

13th-note 数学II

(新学習指導要領（平成**24**年度～）向け)

この教材を使う際は

- 表示：原著作者のクレジット「13th-note」を表示してください。
- 非営利：この教材を営利目的で利用してはいけません。ただし、学校・塾・家庭教師の授業で利用するための無償配布は可能です。
- 繙承：この教材を改変した結果生じた教材には、必ず、原著作者のクレジット「13th-note」を表示してください。
- クレジットを外して使用したいという方はご一報（kutomi@collegium.or.jp）ください。



目次

第 2 章	図形と方程式	83
§2.1	図形を座標の上に	83
§2.2	平面上の点と座標	84
§1.	2 点間の距離	84
§2.	線分の内分点・外分点	85
§3.	三角形の重心	88
§4.	座標幾何学の応用	89
§2.3	多変数関数と陰関数	92
§2.4	平面上の直線と方程式	96
§1.	直線の方程式	96
§2.	直線の平行・垂直	100
§3.	点と直線の距離	105
§4.	三角形の面積	107
§2.5	平面上の円と方程式	108
§1.	円の方程式～平方完成形	108
§2.	円の方程式～一般形	109
§3.	円の方程式の決定	110
§4.	円と直線の関係	115
§5.	2 円の関係	120
§6.	⑥⑦ 円と放物線	123
§7.	2 つのグラフの交点を通るグラフ	123
§2.6	軌跡	124
§1.	軌跡	124
§2.	座標平面上の軌跡	124
§3.	⑥⑦ 定義域に注意すべき軌跡	129
§2.7	領域	132
§1.	領域とは	132
§2.	領域の利用	135
§2.8	第 3 章の補足	139
§2.9	第 3 章の解答	141

索引

第2章 図形と方程式



この章では、方程式を用いて図形の問題を扱う。この考え方が、数学があらゆる分野に浸透するための礎を作った。

2.1 図形を座標の上に

たとえば、右の図形を言葉で説明すると、次のようになる。

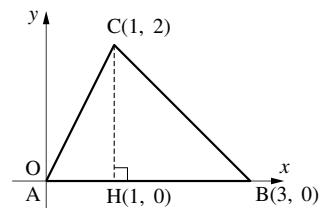
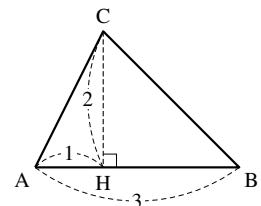
「長さ 3 の線分 AB を底辺とし、高さが 2 となる点 C をとり、 $\triangle ABC$ を作る。このとき、線分 AB 上に $AH = 1$ となるよう H をとり、線分 CH が辺 AB と垂直であるようにとる」

この図形を座標平面上に書こう。A を原点に、直線 AB を x 軸に一致させれば次のようになる。

「 $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(1, 2)$ とし、 $\triangle ABC$ を考える。また、 $H(1, 0)$ として辺 AB に垂直な線分 CH を考える。」

結果として、説明が簡潔で分かりやすくなる。

このように、座標平面上に図形を描いて考えることを、**座標幾何学** (coordinate geometry) という^{*1}。



【例題 1】 次の 2 つの文章が同じ図形を表すよう、□に適当な数値を入れよ。

- 辺 AB を斜辺とし、 $OA = 3$, $OB = \boxed{\text{ア}}$ の直角三角形 OAB を考える。
- $O(0, 0)$, $A(\boxed{\text{イ}}, 0)$, $B(\boxed{\text{ウ}}, 2)$ とし、 $\triangle OAB$ を考える。

【解答】 ア:2, イ:3, ウ:0

*1 図形を扱う学問（幾何学（geometry）と言われる）を座標の上で行うので座標幾何学と言われる。また、解析幾何（analytic geometry）ともいわれる。歴史的には、ルネ・デカルトが「幾何学（1637）」において、この方法を最初に用いたとされる。

2.2 平面上の点と座標

1. 2点間の距離

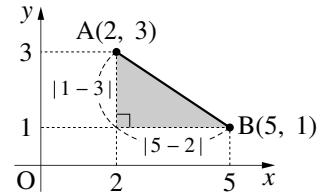
2点 A, B が座標平面上にあるとき、A と B の間の距離は三平方の定理を用いて計算できる。

たとえば A(2, 3), B(5, 1) のとき、y 座標の差について、3 - 1 も 1 - 3 も

2乗すれば同じであることに注意すれば

$$AB^2 = (5 - 2)^2 + (1 - 3)^2 \quad \therefore AB = \sqrt{13}$$

と求められる。このやり方を一般化して、次の公式を得る。

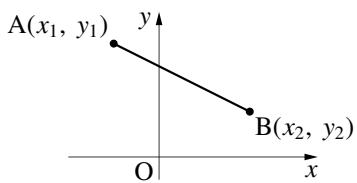


座標平面上の2点間の距離

座標平面上の2点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)に対し

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2})$$

である。特に、A が原点のときは $AB = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ である。

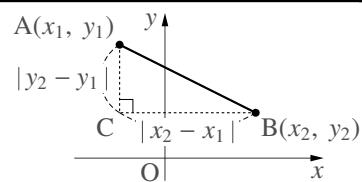


(証明) 右図のように、C(x_1, y_2) をとる。AC $\neq 0$, CB $\neq 0$ であれば、三平方の定理から

$$AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

が成り立ち、 $AB > 0$ より $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ と分かる。

$BC = 0$ または $CA = 0$ のときは、 $x_1 - x_2 = 0$ または $y_1 - y_2 = 0$ なので、明らかに成り立つ。



【例題 2】2点 A, B が次の座標にあるとき、2点 A, B の間の距離を求めよ。

1. A(1, 3), B(5, 6) 2. A(-3, -5), B(2, 3) 3. A(6, -1), B(-2, 4)

【解答】

$$1. AB = \sqrt{(5 - 1)^2 + (6 - 3)^2} = 5$$

$$2. AB = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + \{3 - (-5)\}^2} = \sqrt{89}$$

$$3. AB = \sqrt{(-2 - 6)^2 + \{4 - (-1)\}^2} = \sqrt{89}$$

【例題 3】A(3, 2) と P($x, 0$) の距離を x を用いて表せ。また、 $AP = 2\sqrt{2}$ のとき、 x の値を求めよ。

【解答】 $PA = \sqrt{(x - 3)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ であるから

$$AP = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 13} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 13 = 8$$

これを解いて、 $x = 1, 5$.

