めよ．
2. $F(x)$ を $2x+3$ で割った余りを求めよ．
3. $G(x)$ を $x-2$ で割った余りが 5 になるとき，a の値を求めよ．

【解答】　剰余の定理より
1. $F(1)=4-2+1=\boldsymbol{3}$
2. $F\left(-\dfrac{3}{2}\right)=4\cdot\dfrac{81}{16}-2\cdot\left(-\dfrac{27}{8}\right)+1=\dfrac{81}{4}+\dfrac{27}{4}+1=\boldsymbol{28}$
3. $G(x)$ を $x-2$ で割った余りは $G(2)=16+4a+1=4a+17$ になる．これが 5 に等しいので，$4a+17=5 \Leftrightarrow \boldsymbol{a=-3}$.

B. 数値代入法の応用 ～ 割り算の余りを求める

$(x^{13}+1)\div(x^2-1)$ は筆算でも計算できるが，次のように考えることもできる．

$(x^{13}+1)\div(x^2-1)$ で割った商を $Q(x)$ とする．2 次式 x^2-1 で割った余りは 1 次式になるので

$x^{13}+1=(x^2-1)Q(x)+(ax+b)$ ……………………… ①

と表すことができる．①は x についての恒等式であるから，$x=1$ を代入して

① $\Rightarrow 1^{13}+1=\underbrace{(1^2-1)\cdot Q(1)}_{\text{0になって消える}}+(a\cdot 1+b)$ ←余りだけ残る

$\Leftrightarrow 2=a+b$ ……………………… ②

が成り立つ．また，①に $x=-1$ を代入して

① $\Rightarrow (-1)^{13}+1=\underbrace{0\cdot Q(-1)}_{\text{0になって消える}}+\{a\cdot(-1)+b\}$ ←余りだけ残る

$\Leftrightarrow 0=-a+b$ ……………………… ③

が成り立つ．②，③ を連立して $a=b=1$ を得るので，$(x^{13}+1)\div(x^2-1)$ の余りは $ax+b=x+1$ と分かる．

【例題 40】 $(x^{10}-2x^9+x-1)\div(x^2-3x+2)$ の余りを上の方法で求めよ．

【解答】 商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおく．$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ から，次の等式が成り立つ．

$x^{10}-2x^9+x-1=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ ……………………… ①

①の両辺に $x=1$ を代入して $1-2+1-1=0\cdot Q(1)+a+b$

①の両辺に $x=2$ を代入して $2^{10}-2^{10}+2-1=0\cdot Q(2)+2a+b$

それぞれ整頓して連立して解けば $\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$

よって，求める余りは $ax+b=\mathbf{2x-3}$ と分かる．

◀ 割る式 x^2-3x+2 は 2 次式なので，余りは 1 次式になる．

【練習 41：多項式の割り算～その１～】

$F(x)$ を $x-2$ で割った余りが 1，$x+1$ で割った余りが -2 のとき，$F(x)$ を $(x-2)(x+1)$ で割った余りを求めなさい．

【解答】 $F(x)$ を $(x-2)(x+1)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$F(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b$ ……………………… ①

と表せる．①に $x=2$ を代入して

$F(2)=0\cdot Q(2)+(a\cdot 2+b)\Leftrightarrow F(2)=2a+b$

一方，$x-2$ で割った余りが 1 であるから，剰余の定理によって $F(2)=1$ とも分かり，$2a+b=1$．また

$F(-1)=0\cdot Q(-1)+a\cdot(-1)+b\Leftrightarrow F(-1)=-a+b$

であるが，$x+1$ で割った余りが -2 であるから $F(-1)=-2$ と分かり，$-a+b=-2$．2 式を連立して $a=1$, $b=-1$ とわかる．

つまり，$F(x)$ を $(x-2)(x+1)$ で割った余りは $\mathbf{x-1}$ になる．

【練習 42：多項式の割り算〜その２〜】

(1) $x^9+x^7+x^5+1$ を x^2-1 で割った余りを求めよ．

(2) $F(x)$ を $x-3$ で割った余りが 4，$x+2$ で割った余りが -6 のとき，$F(x)$ を $(x-3)(x+2)$ で割った余りを求めよ．

C. 発展 式の除法と式の値

$x=2+\sqrt{3}$ のときの $F(x)=x^3+2x^2-4x+1$ の値 $F\left(2+\sqrt{3}\right)$ は，次のように計算することが出来る．

まず，$x=2+\sqrt{3}$ を解にもつ 2 次方程式を求める．これは

$$x-2=\sqrt{3} \Leftrightarrow (x-2)^2=3 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0$$

と変形して，式 x^2-4x+1 は，$x=2+\sqrt{3}$ のときに 0 になると分かる．

次に，$(x^3+2x^2-4x+1)\div(x^2-4x+1)$ を計算する．右のような筆算によって，次の等式を得る．

					1	6
1 −4 1)			1	2	−4	1
			1	−4	1	
				6	−5	1
				6	−24	6
					19	−5

$$F(x)=(x^3+2x^2-4x+1)=(x^2-4x+1)(x+6)+19x-5$$

この両辺に $x=2+\sqrt{3}$ を代入すると $x^2-4x+1=0$ であるから

$$F\left(2+\sqrt{3}\right)=0+19\left(2+\sqrt{3}\right)-5=33+19\sqrt{3}$$

となって簡単に計算できる．

この計算は，「微分」で 3 次関数を学んだときなどに重宝される．

【練習 43：式の除法と式の値】

(1) $x=3-\sqrt{2}$ を解に持つような 2 次方程式を 1 つ求めよ．

(2) $F(x)=x^3-5x^2-2x+5$ のとき，$F\left(3-\sqrt{2}\right)$ を求めよ．

D. 発展 係数比較法の応用

【発展 44：多項式の割り算〜その３〜】

$F(x)=(x-1)^2(x+2)$ で割った余りを ax^2+bx+c とする．

① $F(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ を変形し，$F(x)=(x-1)^2\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}$ の形にしなさい．ただし，$\boxed{\text{イ}}$ は $a,\ b,\ c$ を用いた 1 次式とする．

② $F(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $-3x+2$，$x+2$ で割った余りが -1 であるとき，$a,\ b,\ c$ を求めよ．

上の問題は，数学 III で「関数の積の微分」を用いた別解がある．

3. 連比・比例式と比例定数

A. 連比とは何か

3 つ以上の数の比を，**連比**（れんぴ）という．また，$x:y=2:3$ や $x:y:z=4:5:6$ など，比・連比が等しいことを表わす等式を，**比例式**という．

たとえば，$x=2,\ y=4,\ z=8$ のとき，連比 $x:y:z$ は連比 $2:4:8=1:2:4$ と等しく，比例式 $x:y:z=1:2:4$ が成り立つ．

B. 比例定数

比例式 $x:y=2:3$ は，「$2:3$ を何倍かすれば $x:y$ になる」も意味する．この「何倍か」を k 倍とおき

「ある実数 $k(\neq 0)$ が存在して，$x=2k,\ y=3k$」と表すことができる．

同じようにして，$x:y:z=4:5:6$ であることは，次のように言い換えられる．

「ある実数 $k(\neq 0)$ が存在して，$x=4k,\ y=5k,\ z=6k$」

このときの，0 でない実数 k を**比例定数**という．

【例題 45】

1. $a:b:c=1:2:3$ のとき
   1) $a,\ b,\ c$ を比例定数 k を用いて表せ．
   2) 連比 $(a+b):(b+c):(c+a)$ を求めよ．
2. $(x+y):(y+z):(z+x)=3:6:7$ であるとき
   1) $x+y,\ y+z,\ z+x$ を比例定数 k を用いて表せ．また，$x+y+z$ を k を用いて表わせ．
   2) 連比 $x:y:z$ を求めよ．
   3) $\dfrac{x+2y+3z}{3x+2y+z}$ の値を求めよ．

【解答】

1. 1) $\boldsymbol{a=k,\ b=2k,\ c=3k}$

   2) $(a+b):(b+c):(c+a)=3k:5k:4k=\boldsymbol{3:5:4}$

   ◀ たとえば，$a+b=k+2k=3k$

2. 1) $\boldsymbol{x+y=3k,\ y+z=6k,\ z+x=7k}$ である．この 3 式を左辺同士，右辺同士それぞれ足して

$$\begin{aligned}(x+y)+(y+z)+(z+x)&=3k+6k+7k\\ \Leftrightarrow\ 2(x+y+z)&=16k\\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x+y+z}&=\boldsymbol{8k}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

   2) ①と $x+y=3k$ から，$3k+z=8k$ となるので $z=5k$．
   ①と $y+z=6k$ から，$x+6k=8k$ となるので $x=2k$．
   ①と $z+x=7k$ から，$7k+y=8k$ となるので $y=k$．
   以上より，$x:y:z=2k:k:5k=\boldsymbol{2:1:5}$

   3) $x=2k,\ y=k,\ z=5k$ を代入して

$$（与式）=\frac{2k+2k+15k}{6k+2k+5k}=\frac{19k}{13k}=\boldsymbol{\frac{19}{13}}$$

C.　もう 1 つの比例式の形

2 つ以上の分数が等しいような式 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$，$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$ は次のように変形できるので，比例式と言うことがある．

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=k$ とおくと，$\dfrac{x}{2}=k$ から $x=2k$，$\dfrac{y}{3}=k$ から $y=3k$ となり，$x:y=2:3$ を満たす．

$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}=k$ とおくと，$x=4k$, $y=5k$, $z=6k$ となり，$x:y:z=4:5:6$ を満たす．

つまり，等しい分数の値を k とおくと，結果的に，k が比例定数として働く．

【例題 46】

1. $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{5}=\dfrac{c}{7}$ のとき
   1) a, b, c を比例定数 k を用いて表わせ．
   2) $\dfrac{a+b}{b+c}$ の値を求めよ．
2. $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{5}=\dfrac{z+x}{6}$ であるとき
   1) $x+y$, $y+z$, $z+x$ を比例定数 k を用いて表せ．また，$x+y+z$ を k を用いて表わせ．
   2) 連比 $x:y:z$ を求めよ．
   3) $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ の値を求めよ．

【解答】

1. 1) $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{5}=\dfrac{c}{7}=k$ とおいて，$\boldsymbol{a=3k,\ b=5k,\ c=7k}$.

   2) (与式) $=\dfrac{3k+5k}{5k+7k}=\dfrac{8k}{12k}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

2. 1) $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{5}=\dfrac{z+x}{6}=k$ とおいて，
   $\boldsymbol{x+y=3k,\ y+z=5k,\ z+x=6k}$. この 3 式を左辺同士，右辺同士それぞれ足して

$$
\begin{aligned}
&(x+y)+(y+z)+(z+x)=3k+5k+6k\\
\Leftrightarrow\ &2(x+y+z)=14k\\
\Leftrightarrow\ &x+y+z=7k \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

   2) ①と $x+y=3k$ から，$3k+z=7k$ となるので $z=4k$.
   ①と $y+z=5k$ から，$x+5k=7k$ となるので $x=2k$.
   ①と $z+x=6k$ から，$6k+y=7k$ となるので $y=k$.
   以上より，$x:y:z=2k:k:4k=\boldsymbol{2:1:4}$

   3) $x=2k$, $y=k$, $z=4k$ を代入して

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{(2k)^2+k^2+(4k)^2}{2k\cdot k+k\cdot 4k+4k\cdot 2k}\\
&=\frac{21k^2}{14k^2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

4. 等式の証明

A. 左辺，右辺をそれぞれ計算する

等式を証明するには，左辺と右辺をそれぞれ計算し，一致することを確認すればよい．

【練習 47：等式の証明】

(1) 等式 $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ を証明せよ．

(2) 等式 $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(ay+bx)^2$ を証明せよ．

【解答】

(1) （左辺）$= a^2x^2+\cancel{2axby}+b^2y^2+a^2y^2\cancel{-2aybx}+b^2x^2$

$= a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2$

（右辺）$= a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

よって（左辺）=（右辺）が示された． ■

(2) （左辺）$= a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$

（右辺）$= a^2x^2+\cancel{2axby}+b^2y^2-(a^2y^2\cancel{+2aybx}+b^2x^2)$

$= a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$

よって（左辺）=（右辺）が示された． ■

B. ある条件式の元での等式の証明

条件式があるときは，文字を消去すれば良い．

【例題 48】 $x+y+z=0$ のとき，$x^2+y^2+z^2=2(z^2-xy)$ であることは次のように示それる．仮定より，$z=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．これを代入すると（左辺）$=$ $\boxed{\text{イ}}$，（右辺）$=$ $\boxed{\text{ウ}}$ となり，（左辺）=（右辺）が示された．

【解答】 $z=\underline{\boldsymbol{-x-y}}_{(ア)}$ であるから

（左辺）$= x^2+y^2+(-x-y)^2$

$= x^2+y^2+(x^2+2xy+y^2)=\underline{\boldsymbol{2x^2+2xy+2y^2}}_{(イ)}$

（右辺）$= 2\{(-x-y)^2-xy\}$

$= 2(x^2+2xy+y^2-xy)=\underline{\boldsymbol{2x^2+2xy+2y^2}}_{(ウ)}$

となり，（左辺）=（右辺）が示された． ■

◀ 次のような別解もある．

（左辺）−（右辺）

$= x^2+y^2+z^2-2(z^2-xy)$

$= x^2+y^2+2xy-z^2$

$= (x+y)^2-z^2=(-z)^2-z^2=0$

なので，（左辺）=（右辺）． ■

【練習 49：等式の証明〜その１〜】

$x+y+z=0$ のとき，$x^3+y^3+z^3=3xyz$ を示しなさい．

【解答】 $z=-(x+y)$ であるから

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= x^3+y^3+\{-(x+y)\}^3 \\
&= x^3+y^3+(-1)^3(x+y)^3 \\
&= x^3+y^3-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \\
&= -3x^2y-3xy^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= 3xy(-x-y) \\
&= -3x^2y-3xy^2
\end{aligned}
$$

よって（左辺）＝（右辺）が示された． ■

C. 比例式を含む等式の証明

条件式に比例式や比が含まれている場合は，比例定数 (p.32) を用いるとよい．

たとえば，$a:b=c:d$ であるとき $\dfrac{a+2b}{c+2d}=\dfrac{3a-b}{3c-d}$ を示してみよう．

$a:b=c:d$ から，比例定数 k を用いて $a=ck$, $b=dk$ とおける．すると

$$\frac{a+2b}{c+2d}=\frac{ck+2dk}{c+2d}=\frac{k(c+2d)}{c+2d}=k,\qquad \frac{3a-b}{3c-d}=\frac{3ck-dk}{3c-d}=\frac{k(3c-d)}{3c-d}=k$$

となるから，$\dfrac{a+2b}{c+2d}=\dfrac{3a-b}{3c-d}$ が示された．

【練習 50：比例式を含む等式の証明】

$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$ のとき，等式 $\dfrac{x+y}{a+b}=\dfrac{x-y}{a-b}$ を示せ．

【解答】 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=k$ とおくと，$a=kx$, $b=ky$ である．よって

$$\frac{x+y}{a+b}=\frac{x+y}{kx+ky}=\frac{x+y}{k(x+y)}=\frac{1}{k}$$

$$\frac{x-y}{a-b}=\frac{x-y}{kx-ky}=\frac{x-y}{k(x-y)}=\frac{1}{k}$$

となるから，$\dfrac{x+y}{a+b}=\dfrac{x-y}{a-b}$ が示された． ■

1A.4 不等式の証明

1. 不等式の性質

A. a, b の正負と $a+b, a-b, ab, \dfrac{a}{b}$ の正負

$a>0, b>0$ ならば，$a+b>0, ab>0, \dfrac{a}{b}>0$ であるが，$a-b$ は正にも負にも 0 にもなりうる．

一方，$a>0, b<0$ のときは，$a-b>0$ である．

【暗記 51：四則演算と正負】

以下の空欄に，「正」「負」「(正負が) 定まらない」のいずれかを入れ，表を完成させなさい．

	$a+b$	$a-b$	ab	$\dfrac{a}{b}$
$a>0, b>0$ のとき	正	定まらない	正	正
$a>0, b<0$ のとき		正		
$a<0, b<0$ のとき				

【解答】

	$a+b$	$a-b$	ab	$\dfrac{a}{b}$
$a>0, b>0$ のとき	正	定まらない	正	正
$a>0, b<0$ のとき	**定まらない**	正	**負**	**負**
$a<0, b<0$ のとき	**負**	**定まらない**	**正**	**正**

B. $a<c, b<d$ のときの，$a+b, c+d$ の大小，ab, cd の大小

$1<a, 2<b$ であるとき，$1+2<a+b$ が成り立つから $3<a+b$ である．また，$1\times 2<ab$ が成り立つから $2<ab$ である．これらを一般化して，以下の事実が成り立つ．

不等式の性質

i) $a<c,\ b<d \Rightarrow a+b<c+d$ ←どんな場合も，小＋小＜大＋大

ii) $\mathbf{0<}a<c,\ \mathbf{0<}b<d \Rightarrow ab<cd$ ←正の値ならば，小×小＜大×大

i) の証明は p.37 を，ii) の証明は p.37 を参照のこと．

【例題 52】 $a>1, b>2$ とする．次の不等式の真偽を述べ，偽ならば反例を挙げよ．

1. $2a+b>4$　　2. $a^2+a+b>4$　　3. $2<4a-b$

【解答】

1. $2a>2, b>2$ から，$2a+b>2+2=4$ なので**真**．
2. $a^2>1, a>1, b>2$ から，$a^2+a+b>1+1+2=4$ なので**真**．
3. **偽である．反例は $\boldsymbol{a=2, b=7}$ など．**

◀他にも多数の反例がある．

【発展 53：不等式の性質 ii) の証明】

$0 < a < c,\ 0 < b < d$ のとき，$ab < cd$ を示そう．

【解答】 $a < c$ において，$0 < b$ より $ab < bc$ である．
また，$b < d$ において，$0 < c$ より $bc < cd$ である．
この 2 式を合わせて，$ab < bc < cd$ であるから，$ab < cd$ が示された． ■

【発展 54：２数の大小関係】

次の命題の真偽を述べ，偽ならば反例を挙げよ．

① $a < 0 < c,\ 0 < b < d \Rightarrow ab < cd$

② $a < 0 < c,\ b < 0 < d \Rightarrow ab < cd$

③ $0 < a < b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

④ $0 < a < c,\ 0 < b < d \Rightarrow \dfrac{b}{c} < \dfrac{d}{a}$

2. 不等式の証明の基礎

A. （左辺）−（右辺），または，（右辺）−（左辺）

不等式を証明するときは，（左辺）−（右辺）や（右辺）−（左辺）の正負を考えるとよい．

（例）$a > 0,\ b > 0$ のとき，$3a + 4b > 2a + 3b$ が成り立つことを示せ．

（左辺）−（右辺）$= (3a + 4b) - (2a + 3b) = a + b > 0$ ←仮定から，$a > 0$，$b > 0$

よって，（左辺）−（右辺）> 0 であるから，$3a + 4b > 2a + 3b$ は示された．

上の不等式が正しいことは，直感的に分かるかもしれない．しかし，「証明」が必要ならば上のように書こう．

【練習 55：不等式の証明〜その１〜】

(1) $0 < a,\ 0 < b$ のとき，$2a - 3b < 4a - 2b$ を示しなさい．

(2) $a < b$ であるとき，$\dfrac{3a + 2b}{5} < \dfrac{2a + 3b}{5}$ を示しなさい．

(3) $a < b,\ c < d$ のとき，$a + c < b + d$ を示しなさい（p.36『不等式の性質 i)』）．

【解答】

(1)（右辺）−（左辺）$= (4a - 2b) - (2a - 3b) = 2a + b > 0$ である（仮定から，$0 < a,\ 0 < b$）．よって，与式は示された．

(2)（右辺）−（左辺）$= \dfrac{(2a + 3b) - (3a + 2b)}{5} = \dfrac{b - a}{5} > 0$（仮定から，$b - a > 0$）．よって，与式は示された．

(3)（左辺）−（右辺）$= a + c - b - d = (a - b) + (c - d) < 0$（仮定から，$a - b < 0,\ c - d < 0$）．よって，与式は示された．

B. 等号条件

≦, ≧ を含む不等式においては，等号 = が成り立つ必要十分条件[*6]をできるだけ記すとよい.