◀『2点間の距離』(p.84)

『2点間の距離』(数 II, p.84)

◀両辺 2乗した

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

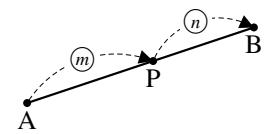
$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) = 0$$

2. 線分の内分点・外分点

A. 数直線上の内分点

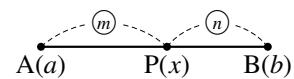
P が線分 AB を $m:n$ に内分 (interior division) するとは、 P が線分 AB 上にあり、 $AP:PB = m:n$ を満たすときのことをいった (数学 A, p.116 参照).

まず、線分 AB に定規を当てて A, B の目盛りは a, b であったとき、線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の目盛りについて考えよう。これは、数直線上の線分 AB について考えていることと同じである。



数直線上の $A(a), B(b)$ について、線分 AB を $m:n$ に内分する点 P は $\frac{na+mb}{m+n}$ で求められる。

数直線上の内分点の座標



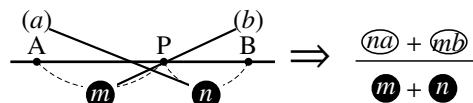
(証明) 点 P の目盛りを x とおく。 A の目盛り (a) に $x-a$ を足せば P の目盛り (x) であり、 P の目盛りに $b-x$ を足せば B の目盛り (b) である。 $x-a, b-x$ の正負は一致し、 $AP:PB = m:n$ となるので

$$(x-a):(b-x) = m:n \Leftrightarrow n(x-a) = m(b-x)$$

これを解いて、 $x = \frac{na+mb}{m+n}$ と求められる。



上の公式を使うには、右のような図を描き、「比だけを足すと分母、座標と比を交差して掛け足すと分子になる」と考えると計算しやすい。



【例題 4】以下の点 A, B について、それぞれ、線分 AB を $3:1$ に内分する点 P 、線分 AB を $2:3$ に内分する点 Q の座標を求めよ。

1. $A(1), B(6)$

2. $A(-2), B(7)$

3. $A(-3), B(-1)$

【解答】

1. P の座標は $\frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 6}{3+1} = \frac{19}{4}$, Q の座標は $\frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 6}{2+3} = 3$

2. P の座標は $\frac{1 \cdot (-2) + 3 \cdot 7}{3+1} = \frac{19}{4}$, Q の座標は $\frac{3 \cdot (-2) + 2 \cdot 7}{2+3} = \frac{8}{5}$

3. P の座標は $\frac{1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1)}{3+1} = -\frac{3}{2}$

Q の座標は $\frac{3 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1)}{2+3} = -\frac{11}{5}$

▲次のような図を描いて考えよう
(1) A (6)
(2) B
(3) P (1)

B. 内分点の座標

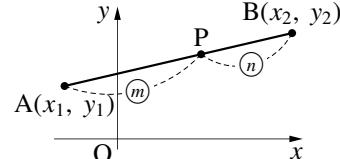
線分 AB が座標平面上にあった場合は次のようなになる。

座標平面上の内分点の座標

座標平面上の 2 点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) に対し、線分 AB を $m : n$ に内分する点を P とすると、P の座標は

$$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$$

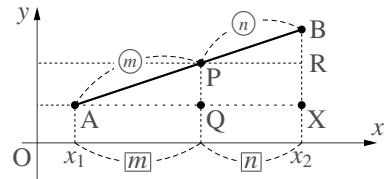
である。特に、P が中点のとき、 $m = n$ より、 $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ である。



(証明) 右下図のように考えれば、 $\triangle APQ \sim \triangle ABX$ であるので Q は線分 AX を $m : n$ に内分する点である。 x 座標だけを見れば A(x_1), X(x_2) であるので

$$(Q \text{ の } x \text{ 座標}) = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} = (P \text{ の } x \text{ 座標})$$

となる。同様にして (P の y 座標) = $\frac{ny_1 + my_2}{m+n}$ である。



【例題 5】 以下の点 A, B について、それぞれ、線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P, 線分 AB を 2 : 3 に内分する点 Q, 線分 AB の中点 H の座標を求めよ。

1. A(2, 5), B(3, 2)

2. A(-2, 3), B(3, -1)

3. A(0, 0), B(3, -4)

【解答】

1. P の座標は $\left(\frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{3+1}, \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{3+1} \right)$

Q の座標は $\left(\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{2+3}, \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 2}{2+3} \right)$

H の座標は $\left(\frac{2+3}{2}, \frac{5+2}{2} \right)$ であるので

$P\left(\frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right)$, $Q\left(\frac{12}{5}, \frac{19}{5}\right)$, $H\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

2. P の座標は $\left(\frac{1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3}{3+1}, \frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1)}{3+1} \right)$

Q の座標は $\left(\frac{3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3}{2+3}, \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)}{2+3} \right)$

H の座標は $\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{3+(-1)}{2} \right)$ であるので

$P\left(\frac{7}{4}, 0\right)$, $Q\left(0, \frac{7}{5}\right)$, $H\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

3. P の座標は $\left(\frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 3}{3+1}, \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot (-4)}{3+1} \right)$

◀ 次のような図を描いて考えよう
(P の x 座標)



(P の y 座標)



◀ (P の x 座標)



(P の y 座標)



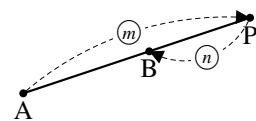
◀ $P\left(\frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 3}{3+1}, \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot (-4)}{3+1}\right)$

$Q\left(\frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 3}{2+3}, \frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4)}{2+3}\right)$

$H\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+(-4)}{2}\right)$

C. 外分点の座標

P が線分 AB を $m:n$ に外分 (exterior division) するとは, P が線分 AB を除く直線 AB 上にあり, $AP:PB = m:n$ を満たすときのことをいった (数学 A, p.116 参照).