【例題 56】 $(a+1)^2 \geqq 4a$ であることを示せ．また，等号はいつ成立するか.

【解答】 (左辺) − (右辺) = $(a^2+2a+1)-4a = a^2-2a+1 = (a-1)^2 \geqq 0$
であるから，不等式 $(a+1)^2 \geqq 4a$ が示された.
$(a-1)^2 = 0$ を解いて，$\boldsymbol{a = 1}$ **が等号条件になる**. ■

◀ (左辺) = (右辺) になるのは，(左辺) − (右辺) = $(a-1)^2 = 0$ のとき.

C. (左辺)^2 − (右辺)^2，または，(右辺)^2 − (左辺)^2

2 つの正の値は，2 乗しても大小関係が変わらないので，次のような証明ができる (p.??).

（例）$x > 0,\ y > 0$ のとき，$\sqrt{3x+2y} < \sqrt{3x} + \sqrt{2y}$ が成り立つことを示せ.

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 &= \left(\sqrt{3x} + \sqrt{2y}\right)^2 - \left(\sqrt{3x+2y}\right)^2 \\
&= (3x + 2\sqrt{6xy} + 2y) - (3x+2y) = 2\sqrt{6xy} > 0
\end{aligned}
$$

よって $(\text{左辺})^2 < (\text{右辺})^2$ である．今，左辺も右辺も正であるから (左辺) < (右辺) が示された.

上の証明において，左辺も右辺も正であるからという一言は，必ず書かなければならない[*7].

【練習 57：不等式の証明〜その２〜】

(1) $0 \leqq a$ のとき，$\sqrt{a^2+a+1} \leqq a+1$ を示し，等号条件も示しなさい.
(2) $0 < a,\ 0 < b$ のとき，$\sqrt{a^2+b^2} < a+b$ を示しなさい

【解答】
(1) $(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 = (a+1)^2 - (a^2+a+1) = a^2+2a+1-a^2-a-1 = a \geqq 0$
よって，$(\text{左辺})^2 \leqq (\text{右辺})^2$ である．$0 \leqq a$ から左辺，右辺とも正であるから，(左辺) ≦ (右辺) が示された．また，等号条件は $a = 0$.
(2) $(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 = (a+b)^2 - (a^2+b^2) = a^2+2ab+b^2-a^2-b^2 = 2ab > 0$
よって，$(\text{左辺})^2 < (\text{右辺})^2$ である．$0 < a,\ 0 < b$ より左辺，右辺とも正であるから，(左辺) < (右辺) が示された.

等号条件は，上のように明記していなくても，できるだけ書いた方がよい.

[*6] しばしば，**等号条件**と言われる.
[*7] $(\text{左辺})^2 < (\text{右辺})^2$ のとき，実際には 0 < (右辺) でさえあれば，(左辺) < (右辺) が成り立つ.

3. いろいろな不等式の証明

A. 因数分解の利用

（左辺）−（右辺）や（左辺）^{2} −（右辺）^{2} が，正または負であると示すに，因数分解が有用になることがある．

（例）$1 < a$, $1 < b$ のとき，$ab + 1 > a + b$ を示せ．

（左辺）−（右辺）$= ab + 1 - (a + b) = ab - a - b + 1$
$= a(b - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1)$

$a - 1 > 0$, $b - 1 > 0$ であるから $(a - 1)(b - 1) > 0$ になる．よって，（左辺）>（右辺）が示された．

以下の性質によって，因数分解が有効になっている．

因数分解の利用と等号条件

$A \geqq 0$, $B \geqq 0$ ならば，$AB \geqq 0$ であり，等号条件は $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ または $B = 0$ である．

【練習 58：不等式の証明〜その３〜】

(1) $0 < A < B$ のとき，$A^2 < B^2$ であることを示せ．

(2) $a < b$, $c < d$ のとき，$ac + bd > ad + bc$ であることを示せ．

【解答】

(1)（右辺）−（左辺）$= (B + A)(B - A)$ である．
$0 < A$, $0 < B$ から $0 < B + A$，$A < B$ から $0 < B - A$ であるから，
$(B + A)(B - A) > 0$ である．

(2) （左辺）−（右辺）$= ac + bd - (ad + bc)$
$= ac + bd - ad - bc$
$= a(c - d) + b(d - c) = (a - b)(c - d)$

$a - b < 0$, $c - d < 0$ であるから $(a - b)(c - d) > 0$ になる．よって，
（左辺）>（右辺）が示された．

上の (1) から「2 つの正の値は，2 乗しても大小関係が変わらない」ことが分かる (p.38).

B.　平方完成の利用

式の正負を示すために，平方完成も有効である．

（例１）$a^2 > a-1$ が成り立つことを示せ．

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = a^2-(a-1) = a^2-a+1$$
$$= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1$$
$$= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$$

←２乗した値に $\frac{3}{4}$ を足せばやはり正

よって，（左辺）>（右辺）であり，命題は示された．

（例２）$a^2+b^2 \geqq 2a+2b-2$ が成り立つことを示せ．

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = a^2+b^2-2a-2b+2$$
$$= (a^2-2a)+(b^2-2b)+2$$

←aだけでまとめ，bだけでもまとめた

$$= (a-1)^2+(b-1)^2 \geqq 0$$

←aだけで平方完成し，bだけでも平方完成した

よって，（左辺）$\geqq$（右辺）である．等号は，$(a-1)^2=(b-1)^2=0$ のとき，つまり $a=b=1$ のときに成立する．

以下の性質によって，平方完成が有効になっている．

平方完成の利用と等号条件

$c>0$ のとき，$A^2+c>0$ である．
$A^2+B^2 \geqq 0$ であり，等号条件は $A^2+B^2=0 \Leftrightarrow A=0$ かつ $B=0$ である．

【練習 59：不等式の証明〜その４〜】

次の不等式を示せ．また，(2) は等号条件も答えなさい．

(1) $a^2 > -a-1$　　(2) $a^2+ab+b^2 \geqq 0$　　(3) $a^2+b^2 > a+b-1$

【解答】

(1) （左辺）−（右辺）$= a^2+a+1 = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$

よって，（左辺）>（右辺）となり，示された．

(2) （左辺）$= \left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+b^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$

$a+\frac{b}{2}=0$ かつ $b=0$ のとき等号を満たし，等号条件は，$a=b=0$.

(3) $$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = a^2-a+b^2-b+1$$
$$= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1$$
$$= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} > 0$$

よって，（左辺）>（右辺）となり，示された．

【練習 60：不等式の証明〜その５〜】

$a > b$ ならば $a^3 > b^3$ であることを示せ.

【解答】 （左辺）−（右辺）$= a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ について，$a > b$ より $a - b > 0$ である.

また，$a^2+ab+b^2 = \left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}b^2 \geqq 0$ である．等号条件は，$a = b = 0$ のときであるが，$a > b$ から適さない．よって，$a^2+ab+b^2 > 0$ である.

◀ $a+\dfrac{b}{2}=0$, $b=0$ を連立すると，$a=b=0$ になる.

以上より $(a-b)(a^2+ab+b^2) > 0$ となり，（左辺）>（右辺）は示された.

【発展 61：不等式の証明〜その６〜】

$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$ を示せ.

【解答】

$$\begin{aligned}
&（左辺）-（右辺）\\
=\ & x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\\
=\ & \frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2-yz+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^2-zx+\frac{1}{2}x^2\\
=\ & \frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)+\frac{1}{2}(y^2-2yz+z^2)+\frac{1}{2}(z^2-2zx+x^2)\\
=\ & \frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

等号成立は $x-y=y-z=z-x=0$ のとき，つまり，$x=y=z$ のとき. ■

C. 発展 三角不等式

どんな実数 a, b に対しても，$|a+b| \leqq |a|+|b|$ が成り立つ．これを三角不等式と言う.

【発展 62：三角不等式】

① 次の命題は真か偽か．真ならば等号条件を，偽ならば反例を答えよ.

（a）全ての実数 a, b に対し $ab \leqq |ab|$　（b）全ての実数 a, b に対し $ab+|ab| \geqq 0$

② $|a+b| \leqq |a|+|b|$ を示せ.

③ $|a|-|b| \leqq |a+b|$ を示せ

【解答】

①（a）**真**であり，等号条件は $|ab| = ab$ のとき，つまり $\boldsymbol{ab \geqq 0}$ **のとき**.

（b）**真**であり，等号条件は $|ab| = -ab$ のとき，つまり $\boldsymbol{ab \leqq 0}$ **のとき**.

② 両辺が正であるから，（右辺）^{2} −（左辺）$^2 \geqq 0$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}
（右辺）^2-（左辺）^2 &= |a|^2+2|a||b|+|b|^2-|a+b|^2\\
&= a^2+2|ab|+b^2-(a+b)^2\\
&= a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2 = 2(|ab|-ab)
\end{aligned}$$

◀『絶対値の性質』(数 I, p.9) から $|a|^2 = a^2$, $|ab| = |a||b|$

a, b はどんな値でも $ab \leqq |ab|$ になるから，$|ab|-ab \geqq 0$ が示された.

等号は $ab \geqq 0$ のときに成り立つ.

③（左辺）< 0 の時，右辺は 0 以上なので必ず右辺の方が大きい.

◀ ② と違い，左辺は負になりうる.

(左辺) $\geqq 0$ の時，両辺とも正より (右辺)^2 − (左辺)$^2 \geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2 &= |a+b|^2-\left(|a|^2-2|a||b|+|b|^2\right)\\ &= (a+b)^2-a^2+2|ab|-b^2\\ &= a^2+2ab+b^2-a^2+2|ab|-b^2 = 2(ab+|ab|) \geqq 0\end{aligned}$$

等号は $ab \leqq 0$ のときである．

以上から，a, b がどんな値でも不等式は成立し，

等号条件は $|a|-|b| \geqq 0$ かつ $ab \leqq 0$.

4. 相加・相乗平均の定理

A. 相加平均とは，相乗平均とは

$a.b$ の相加平均は $\dfrac{a+b}{2}$ で計算できる．つまり，これまで「平均」と呼んできた値に等しい．

$a.b$ の相乗平均は $\sqrt{ab}$ で定義される． $\sqrt{ab}$ を 2 回掛ければ，a, b の掛け算に一致する．

【例題 63】 次の 2 数の相加平均，相乗平均をそれぞれ求めなさい．ただし，$a \neq 0$ とする．

1. 8, 18　　2. 3, 5　　3. a, $\dfrac{1}{a}$

【解答】

1. 相加平均は $\dfrac{8+18}{2} = \mathbf{13}$，相乗平均は $\sqrt{8\cdot 18} = 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2} = \mathbf{12}$
2. 相加平均は $\dfrac{3+5}{2} = \mathbf{4}$，相乗平均は $\sqrt{3\cdot 5} = \boldsymbol{\sqrt{15}}$
3. 相加平均は $\dfrac{a+\frac{1}{a}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{2a}}$，相乗平均は $\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}} = \mathbf{1}$

◀ 相加平均は $\dfrac{a^2+1}{2a}$ でもよい．

B. 相加平均と相乗平均の大小

負でないどんな 2 数も，相加平均は相乗平均より小さくない．詳しくは，以下が成り立つ．

相加・相乗平均の定理〜その 1〜

$0 \leqq a$, $0 \leqq b$ のとき，2 数の相加平均 $\dfrac{a+b}{2}$ は相乗平均 $\sqrt{ab}$ 以上であり

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

が必ず成り立つ．また，等号が成り立つ必要十分条件は $a=b$ である．

（証明）$0 \leqq a$, $0 \leqq b$ であるから

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2}{2} - \sqrt{a}\sqrt{b} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geqq 0$$

等号は $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a=b$ のときのみ成り立つ．

【例題 64】 a, b が以下の値のとき，相加・相乗平均の定理 $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ からどのような不等式の成立が示されるか.

1. $a = 5,\ b = 3$　　2. $a = x^2,\ b = 9$　　3. $a = 2x,\ b = \dfrac{2}{x}$

【解答】

1. $\dfrac{5+3}{2} \geqq \sqrt{5 \cdot 3} \Leftrightarrow \boldsymbol{4 \geqq \sqrt{15}}$
2. $\dfrac{x^2+9}{2} \geqq \sqrt{x^2 \cdot 9} \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 + 9 \geqq 6x}$
3. $\dfrac{2x + \frac{2}{x}}{2} \geqq \sqrt{2x \cdot \dfrac{2}{x}} \Leftrightarrow \boldsymbol{x + \dfrac{1}{x} \geqq 2}$

C. 相加・相乗平均の定理を用いた最小値の計算

相加・相乗平均の定理の両辺を 2 倍して，以下の不等式が成り立つ.

相加・相乗平均の定理〜その２〜

$0 \leqq a,\ 0 \leqq b$ のとき，次の不等式が成り立つ.

$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$　　（等号条件は $a = b$）

分数式を含む関数の最小値を求める方法として，この相加・相乗平均の定理は重宝される.

（例）$a > 0$ のとき，$4a + \dfrac{1}{a}$ の最小値を求めてみよう.

$4a > 0$ と $\dfrac{1}{a} > 0$ であるから，相加・相乗平均の定理によって

$$4a + \frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{4\cancel{a} \cdot \frac{1}{\cancel{a}}} = 4$$

である．等号は $4a = \dfrac{1}{a}$ のとき成り立つ．これを解くと $4a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{4}$ になる.

$a > 0$ なので，$a = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 4 をとると分かる.

【練習 65：相加・相乗平均の定理の利用〜その１〜】

$x > 0$ とする．以下の式の最小値と，そのときの x の値を求めよ.

(1) $x + \dfrac{1}{x}$　　(2) $2x + \dfrac{3}{2x}$　　(3) $\dfrac{x^2+2}{x}$　　(4) $(2+x)\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$

【解答】

(1) $x > 0,\ \dfrac{1}{x} > 0$ より，相加・相乗平均の定理から

$$x + \frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

等号条件は $x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1$ であり，$x > 0$ から $x = 1$，つまり，$\boldsymbol{x = 1}$ **のとき**，**最小値 2** をとる.

(2) $2x>0$, $\dfrac{3}{2x}>0$ より，相加・相乗平均の定理から

$$2x+\frac{3}{2x}\geqq 2\sqrt{2x\cdot\frac{3}{2x}}=2\sqrt{3}$$

等号条件は $2x=\dfrac{3}{2x}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{3}{4}$ であり，$x>0$ から $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，つまり，$\boldsymbol{x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ **のとき，最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$** をとる．

(3) (与式) $=\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{2}{x}=x+\dfrac{2}{x}$ であり，$x>0$, $\dfrac{2}{x}>0$ より，相加・相乗平均の定理から

$$(\text{与式})=x+\frac{2}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$$

等号条件は $x=\dfrac{2}{x}\Leftrightarrow x^2=2$ であり，$x>0$ から $x=\sqrt{2}$，つまり，$\boldsymbol{x=\sqrt{2}}$ **のとき，最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$** をとる．

(4) 与式を展開すると

$$(\text{与式})=2+\frac{4}{x}+x+2=x+\frac{4}{x}+4$$

◀ $x+\dfrac{4}{x}$ の最小値に 4 を足せば，与式の最小値が求められることが分かる．

となる．$x>0$, $\dfrac{4}{x}>0$ より，相加・相乗平均の定理から

$$(\text{与式})=x+\frac{4}{x}+4\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}+4=4+4=8$$

◀ $x+\dfrac{4}{x}\geqq 4$ の両辺に +4 を付け加えた形になっている．

等号条件は $x=\dfrac{4}{x}\Leftrightarrow x^2=4$ であり，$x>0$ から $x=2$，つまり，$\boldsymbol{x=2}$ **のとき，最小値 8** をとる．

【発展 66：相加・相乗平均の定理の利用～その２～】

$x>-1$ のとき，$x+\dfrac{1}{x+1}$ の最小値を求めよ．

【解答】 $x+1>0$, $\dfrac{1}{x+1}>0$ であるから，相加・相乗平均の定理より

◀ この一文で解答を始めるには，直後の式変形に気づく必要がある．

$$(\text{与式})=x+1+\frac{1}{x+1}-1\geqq 2\sqrt{\cancel{(x+1)}\cdot\frac{1}{\cancel{x+1}}}-1=1$$

等号条件は $x+1=\dfrac{1}{x+1}\Leftrightarrow (x+1)^2=1$ であり，$0<x+1$ から $x+1=1\Leftrightarrow x=0$，つまり，$\boldsymbol{x=0}$ **のとき最小値 1** をとる．

$\boxed{\mathbf{B}}$ 複素数と高次方程式

小学校では，負の数を扱わないため「$3-5$ は計算できない」と学ぶが，中学校に入ると $3-5=-2$ と学ぶ．これは，「0 より小さい数」を認めたことによる．
同じことを，数学 I までの「計算できない」方程式 $x^2=-1$ について考える．

1B.1 複素数の定義と計算

1. 複素数の定義

A. 2 次方程式の「解なし」に意味を与える

数学 I においては「2 乗して負になる数」を扱わないため，次の 3 つはいずれも「解なし」になった．

- 2 次方程式 $x^2+1=0$ を解くと，$x=\pm\sqrt{-1}$ になり「解なし」である．
- 2 次方程式 $x^2-4x+5=0$ を解くと，$x=2\pm\sqrt{-1}$ になり「解なし」である．
- 2 次方程式 $x^2+9=0$ を解くと，$x=\pm\sqrt{-9}$ になり「解なし」である．