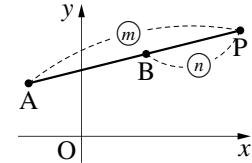


外分の場合は, A から P へ向かう向きと, P から B へ向かう向きが逆なので, 結果的には, 次の 3 つの計算が同じとなる (【発展】: 直線上の外分点】(p.90) を参照のこと).

座標平面上の外分点の座標

座標幾何学においては

- $AP:PB = m:n$ に外分する点 P を考える
- $AP:PB = m:(-n)$ に内分する点 P を考える
- $AP:PB = (-m):n$ に内分する点 P を考える



ことは同じことである (ただし, $m \neq n$). つまり, 座標平面上の 2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ に対し, 線分 AB を $m:n$ に外分する点 P の座標は次のようにになる.

$$P\left(\frac{(-n)x_1 + mx_2}{m + (-n)}, \frac{(-n)y_1 + my_2}{m + (-n)}\right) \text{ または } P\left(\frac{nx_1 + (-m)x_2}{(-m) + n}, \frac{ny_1 + (-m)y_2}{(-m) + n}\right)$$

… $m > n$ の時は $\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m - n}\right)$, $m < n$ の時は $\left(\frac{nx_1 - mx_2}{-m + n}, \frac{ny_1 - my_2}{-m + n}\right)$ を用いると, 分母に負の数が表れず, 計算ミスが起こりにくい.

【例題 6】以下の点 A, B について, それぞれ, 線分 AB を $3:1$ に外分する点 P , $2:3$ に外分する点 Q , $4:3$ に外分する点 R の座標を求めよ.

1. $A(2, 5)$, $B(3, 2)$

2. $A(-2, 3)$, $B(3, -1)$

【解答】

- 点 P は線分 AB を $3:(-1)$ に内分した点
- 点 Q は線分 AB を $(-2):3$ に内分した点
- 点 R は線分 AB を $4:(-3)$ に内分した点

と考えて, 公式に当てはめればよい.

1. P の座標は $\left(\frac{(-1) \cdot 2 + 3 \cdot 3}{3 + (-1)}, \frac{(-1) \cdot 5 + 3 \cdot 2}{3 + (-1)}\right)$

Q の座標は $\left(\frac{3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3}{(-2) + 3}, \frac{3 \cdot 5 + (-2) \cdot 2}{(-2) + 3}\right)$

R の座標は $\left(\frac{(-3) \cdot 2 + 4 \cdot 3}{4 + (-3)}, \frac{(-3) \cdot 5 + 4 \cdot 2}{4 + (-3)}\right)$

であるので $P\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Q(0, 11)$, $R(6, -7)$

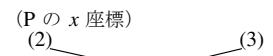
2. $P\left(\frac{11}{2}, -3\right)$, $Q(-12, 11)$, $R(18, -13)$

◀ 1 の方が小さいので 1 を (-1) 倍

◀ 2 の方が小さいので 2 を (-1) 倍

◀ 3 の方が小さいので 3 を (-1) 倍

◀ 次のような図を描いて考えよう



(P の x 座標)



(P の y 座標)



$$P\left(\frac{(-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 3}{3 + (-1)}, \frac{(-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-1)}{3 + (-1)}\right)$$

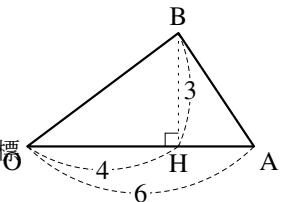
$$Q\left(\frac{3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3}{(-2) + 3}, \frac{3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1)}{(-2) + 3}\right)$$

$$R\left(\frac{(-3) \cdot (-2) + 4 \cdot 3}{4 + (-3)}, \frac{(-3) \cdot 3 + 4 \cdot (-1)}{4 + (-3)}\right)$$

【練習 7 : 平面図形】

右の $\triangle OAB$ を座標平面上に $O(0, 0)$, $A(6, 0)$ となるよう描いて考える。

- (1) H の座標, B の座標, 辺 OB の中点 N の座標を求めよ。
- (2) 辺 OA の中点 M , 線分 BM を $2:1$ に内分する点 G_1 の座標を求めよ。
- (3) 線分 BM を $2:1$ に外分する点 D , 線分 AN を $2:1$ に外分する点 E の座標を求めよ。
- (4) OB , BA , AD , DO の長さをすべて求めよ。



【解答】

$$(1) H(4, 0), B(4, 3), N\left(2, \frac{3}{2}\right)$$

$$(2) M(3, 0), G_1 \text{ の座標は } \left(\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{2+1}, \frac{1 \cdot 3 + 0}{2+1}\right) = \left(\frac{10}{3}, 1\right)$$

$$(3) D \text{ の座標は } \left(\frac{(-1) \cdot 4 + 2 \cdot 3}{2+(-1)}, \frac{(-1) \cdot 3 + 0}{2+(-1)}\right) = (2, -3),$$

$$E \text{ の座標は } \left(\frac{(-1) \cdot 6 + 2 \cdot 2}{2+(-1)}, \frac{0 + 2 \cdot \frac{3}{2}}{2+(-1)}\right) = (-2, 3)$$

$$(4) OB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, BA = \sqrt{(6-4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$AD = \sqrt{(2-6)^2 + (-3-0)^2} = 5, DO = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

◀ 公式から $M\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ として計算してもよいが、図を描けば ▲ M を OB に内分すると考えて、 D を求めることができる。

◀ 『2 点間の距離』(p.84)

◀ 四角形 $OBAD$ は平行四辺形になっている。これは、図を描いても容易に確かめられる。

3. 三角形の重心

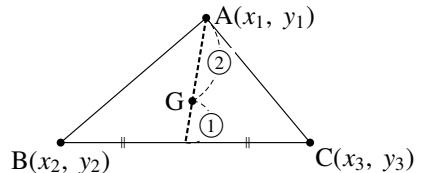
どんな三角形でも、各頂点から引いた 3 本の中線は 1 点で交わった。これを三角形の重心 (centroid, barycenter) といい、重心は、中線を $2:1$ に内分する点であった（数学 A, p.128 参照）。

座標平面上で考えると、 $\triangle ABC$ の重心の座標は次のように表される。

座標平面上の三角形の重心の座標

座標平面上の $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ について、
 $\triangle ABC$ の重心を G の座標は次のようにになる。

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$



(証明) 辺 BC の中点を N とすると、 $N\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ である。重心 G は線分 AN を $2:1$ に内分するので G の座標は $\left(\frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2+x_3}{2}}{2+1}, \frac{y_1 + 2 \cdot \frac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ となる。

… 三角形の重心の座標は、三角形の 3 頂点の座標の平均だと覚えると良い。

【例題 8】

1. A(3, 2), B(-1, 4), C(-3, -5) に対し, $\triangle ABC$ の重心 G の座標を求めるよ.

2. A(1, a), B(b, 2), C(3, -3) の重心が原点であるとき, a, b の値を求めよ.

【解答】

$$1. \left(\frac{3 + (-1) + (-3)}{3}, \frac{2 + 4 + (-5)}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

2. 重心の座標が (0, 0) であるので

$$\left(\frac{1 + b + 3}{3}, \frac{a + 2 + (-3)}{3} \right) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + b + 3 = 0 \\ a + 2 + (-3) = 0 \end{cases} \quad \therefore (a, b) = (1, -4).$$

4. 座標幾何学の応用

A. 求める点を (x, y) とおく

座標平面上で考えると, 条件を満たす点を求める問題は, 方程式を解く問題に帰着できる.

【暗記】9: 求める点を (x, y) とおく】

A(5, 4), B(0, -1) があって, 点 P(x, y) とする. 以下の問い合わせにそれぞれ答えよ.

1. 線分 AP を 2 : 1 に内分する点の座標が (0, 0) であるとき, x, y の値を求め, P の座標を答えよ.

2. AP = BP = $\sqrt{13}$ であるとき, x, y の値を求め, P の座標を答えよ.

【解答】

1. AP を 2 : 1 に内分する点 $\left(\frac{2x+5}{3}, \frac{2y+4}{3} \right)$ は, (0, 0) と等しいので

$$\frac{2x+5}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \quad \frac{2y+4}{3} = 0 \Leftrightarrow y = -2$$

よって, P の座標は $\left(-\frac{5}{2}, -2 \right)$.

2. AP = $\sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$, BP = $\sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2}$ であるので

$$AP = BP \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-4)^2 = x^2 + (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow -10x + 25 - 8y + 16 = 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 4 = x + y \quad \dots \quad ①$$

$$BP = \sqrt{13} \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 13 \quad \dots \quad ②$$

◀ 『内分点の座標』(p.86)

◀ 『2 点間の距離』(p.84)

◀ 両辺 2 乗した

◀ x^2, y^2 は移項で消去

◀ 整頓して, 両辺を 10 で割った

◀ 両辺 2 乗した

①を y について解くと $y = 4 - x$ なので, これを②へ代入して

$$x^2 + (4-x+1)^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 + x^2 - 10x + 25 = 13$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \therefore x = 2, 3$$

①から y を求めて, P(2, 2), (3, 1) とわかる.

【練習 10 : 求める点を (x, y) とおく】

A(-1, 4), B(1, 2) がある.

- (1) AP = BP となる点 P を y 軸上にとるとき, P の座標を求めよ.
- (2) AQ : BQ : AB = 1 : 1 : $\sqrt{2}$ であるとき, 点 Q の座標を求めよ.
- (3) $\triangle ABR$ が正三角形となるとき, 点 R の座標を求めよ.

【発展 11 : 直線上の外分点】

線分 AB に定規をあてると, A, B の目盛りは a, b であったという. 線分 AB を $m:n$ に外分する点 P の目盛りを x とおく.

A の目盛り a に $\boxed{\text{ア}}$ を足せば P の目盛り x であり, P の目盛り x に $\boxed{\text{イ}}$ を足せば B の目盛り b である. AP : PB = $m:n$ となるが, P は辺 AB の外側にあるため $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ の符号が異なるから, $\boxed{\text{ア}} : \boxed{\text{イ}} = m : (-n) (= (-m) : n)$ となる. これを解いて, $x = \boxed{\text{ウ}}$.

【解答】 $\text{ア} = x - a, \text{イ} = b - x, \text{ウ} = \frac{-na + mb}{m - n} \left(= \frac{na - mb}{-m + n}\right)$

B. 点について対称

【備考 12 : 点について対称】

A(1, 3) について, P(3, 2) と対称な点 Q の座標を答えよ.

【解答】 Q(x, y) とおく. 線分 PQ の中点が A になるので

$$\left(\frac{3+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right) = (1, 3)$$

$$\frac{3+x}{2} = 1 \text{ を解いて } x = -1, \quad \frac{2+y}{2} = 3 \text{ を解いて } y = 4 \text{ なので, } Q(-1, 4).$$

【練習 13 : 点について対称】

- (1) (4, 3) について, (8, 1) と対称な点の座標を答えなさい.
- (2) ($s, 1$) と $(1, t)$ が, $(-2, -4)$ について対称なとき, s, t を求めなさい.