しかし「$\pm\sqrt{-1}$」「$2\pm\sqrt{-1}$」「$\pm\sqrt{-9}$」では，同じ「解なし」でも形が異なる．そこで，この「形」に意味を与えよう．そのため「2 乗して -1 になる数」を**虚数単位** (imaginary unit) と呼び，i で表わす[*8]．

B. 負の数の平方根 〜（2 乗して -9 になる数）$=\pm 3i$

たとえば，i の 3 倍である $3i$，i の -3 倍である $-3i$ を，それぞれ 2 乗してみよう[*9]．

$$(3i)^2 = 3^2\times i^2 = 9\times(-1) = -9$$
$$(-3i)^2 = (-3)^2\times i^2 = 9\times(-1) = -9$$

こうして，$3i$，$-3i$ はどちらも「2 乗して -9 になる数」＝「-9 の**平方根**」とわかる．

【例題 67】 $4i$ の 2 乗，$-2i$ の 2 乗をそれぞれ求めよ．また，-25 の平方根をすべて答えよ．

【解答】 $(4i)^2=-16$，$(-2i)^2=-4$，-25 の平方根は $5i$，$-5i$

◀「a の平方根」とは，2 乗して a になる数のこと

[*8] $\sqrt{-1}$ とも表わされることもあるし，高校数学以外の分野では j で表わされることもある．
[*9] ここで，3 と i の掛ける順番を変えて計算している．i を含む掛け算の定義については，p.73 を参照（ただし難しい）のこと．

C. 負の数と根号 ～ $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

-5 の平方根である「2 乗して -5 になる数」には，$\sqrt{5}i$，$-\sqrt{5}i$ の 2 つがある．このうち，i の係数が正である $\sqrt{5}i$ を，$\sqrt{-5}$ で表わすことにする．同様にして，$\sqrt{-7} = \sqrt{7}i$，$\sqrt{-9} = 3i$ となる．

以上をまとめて，次のようになる．

負の数の平方根と根号

虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ とする．$a > 0$ としたとき，負の実数 $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{a}i$ であり，符号が正のものを $\sqrt{-a}$ で表す．つまり，$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ である．

【例題 68】 次の値を，虚数単位 i を用いて表わせ．根号 $\sqrt{\ }$ 内はできるだけ簡単にすること．

a. $\sqrt{-10}$　b. $\sqrt{-13}$　c. $\sqrt{-20}$　d. $\sqrt{-27}$　e. $-\sqrt{-8}$　f. $2+\sqrt{-3}$　g. $2-\sqrt{-3}$

【解答】

a. $\sqrt{10}i$　b. $\sqrt{13}i$　c. $2\sqrt{5}i$　d. $3\sqrt{3}i$　e. $-2\sqrt{2}i$

f. $2+\sqrt{3}i$　g. $2-\sqrt{3}i$

D. 実数・虚数・複素数

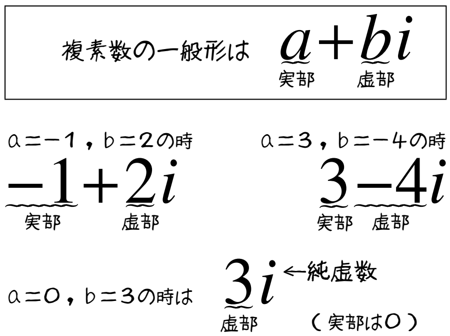
虚数単位 $\sqrt{-1} = i$ と書けば，$x^2 - 2x + 2 = 0$ の解は $x = 1 \pm i$ になった．

このように，i を含む数を**虚数** (imaginary number) といい，実数と虚数をすべてまとめて**複素数**（ふくそすう） (complex number) という．

複素数は一般に，実数 a, b を用いて $a + bi$ で表わされる．

複素数 $a + bi$ のうち，a の部分を**実部**または**実数部分** (real part)，b を**虚部**または**虚数部分** (imaginary part) [*10] という．

$b \neq 0$ のとき虚数，$b = 0$ のときは実数になる．また，$a = 0$ のときは**純虚数** (pure imaginary number) という．



E. 共役な複素数

$2 + 3i$ と $2 - 3i$ のように虚数部分の正負だけが異なる 2 数は，互いに**共役**（きょうやく） (conjugate) であるという．また，複素数 α と共役な複素数は $\overline{\alpha}$ と表わされる．

たとえば，$\alpha = 4 - 2i$ のとき $\overline{\alpha} = 4 + 2i$，$\beta = 3i$ のとき $\overline{\beta} = -3i$ である．実数は共役な値と等しい．

…… 後に見る (p.68) ように，（実数係数多項式の）方程式が虚数解の時，2 つの解は互いに共役である．

[*10] しばしば，$a + bi$ のうち bi を虚部と呼ぶこともある．

【例題 69】 以下の複素数について，問いに答えなさい．

$3+2i,\quad 4-i,\quad -2i,\quad 0,\quad 5i+1,\quad -1,\quad i$

a. 実部が 1 である数を答えなさい．　b. 虚部が 1 である数を答えなさい．
c. 実数をすべて挙げよ．　d. 虚数をすべて挙げよ．　e. 純虚数をすべて挙げよ．
f. すべての数について，共役な複素数を答えなさい．

【解答】 実部・虚部を全て書き出せば右欄外のようになる．

a. $\boldsymbol{5i+1}$　b. $\boldsymbol{i}$　c. $\boldsymbol{0,\ -1}$

d. $\boldsymbol{3+2i,\ 4-i,\ -2i,\ 5i+1,\ i}$　e. $\boldsymbol{-2i,\ i}$

f. $\overline{3+2i}=\boldsymbol{3-2i}$，$\overline{4-i}=\boldsymbol{4+i}$，$\overline{-2i}=\boldsymbol{2i}$，$\overline{0}=\boldsymbol{0}$

$\overline{5i+1}=\boldsymbol{-5i+1}$，$\overline{-1}=\boldsymbol{-1}$，$\overline{i}=\boldsymbol{-i}$

◀
	実部	虚部
$3+2i$	3	2
$4-i$	4	-1
$-2i$	0	-2
0	0	0
$5i+1$	1	5
-1	-1	0
i	0	1

F. 2 つの複素数が等しいとは

実部も虚部も等しいとき，2 つの複素数は等しいという．

複素数の相等

2 つの複素数 $\alpha=a_1+b_1i$，$\beta=a_2+b_2i$ が等しいことは，次で定義される．

$\alpha=\beta \iff$「$a_1=b_1$ かつ $a_2=b_2$」

【例題 70】 以下の複素数の等式が成り立つとき，実数 a，b，c，d，p，q の値を求めなさい．

1. $a+3i=3+bi$　2. $(c-1)+di=0$　3. $(p+q-3)+(p-2q)i=0$

【解答】

1. 実部を比べて $\boldsymbol{a=3}$，虚部を比べて $\boldsymbol{b=3}$
2. 実部を比べて $c-1=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{c=1}$，虚部を比べて $\boldsymbol{d=0}$
3. 実部を比べて $p+q-3=0$，虚部を比べて $p-2q=0$，これを連立して解けば $\boldsymbol{p=2,\ q=1}$．

◀ $p-2q=0$ から $p=2q$，$p+q-3=0$ に代入して $3q-3=0$ から $q=1$，$p=2$．

・・・ ここまで，2 次方程式の解から始めて複素数を導入した．2 次方程式の虚数解については，詳しくは p.52 を参照のこと．

2. 複素数の四則計算

複素数の計算は，i の文字式と思って計算し，$i^2 = -1$ を代入するだけでよい*11.

A. 複素数の加法・減法

たとえば，2 つの複素数 $3 + 4i$, $2 - 5i$ の加法・減法は次のようになる.

$$\begin{aligned}(3 + 4i) + (2 - 5i) &= 3 + 4i + 2 - 5i\\ &= 5 - i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3 + 4i) - (2 - 5i) &= 3 + 4i - 2 + 5i\\ &= 1 + 9i\end{aligned}$$

複素数の加法・減法

2 つの複素数 $\alpha = a_1 + b_1 i$, $\beta = a_2 + b_2 i$ について，足し算と引き算は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i\\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha - \beta &= a_1 + b_1 i - a_2 - b_2 i\\ &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i\end{aligned}$$

【例題 71】 a) $(2 + 4i) + (3 + 5i)$, b) $(-2 + i) + (3 - i)$, c) $(-3 - i) - (-1 - 3i)$ を計算しなさい.

【解答】

a)（与式）$= 2 + 4i + 3 + 5i = \mathbf{5 + 9i}$ b)（与式）$= -2 + i + 3 - i = \mathbf{1}$

c)（与式）$= -3 - i + 1 + 3i = \mathbf{-2 + 2i}$

B. 複素数の乗法

たとえば，2 つの複素数 $3 + 4i$, $2 - 5i$ の乗法は次のようになる.

$$\begin{aligned}(3 + 4i)(2 - 5i) &= 6 - 15i + 8i - 20i^2 \quad \leftarrow i^2 = -1 \text{ を代入できる}\\ &= 6 - 15i + 8i + 20 = 26 - 7i\end{aligned}$$

複素数の乗法

2 つの複素数 $\alpha = a_1 + b_1 i$, $\beta = a_2 + b_2 i$ について，掛け算は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}\alpha\beta = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 i^2 \quad \leftarrow \text{最後の項は，} i^2 = -1 \text{ に注意}\\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i\end{aligned}$$

【例題 72】 $\alpha = 2 + 3i$, $\beta = -5 + 6i$, $\gamma = 6i$ のとき， 1) $\alpha\beta$, 2) $\beta\gamma$, 3) $\gamma\alpha$ の値を計算しなさい.

【解答】

1) $\begin{aligned}\alpha\beta &= (2 + 3i)(-5 + 6i)\\ &= -10 + 12i - 15i - 18\\ &= \mathbf{-28 - 3i}\end{aligned}$

2) $\beta\gamma = (-5 + 6i)6i = \mathbf{-30i - 36}$

3) $\gamma\alpha = 6i(2 + 3i) = \mathbf{12i - 18}$

◀ $-18 + 12i$ と答えてもどちらでも良い

C. 複素数の乗法と展開の公式

展開の公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ などは，次のように応用できる．

$(3+2i)^2 = 9 + 2\cdot 3\cdot 2i - 4$ ←（２ｉ）^{2}＝－４に注意→ $(5+2i)(5-2i) = 25 - (-4)$

$= 5 + 12i$　　　　$= 29$

【例題 73】 $\alpha = 2+3i$, $\beta = 5-6i$, $\gamma = 5+6i$ のとき，1) α^2，2) β^2，3) $\beta\gamma$ の値を計算しなさい．

【解答】

1. $\alpha^2 = 4 + 12i - 9 = \mathbf{-5 + 12i}$
2. $\beta^2 = 25 - 60i - 36 = \mathbf{-11 - 60i}$
3. $\beta\gamma = (5-6i)(5+6i) = 25 - (-36) = \mathbf{61}$

【例題 74】 $\alpha = 3+4i$ とする．このとき，$\alpha + \overline{\alpha}$, $\alpha - \overline{\alpha}$, $\alpha\overline{\alpha}$ をそれぞれ計算せよ．

【解答】 $\overline{\alpha} = 3 - 4i$ であるから，$\alpha + \overline{\alpha} = (3+4i) + (3-4i) = \mathbf{6}$
$\alpha - \overline{\alpha} = (3+4i) - (3-4i) = \mathbf{8i}$，$\alpha\overline{\alpha} = (3+4i)(3-4i) = 9 + 16 = \mathbf{25}$

【練習 75：共役な 2 数の和・差・積】

p, q を実数とし，$\alpha = p + qi$ とする．以下の $\boxed{}$ に **p, q を用いた式**を入れ，
（　）には**「実数」「虚数」「純虚数」「正の数」「負の数」**のうち最も ふさわしい言葉を入れよ．

(1) $\alpha + \overline{\alpha}$ を計算すると $\boxed{\text{ア}}$ になり，必ず（ イ ）である．

(2) $\alpha - \overline{\alpha}$ を計算すると $\boxed{\text{ウ}}$ になり，$q \neq 0$ であれば，必ず（ エ ）である．

(3) $\alpha\overline{\alpha}$ を計算すると $\boxed{\text{オ}}$ になり，$\alpha \neq 0$ であれば必ず（ カ ）である．

【解答】

(1) $\alpha + \overline{\alpha} = (p+qi) + (p-qi) = \underline{\mathbf{2p}}_{(ア)}$ であり，<u>**実数**</u>$_{(イ)}$．

(2) $\alpha - \overline{\alpha} = (p+qi) - (p-qi) = \underline{\mathbf{2qi}}_{(ウ)}$ であり，$q \neq 0$ であれば<u>**純虚数**</u>$_{(エ)}$．

(3) $\alpha\overline{\alpha} = (p+qi)(p-qi) = p^2 - (qi)^2 = \underline{\mathbf{p^2 + q^2}}_{(オ)}$ であり，$\alpha \neq 0$ であれば<u>**正の数**</u>$_{(カ)}$．

◀ 実数の 2 乗は 0 以上

D. 複素数の除法

たとえば，$(2+3i)\div i=\dfrac{2+3i}{i}$，$(3+4i)\div(2-5i)=\dfrac{3+4i}{2-5i}$ であるが，**分母の有理化**によって，分母を実数にすることができる．

$$\frac{2+3i}{i}=\frac{(2+3i)i}{i\times i}=\frac{2i-3}{-1}=-2i+3$$
←分母と分子に i を掛けた

$$\frac{3+4i}{2-5i}=\frac{(3+4i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}$$
←分母と分子に $2+5i$ を掛けた（$2+5i$ は，分母 $2-5i$ と共役な数）

$$=\frac{6+15i+8i-20}{2^2-(5i)^2}=\frac{-14+23i}{4-(-25)}=\frac{-14+23i}{29}$$

複素数の除法

2 つの複素数 $\alpha=a_1+b_1i$，$\beta=a_2+b_2i$ について，割り算は次のように計算できる．

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$
←分母と共役な a_2-b_2i を，分母と分子の両方に掛けた

$$=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2}{a_2^2-(b_2i)^2}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

【例題 76】 次の計算をしなさい．

1. $\dfrac{1}{i}$　2. $\dfrac{1}{2+3i}$　3. $\dfrac{5-6i}{2+3i}$　4. $\dfrac{5+6i}{5-6i}$

【解答】

1. $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=\boldsymbol{-i}$

◀ 分母分子に $-i$ を掛けると，もっと簡単に解ける．

2. $(与式)=\dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{2-3i}{2^2+3^2}=\boldsymbol{\dfrac{2-3i}{13}}$

3. $(与式)=\dfrac{(5-6i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{10-15i-12i-18}{2^2+3^2}=\boldsymbol{\dfrac{-8-27i}{13}}$

4. $(与式)=\dfrac{(5+6i)^2}{(5-6i)(5+6i)}=\dfrac{25+60i-36}{25+36}=\boldsymbol{\dfrac{-11+60i}{61}}$

◀ 分子は $(5+6i)(5+6i)=(5+6i)^2$ になる

【練習 77：複素数の計算〜その１〜】

次の式を計算しなさい．

(1) $(1+i)^2+(1-i)^2$　(2) $(1+i)(1+2i)(1+3i)$　(3) $\dfrac{2-3i}{3+i}+\dfrac{3-i}{2-i}$　(4) $\dfrac{1}{1+3i}+\dfrac{1}{1-3i}$

【解答】

(1)（与式）$= 1+2i-1+1-2i-1 = \mathbf{0}$

◀ 2 乗の和が 0 になっている．実数ではありえない．

(2)（与式）$= (1+2i+i-2)(1+3i)$

$= (3i-1)(3i+1) = (3i)^2-1^2 = -9-1 = \mathbf{-10}$

(3)（与式）$= \dfrac{(2-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} + \dfrac{(3-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$= \dfrac{6-2i-9i-3}{9+1} + \dfrac{6+3i-2i-(-1)}{4+1}$

$= \dfrac{3-11i}{10} + \dfrac{7+i}{5}$

$= \dfrac{3-11i+2(7+i)}{10} = \mathbf{\dfrac{17-9i}{10}}$

◀ 通分すると分母の計算が大変になるので，有理化してから足す方が，計算は簡単に済むことが多い．

(4)（与式）$= \dfrac{1-3i+1+3i}{1-(-9)} = \dfrac{2}{10} = \mathbf{\dfrac{1}{5}}$

◀ この場合は，通分しても分母が簡単に計算できるので，通分して計算する．

E.　負の数の根号を含む計算

たとえば，$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$ のような計算をするときは，必ず i を含む値に直してから計算する．

$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3} = \sqrt{2}i\times\sqrt{3}i = \sqrt{6}i^2 = -\sqrt{6}$

なぜなら，$a<0,\ b<0$ のときは $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab},\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ が成り立つとは限らないからである[*12]．

【例題 78】 a) $\sqrt{-12}\times\sqrt{-3}$,　b) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$,　c) $\dfrac{\sqrt{-6}\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}$ をできるだけ簡単な値にしなさい．

【解答】

a)（与式）$= 2\sqrt{3}i\times\sqrt{3}i = 6i^2 = \mathbf{-6}$

b)（与式）$= \dfrac{3\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}i} = \dfrac{3i}{i^2} = \mathbf{-3i}$

c)（与式）$= \dfrac{\sqrt{6}i\times\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i} = \dfrac{2\cancel{\sqrt{3}}i}{\cancel{\sqrt{3}}} = \mathbf{2i}$

【練習 79：複素数の計算〜その２〜】

根号の中に虚数を書くことは普通はしない[*13]．しかし，2 乗して虚数になる数は必ず存在する．

(1) $(a+bi)^2=2i$ を満たす実数 $a,\ b$ の値を求め，2 乗して $2i$ になる複素数 z を答えよ．

(2) 発展　$z^2 = 2+2\sqrt{3}i$ を満たす複素数 z を求めよ．

*12 たとえば，次のような計算は間違いである．$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}\neq\sqrt{(-2)\times(-3)}=\sqrt{6}$

*13 たとえば，$\sqrt{i}$ のような書き方はしない．

1. 2次方程式の解の公式と判別式

A. 2次方程式の「虚数解」

たとえば，$x^2 = -4$ のような2次方程式も，$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$ という虚数解をもつ．

【例題 80】 2次方程式　a) $x^2 = -2$,　b) $x^2 = -9$,　c) $(x+1)^2 = -5$　を解きなさい．

【解答】

a) $x = \pm\sqrt{-2} = \boldsymbol{\pm\sqrt{2}i}$　　b) $x = \pm\sqrt{-9} = \boldsymbol{\pm 3i}$

c) $x + 1 = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}i$ であるから，$\boldsymbol{x = -1 \pm \sqrt{5}i}$

B. 2次方程式の解の公式

複素数の範囲で考えると，2次方程式は必ず解をもつ．

2次方程式の解の公式

a, b, c が実数ならば，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ で求められる[*14].

（証明） $ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \dfrac{b}{a}x = -\dfrac{c}{a}$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \left(\begin{array}{l}\text{ただし，} b^2 - 4ac < 0 \\ \text{の場合は虚数になる}\end{array}\right)$$

$$\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \blacksquare$$

【例題 81】 2次方程式　a) $x^2 + 3x + 4 = 0$,　b) $2x^2 + 6x + 5 = 0$,　c) $x^2 - 4x = -5$　を解きなさい．

【解答】

a) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2}}$

b) $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{4} = \dfrac{-6 \pm 2i}{4} = \boldsymbol{\dfrac{-3 \pm i}{2}}$

c) $x^2 - 4x + 5 = 0$ と変形して解けば $\boldsymbol{x = 2 \pm i}$

[*14] 2次方程式の解が一つの式でまとめられることは，歴史的には画期的なことである．虚数解どころか，負の解すら認められていなかった，たとえば1000年ほど前のインドでは，2次方程式は何種類にも分類され，論じられていた．

C. 2 次方程式の判別式

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ において，$b^2 - 4ac$ は**判別式** (discriminant) と呼ばれ D で表わす．
$D = b^2 - 4ac$ の符号によって，解は次のように分類できる．

$D > 0 \Leftrightarrow$ 実数解 2 個，　$D = 0 \Leftrightarrow$ **重解** (multiple solution)（実数解），　$D < 0 \Leftrightarrow$ 虚数解 2 個

b が偶数の場合，2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は $\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$ を用いて分類できる．

【例題 82】 次の 2 次方程式について，実数解が何個，虚数解が何個あるか，それぞれ答えなさい．

1. $x^2 - 5x + 2 = 0$　　2. $x^2 - 4x + 4 = 0$　　3. $x^2 - 3x + 8 = 0$

【解答】

1. $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 17 > 0$ より，**実数解は 2 個，虚数解は 0 個．**
2. $\dfrac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 0$ より重解となって**実数解は 1 個，虚数解は 0 個．**
3. $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -23 < 0$ より，**実数解は 0 個，虚数解は 2 個．**

【練習 83：2 次方程式の解の分類】

(1) 実数 a の値によって，2 次方程式 $x^2 + (2a-1)x + a^2 - 2a + 4 = 0$ の解を分類しなさい．

(2) 2 次方程式 $4x^2 + 2(k-1)x - k + 4 = 0$ が実数解を持つための，実数 k の条件を求めよ．

【解答】

(1) 与えられた方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (2a-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 2a + 4) \\ &= 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 + 8a - 16 \\ &= 4a - 15 \end{aligned}$$

$D > 0 \Leftrightarrow 4a - 15 > 0$ を解いて $a > \dfrac{15}{4}$ であるから

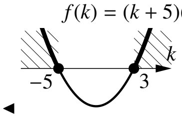
$a > \dfrac{15}{4}$ のとき，実数解 2 個，$a = \dfrac{15}{4}$ のとき，重解　◀ $a > \dfrac{15}{4}$ の > を = に代えた

$a < \dfrac{15}{4}$ のとき，虚数解 2 個　◀ $a > \dfrac{15}{4}$ の > を逆にした

(2) $D \geqq 0$ であればよいので　◀ $D > 0$ または $D = 0$ であればよい

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (k-1)^2 - 4(-k+4) \\ &= k^2 - 2k + 1 + 4k - 16 \\ &= k^2 + 2k - 15 \geqq 0 \\ \Leftrightarrow &\ (k+5)(k-3) \geqq 0 \end{aligned}$$

◀ または $D = 4k^2 + 8k - 60$



これを解いて，**$k \leqq -5,\ 3 \leqq k$** であればよい．　◀

2. 虚数を含む因数分解

数学 I(p.224) でも学んだ，2 次式の因数分解について考えよう．

i) 因数分解を利用

$x^2-3x-18=0$

$(x-6)(x+3)=0$ ←左辺の因数分解→

$x=6,-3$ ←方程式の解→

ii) 解の公式を利用（実数解）

$x^2-5x-3=0$

？？？

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ ←解の公式で求めた→

iii) 解の公式を利用（虚数解）

$x^2-5x+7=0$

？？？

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$

i) の因数分解の形から，ii), iii) は右下のように因数分解できると予想できる．

i) $x^2-3x-18$

$=(x-\underbrace{6}_{\text{解の1つ}})(x-\underbrace{(-3)}_{\text{もう1つの解}})$

ii) x^2-5x-3

$=\left(x-\underbrace{\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}}_{\text{解の1つ}}\right)\left(x-\underbrace{\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}}_{\text{もう1つの解}}\right)$

iii) x^2-5x+7

$=\left(x-\underbrace{\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}}_{\text{解の1つ}}\right)\left(x-\underbrace{\dfrac{5-\sqrt{3}i}{2}}_{\text{もう1つの解}}\right)$

これらは実際に正しく[*15]，一般に，次の事実が成り立つ．

2 次式の因数分解（虚数も含む）

2 次式 ax^2+bx+c について，$ax^2+bx+c=0$ の解を α,β としたとき，次の因数分解ができる．

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ←x^2 の係数を合わせていることに注意[*16]

この事実を厳密な形で証明するのは難しい．詳しくは p.75 を参照のこと．

【例題 84】 x^2-5x+7，x^2+2x-5，$2x^2-4x+3$ を因数分解せよ．（因数には虚数を含んでよい）

【解答】 $x^2-5x+7=0$ を解くと $x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-28}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$ なので

$$\boldsymbol{x^2-5x+7=\left(x-\frac{5+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{3}i}{2}\right)}$$

$x^2+2x-5=0$ の解は $x=-1\pm\sqrt{6}$ なので

◀ $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+20}}{2}$

$x^2+3x-5=\left\{x-\left(-1+\sqrt{6}\right)\right\}\left\{x-\left(-1-\sqrt{6}\right)\right\}=\boldsymbol{\left(x+1-\sqrt{6}\right)\left(x+1+\sqrt{6}\right)}$

$2x^2-4x+3=0$ の解は $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}i}{2}$ なので

◀ $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-24}}{4}$

$$\boldsymbol{2x^2-4x+3=2\left(x-\frac{2+\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{2}i}{2}\right)}$$

[*15] たとえば iii) について，展開して確かめてみると

$$\left(x-\frac{5+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{3}i}{2}\right)=x^2-\left(\frac{5+\sqrt{3}i}{2}+\frac{5-\sqrt{3}i}{2}\right)x+\left(\frac{5+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{3}i}{2}\right)$$
$$=x^2-\frac{5\cancel{+\sqrt{3}i}+5\cancel{-\sqrt{3}i}}{2}x+\frac{25-(-3)}{4}=x^2-5x+7$$

[*16] $ax^2+bx+c=0$ と $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ は 2 解が等しいので $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)$ となる．この両辺を a 倍すればよい．

3. 2次方程式の解と係数の関係

A. 解と係数の関係とは

方程式の解と，係数の間には重要な関係がある．たとえば

$x^2-7x+10=0$　←「足して−7，掛けて+10になる2数」を探す

$\Leftrightarrow\ (x-2)(x-5)=0$　←それは−2と−5

$\Leftrightarrow\ x=2,\ 5$　←結果，解は「足して−(−7)，掛けて+10になる2数」になっている

となるから，2次方程式の場合は次の関係が成り立ち，**解と係数の関係** (Viète's Formula) と言われる．

解と係数の関係（2次方程式の場合）

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2解を α, β とするとき，$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ が成り立つ．
特に，$a=1$ のときは，x の係数 $b=-(\alpha+\beta)$，定数項 $c=\alpha\beta$ を満たす．

α, β は実数解でも虚数解でも，上の関係は成立する．

（証明）α, β は2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2解なので，恒等式 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ が成り立つ．この右辺を展開して

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\{x^2+(-\alpha-\beta)x+\alpha\beta\} \\ &= ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta \end{aligned}$$

x の係数から $b=-a(\alpha+\beta)\Leftrightarrow -\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta$，定数項から $c=a\alpha\beta\Leftrightarrow\dfrac{c}{a}=\alpha\beta$ が示される． ■

【例題 85】 $x^2-4x+2=0$ の2解を α, β とすると，解と係数の関係から $\alpha+\beta=\boxed{\text{ア}}$, $\alpha\beta=\boxed{\text{イ}}$ であり，$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ から，$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{ウ}}$ と分かる．また，$(\alpha-\beta)^2=\boxed{\text{エ}}$ である．さらに，$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\boxed{\text{オ}})$ と因数分解できるから $\alpha^3+\beta^3=\boxed{\text{カ}}$ になる．

【解答】 $x^2-4x+2=0$ の2解を α, β とすると，解と係数の関係から
$\alpha+\beta=-(-4)=\underline{\mathbf{4}}_{(\text{ア})}$, $\alpha\beta=\underline{\mathbf{2}}_{(\text{イ})}$ であり

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$$
$$\Leftrightarrow\ 4^2=\alpha^2+\beta^2+2\cdot2\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=16-4=\underline{\mathbf{12}}_{(\text{ウ})}$$

また，$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=12-2\cdot2=\underline{\mathbf{8}}_{(\text{エ})}$ である．さらに，
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\underline{\boldsymbol{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}}_{(\text{オ})})=4(12-2)=\underline{\mathbf{40}}_{(\text{カ})}$ になる．

◀【カの別解】

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow 4^3=\alpha^3+\beta^3+3\cdot2\cdot4$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3=64-24=40$

【練習 86：解と係数の関係（2 次方程式）】

(1) 2 次方程式 $x^2+5x+5=0$ の 2 解を α, β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ の値を求めよ．

(2) 2 次方程式 $2x^2+6x+3=0$ の 2 解を α, β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ．

【解答】

(1) 解と係数の関係から $\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=5$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= (-5)^2-2\cdot 5=\mathbf{15}\\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2 &= \alpha\beta(\alpha+\beta)\\ &= 5\cdot(-5)=\mathbf{-25}\end{aligned}$$

(2) 解と係数の関係から $\alpha+\beta=-\dfrac{6}{2}=-3$, $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= (-3)^2-2\cdot\frac{3}{2}=\mathbf{6}\\ \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\\ &= (-3)\cdot\left(6-\frac{3}{2}\right)=-3\cdot\frac{9}{2}=\mathbf{-\frac{27}{2}}\end{aligned}$$

B. 2 解から 2 次方程式を作る

たとえば，$x=2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ を解に持つ，x^2 の係数が 1 である 2 次方程式は，解と係数の関係から

x の係数は $-\left(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}\right)=-4$,　定数項は $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=1$

となるので，$x^2-4x+1=0$ である．

【例題 87】

1. $x=1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$ を 2 解にもつ，x^2 の係数が 1 の 2 次方程式を求めよ．
2. $3x^2+4x+2=0$ の 2 解を α, β とする．$(\alpha+1)+(\beta+1)=\boxed{\text{ア}}$, $(\alpha+1)(\beta+1)=\boxed{\text{イ}}$ であるから，$\alpha+1, \beta+1$ を 2 解にもち，係数がすべて整数の 2 次方程式は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

【解答】

1. x の係数は $-(1+\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i)=-2$，定数項は $\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)=1-(-3)=4$ であるから，$\boldsymbol{x^2-2x+4=0}$ が求める 2 次方程式である．
2. 解と係数の関係から $\alpha+\beta=-\dfrac{4}{3}$, $\alpha\beta=\dfrac{2}{3}$ であるから

$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=-\dfrac{4}{3}+2=\underline{\mathbf{\dfrac{2}{3}}}_{(\text{ア})}$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}+1=\underline{\mathbf{\dfrac{1}{3}}}_{(\text{イ})}$

であるから，$\alpha+1, \beta+1$ を 2 解にもつ 2 次方程式は，

$x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}=0 \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{3x^2-2x+1=0}}_{(\text{ウ})}$ である．

◀ 係数が整数になるよう，両辺に 3 を掛けた．

【練習 88：2 解から 2 次方程式を作る】

$2x^2-3x+5=0$ の 2 解を α, β とするとき，以下のものを 1 つ求めよ．

(1) $\alpha^2\beta,\ \alpha\beta^2$ を 2 解とする 2 次方程式　　(2) $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta}$ を 2 解とする 2 次方程式

4. 2 次方程式の解の配置

A. 解の正負を決める条件

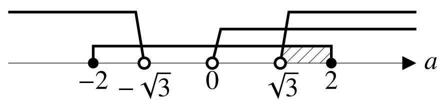
2 次方程式 $x^2-ax+(a^2-3)=0$ が正の解だけをもつような a の条件を，『解と係数の関係』(p.55) を用いて求めてみよう．

……この問題は，数学 I(p.224) でも学んだように，2 次関数を用いて解くこともできる．

$x^2-ax+(a^2-3)=0$ の解を α, β としたとき $\alpha>0, \beta>0$ となる a の条件を求めればよいが，これは

$$\begin{cases}\alpha>0\\ \beta>0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta>0\\ \alpha\beta>0\\ D\geqq 0 \leftarrow \alpha,\beta\text{は実数解なので}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=a>0\\ \alpha\beta=a^2-3>0\\ D=a^2-4(a^2-3)\geqq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\ a<-\sqrt{3},\quad \sqrt{3}<a\\ -2\leqq a\leqq 2\end{cases}$$

と分かる．これらを数直線上に表わせば右のようになるので，3 式の共通範囲である $\sqrt{3}<a\leqq 2$ が求める条件になる．



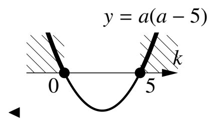
【例題 89】 以下の（　）に「<」「≦」「>」「≧」のいずれかを，□ に a の式・条件を入れなさい．
$x^2-2(a-1)x+3a+1=0$ が 2 つの異なる負の解をもつ必要十分条件は，2 解 α, β について $\alpha+\beta$(ア)0, $\alpha\beta$(イ)0, D(ウ)0 である．ここで，$\alpha+\beta=$ $\boxed{\text{エ}}$, $\alpha\beta=$ $\boxed{\text{オ}}$ であるから，これらを連立して解くと $\boxed{\text{カ}}$ と求められる．

【解答】 2 解が負になる必要十分条件は

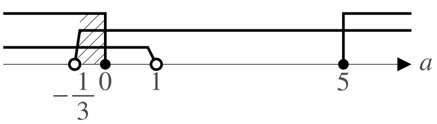
(ア) $\boldsymbol{\alpha+\beta<0}$, (イ) $\boldsymbol{\alpha\beta>0}$, (ウ) $\boldsymbol{D\geqq 0}$

である．解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\ _{(エ)}\mathbf{2(a-1)}<0\\ \alpha\beta=\ _{(オ)}\mathbf{3a+1}>0\\ \dfrac{D}{4}=(a-1)^2-(3a+1)\geqq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<1\\ a>-\dfrac{1}{3}\\ a^2-5a\geqq 0 \quad \therefore a\leqq 0,\ 5\leqq a\end{cases}$$



であるから，これらを連立して



となって，(カ) $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}<a\leqq 0}$.

B.　解の範囲を決める条件

2 次方程式 $x^2 - ax + (a+3) = 0$ の解が，異なる 2 つの解をもち，どちらも 2 より大きくなるような a の条件を，『解と係数の関係』(p.55) を用いて求めてみよう．

$x^2 - ax + (a+3) = 0$ の解 α, β について，$\alpha > 2, \beta > 2$ が成り立てばよく，次のように考える[*17]．

$$\begin{cases} \alpha > 2 \\ \beta > 2 \\ \alpha \neq \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - 2 > 0 \\ \beta - 2 > 0 \\ D > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha-2)+(\beta-2) > 0 \cdots\cdots ① \\ (\alpha-2)(\beta-2) > 0 \cdots\cdots ② \\ D = a^2 - 4(a+3) > 0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

←$\alpha-2$も$\beta-2$も正であることは「足しても掛けても正」と同値

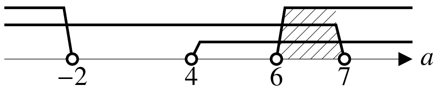
←$\alpha \neq \beta$なので2つの異なる実数解

解と係数の関係から $\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 3$ であるから

① $\Leftrightarrow \alpha + \beta > 4 \Leftrightarrow a > 4$

② $\Leftrightarrow \alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 4 > 0$
　$\Leftrightarrow (a+3) - 2a + 4 > 0 \Leftrightarrow 7 > a$

③ $\Leftrightarrow a^2 - 4a - 12 > 0$
　$\Leftrightarrow (a-6)(a+2) > 0 \Leftrightarrow a < -2,\ 6 < a$



これらを数直線上に表わせば上のようになるので，3 式の共通範囲である $6 < a < 7$ が求める条件になる．

【練習 90：2 次方程式の解の配置〜その１〜】

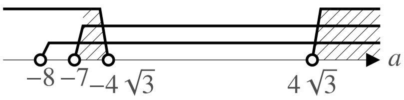
2 次方程式 $4x^2 + ax + 3 = 0$ が，1 より小さい 2 つの異なる解をもつとき，a の範囲を求めよ．

【解答】　$4x^2 + ax + 3 = 0$ の 2 解 α, β について解が 2 つの異なる実数なので判別式 $D > 0$ が成り立つ．また，$\alpha - 1 < 0,\ \beta - 1 < 0$ から

$$\begin{cases} \alpha - 1 < 0 \\ \beta - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha-1)+(\beta-1) < 0 \\ (\alpha-1)(\beta-1) > 0 \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta < 2 \\ \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 > 0 \\ D > 0 \end{cases}$$

$D = a^2 - 48$ であり，解と係数の関係から $\alpha + \beta = -\dfrac{a}{4},\ \alpha\beta = \dfrac{3}{4}$ なので

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{4} < 2 \\ \dfrac{3}{4} + \dfrac{a}{4} + 1 > 0 \\ a^2 - 48 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -8 \\ a > -7 \\ a < -4\sqrt{3},\ 4\sqrt{3} < a \end{cases}$$ と分かる．



数直線上に表わせば左のようになるので，3 式の共通範囲である **$-7 < a < -4\sqrt{3},\ 4\sqrt{3} < a$** が求める条件になる．

◂ $-7 < -4\sqrt{3}$ に注意

ここまで学んだ「解と係数の関係」を用いた方法と，次で学ぶ「2 次関数」を用いた方法には，一長一短がある．問題によっては「解と係数の関係」であれば簡単に解くことができ，いくつかの問題は「2 次関数」を用いないと解くことが困難である．詳しくは p.76 を参照のこと．