【解答】

- (1) 求める点を (x, y) とおく. (8, 1) と (x, y) の中点が (4, 3) になるので

$$\left(\frac{8+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right) = (4, 3)$$

◀ 左辺は『内分点の座標』(p.86)

$$\frac{8+x}{2} = 4 \text{ を解いて } x = 0, \quad \frac{1+y}{2} = 3 \text{ を解いて } y = 5 \text{ なので, } (0, 5).$$

- (2) $(s, 1)$ と $(1, t)$ の中点が $(-2, -4)$ になるので

$$\left(\frac{s+1}{2}, \frac{1+t}{2}\right) = (-2, -4)$$

$$\frac{s+1}{2} = -2 \text{ を解いて } s = -5, \quad \frac{1+t}{2} = -4 \text{ を解いて } t = -9.$$

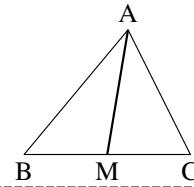
C. (発) 平面図形の証明

【暗記】14：座標平面上で証明する】

$\triangle ABC$ において、辺 BC の中点を M とする。このとき

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + MB^2)$$

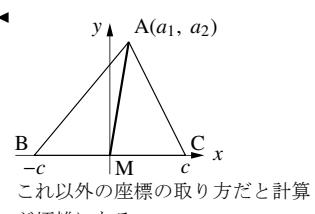
であることを、座標平面を用いて示せ。



【解答】右図のように、 M が原点となり、 BC が x 軸上に位置するような座標平面を考える。 $A(a_1, a_2)$, $C(c, 0)$, $B(-c, 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \left(\sqrt{(a_1 + c)^2 + a_2^2} \right)^2 + \left(\sqrt{(a_1 - c)^2 + a_2^2} \right)^2 \\ &= a_1^2 + 2a_1c + c^2 + a_2^2 + a_1^2 - 2a_1c + c^2 + a_2^2 \\ &= 2(a_1^2 + a_2^2 + c^2) \\ 2(AM^2 + MB^2) &= 2 \left\{ \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right)^2 + (\sqrt{c^2})^2 \right\} = 2(a_1^2 + a_2^2 + c^2) \end{aligned}$$

より、 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + MB^2)$ である。



◀ 『2 点間の距離』(p.84)

… 上で証明した等式は「中線定理」といわれる。

【暗記】15：重心】

$\triangle ABC$ について、辺 AB , BC , CA を $2:1$ に内分する点をそれぞれ D , E , F とする。 $\triangle ABC$ の重心と $\triangle DEF$ の重心が一致することを示せ。

【解答】座標平面上で $\triangle ABC$ を考え、 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ とおく。このとき、 $\triangle ABC$ の重心の座標は $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right)$

D は AB を $2:1$ に内分した点なので、 $D\left(\frac{a_1 + 2b_1}{3}, \frac{a_2 + 2b_2}{3}\right)$

E は BC を $2:1$ に内分した点なので、 $E\left(\frac{b_1 + 2c_1}{3}, \frac{b_2 + 2c_2}{3}\right)$

F は CA を $2:1$ に内分した点なので、 $F\left(\frac{c_1 + 2a_1}{3}, \frac{c_2 + 2a_2}{3}\right)$

よって、 $\triangle DEF$ の重心の座標は

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\frac{a_1 + 2b_1}{3} + \frac{b_1 + 2c_1}{3} + \frac{c_1 + 2a_1}{3}}{3}, \frac{\frac{a_2 + 2b_2}{3} + \frac{b_2 + 2c_2}{3} + \frac{c_2 + 2a_2}{3}}{3} \right) \\ &= \left(\frac{(a_1 + 2b_1) + (b_1 + 2c_1) + (c_1 + 2a_1)}{9}, \frac{(a_2 + 2b_2) + (b_2 + 2c_2) + (c_2 + 2a_2)}{9} \right) \\ &= \left(\frac{3(a_1 + b_1 + c_1)}{9}, \frac{3(a_2 + b_2 + c_2)}{9} \right) \\ &= \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right) \end{aligned}$$

となるので、一致する。

◀ A , B , C の座標は、この解答のように文字を揃えておくのがよい。そうすれば、 D , E , F がすべて同じ形になり、計算ミスに気づきやすくなる。

… 上の事実は、数学Bの「ベクトル」を用いても証明できる。



2.3 多変数関数と陰関数



変数を2つ以上持つ関数のことを**多変数関数** (multivariable function) という。もし、ある関数が x, y を変数にもつならば、その関数は $f(x, y)$ のように表される。

A. 多変数関数の例

例として、勝ちに3点、引き分けに1点、負けに0点を与えるときの合計点を考える。

勝った回数が x 回、引き分けた回数が y 回であるときの合計点を $f(x, y)$ とおけば

$$f(x, y) = 3x + y \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

と求められる。 x, y はどちらも変数であり、代入は変数が1つのときと同じように以下のように書く。

$$f(6, 4) = 18 + 4 = 22 \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

式②は「6勝4引き分けならば、合計点は22点である」ことを表している。

【例題 16】

1. $G(x, y) = x^2 + y^2 - 10$ のとき、 $G(1, 1), G(3, -1), G(-4, t)$ の値を求めよ。
2. 1個 x 円のりんごを5個、1個 y 円のみかんを7個買うときの合計を $s(x, y)$ 円とするとき、 $s(x, y)$ を求めよ。また、 $s(100, 50), s(a, 60)$ の値を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned} 1. \quad & G(1, 1) = 1^2 + 1^2 - 10 = -8, \quad G(3, -1) = 3^2 + (-1)^2 - 10 = 0 \\ & G(-4, t) = (-4)^2 + t^2 - 10 = t^2 + 6 \end{aligned}$$

2. 合計金額は $s(x, y) = 5x + 7y$ と表せるので

$$s(100, 50) = 5 \cdot 100 + 7 \cdot 50 = 850 \text{ [円]}$$

$$s(a, 60) = 5 \cdot a + 7 \cdot 60 = 5a + 420 \text{ [円]}$$

B. 陰関数とは

上の関数 $f(x, y) = 3x + y$ の値が30であったとする。つまり

$$3x + y = 30 \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

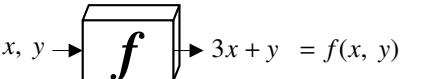
もし、 $x = 7$ であれば、等式①によって $y = 9$ と決まる。このように、 x の値に対し、等式①が y の値を与える。

逆に、 $y = 6$ であれば、等式①によって $x = 8$ と決まる。このように、 y の値に対しても、等式①が x の値を与える。

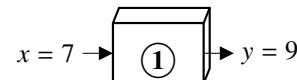
一般に、①のように

$$F(x, y) = k \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

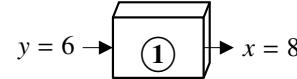
という形の等式を（ x, y についての）**陰関数** (implicit function) といい、 x, y を変数と呼ぶ^{*2}。



勝った回数(x)と引き分けの回数(y)から合計点を決める規則



合計点が30のときの勝った回数(x)と引き分けの回数(y)の間の規則



合計点が30のときの引き分けの回数(y)と勝った回数(x)との間の規則

^{*2} 陰関数という名前の由来は、文字 y が左辺の中で「陰」になっていることにある。また、上の関数 F の変数は2つだが、変数が3つ以上であってもやはり陰関数という。ただし、 F の変数が1つのときは陰関数とは呼ばれない。

陰関数 $F(x, y) = k$ を満たす (x, y) の組を、その陰関数の解 (solution) という。たとえば、 $(x, y) = (7, 9), (8, 6)$ は陰関数①の解になっている。

【例題 17】

1. $A(x, y) = 2x + 3y - 40 = 0$ とする。陰関数 $A(x, y) = 0$ において、 $x = 5$ のときの y の値と、 $y = 4$ のときの x の値を求めよ。
2. 陰関数 $4x - ay = 15$ が $(x, y) = (-3, 2)$ を解にもつとき、 a の値を求めよ。

【解答】

1. $x = 5$ のとき、 $2 \cdot 5 + 3y - 40 = 0$ を解いて、 $y = 10$ 。
 $y = 4$ のとき、 $2x + 3 \cdot 4 - 40 = 0$ を解いて、 $x = 14$ 。
2. 与えられた陰関数は $(x, y) = (-3, 2)$ を解に持つので、これを代入して a を解けば

$$4 \cdot (-3) - 2a = 15 \quad \therefore a = -\frac{27}{2}$$

◀ $2x + 3y - 40 = 0$ に $x = 5$ を代入
◀ $2x + 3y - 40 = 0$ に $y = 4$ を代入

C. 陰関数とこれまでの関数の違い

陰関数 $F(x, y) = k$ は「 x の値から変数 y の値を定め」「 y の値から x の値を定め」るが、それによってただ 1 つの値に定めるとは限らない。

たとえば、関数 $G(x, y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$ である陰関数

$$G(x, y) = x^2 + y^2 - 10 = 0 \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$x = 1 \rightarrow \boxed{\textcircled{1}} \rightarrow y = 3, -3$$

は 1 つの x の値に対して y を 1 つに定めない。たとえば $x = 1$ のとき

$$1 + y^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 9$$

陰関数 $G(x, y) = 0$

であるので、①は $y = \pm 3$ となり、 y の値をただ 1 つには定めない。

【例題 18】

1. $H(x, y) = x + y^2 - 30 = 0$ とする。陰関数 $H(x, y) = 0$ において、 $x = 5$ のときの y の値と、 $y = 4$ のときの x の値を求めよ。
2. 陰関数 $x^2 + y - 5 = 0$ と関数 $y = p(x)$ は同値な等式であるという。 $p(x)$ を求めよ。

【解答】

1. $x = 5$ のとき、 $5 + y^2 - 30 = 0$ を解いて、 $y = -5, 5$ 。
 $y = 4$ のとき、 $x + 4^2 - 30 = 0$ を解いて、 $x = 14$ 。
2. 陰関数 $x^2 + y - 5 = 0$ を y について解けば $y = -x^2 + 5$ になるので
 $p(x) = -x^2 + 5$ である。

◀ $x + y^2 - 30 = 0$ に $x = 5$ を代入
◀ $x + y^2 - 30 = 0$ に $y = 4$ を代入
◀ 右辺は y を与える x の関数になっている。

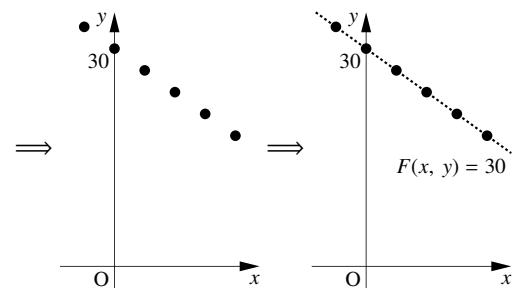
D. 陰関数のグラフ

座標平面上の点 (x, y) のうち、陰関数 $F(x, y) = k$ を満たす点をすべて集めてできる図形を、陰関数 $F(x, y) = k$ のグラフ (graph) という。

たとえば、関数 $F(x, y) = 3x + y = 30$ のグラフは次のように書くことができる。

x	…	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	33	30	27	24	21	18	…

それを座標平面上に点でとると、真ん中の図のようになり、最終的には右上図の直線となる。この直線を関数 $F(x, y) = 30$ のグラフ (graph) という。



上の陰関数 $F(x, y) = 3x + y = 30$ を y について解けば $y = -3x + 30$ となる。つまり、 $F(x, y) = 30$ のグラフは直線 $y = -3x + 30$ と一致する。