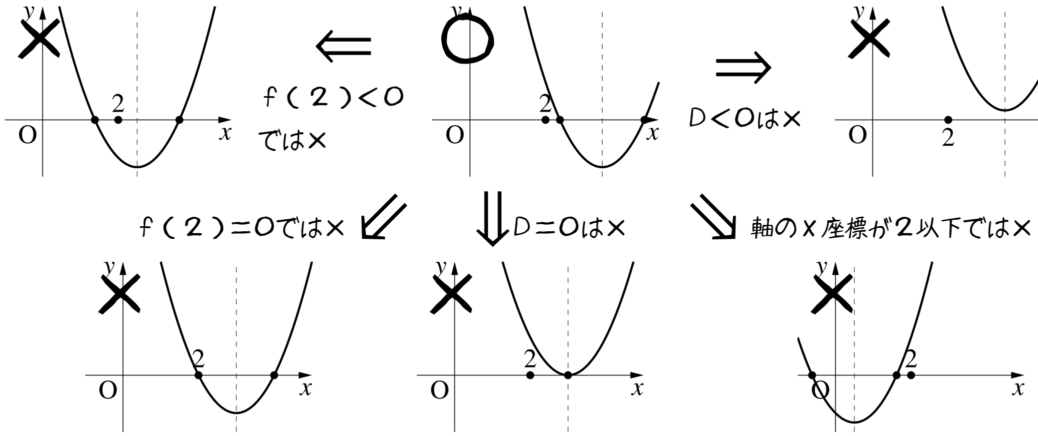
---

*17　「$\alpha > 2,\ \beta > 2$」と「$\alpha + \beta > 2 + 2 = 4,\ \alpha\beta > 2 \times 2 = 4$」は必要十分条件ではない．たとえば，$\alpha = 8,\ \beta = 1$ のとき，$\alpha + \beta > 4,\ \alpha\beta > 4$ は満たすが，$\alpha > 2,\ \beta > 2$ は満たさない．

C. 2 次関数による解法

ここまで取り上げた「2 次方程式の解の配置」について，数学 I で学んだ 2 次関数のやり方 (p.224) を復習しよう．

2 次方程式 $x^2 - ax + (a^2 - 3) = 0$ が，異なる 2 つの解をもち，どちらも 2 より大きくなるような a の条件は，「$y = f(x) = x^2 - ax + (a^2 - 3)$ と x 軸が，$2 < x$ の範囲の 2 点で交わる条件」と一致するので，2 次関数を用いて解くこともできた．つまり，次のようにグラフを描いて，満たすべき条件を考える．

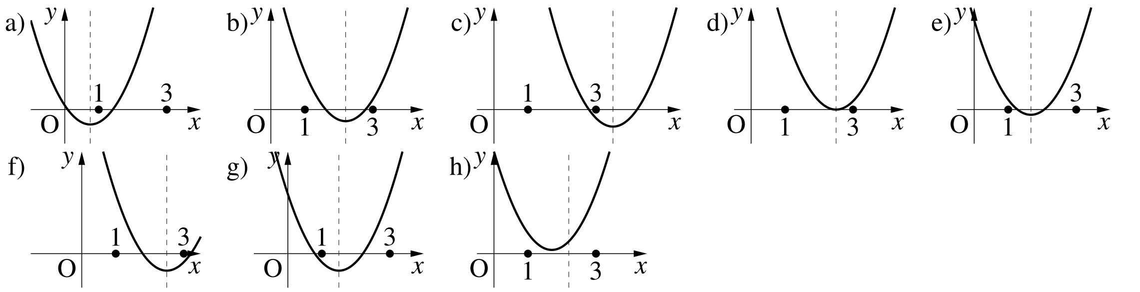


結果，$D > 0$,（軸の x 座標）> 2, $f(2) > 0$ を満たせばよいと分かる．これらの不等式を解いて共通部分を求めれば，$6 < a < 7$ が求める条件であると分かる．

【練習 91：2 次方程式の解の配置～その２～】

2 次方程式 $f(x) = x^2 - 2ax + 3 = 0$ の 2 解 α, β が $1 < \alpha < \beta < 3$ を満たす．

(1) $y = f(x)$ のグラフとして適切なものを，下からすべて選べ．　(2) 定数 a の範囲を求めよ．



【解答】

(1) グラフ $y = f(x)$ が，x 軸と $1 < x < 3$ で 2 回交わっている **b), e)**.

(2) 以下の条件がすべて成り立てばよいと分かる．

$D > 0$，$1 <$（軸の x 座標）< 3，$f(1) > 0$，$f(3) > 0$

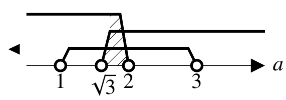
$\frac{D}{4} = a^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow a < -\sqrt{3}$，$\sqrt{3} < a$

$f(x) = (x - a)^2 - a^2 + 3$ から $1 < a < 3$

$f(1) = 1 - 2a + 3 > 0 \Leftrightarrow 4 > 2a$ から $a < 2$

$f(3) = 9 - 6a + 3 > 0 \Leftrightarrow 12 > 6a$ から $a < 2$

よって，右欄外の数直線を書いて，$\boldsymbol{\sqrt{3} < a < 2}$ と分かる．



【練習 92：2 次方程式の解の配置〜その３〜】

2 次方程式 $x^2+2kx+k+12=0$ が，以下の条件を満たすときの k の条件を求めよ．

(1) 2 つの異なる正の解を持つ　　(2) 実数解を持ち，実数解が全て 1 以上である

【解答】　2 次方程式の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とする．

(1) （解と係数の関係を用いた解法）2 解 α,β は異なる実数解なので

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+12)>0 \Leftrightarrow k^2-k-12>0$$
$$\Leftrightarrow (k-4)(k+3)>0 \quad \therefore k<-3,\ 4<k$$

また，$\alpha>0,\ \beta>0$ なので $\alpha+\beta=-2k>0 \quad \therefore k<0$

$$\alpha\beta=k+12>0 \quad \therefore k>-12$$

以上を連立して，$\boldsymbol{-12<k<-3}$.

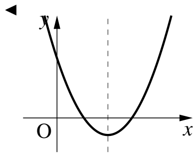
（2 次関数を用いた解法）右欄外のようなグラフになるには

$D>0$,（軸の x 座標）>0, $f(0)>0$

を満たせば良い．それぞれ解くと

$$D>0 \Leftrightarrow k<-3,\ 4<k$$
$$（軸の\ x\ 座標）=-k>0 \Leftrightarrow k<0$$
$$f(0)=k+12>0 \Leftrightarrow k>-12$$

以上を連立して $\boldsymbol{-12<k<-3}$ を得る．



(2) （解と係数の関係を用いた解法）2 解 $\alpha,\ \beta$ は実数なので

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+12)\geqq 0 \Leftrightarrow k^2-k-12\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow (k-4)(k+3)\geqq 0 \quad \therefore k\leqq -3,\ 4\leqq k$$

また，$\alpha-1\geqq 0,\ \beta-1\geqq 0$ なので

$$(\alpha-1)+(\beta-1)\geqq 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta\geqq 2$$
$$\Leftrightarrow -2k\geqq 2 \quad \therefore k\leqq -1$$
$$(\alpha-1)(\beta-1)\geqq 0 \Leftrightarrow \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow k+12+2k+1\geqq 0 \quad \therefore k\geqq -\frac{13}{3}$$

以上を連立すれば $\boldsymbol{-\frac{13}{3}\leqq k\leqq -3}$.

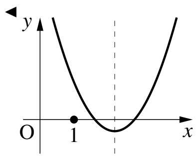
（2 次関数を用いた解法）右欄外のようなグラフになるには

$D\geqq 0$,（軸の x 座標）$\geqq 1$, $f(1)\geqq 0$

を満たせば良い．それぞれ解くと

$$D\geqq 0 \Leftrightarrow k\leqq -3,\ 4\leqq k$$
$$（軸の\ x\ 座標）=-k\geqq 1 \Leftrightarrow k\leqq -1$$
$$f(1)=1+2k+k+12\geqq 0 \Leftrightarrow k\geqq -\frac{13}{3}$$

以上を連立して $\boldsymbol{-\frac{13}{3}\leqq k\leqq -3}$ を得る．



【㊇㊏ 93：2 次方程式の解の配置〜その４〜】

$4x^2-3ax+2a-1=0$ の 2 解 $\alpha,\ \beta$ について，$-1<\alpha<0<\beta<1$ であるような条件を求めよ．

1. 組立除法

1 次式で割る多項式の割り算 (p.16)，たとえば $(x^3-3x^2-10x+20)\div(x-2)$ は**組立除法**で計算できる．

(I) 組立除法

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & & 2 & -2 & -24 \\ \hline
 & 1 & -1 & -12 & \boxed{-4}
\end{array}$$

(II) 係数だけを書くやり方 (p.18)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & -1 & -12 & \\ \hline
1\ -2\ ) & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & 1 & -2 & & \\ \hline
 & & -1 & -10 & \\
 & & -1 & 2 & \\ \hline
 & & & -12 & 20 \\
 & & & -12 & 24 \\ \hline
 & & & & -4
\end{array}$$

(III) 普通のやり方 (p.16)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -x & -12 & \\ \hline
x-2\ ) & x^3 & -3x^2 & -10x & +20 \\
 & x^3 & -2x^2 & & \\ \hline
 & & -x^2 & -10x & \\
 & & -x^2 & +2x & \\ \hline
 & & & -12x & +20 \\
 & & & -12x & +24 \\ \hline
 & & & & -4
\end{array}$$

組立除法のやり方

$$\begin{array}{c|cccc}
\boxed{2} & 1 & -3 & -10 & 20 \\ \hline
\end{array}$$

←多項式の係数を書き並べる．

一番左は，$x-2=0$ を満たす $x=2$ を書く．

$\Downarrow$

順に，$\times 2$ を掛けた結果を右上に書き，縦の2つを足して下に書く．

$$\begin{array}{c|cccc}
\boxed{2} & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & \downarrow\text{下へ下ろす} & & & \\ \hline
 & 1 & & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|cccc}
\boxed{2} & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & \times 2\nearrow & 2\downarrow\text{足す} & & \\ \hline
 & 1 & -1 & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|cccc}
\boxed{2} & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & & 2 \ \times 2\nearrow & -2\downarrow\text{足す} & \\ \hline
 & 1 & -1 & -12 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|cccc}
\boxed{2} & 1 & -3 & -10 & 20 \\
 & & 2 & -2 \ \times 2\nearrow & -24\downarrow\text{足す} \\ \hline
 & 1 & -1 & -12 & \boxed{-4}
\end{array}$$

商 $\boldsymbol{x^2-x-12}$，余り $\boldsymbol{-4}$

組立除法の仕組みについては，p.76 を参考のこと．

a が分数であっても，組立除法を用いることができる．たとえば，$F(x)=3x^3+2x^2-4x+2$ のとき，$F(x)\div\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$ は右のようになり

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{3} & 3 & 2 & -4 & 2 \\
 & & 1 & 1 & -1 \\ \hline
 & 3 & 3 & -3 & \boxed{1}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
3x^3+2x^2-4x+1 &= \left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+3x-3)+1 \\
&= \left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot 3(x^2+x-1)+1=(3x-1)(x^2+x-1)+1
\end{aligned}$$

【例題 94】 次の割り算を組立除法で行い，商と余りを答えなさい．

1. $(x^3+3x^2-2x+1)\div(x-2)$
2. $(x^3-x^2+1)\div(x-3)$
3. $(4x^3+6x^2-1)\div(2x+1)$

【解答】

1. 商 $\boldsymbol{x^2+5x+8}$，余り **17**

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\
 & & 2 & 10 & 16 \\ \hline
 & 1 & 5 & 8 & \boxed{17}
\end{array}$$

2. 商 $\boldsymbol{x^2+2x+6}$，余り **19**

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
 & & 3 & 6 & 18 \\ \hline
 & 1 & 2 & 6 & \boxed{19}
\end{array}$$

3.

$$\begin{array}{c|cccc}
-\frac{1}{2} & 4 & 6 & 0 & -1 \\
 & & -2 & -2 & 1 \\ \hline
 & 4 & 4 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
4x^3+6x^2+x-1 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)(4x^2+4x-2) \\
&= (2x+1)(2x^2+2x-1)
\end{aligned}$$

商 $\boldsymbol{2x^2+2x-1}$，余り **0**

2. 因数定理

A. 因数定理とは

『剰余の定理』(p.29) において，余りが 0 になる場合を**因数定理** (factor theorem) という.

因数定理

1. 「$F(x)$ が $x-a$ で割り切れる」 $\Longleftrightarrow$ 「$F(a)=0$」
2. 「$F(x)$ が $ax-b$ で割り切れる」 $\Longleftrightarrow$ 「$F\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$」

（証明）1. は 2. の特別な場合なので，2. のみを示せばよい.
$f(x)$ を $ax-b$ で割った余りは $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$ になった（p.29）ので，「$F(x)$ が $ax-b$ で割り切れる」 $\Longleftrightarrow$ 「$F(x)$ を $ax-b$ で割った余りは 0」 $\Longleftrightarrow$ 「$F\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$」となって示された. ■

B. 高次式の因数分解

3 次式，4 次式などの因数分解には，因数定理を用いることが多い.

たとえば，$F(x)=x^3-3x^2-10x+24$ を考える．これは，$F(2)=0$ なので $F(x)\div(x-2)$ は割り切れる．実際，割り算をすれば右のようになって $F(x)=(x-2)(x^2-x-12)$ と分かる．さらに因数分解して，$F(x)=(x-2)(x+3)(x-4)$ とわかる.

2	1	−3	−10	24
		2	−2	−24
	1	−1	−12	0

【例題 95】 次の割り算は割り切れるか．割り切れるならば，有理数の範囲で因数分解せよ.

1. $(x^3-2x^2-5x+6)\div(x-1)$　2. $(x^3-2x^2-5x+7)\div(x-1)$　3. $(x^3-2x^2-7x+8)\div(x-1)$

【解答】

1. $x=1$ のとき，$x^3-2x^2-5x+6=0$ なので**割り切れる**．右欄外のように割り算をして
$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)=\boldsymbol{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

1	1	−2	−5	6
		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

2. $x=1$ のとき，$x^3-2x^2-5x+7=1$ なので**割り切れない**.
3. $x=1$ のとき，$x^3-2x^2-7x+8=0$ なので**割り切れる**．右欄外のように割り算をして
$$x^3-2x^2-7x+8=\boldsymbol{(x-1)(x^2-x-8)}$$

1	1	−2	−7	8
		1	−1	−8
	1	−1	−8	0

C. $F(a)=0$ となる a の探し方

たとえば，$F(x)=x^3+2x^2-2x+3$ の因数分解を考えるとき，$F(2)=0$ になることはありえない．なぜなら，$F(x)=x^3+2x^2-2x+3=(x-2)Q(x)$ と割り切れれば，（$F(x)$ の定数項）$=3=(-2)\times$（$Q(x)$ の定数項）から $Q(x)$ の定数項が $\dfrac{3}{2}$ と整数でなくなってしまう[*18]．

上の場合，$F(a)=0$ となる a は，定数項 $+3$ の約数 ±1，±3 の中から探せば良い．

一般に，次のことが成り立つ．

$F(a)=0$ となる a の探し方

係数がすべて整数の多項式 $F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ を考える．

$F(a)=0$ となる有理数 a は

1. まず，$F(x)$ の定数項 a_0 の約数の中から探す（負数もあり得る）．
   $F(x)$ の最高次の係数 $a_n=1$ のとき，この中になければ $F(a)=0$ となる有理数 a は存在しない．
2. 次に，$a=\pm\dfrac{a_0\text{ の約数}}{a_n\text{ の約数}}$ から探す．
   これで見つからなければ，$F(a)=0$ となる有理数 a は存在しない．

この事実を厳密に証明するのは難しい．p.77 を参照のこと．

【例題 96】 次の式を有理数の範囲で因数分解しなさい．

1. x^3-2x^2-2x-3
2. x^3-4x^2-4x-5
3. $2x^3+3x^2-4x+1$

【解答】

1. （与式）$=\boldsymbol{(x-3)(x^2+x+1)}$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -2 & -3 \\ & & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

◀定数項は -3 なので，$x=1,-1,3,-3$ のときだけ，代入すればよい．

2. （与式）$=\boldsymbol{(x-5)(x^2+x+1)}$

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -4 & -4 & -5 \\ & & 5 & 5 & 5 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

◀定数項は -5 なので，$x=1,-1,5,-5$ のときだけ，代入すればよい．

3. （与式）$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(2x^2+4x-2)=\boldsymbol{(2x-1)(x^2+2x-1)}$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 3 & -4 & 1 \\ & & 1 & 2 & -1 \\ \hline & 2 & 4 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

◀定数項は $+1$ なので $x=1,-1$ のときを代入して探し，見つからないので，最高次の係数が 2 だから $x=\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}$ のときを代入して探す．

[*18] 割り切れたとき，商が必ず整数であることは経験的に明らかだろう．ただし，厳密な証明は難しい (p.77)．

3. 高次方程式とその解法

「高次方程式」とは，3 次方程式，4 次方程式，…のように，2 次より次数の高い方程式のことを表わす.

A. 2 次方程式とみなせる場合

4 次方程式であっても，x^2，x^4 しかない場合は，2 次方程式のように解ける．たとえば，$x^4 - x^2 - 12 = 0$ は，$x^2 = X$ とおくと，$X^2 - X - 12 = (X - 4)(X + 3)$ であるから

$$x^4 - x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2)(x^2 + 3) = 0$$

$x^2 + 3 = 0$ を解くと $x = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$ なので $x = \pm 2, \ \pm\sqrt{3}i$

B. 因数分解の公式を用いる場合

高次方程式は，数学 I の因数分解の公式 (p.60-) を用いて解ける場合がある．たとえば，3 次方程式 $x^3 = 27$ は次のように解ける.

$x^3 = 27 \Leftrightarrow x^3 - 27 = 0$ ←右辺が0になるよう移項した

$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0$ ←左辺が因数分解できる

$\Leftrightarrow x = 3, \ \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ ←$x^2+3x+9=0$は解の公式で解いた

【例題 97】 次の方程式を解きなさい.