【例題 19】 上の $F(x, y)$ について、以下の□にあてはまる数値を答えよ。

1. 点 $(6, \boxed{\text{ア}})$, $(-3, \boxed{\text{イ}})$, $\left(\frac{2}{3}, \boxed{\text{ウ}}\right)$ は $F(x, y) = 30$ のグラフ上にある。
2. 点 $(\boxed{\text{エ}}, 15)$, $(\boxed{\text{オ}}, -3)$, $\left(\boxed{\text{カ}}, 20\right)$ は $F(x, y) = 30$ のグラフ上にある。

【解答】

1. ア: $F(x, y) = 3x + y = 30$ に $x = 6$ を代入して、 y について解けば $y = 12$ 。つまり、 $(6, 12)$ 。

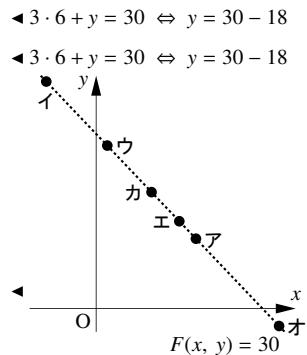
イ: $3x + y = 30$ に $x = -3$ を代入して解けば $y = 39$ より、 $(-3, 39)$ 。

ウ: $3x + y = 30$ に $x = \frac{2}{3}$ を代入して解けば $y = 28$ より、 $\left(\frac{2}{3}, 28\right)$ 。

2. エ: $F(x, y) = 3x + y = 30$ に $y = 15$ を代入して、 x について解けば $x = 5$ 。つまり、 $(5, 15)$ 。

オ: $3x + y = 30$ に $y = -3$ を代入して解けば $x = 11$ より、 $(11, -3)$ 。

カ: $3x + y = 30$ に $y = 20$ を代入して解けば $x = \frac{10}{3}$ より、 $\left(\frac{10}{3}, 20\right)$ 。



E. これまでの関数と陰関数の間の関係

y を与える x の関数 $y = f(x)$ は、必ず陰関数に変形できる^{*3}。たとえば、関数 $y = 2x - 3$ は陰関数 $y - 2x + 3 = 0$ と同じ式を表す。このように、関数 $y = f(x)$ は陰関数 $y - f(x) = 0$ に一致する。

一方、陰関数の式を y について解けば、 y を与える x の関数に変形できる。

【例題 20】以下の(a)~(f)の中から、等しい関数の組をすべて答えよ。

- (a) $x + y = 1$
- (b) $y = x - 1$
- (c) $x + y^2 = 0$
- (d) $x^2 + y - 1 = 0$
- (e) $y = -x + 1$
- (f) $y = -x^2 + 1$

【解答】すべてを陰関数になおすと

- (a) $x + y = 1$
- (b) $-x + y = 1$
- (c) $x + y^2 = 0$
- (d) $x^2 + y - 1 = 0$
- (e) $x + y = 1$
- (f) $x^2 + y - 1 = 0$

になるので、(a) と (e), (d) と (f) が等しい。

F. 直線の一般形 $ax + by + c = 0$

$ax + by + c = 0$ という形の式は直線を表し、直線の方程式の一般形といわれる。

- $(a, b, c) = (2, 3, -1)$ のとき、 $2x + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ となり傾き $-\frac{2}{3}$ 、切片 $\frac{1}{3}$ の直線
- $(a, b, c) = (2, 0, -1)$ のとき、 $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ となり、 y 軸に平行な直線

【暗記】21：2 直線の相等】

1. 2つの方程式 $y = 2x + b$ と $y = (a - 1)x + 3$ が同じ直線を表わすとき、 a, b の値を求めよ。
2. 2つの方程式 $2x + 3y - 3b + 1 = 0$ と $bx + y - a = 0$ が同じ直線を表わすとき、 a, b の値を求めよ。

【解答】

1. 傾きを見比べて $2 = a - 1$ なので $a = 3$ 、 y 切片を見比べて $b = 3$ 。
2. $2x + 3y - 3b + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{-3b+1}{3}$ 。一方、 $bx + y - a = 0 \Leftrightarrow y = -bx + a$ である。傾きと y 切片を見比べて

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} = -b \\ \frac{-3b+1}{3} = a \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

【別解】 $2x + 3y - 3b + 1 = 0$ と $bx + y - a = 0$ について、

$2 : 3 : (-3b + 1) = b : 1 : (-a)$ が成り立てばよい。

$$2 : 3 = b : 1 \text{ を解いて } b = \frac{2}{3},$$

$$3 : (-3b + 1) = 1 : (-a) \text{ を解いて } a = -\frac{1}{3}.$$

^{*3} この意味で、陰関数の概念は、これまで学んだ関数の概念より広い概念である。

2.4 平面上の直線と方程式

1. 直線の方程式

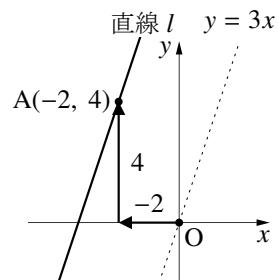
A. 与えられた 1 点を通り、傾きが定まった直線の方程式

たとえば、 $A(-2, 4)$ を通り、傾き 3 の直線を l としよう。

右図のように、原点を通る直線 $y = 3x$ を x 軸方向に -2, y 軸方向に 4 平行移動させれば直線 l になる。数学 I で学んだように*4

- 「 x 軸方向に -2 平行移動」と「 x を $x + 2$ に置き換える」は一致する
- 「 y 軸方向に 4 平行移動」と「 y を $y - 4$ に置き換える」は一致する