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$　2. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$　3. $x^3 = 8$　4. $x^4 = 16$　5. $x^6 + 2x^3 = -1$

【解答】

1. （与式）$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$
   $\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$　$\therefore$ $\boldsymbol{x = \pm 1, \ \pm 2}$
2. （与式）$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0$
   $\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$　$\therefore$ $\boldsymbol{x = \pm i, \ \pm 2}$
   ◀ $x^2 + 1 = 0$ の解は $x = \pm i$
3. （与式）$\Leftrightarrow x^3 - 8 = 0$
   $\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$
   $\Leftrightarrow x = 2, \ \dfrac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$　$\therefore$ $\boldsymbol{x = 2, \ -1 \pm \sqrt{3}i}$
4. （与式）$\Leftrightarrow x^4 - 16 = 0$
   $\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
   $\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$　$\therefore$ $\boldsymbol{x = \pm 2, \ \pm 2i}$
   ◀ $x^2 + 4 = 0$ を解くと $x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$
5. （与式）$\Leftrightarrow x^6 + 2x^3 + 1 = 0$
   $\Leftrightarrow (x^3 + 1)^2 = 0$
   $\Leftrightarrow x^3 + 1 = 0$
   ◀ 2 乗して 0 になる数は 0 しかありえない.
   $\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$　$\therefore$ $\boldsymbol{x = -1, \ \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}}$

C. 因数定理を用いた解法

前ページの方法をどちらも使えない場合は，因数定理を用いて解く．

たとえば，$x^3-3x^2-10x+24=0$ を解こう．$F(x)=x^3-3x^2-10x+24$ とおくと，$F(2)=0$ から $F(x)\div(x-2)$ は割り切れる．右下のように割り算をして因数分解を進めると

（与式）$\Leftrightarrow F(x)=(x-2)(x^2-x-12)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+3)(x-4)=0 \quad \therefore \quad x=2,-3,\ 4$

2	1	−3	−10	24
		2	−2	−24
	1	−1	−12	0

【例題 98】 次の方程式を解け．

1. $x^3-x^2+4x+6=0$
2. $x^3-4x-3=0$
3. $2x^3-5x^2+4x-1=0$

【解答】

1. $x=-1$ のとき（与式）$=0$ であるから，右欄外の割り算より

−1	1	−1	4	6
		−1	2	−6
	1	−2	6	0

（与式）$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-2x+6)=0$

$x^2-2x+6=0$ の解は $x=1\pm\sqrt{-5}$ であるから，$\boldsymbol{x=-1,\ 1\pm\sqrt{5}i}$

2. $x=-1$ のとき（与式）$=0$ であるから，右欄外の割り算より

−1	1	0	−4	−3
		−1	1	3
	1	−1	−3	0

（与式）$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-3)=0$

$x^2-x-3=0$ の解は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ であるから，$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}}$

3. $x=1$ のとき（与式）$=0$ であるから，右欄外の割り算より

1	2	−5	4	−1
		2	−3	1
	2	−3	1	0

（与式）$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2-3x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x-1)=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x=1,\ \dfrac{1}{2}}$

◀ $(x-1)(2x-1)(x-1)=0$ となるが，$x-1$ が 2 つあるのでまとめた．

D. 高次方程式における「重解」

上の例題の 3. のように，3 次方程式の解が $x=1,\ 1,\ \dfrac{1}{2}$ となり，結果的には $x=1,\ \dfrac{1}{2}$ が解となることがある．このように，重なった 2 つの解を重解という*19．3 次以上の方程式では，3 つ以上の解が重なることもある．一般に，n 個の解が重なっているとき，それを n 重解という*19．

E. 代数学の基本定理

虚数解を含め，重解を「2 つの解が重なっている」と考えれば 2 次方程式には「解がちょうど 2 つある」．同じことが n 次方程式にも成り立ち，以下のことが分かっている．

代数学の基本定理

n 次方程式 $F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$ の解は，実数・虚数合わせてちょうど n 個ある．

この定理の証明は高校数学を大きく超える．事実だけを知っていれば良い．

*19 厳密な数学の定義によれば，本来は**重根**（multiple root），***n* 重根**（n multiple root）とよぶべきである．しかし，高校数学においては「重解」という言葉が慣用的に用いられている．13th-note 数学 II も慣例に従うこととする．

【練習 99：高次方程式〜その１〜】

次の方程式を解きなさい．

(1) $x^4 = 1$　　(2) $x^3 + x + 10 = 0$　　(3) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$　　(4) $x^3 - 3x - 2 = 0$

【解答】

(1)　（与式）$\Leftrightarrow$ $x^4 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$　　$\therefore$ $\boldsymbol{x = \pm 1,, \pm i}$

(2) $x = -2$ のとき，$x^3 + x + 10 = 0$ であり，右欄外より

（与式）$\Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 5) = 0$

$x^2 - 2x + 5 = 0$ を解くと $x = -1 \pm \sqrt{6}$ なので，$\boldsymbol{x = -2,\ 1 \pm 2i}$

(3)（与式）$\Leftrightarrow (x^2+3)(x^2-1) = 0$ より $x^2 = -3,\ 1$ であるから，

$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{3}i,\ \pm 1}$.

(4) $x = -1$ のとき $x^3 - 3x - 2 = 0$ であるから，右欄外の割り算より

（与式）$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) = 0$　　$\therefore$ $\boldsymbol{x = -1,\ 2}$

-2	1	0	1	10
		-2	4	-10
	1	-2	5	0

◀ $x^2 - 2x + 5 = 0$ は解の公式を用いて解いた

-1	1	0	-3	-2
		-1	1	2
	1	-1	-2	0

【発展 100：高次方程式〜その２〜】

① 次の方程式を解きなさい．　(a) $(x^2+x)^2 - 5(x^2+x) + 6 = 0$

(b) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$　　(c) $2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = 0$

② a を実数とする．3 次方程式 $x^3 + (2a-1)x^2 + 4x - 2a - 4 = 0$ について，次の条件を求めよ．

（a）虚数解を持つ　　（b）異なる 3 つの実数解を持つ

4. 高次方程式についての重要な例題

A. 3 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式に『解と係数の関係』(p.55) があったように，3 次以上の方程式においても『解と係数の関係』を考えることができる．

解と係数の関係（3 次方程式の場合）

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の 3 解を α, β, γ とするとき，次が成り立つ．

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

特に，$a = 1$ のときは，x^2 の係数 $b = -(\alpha+\beta+\gamma)$，$x$ の係数 $c = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$，定数項 $c = -\alpha\beta\gamma$ が成り立つ．

α, β, γ は実数解でも虚数解でも，上の関係は成立する．

【練習 101：3 次方程式の解と係数の関係〜その１〜】

3 次方程式 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ は 3, 1 を 2 解に持つという．

(1) この 3 次方程式の他の解を求めよ．　(2) a, b の値を求めよ．

【解答】

(1) 他の解を k とすると, 解と係数の関係から, x^2 の係数について $3+1+k = 3$ なので，$\boldsymbol{k = -1}$.

(2) 解と係数の関係から $a = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = \mathbf{-1}$

$b = -3 \cdot 1 \cdot (-1) = \mathbf{3}$

【別解・略】$x = 3$ を解に持つので $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3a + b = 0 \Leftrightarrow b = -3a$

$x = 1$ を解に持つので $1^3 - 3 \cdot 1^2 + a + b = 0 \Leftrightarrow -2 + a + b = 0$

これを連立して $\boldsymbol{a = -1,\ b = 3}$，3 次方程式 $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ を解いて，**他の解 −1** を得る．

【練習 102：3 次方程式の解と係数の関係〜その２〜】

3 次方程式 $x^3 - 2x^2 + 2x - 5 = 0$ の 3 解を α, β, γ とする．

(1) $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ の値を求めよ．　(2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ の値を求めよ．

(3) 暗記　恒等式 $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ を示せ．

(4) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ の値を求めよ．　(5) $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$ の値を求めよ．

【解答】

(1) $\alpha + \beta + \gamma = -(-2) = \mathbf{2}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \mathbf{2}$, $\alpha\beta\gamma = \mathbf{5}$

◂『解と係数の関係』(p.66)

(2)
$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha \\ \Leftrightarrow 2^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ \Leftrightarrow 4 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4 \quad \therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4 - 4 = \mathbf{0}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - a^2c \\ &\quad + a^2b + b^3 + bc^2 - ab^2 - b^2c - abc \\ &\quad + a^2c + b^2c + c^3 - abc - bc^2 - ac^2 \\ &= a^3 - abc + b^3 - abc + c^3 - abc = (\text{右辺}) \quad ■\end{aligned}$$

(4) (3) の恒等式から

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$$
$$\Leftrightarrow\ 2 \cdot (0 - 2) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3 \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -4 + 15 = \mathbf{11}$$

(5)
$$\begin{aligned}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 &= (\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\gamma\alpha)^2 + 2\alpha\beta\beta\gamma + 2\beta\gamma\gamma\alpha + 2\gamma\alpha\alpha\beta \\ \Leftrightarrow 2^2 &= \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ \Leftrightarrow 4 &= \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2\end{aligned}$$

よって，$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = 4 - 20 = \mathbf{-16}$

【発展 103：3 次方程式の解と係数の関係〜その 3〜】

3 次方程式 $2x^3-4x^2+3x-5=0$ の 3 解を α,β,γ とするとき，以下の値を計算しなさい．

① $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　② $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　　③ $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$

B. 虚数解をもつ高次方程式について

たとえば，$x=2+i$ は $x^2-4x+5=0$ の解であるが，$2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である．

このことは，2 次方程式に限らず，高次方程式でも成り立つ．ただし，方程式の係数はすべて実数でなければならない．

虚数解の共役

次数が n，係数がすべて実数である方程式 $F(x)=a_nx^n+a_{m-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ が虚数解 $\alpha=p+qi$ をもつとき，その共役な複素数 $\overline{\alpha}=p-qi$ も方程式 $F(x)=0$ の解になる．

（証明）$F(\alpha)=0$ であるとき，$F(\overline{\alpha})=0$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
F(\overline{\alpha}) &= a_n(\overline{\alpha})^n+a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1}+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0\\
&= a_n\overline{\alpha^n}+a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}}+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0 && \leftarrow \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\text{ から，}\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha}^n)\text{など}\\
&= \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}+\overline{a_0} && \leftarrow\text{係数は実数なので }a_k=\overline{a_k}\\
&= \overline{a_nx^n+a_{m-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0} && \leftarrow \overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta},\ \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\\
&= \overline{F(\alpha)}=0
\end{aligned}
$$

【練習 104：虚数解を持つ高次方程式】

(1) $1+2i$ を解にもち，係数が実数である 2 次方程式を一つ求めなさい．

(2) 3 次方程式 $x^3-ax^2+bx-22=0$ は $x=3+\sqrt{2}i$ を解に持つ．実数 a,b の値と他の解を求めよ．

【解答】

(1) 係数が実数であるから，もう 1 つの解は $1-2i$ である．解と係数の関係より x の係数は $-(1+2i+1-2i)=-2$，定数項は $(1+2i)(1-2i)=1^2-(2i)^2=5$ であるから，$\boldsymbol{x^2-2x+5=0}$

(2) 係数が実数なので，$x=3-\sqrt{2}i$ も 3 次方程式の解である．3 次方程式の 3 解を $x=3\pm\sqrt{2}i,\ k$ とすると，解と係数の関係より

$$
\begin{cases}
(3-\sqrt{2}i)+(3+\sqrt{2}i)+k=a & \cdots\cdots\cdots ①\\
(3-\sqrt{2}i)(3+\sqrt{2}i)+(3+\sqrt{2}i)k+k(3-\sqrt{2}i)=b & \cdots\cdots\cdots ②\\
(3-\sqrt{2}i)(3+\sqrt{2}i)k=22 & \cdots\cdots\cdots ③
\end{cases}
$$

③より $11k=22$ となるから $k=2$，①より $a=6+k=8$，②より $b=11+6k=23$，以上より，**他の解は 2，$\boldsymbol{a=8}$，$\boldsymbol{b=23}$**．

【別解 1】3 次方程式の 3 解を $x=3\pm\sqrt{2}i,\ k$ とすると

$$
\begin{aligned}
x^3-ax^2+bx-22 &= \{x-(3+\sqrt{2}i)\}\{x-(3-\sqrt{2}i)\}(x-k)\\
&= (x^2-6x+11)(x-k)\\
&= x^3+(-k-6)x^2+(11+6k)x-11k
\end{aligned}
$$

となる．各次の係数を比較して，**他の解は 2，$\boldsymbol{a=8}$，$\boldsymbol{b=23}$** を得る．

◀【別解 2】$x^3-ax^2+bx-22=0$ に $x=3+\sqrt{2}i$ を代入し，左辺の実部と虚部が 0 になることからも解くことが出来る．

C. 1の3乗根 ω

3乗して1になる数のうち，1でない数を**1の3乗根**という．$x^3 = 1$ を解けば

$$x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

となるから，1の3乗根は $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ と $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ である．

1の3乗根 ω

1の3乗根は，しばしば ω（オメガ）で表わされ，次の等式を満たす．

$\omega^2 = -\omega - 1$，$\omega^3 = 1$

この等式は，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ であっても $\omega = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ であっても，正しい．

（証明）ω は2次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解であるから $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を満たす．これを移項して，$\omega^2 = -\omega - 1$ を得る．また，ω は3次方程式 $x^3 = 1$ の解でもあるから，$\omega^3 = 1$ を満たす．

【練習 105：1の3乗根～その１～】

1の3乗根 ω について，以下の値を求めよ．

(1) $\omega^4 + \omega^5$　(2) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$　(3) $\omega^{20} + \omega^{10}$

【解答】

(1) （与式）$= \omega^3 \cdot \omega + \omega^3 \cdot \omega^2$　◀ $\omega^3 = 1$ を使うための変形

$= \omega + \omega^2$　◀ $\omega^3 = 1$ の代入

$= \omega + (-\omega - 1) = \mathbf{-1}$　◀ $\omega^2 = -\omega - 1$ の代入

(2) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ であるから

（与式）$= (1 + \omega + \omega^2) + (1 + \omega + \omega^2)\omega^3 + (\omega^3)^2$

$= 0 + 0 + 1^2 = \mathbf{1}$

(3) $\omega^3 = 1$ から（与式）$= \omega^{18} \cdot \omega^2 + \omega^9 \cdot \omega = \omega^2 + \omega = \mathbf{-1}$　◀ $\omega^{18} = \left(\omega^3\right)^6 = 1$, $\omega^9 = \left(\omega^3\right)^3 = 1$

【発展 106：1の3乗根～その２～】

1の3乗根 ω について，以下の値を求めよ．

① $\omega^{100} + \omega^{50}$　② $\omega^{999} + \omega^{998} + \cdots + \omega$　③ 自然数 n について，$\omega^{3n} + \omega^{2n} + \omega^n$

C 第 1 章の補足・解答

1C.1 第 1 章の補足

1. 発展 「割り算の一意性」の証明

多項式 $A(x)$ の次数を，$\deg A$ で表わす．たとえば，$f(x) = x^3 + 2x^2$ ならば $\deg f = 3$ となる．
この記号を用いて，以下の事実を証明する．ただし，数学 B で学ぶ『数学的帰納法』を必要とする[*20]．

割り算の一意性

余りの式の次数が割る式の次数より小さいとき，商と余りが 1 つに定まる．
つまり，割られる式 $A(x)$，割る式 $B(x)$ に対し，次を満たす商 $Q(x)$，余り $R(x)$ は 1 つに定まる．

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \qquad \text{（ただし，}\deg R < \deg B\text{）}$$

（余りの存在証明）次の事実を数学的帰納法で示せばよい．

「どんな多項式 $A(x)$ に対しても，$A(x) - R(x)$ が $B(x)$ で割り切れ，
$\deg R < \deg B$ であるような $R(x)$ が存在する」 ……………………①

i) $\deg A < \deg B$ のとき，$R(x) = A(x)$ とおけば，$A(x) - R(x) = 0 = B(x) \cdot 0$ から条件①を満たす．

ii) n を $\deg B - 1$ 以上の整数とする．$\deg A = n$ のときに条件①を満たすと仮定すれば，$\deg A = n + 1$ のときに条件①を満たすことを示す．

つまり，「$\deg A = n$ であるどんな $A(x)$ に対しても $\deg R < \deg B$ である $R(x)$ が存在し，$A(x) - R(x)$ は $B(x)$ で割り切れる」と仮定する．

$\deg A = n + 1$ のとき，$A(x) = ax^{n+1} +$（n 次以下の多項式），$B(x) = bx^m +$（$m - 1$ 次以下の多項式）とおく．ここで $F(x) = A(x) - \dfrac{a}{b}x^{n+1-m}B(x)$ ……… ② とおくと

$$\begin{aligned}F(x) &= ax^{n+1} + (n\text{ 次以下の多項式}) - \frac{a}{b}x^{n+1-m}\left(bx^m + (m-1\text{ 次以下の多項式})\right)\\ &= ax^{n+1} + (n\text{ 次以下の多項式}) - ax^{n+1} - (n\text{ 次以下の多項式})\\ &= (n\text{ 次以下の多項式})\end{aligned}$$

仮定より，$F(x)$ に対して $\deg r < \deg Q$ となる $r(x)$ が存在し，$F(x) - r(x) = B(x)q(x)$ と書ける．これに②を代入して

$$A(x) - \frac{a}{b}x^{n+1-m}B(x) - r(x) = B(x)q(x) \iff A(x) - r(x) = B(x)\left\{q(x) + \frac{a}{b}x^{n+1-m}\right\}$$

となり，$A(x)$ に対しては $r(x)$ が，条件を満たすと分かる．$\deg A = n + 1$ を満たすどんな $A(x)$ でも正しいから，$\deg A = n + 1$ のときも条件を満たす．

以上，i)，ii) より，数学的帰納法によって，すべての $A(x)$ について余り $R(x)$ が存在すると分かる．

余りが存在することは，実際の割り算の手順を見れば明らかではある．しかし，ありとあらゆる多項式の割り算で，余りが存在することを「証明」するには，上のような証明を必要とする．

[*20] 実際のところ，高校数学の道具だけを使って証明しているが，証明の考え方そのものは，高校数学の範囲を超えている．

（余りの一意性の証明）$A(x) \div B(x)$ の割り算の結果が

$$A(x) = B(x)Q_1(x) + R_1(x), \qquad A(x) = B(x)Q_2(x) + R_2(x)$$

の 2 通りあったとする．このとき，この 2 式の左辺同士，右辺どうしを引いて

$$0 = B(x)\{Q_1(x) - Q_2(x)\} + R_1(x) - R_2(x) \iff B(x)\{Q_1(x) - Q_2(x)\} = R_2(x) - R_1(x)$$

すると，$\deg R_1 < \deg B$，$\deg R_2 < \deg B$ より，右辺の次数は $\deg B$ より小さい．一方，$Q_1(x) - Q_2(x) \neq 0$ ならば，左辺の次数は $\deg B$ 以上になってしまうので，$Q_1(x) - Q_2(x) = 0$ でないといけない．
つまり，$0 = R_2(x) - R_1(x)$ となって $R_1(x) = R_2(x)$ となる．よって，2 通りの答えは一致する． ■