から、 l の方程式は $y - 4 = 3(x + 2)$ と表され、整頓して $y = 3x + 10$ を得る。



(1 点と傾きが与えられた) 直線の方程式

傾きが m で点 (p, q) を通る直線の方程式は、次の式で与えられる。

$$y - q = m(x - p)$$

(証明) $y = mx$ が (p, q) を通るように「 x 軸方向に p 平行移動し ($\Leftrightarrow x$ を $x - p$ に置き換える)」、「 y 軸方向に q 平行移動し ($\Leftrightarrow y$ を $y - q$ に置き換える)」て、 $y - q = m(x - p)$ という方程式が得られる。

【例題 22】 次の条件を満たす直線の方程式を、上の方法で導け。

1. (3, 1) を通り、傾きが -3
2. (4, -2) を通り、傾きが 2
3. (a, b) を通り、傾きが 2

【解答】

1. $y - 1 = -3(x - 3) \Leftrightarrow y = -3x + 10$
2. $y + 2 = 2(x - 4) \Leftrightarrow y = 2x - 10$
3. $y - b = 2(x - a)$



上の方法は、中学校で学ぶ方法とは異なるが、今後は上のやり方を採用するのがよい。特に、条件に文字が入った場合にたいへん計算しやすくなる。

*4 頂点 (p, q) の放物線の方程式は、以下のように考えることができた（数学 I の p.97 参照）。

頂点 $(0, 0)$ の放物線 $y = ax^2$ $\xrightarrow{x\text{ 方向に }p\text{ 平行移動 } (x\text{ を }x-p\text{ に置き換える})} y - q = a(x - p)^2 \Leftrightarrow y = a(x - p)^2 + q$ は頂点 (p, q)

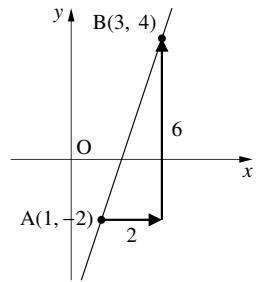
B. 与えられた2点を通る直線の方程式

たとえば、A(1, -2), B(3, 4)を通る直線を m としよう。

m の傾きは、 $\frac{(y\text{ 座標の増加分})}{(x\text{ 座標の増加分})} = \frac{4 - (-2)}{3 - 1} = 3$ である^{*5}。そこで『直線の方程式』(p.96)を用いれば

$$y + 2 = 3(x - 1) \quad (\text{または}, y - 4 = 3(x - 3))^{*6}$$

が直線 m の方程式と分かる。これを整頓して $y = 3x - 5$ となる。



【例題 23】

次の2点を通る直線の方程式を、上の方法で導け。ただし、 $a \neq 0$ とする。

1. (1, 2), (3, 4) 2. (2, 1), (-1, -3) 3. (5, 1), (-4, -2) 4. (0, 2), (a, 3)

【解答】

1. 傾きは $\frac{4 - 2}{3 - 1} = 1$ なので、 $y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x + 1$
2. 傾きは $\frac{-3 - 1}{-1 - 2} = \frac{4}{3}$ なので、 $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$
3. 傾きは $\frac{-2 - 1}{-4 - 5} = \frac{1}{3}$ なので、 $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 5) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$
4. 傾きは $\frac{3 - 2}{a - 0} = \frac{1}{a}$ なので $y - 2 = \frac{1}{a}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{a}x + 2$

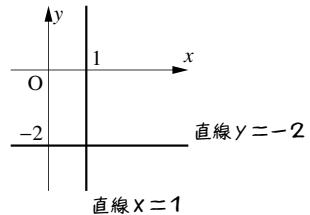
◀ $y - 4 = 1 \cdot (x - 3)$ でもよい

◀ $y + 3 = \frac{3}{4}(x + 1)$ でもよい、以下
も同じ

C. x 軸や y 軸に垂直な直線

x 座標が p である点をすべて集めてできる直線は、「直線 $x = p$ 」と表され、 y 軸に平行になる^{*7}。

同じように、 y 座標が q である点をすべて集めてできる直線は、「直線 $y = q$ 」と表され、 x 軸に平行になる。



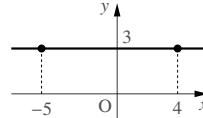
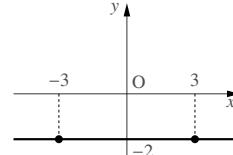
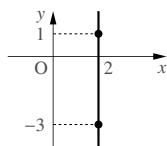
【例題 24】

次の2点を通る直線の方程式を求めよ。

1. (2, 1), (2, -3) 2. (3, -2), (-3, -2) 3. (-5, 3), (4, 3)

【解答】

1. 直線 $x = 2$ 2. 直線 $y = -2$ 3. 直線 $y = 3$



^{*5} 傾きを求めるとき、Bの座標からAの座標を引いても、Aの座標からBの座標を引いても、構わない。たとえば上の例では、 $\frac{(y\text{ 座標の増加分})}{(x\text{ 座標の増加分})} = \frac{(-2) - 4}{1 - 3} = \frac{-6}{-2} = 3$ としても、同じ値3を得る。分母と分子の、引く順番が揃っていないればよい。

^{*6} m をAを通り傾き3の直線と考えれば $y + 2 = 3(x - 1)$ 、Bを通り傾き3の直線と考えれば $y - 4 = 3(x - 3)$ となる。

^{*7} 実際、数学I(p.170)で学んだように、放物線 $y = a(x - p)^2 + q$ の軸は直線 $x = p$ であった。

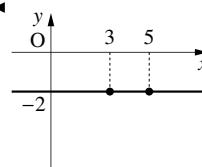
【練習 25 : 直線の方程式】

以下の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

- | | |
|---------------------------------------|---|
| (1) (3, -2) を通り、 傾きが -2 | (2) 2 点 (3, 4), (5, -6) を通る |
| (3) (p, -4) を通り、 傾きが 3 | (4) 2 点 (3, -2), (5, -2) を通る |
| (5) (2, 3) を通り、 傾きが a | (6) 2 点 (3, 1), (s, t) を通る ($s \neq 3$) |
| (7) (a, $a^2 + a$) を通り、 傾