2. 発展 「係数比較法」の必要性について

数学 B で学ぶ『数学的帰納法』，数学 III で学ぶ『関数の連続性』を用い，以下の事実を示す[*21]．

「係数比較法」の必要性

2 つの多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，　$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$
があったとき，$f(x) = g(x)$ が恒等式となる必要十分条件は
「すべての係数が等しくなること」（$a_n = b_n$，$a_{n-1} = b_{n-1}$，$\cdots$，$a_1 = b_1$，$a_0 = b_0$）である．

（証明）「すべての係数が等しい」ならば「$f(x) = g(x)$ が恒等式」は明らか．この命題の逆を示すには，$f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$ が恒等式になるとき，「$a_n - b_n = 0$，$a_{n-1} - b_{n-1} = 0$，$\cdots$，$a_1 - b_1 = 0$，$a_0 - b_0 = 0$」を示せばよいから，次の命題

「$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ が恒等式ならば，$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ である」
…………………… ③

を示せばよいと分かる．これを数学的帰納法で示す．

i) $\deg f = 1$ のとき，$a_1 x + a_0 = 0$ が恒等式なので
$x = 0$ を代入して $a_0 = 0$，$x = 1$ を代入して $a_1 + a_0 = 0$ から $a_1 = 0$ となり，示された．

ii) $\deg f = k$ のとき，どんな多項式も正しいとする．$\deg f = k + 1$ である多項式について

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

が恒等式であるとする．④は $x = 0$ で成り立つので，$f(0) = a_0 = 0$ である．ここで，$c \neq 0$ のとき

$$f(c) = 0 \iff a_{k+1}c^{k+1} + a_k c^k + \cdots + a_1 c = 0 \iff a_{k+1}c^k + a_k c^{k-1} + \cdots + a_1 = 0$$

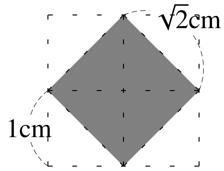
であるから，$g(x) = a_{k+1}x^k + a_k x^{k-1} + \cdots + a_1 = 0$ は 0 でないすべての c について $g(c) = 0$ になる．
ここで，関数 $g(x)$ は多項式であるから連続関数であり，$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$ を満たす．$c \neq 0$ ならば $g(c) = 0$ であるから，$g(0) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$ となる．つまり，$g(x) = 0$ はすべての x で成り立つので恒等式になる．よって，仮定より，$g(x)$ の係数 a_{k+1}，a_k，$\cdots$，a_1 はすべて 0 である．
以上より，$a_{k+1} = a_k = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ であるから，$\deg f = k + 1$ のときも③は示された．

i)，ii) によって，示すべき命題③は示された． ■

[*21] 『割り算の一意性』と同じく，高校数学の道具だけを用いた証明だが，証明の考え方そのものは，高校数学の範囲を超えている．

3. 発展 複素数への拡張について

A. 複素数への拡張の特殊性

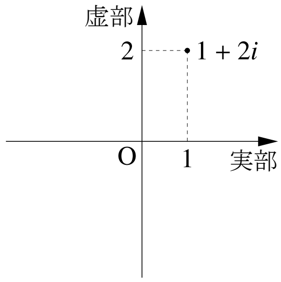


数学 I で学んだ (p.1-6) ように，「数える」ことで生まれた自然数から「数」は拡張され，最終的には「数直線上に表すことのできる」数の全てを実数と呼んだ．

この実数の「定義」は数学的には曖昧ではある[*22]が，直感的には分かりやすい．無理数 $\sqrt{2}$ も，右のように長さとして存在するから認めざるをえない．

しかし，「2 乗して -1 になる数」は数直線上のどこにも当てはまらない．そのため，虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を数として認めるには，これまでの数の拡張と異なった考え方を持たなければならない[*23]．

B. 複素数の見方〜その１・複素平面〜



複素数を導入する 1 つの考え方は，数直線そのものを拡張することである．

つまり「数直線」ではなく「数平面」を考える．この「数平面」は**複素平面** (complex plane) と言われ，右のようになる[*24]．

この考え方は，変数が複素数である関数を考える[*25]時など，数学の基本的な道具として用いられる．

C. 複素数の見方〜その２・文字式として〜

たとえば，$\sqrt{2} = t$ とする．このとき，有理数と $\sqrt{2}$ の加減乗除による計算は「文字 t を含む式全体」とも考えられる．この式においては，「t^2 はすべて 2 に置き換えると決める」という決まり事がある．

同じように「文字 i を含む文字式全体」として複素数を定義してもよい．この場合は，「i^2 はすべて -1 に置き換えると決める」という決まり事がある．

D. $1+i$ という数について

とはいえ，次のような疑問を持つ人がいるかもしれない．

> 「長さ 1」と「長さ $\sqrt{3}$」を合わせた「長さ $1+\sqrt{3}$」が存在するから，$1+\sqrt{3}$ という数は分かる．しかし，「長さ i」は数直線上にないのだから，$1+i$ という数は何なのか？そもそも，1 足す i はできるのか？

たとえば，方程式 $(x-1)^2 = -1$ を解くとき，最後の「両辺に 1 を足す操作」ができるのかが問題になる．

$(x-1)^2 = -1 \iff x-1 = i,\ -i$ ←２乗して－１になる数が " i "

$\iff x = 1+i,\ 1-i$ ←両辺に１を『足す』？

そのためには，記号 + とは何であるか，詳しく見る必要がある．

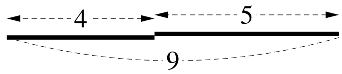
[*22] 「数直線上に表わす」が不明瞭である．この意味をどのように明瞭にするかは高校数学の内容を超えるが，数学 III で少し扱う．

[*23] 虚数が発見された当時は「想像上の」数でしかなかった．そのため，今でも，虚数のことを英語では imaginary number と言う．

[*24] 高校数学では複素数平面 (complex number plane) と言われる事が多い．また，考案者の名をとって Gauss 平面 (Gaussian plane) とも言われる．

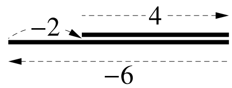
[*25] 当然ながら高校では扱われない．

E. 複素数における + の意味〜その１・複素平面の場合〜

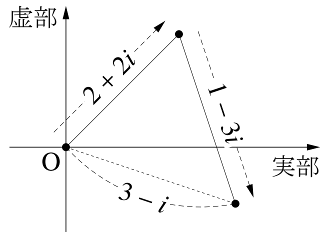


複素平面の場合は，数直線の拡張として + の意味を考えられる．

まず，$4+5$ の場合は数直線を用いると，右上のように，長さを付け加えることで考えられる．



負の数を足す場合も数直線を用いて，たとえば $4+(-6)$ は右のように考えられる．つまり，数に「右向き（正の場合)」「左向き（負の場合)」を考えればよい．



複素数になった場合は，右下のようになる．つまり，数の向きは 360° いずれの方向も向きうる．これは，数学 B で学ぶ「平面のベクトル」の足し算と同じやり方である．

F. 複素数における + の意味〜その２・文字式として見た場合〜

そもそも，+ は次の性質を持っている．

(1) $a+(b+c)=(a+b)+c$（結合法則）
(2) $a+b=b+a$　（交換法則）
(3) $a+0=a$　（足しても値を変えない 0 がある）
(4) $a+x=0$ には必ず解があって $x=-a$（どんな数にも，足して 0 になる数がある）

ここで発想を逆にする．足し算である + が上の 4 つの性質を持つのではなく，逆に，「+ が上の 4 つの性質を持つから，+ は足し算と呼んでもよい」と考える[*26]．

さて，「実数 a, b に対して，$x-a=bi$ を満たす x を $a+bi$ と書いて良いか？」という点を考えよう[*27]．そこでひとまずは，$x-a=bi$ を満たす x を $a\oplus bi$ と書くことにする．

今，$a_1\oplus b_1 i,\ a_2\oplus b_2 i$ の「足し算」を次で定義しよう．

$$(a_1\oplus b_1 i)+(a_2\oplus b_2 i)=(a_1+a_2)\oplus(b_1+b_2)i$$

この「足し算」は，(1) 結合法則も (2) 交換法則も成り立つ．さらに，$0\oplus 0i$ を足しても値を変えないから (3) も成り立ち，(4) の性質も明らかである．だから，この「足し算」に記号 + を用いてもよい．

すると，$a\oplus bi=(a\oplus 0i)+(0\oplus bi)$ ……… ⑤ が成り立っている．$a\oplus 0i$ とは実数 a のことであり，$0\oplus bi$ とは「2 乗して $-b^2$ になる数」として純虚数 bi の事である．

だから，⑤は $a\oplus bi=a+bi$ と書き換えられて，記号 ⊕ の代わりに + を用いても構わないと分かる．

G. 複素数における×の意味

×の場合は，(1) 結合法則，(2) 交換法則，(3)「$a\times 1=a$（掛けても値を変えない 1 がある)」(4)「$a\neq 0$ ならば $a\times x=1$ には必ず解がある」の 4 つの性質を持てば，×は掛け算と呼べると考える[*28]．

a が純虚数または実数の場合は，$a\times(bi)=(ab)i,\ (ai)\times(bi)=-ab$ と定義して，比較的容易に確かめられる．a が任意の複素数としても，計算は大変になるが正しいことを確認できる．

---

*26 このように，物事を性質から定義し直すとき，それらの性質を「公理」という．この考え方は，（多少乱暴な類似ではあるが）友達を遠くから探すとき「背が高くて帽子をかぶり黒い服を着ているから〇〇さんのはずだ」と判断をすることに似ている．

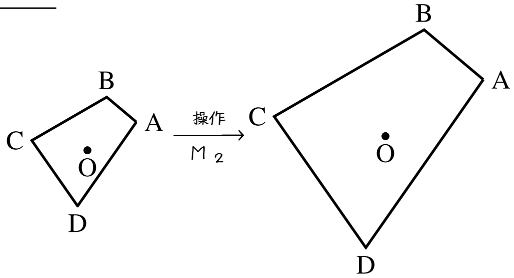
*27 実際には，bi と $-bi$ の関係なども厳密に考える必要があるが，以下では簡略化している．それでも，以下は高度な話になっているので読み飛ばして構わない．

*28 大学で学ぶ高度な数学では，この 4 つとは限らない．

H. 虚数単位 i の具体的なモデル～複素数の見方・その３～

まず，$\sqrt{2}$ に新しい見方を導入しよう．

ある点 O を中心に「図形を 2 倍に拡大する」という操作を M_2 と定義する．操作 M_2 は，右図のような操作になる．

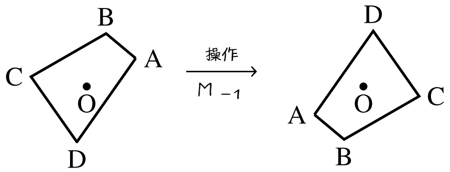


ここで，次のような操作 Q を考える．

操作 Q を 2 回繰り返す操作は M_2 に一致する．

この操作 Q は「図形を $\sqrt{2}$ 倍に拡大する」という操作に一致する．こうして，$\sqrt{2}$ という数を 1 つの操作として捉えることができる．

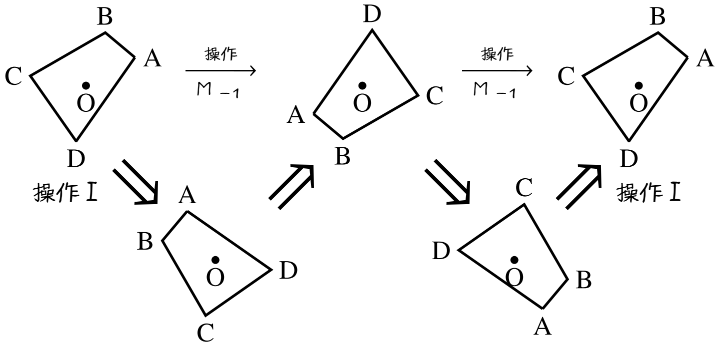
次に，ある点 O を中心に「図形を -1 倍する」という操作に M_{-1} という名前を付けよう．右図のように，操作 M_1 は点 O に対して対称移動することになり，結果として 180° の回転操作になる．



ここで，次のような操作 I を考える．

操作 I を 2 回繰り返す操作は M_{-1} に一致する．

「D を 90° 回転させる」操作は 2 回行うと，「D を 180° 回転させる」操作になる．つまり，操作 I に対応する操作として「D を 90° 回転させる」が対応していると考えてよい．



実質的には，-1 を「2 回繰り返せば元に戻る」操作と，虚数単位 i を「4 回繰り返せば元に戻る」操作と対応させせられる．

同じように，複素数 $1+i$ と対応させた操作も考える事ができる[*29]．

I. 複素数の利用

今では，複素数は様々な場面で用いられ，「想像上の」数と呼ぶことはふさわしくない．

まず，数学の面から言えば，虚数を数として認めることにより，代数学の基本定理『n 次方程式は n 個の解をもつ』(p.65) がある．もちろん，解が実数であるか虚数であるかは調べる必要があるし，n 個のうち 2 つが同じ値になるかもしれない．しかし，直感的にも分かりやすいきれいな事実である．

残念ながら高校数学の範囲を大きく超えるため，ここで詳細を取り上げることはできないが，物理でも，電磁波や原子・分子の様子を扱うときには，複素数が用いられる．

[*29] 新課程の数学 III でより詳しく学ぶ．

4. 発展 因数分解 $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ の証明について

A. 何が難しいのか

「$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できるとき，$ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解は $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ から $x = \alpha, \beta$ である」という事実は簡単である．しかし，この逆である，次の命題が難しい．

2 次式の因数分解

2 次式 $ax^2 + bx + c$ について，$ax^2 + bx + c = 0$ の解が α, β となるとき，次の因数分解ができる．

$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$　　←x ２ の係数を合わせていることに注意

B. α, β が実数の場合

（証明）$ax^2 + bx + c$ を $x - \alpha$ で割った商を $u(x)$，余りを d とする．商と余りはただ 1 つに定まり (①)

$$ax^2 + bx + c = (x-\alpha)u(x) + d$$

となるが，両辺に α を代入して $0 = d$ を得る．よって，$ax^2 + bx + c$ は $x - \alpha$ で割り切れる．同じようにして $x - \beta$ でも割り切れるから，$ax^2 + bx + c$ は $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割り切れる．x^2 の係数は一致しないといけないので (②)，恒等式 $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ を得る．

C. α, β が複素数の場合

α, β が複素数の時も上の証明は有効である．

しかし，上の証明で用いた①，②は，係数が実数のときしか示されていない（①は p.70，②は p.71）．

①の証明（p.70）には「係数は複素数でもよい」と一言書き添えても証明は有効であり，解決される．

しかし，②の証明については 2 点，高校数学の範囲では説明どころか定義もできない内容が残る．それは②の証明の以下の記述（p.71）である．

> 「ここで，関数 $g(x)$ は多項式であるから連続関数であり，$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$ を満たす．$c \neq 0$ ならば $g(c) = 0$ であるから，$g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ となる．」

係数も変数も複素数である $g(x)$ の「連続関数」「$\lim_{x\to 0} g(x)$」については高校数学の範囲を大きく超える．そのため，残念ながらここで論じられない[*30]が，実数の場合と同じように正しいことが証明されている．

D. n 次式の因数分解

同様の定理は，自然に 3 次以上の式へも拡張できる．

n 次式の因数分解

n 次式 $F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ について，以下の条件は同値である．

- $F(x) = 0$ の解が $c_1, c_2, \cdots, c_n$ である．
- $F(x) = a_n(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)$ と因数分解ができる．

[*30] 「複素数平面」「複素数を含む式の極限の厳密な定義」「関数の連続の厳密な定義」について詳しく論じる必要がある．

5. 発展 組立除法の仕組み

割り算 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=(x-u)(p_{n-1}x^{n-1}+\cdots+p_1x+p_0)+A$ について，式を変形すると

$$\Leftrightarrow a_nx^n+\ a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\ a_1x+\ a_0\ =(p_{n-1}x^n+\cdots+p_1x^2+p_0x)-(up_{n-1}x^{n-1}+\cdots+up_1x+up_0)+A$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow a_nx^n+\ a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\ a_1x+\ a_0&\\ +up_{n-1}x^{n-1}+\cdots+up_1x+up_0&=(p_{n-1}x^n+\cdots+p_1x^2+p_0x)+A\end{aligned}$$

となる．最後の等式を右下の表のように表わし，係数だけ書き出そう．

今，u, a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_0 が与えられたときに，p_{n-1}, $\cdots$, p_1, p_0, A が与えられればよいが，右の表はそれが可能である．

そして，右下の係数だけ書かれた表を書いて，p_{n-1}, $\cdots$, p_1, p_0, A を求める割り算の方法を組立除法と呼んでいる．

$$\begin{array}{rrrrr|l} a_nx^n & +a_{n-1}x^{n-1} & +\cdots & +a_1x & +a_0 & \\ & +up_{n-1}x^{n-1} & +\cdots & +up_1x & +up_0 & \downarrow 足す \\ \hline =p_{n-1}x^n & +p_{n-2}x^{n-1} & +\cdots & +p_0x & \multicolumn{1}{|r}{+A} & \end{array}$$

x の累乗を省略 $\Downarrow$

$$\begin{array}{c|cccc|c} u & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & up_{n-1} & \cdots & up_1 & up_0 \quad \downarrow 足す \\ \hline & a_n & a_{n-1}+up_{n-1} & \cdots & a_1+up_1 & a_0+up_0 \\ & =p_{n-1} & =p_{n-2} & \cdots & =p_0 & =A \end{array}$$

6. 「2 次方程式の解の配置」の問題に対する 2 解法の比較

A. 「解と係数の関係」を用いた解法の利点と欠点

「2 次関数」を用いる解法より，条件を考えやすい．条件「$\alpha>1, \beta>1$」を「$\alpha-1>0, \beta-1>0$」と読み替える部分は技巧的ではあるが，難しい変形ではないので，一度理解して忘れなければ難しくはない．

欠点は，「解と係数の関係」を用いては解くことが困難な問題が存在することにある．一例として，【練習 C.】(p.59) が挙げられる．これを解くには，次の条件を解く必要がある．

$D>0$
$1<\alpha<3,\ 1<\beta<3$ から $2<\alpha+\beta<6$
$0<\alpha-1,\ 0<\beta-1$ から $(\alpha-1)(\beta-1)>0$
$\alpha-3<0,\ \beta-3<0$ から $(\alpha-3)(\beta-3)>0$

【発展 C.】(p.60) のように，α, β の満たす不等式が長くなると，さらに条件が煩雑になる．

また，この解法では，判別式 D の条件を忘れないよう，注意することが必要である．

B. 「2 次関数」を用いた解法の利点と欠点

この「2 次関数」を用いた解法は，3 つの条件「判別式」「軸の方程式の条件」「解の適・不適を分ける x 座標における関数の値」だけを考えればよい．しかし，グラフと方程式の対応を完璧に理解しないとこの解法を身につけることはできない．それが，この解法の欠点である．

逆に言えば，このやり方からグラフと方程式の対応を考える力は鍛えられる．しかし，何よりの利点は，「2 次関数」を用いた解法ならすべての「2 次方程式の解の配置」の問題を解ける点にある．

7. 発展 「$F(a)=0$ となる a の探し方」についての証明

A. 「$F(a)=0$ となる a の探し方」の根拠となる定理

p.63 に書かれた探し方は，次の定理によって有効である．

整数係数の方程式 $F(a)=0$ の有理数解 a

係数がすべて整数の多項式 $F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ について，$F(a)=0$ となる有理数 a が存在するならば，$a=\pm\dfrac{a_0\text{ の約数}}{a_n\text{ の約数}}$ を必ず満たす．

（証明）$F(a)=0$ となる有理数 a を，$a=\dfrac{m}{l}$（m は整数，l は自然数，$|m|$ と l は互いに素）と既約分数で表す．$F(a)=F\left(\dfrac{m}{l}\right)=0$ から，因数定理より $F(x)$ は $lx-m$ で割り切れる．その結果を

$$F(x)=(lx-m)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0) \quad \cdots\cdots ①$$

で表わす．n 個の値 b_{n-1}，$\cdots$，b_1，b_0 が有理数であることは明らか[*31]．ここで，①の右辺を展開し

x^n の係数を比較して $a_n=lb_{n-1}$ ……… ②，定数項を比較して $a_0=-mb_0$ ……… ③

を得る．次ページで示すように，b_{n-1}，b_0 はどちらも整数でなるから，②から l が a_n の約数，③から m が a_0 の約数であることが分かり，$a=\dfrac{m}{l}=\pm\dfrac{a_0\text{ の約数}}{a_n\text{ の約数}}$ が示された．

B. 整数係数の多項式の因数分解

上で用いた次の命題を証明しよう．直感的には明らかな事実だが，厳密に証明するのは難しい．

整数係数の多項式が整数係数の 1 次式で割り切れるとき

l, m を互いに素とし，係数がすべて整数の多項式 $F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ が，$lx-m$ で割り切れたとする．このとき，商の多項式は係数がすべて整数になる．

（証明）$F(x)\div(lx-m)$ が割り切れた結果を

$$F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=(lx-m)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0) \quad \cdots\cdots ④$$

とし，n 個の有理数 b_{n-1}，$\cdots$，b_1，b_0 を既約分数で表したときの分母の最小公倍数を u とする．

$u=1$ を背理法で示す．そうすれば，n 個の有理数 b_{n-1}，$\cdots$，b_1，b_0 の分母はすべて 1，つまり整数であったことが示されたことになる．$b_i=\dfrac{c_i}{u}$ とおくと，u は分母の最小公倍数なので，整数 c_{n-1}，$\cdots$，c_1，c_0 の最大公約数は 1 ……… ⑤ になり，④ は次のように変形できる．

$$④ \iff uF(x)=(lx-m)(c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0) \quad \cdots\cdots ⑥$$

$u\neq1$ と仮定する ……… ⑦ と，u は素数の約数をもつ．その 1 つを p とし，$\bmod p$ で考えると，$u\equiv0$ より，（⑥の左辺）$\equiv0$ である．

[*31] 背理法を用いる．b_i が無理数であるような i の最小値を z とし，x^z の係数比較をすれば b_z が有理数と等しくなり，矛盾する．

次に，l, m は互いに素であったから，$l \not\equiv 0$ または $m \not\equiv 0$ であり（ ········ ⑧），c_{n-1}，$\cdots$，c_1，c_0 は最大公約数が 1 なので，$c_i \not\equiv 0$ となる i が存在する．そのような最大の i を k とすると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
(⑥の右辺) &\equiv (lx-m)(c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_0)\\
&\equiv lc_k x^{k+1} + (lc_{k-1} - mc_k)x^k + (x^{k-1}\text{ 次以下の多項式})
\end{aligned}
$$

x^{k+1} の係数について（⑥の左辺）$\equiv 0$,（⑥の右辺）$\equiv lc_k$ から $lc_k \equiv 0$．しかし $c_k \not\equiv 0$，p は素数より $l \equiv 0$．
次に x^k の係数について（⑥の左辺）$= ua_l \equiv 0$,（⑥の右辺）$\equiv lc_{k-1} - mc_k \equiv 0 - mc_k$ から，$mc_k \equiv 0$．しかし $c_k \not\equiv 0$，p は素数より $l \equiv 0$．これは◯に矛盾する．
よって，⑦の矛盾が導かれ，b_{n-1}，$\cdots$，b_1，b_0 がすべて整数と示された．

一般に，次の**ガウスの補題** (Gauss' lemma) が成り立ち，上の方法を応用すれば証明できる．

ガウスの補題

整数係数の多項式 $F(x)$ が，有理数係数の多項式 $G_0(x)$, $H_0(x)$ を用いて $F(x) = G_0(x)H_0(x)$ と因数分解できるなら，実際には整数係数の多項式 $G(x)$, $H(x)$ によって $F(x) = G(x)H(x)$ と因数分解できる．また，$G(x)$, $H(x)$ は $G_0(x)$, $H_0(x)$ の定数倍であるようにとれる．

【練習：多項式の割り算〜その２〜】(p.31)

(1) $x^9+x^7+x^5+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$ とおく．
この両辺に $x=1$ を代入して，$4=a+b$
この両辺に $x=-1$ を代入して，$-2=-a+b$ となる．
2 式を連立して $b=1,\ a=3$ とわかるので，求める**余りは $\boldsymbol{3x+1}$**.

(2) 剰余の定理より $F(3)=4,\ F(-2)=-6$ である．$F(x)=(x-3)(x+2)Q(x)+ax+b$ とおく．
この両辺に $x=3$ を代入して $4=3a+b$
この両辺に $x=-2$ を代入して $-6=-2a+b$
2 式を連立して $a=2,\ b=-2$ となるので，求める**余りは $\boldsymbol{2x-2}$**.

◀ 剰余の定理を用いずに

$$F(x)=(x-3)Q_1(x)+4$$
$$F(x)=(x+2)Q_2(x)-6$$
$$F(x)=(x-3)(x+2)Q(x)+ax+b$$

の 3 式から，$a,\ b$ を求めると考えてもよい．

【練習：式の除法と式の値】(p.31)

(1) $x=3-\sqrt{2}$ を変形すると

$$x-3=-\sqrt{2}\Leftrightarrow(x-3)^2=2$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2-6x+7=0}$$

(2) $F(x)\div(x^2-6x+7)$ の割り算をすると，右欄外のようになるので

$$F(x)=(x^2-6x+7)(x+1)-3x-2$$

となる．この両辺に $x=3-\sqrt{2}$ を代入して，

$$F\left(3-\sqrt{2}\right)=0-3\left(3-\sqrt{2}\right)-2=\boldsymbol{-11+3\sqrt{2}}$$

◀
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & & & 1 & 1\\
1\ -6\ 7 & 1 & -5 & -2 & 5\\
 & 1 & -6 & 7 & \\
 & & 1 & -9 & 5\\
 & & 1 & -6 & 7\\
 & & & -3 & -2
\end{array}$$

【発展：多項式の割り算〜その３〜】(p.31)

① $F(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ を $(x-1)^2$ で割った商が $\boxed{ア}$，余りが $\boxed{イ}$ になる．$(x-1)^2(x+2)Q(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるので，ax^2+bx+c を $(x-1)^2$ で割ればよい．すると右欄外のようになるので $ax^2+bx+c=a(x-1)^2+(b+2a)x+(c-a)$ になる．よって

$$\begin{aligned}F(x)&=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2+(b+2a)x+(c-a)\\&=(x-1)^2\left\{\underline{\boldsymbol{(x+2)Q(x)+a}}_{(ア)}\right\}+\underline{\boldsymbol{(b+2a)x+(c-a)}}_{(イ)}\end{aligned}$$

◀
$$\begin{array}{r|rrr}
 & & & a\\
1\ -2\ 1 & a & b & c\\
 & a & -2a & a\\
 & & b+2a & c-a
\end{array}$$

② $F(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $-3x+2$ であるから，恒等式 $(b+2a)x+(c-a)=-3x+2$ が成り立つ．x の係数より $b+2a=-3$ ……… ①，定数項より $c-a=2$ ……… ②．また，$x+2$ で割った余りが -1 であるから，$F(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ の両辺に -2 を代入して

$$-1=4a-2b+c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ③$$

が成り立つ．①から $b=-3-2a$，②から $c=2+a$ であり，これらを③に代入すると

$$4a-2(-3-2a)+(2+a)=-1\Leftrightarrow 9a=-9$$

よって $a=-1,\ b=-1,\ c=1$ と分かるから，求める**余りは $\boldsymbol{-x^2-x+1}$** である．

【発展：２数の大小関係】(p.37)

① **真**

実際，$ab < 0$, $0 < cd$ である．

② **偽，反例は $(a, b, c, d) = (-4, -4, 3, 3)$**

③ **真**

◀ 2 つの正の数は，逆数を取ると大小関係が逆になる

④ **真**

$0 < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$, $0 < b < d$ から，『不等式の性質 ii)』を用いた．

【練習：複素数の計算〜その２〜】(p.51)

(1) $(a+bi)^2 = 2i$ の左辺を展開して

$$a^2 + 2abi - b^2 = 2i \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab - 2)i = 0$$

実部から $a^2 = b^2$ なので $a = \pm b$，虚部から $ab = 1$

$a = b$ のとき，$a^2 = 1$ から $a = \pm 1$, $b = \pm 1$ である．

$a = -b$ のとき，$a^2 = -1$ であるが，a は実数より解なし．

以上から，$\boldsymbol{(a, b) = (1, 1), (-1, -1)}$ となり，$\boldsymbol{z = 1 + i,\ -1 - i}$.

◀ $(a, b) = (\pm 1, \pm 1)$, $z = \pm 1 \pm i$（複号同順）でもよい．

(2) $z = a + bi$ とおく（a, b は実数）．$z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ より

$$a^2 + 2abi - b^2 = 2 + 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = 2 + 2\sqrt{3}i$$

これより $\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \cdots\cdots ① \\ 2ab = 2\sqrt{3} \cdots\cdots ② \end{cases}$ を得る．②より $b = \dfrac{\sqrt{3}}{a}$ となるから

◀ ②から $a \neq 0$

$$\begin{aligned} ① &\Leftrightarrow a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow a^2 - \frac{3}{a^2} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^4 - 2a^2 - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 - 3)(a^2 + 1) = 0 \qquad a^2 = 3,\ -1 \end{aligned}$$

◀ 両辺を a^2 倍して整頓した

a は実数なので $a = \pm\sqrt{3}$，$b = \dfrac{\sqrt{3}}{a} = \pm 1$ であり，$(a, b) = (\pm\sqrt{3}, \pm 1)$ になる．よって，$\boldsymbol{z = \sqrt{3} + i,\ -\sqrt{3} - i}$.

◀ $z = \pm\sqrt{3} \pm i$（複号同順）でもよい．

【練習：2 解から 2 次方程式を作る】(p.57)

解と係数の関係から $\alpha + \beta = \dfrac{3}{2}$, $\alpha\beta = \dfrac{5}{2}$ である．

(1) 2 解の和は $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{4}$

2 解の積は $\alpha^2\beta \times \alpha\beta^2 = \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^3 = \dfrac{125}{8}$ になるので

$x^2 - \dfrac{15}{4}x + \dfrac{125}{8} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{8x^2 - 30x + 125 = 0}$

◀ 両辺を 8 倍した．$x^2 - \dfrac{15}{4}x + \dfrac{125}{8} = 0$ でもよい．

(2) 2 解の和は $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{5}$

◀ 分母分子を 2 倍した．『複分数』(数 I，p.103)

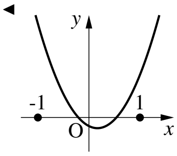
2 解の積は $\dfrac{1}{\alpha} \times \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{\alpha\beta} = \dfrac{1}{\frac{5}{2}} = \dfrac{2}{5}$ になるので

$x^2 - \dfrac{3}{5}x + \dfrac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{5x^2 - 3x + 2 = 0}$

◀ 両辺を 8 倍した．$x^2 - \dfrac{3}{5}x + \dfrac{2}{5} = 0$ でもよい．

【発展：2 次方程式の解の配置〜その４〜】(p.60)

$y = f(x) = 4x^2 - 3ax + 2a - 1$ のグラフが右欄外のようになればよいので $f(-1) > 0$, $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ をすべて満たせば良い.

◀ 

$$f(-1) = 4 + 3a + 2a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{3}{5}$$

$$f(0) = 2a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$$

$$f(1) = 4 - 3a + 2a - 1 > 0 \Leftrightarrow 3 > a$$

以上を連立して，$\boldsymbol{-\frac{3}{5} < a < \frac{1}{2}}$ が求める条件とわかる.

【発展：高次方程式〜その２〜】(p.66)

1 (a) （与式）$\Leftrightarrow (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1)(x^2 + x - 3) = 0$

◀ $x^2 + x = A$ とおけば
（与式）$\Leftrightarrow A^2 - 5A + 6 = 0$
$\Leftrightarrow (A - 2)(A - 3) = 0$

$x^2 + x - 3 = 0$ を解くと $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ なので，$\boldsymbol{x = -2,\ 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}}$.

(b) （与式）$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) = 3$

◀ 掛ける順番を工夫して，$x^2 + 5x$ を作る

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 3$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24 = 3$

◀ $x^2 + 5x$ でまとめたまま解き進める

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 21 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x + 7) = 0$

$x^2 + 5x + 3 = 0$ を解いて $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$，$x^2 + 5x + 7 = 0$ を解いて $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{-3}}{2}$ になるから，$\boldsymbol{x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2},\ \dfrac{-5 \pm \sqrt{3}i}{2}}$

(c) $x = -1$ のとき $2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = 0$ なので，因数分解すると

◀ 定数項 +2 の約数 +1, −1, +2, −2 から探した

$2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 2$

$= (x + 1)(2x^3 + 3x^2 - 6x + 2)$

-1	2	5	-3	-4	2
		-2	-3	6	-2
	2	3	-6	2	0

$x = \dfrac{1}{2}$ のとき $2x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0$ なので，因数分解すると

$\frac{1}{2}$	2	3	-6	2
		1	2	-2
	2	4	-4	0

◀ $\dfrac{\text{定数項 +2 の約数}}{\text{最高次の係数 2 の約数}}$ のうち整数でない，$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$ から探した

$2x^3 + 3x^2 - 6x + 2$

$= \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(2x^2 + 4x - 4)$

$= (2x - 1)(x^2 + 2x - 2)$

以上から（与式）$\Leftrightarrow (x + 1)(2x - 1)(x^2 + 2x - 2) = 0$ となり，$x^2 + 2x - 2 = 0$ の解は $x = -1 \pm \sqrt{3}$ だから，$\boldsymbol{x = -1,\ \dfrac{1}{2},\ -1 \pm \sqrt{3}}$

2 $x = 1$ のとき，（左辺）$= 0$ なので，右の割り算より（与式）は

$(x - 1)(x^2 + 2ax + 2a + 4) = 0$

となる.

1	1	$2a - 1$	4	$-2a - 4$
		1	$2a$	$2a + 4$
	1	$2a$	$2a + 4$	0

(a) 虚数解をもつには，$x^2 + 2ax + 2a + 4 = 0$ が虚数解をもつのが必要十分条件と分かるので

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 2a - 4 < 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 4 < 0$$

$a^2 - 2a - 4 = 0$ を解くと $a = 1 \pm \sqrt{5}$ であるから $\boldsymbol{1 - \sqrt{5} < a < 1 + \sqrt{5}}$

と分かる．

(b) まず，$x^2+2ax+2a+4=0$ は異なる 2 実数解を持たなければならないから，$a<1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}<a$．さらに，$x^2+2ax+2a+4=0$ が $x=1$ を解に持たなければよい．$x^2+2ax+2a+4=0$ が $x=1$ を解に持つのは

$$1^2+2a\cdot 1+2a+4=0 \Leftrightarrow a=-\frac{5}{4}$$

であるから，求める条件は $\boldsymbol{a<-\frac{5}{4},\ -\frac{5}{4}<a<1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}<a}$

◀「$a<1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}<a$（ただし $a\neq -\frac{5}{4}$）」でもよい

【発展：3 次方程式の解と係数の関係〜その３〜】(p.68)

解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-4}{2}=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{3}{2},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{-5}{2}=\frac{5}{2}$ である．

① $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ であるから

$$2^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\cdot\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4-3=\mathbf{1}$$

② $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ から

$$2\cdot\left(1-\frac{3}{2}\right)=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\cdot\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-\frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-1+\frac{15}{2}=\mathbf{\frac{13}{2}}$$

③ $\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$ であるから，①より

$1^2=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$ ⋯⋯⋯ ①

一方，$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$ であるから

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{3}{2}\right)^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=\frac{9}{4}-10=-\frac{31}{4}$$

これを①に代入して

$$① \Leftrightarrow\ 1=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\cdot\left(-\frac{31}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=1+\frac{31}{2}=\mathbf{\frac{33}{2}}$$

【発展：1 の 3 乗根〜その２〜】(p.69)

① (与式) $=\left(\omega^3\right)^{33}\cdot\omega+\left(\omega^3\right)^{16}\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=\mathbf{-1}$

② $\omega^{999}=1,\ \omega^{998}=\omega^2,\ \cdots$ であるから

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 1+\omega^2+\omega+1+\omega^2+\omega+\cdots+\omega^2+\omega\\ &=(1+\omega^2+\omega)+(1+\omega^2+\omega)+\cdots+(1+\omega^2+\omega)\\ &=0+0+\cdots+0=\mathbf{0}\end{aligned}$$

③ k を自然数とする．

i. $n=3k$ のとき，(与式) $=\omega^{9k}+\omega^{6k}+\omega^{3k}=1+1+1=3$

ii. $n=3k+1$ のとき，(与式) $=\omega^{9k+3}+\omega^{6k+2}+\omega^{3k+1}=1+\omega^2+\omega=0$

iii. $n=3k+2$ のとき，(与式) $=\omega^{9k+6}+\omega^{6k+4}+\omega^{3k+2}=1+\omega+\omega^2=0$

以上から，**n が 3 の倍数のときは 3，他の場合は 0**．

索引

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 I で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π, ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ, ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω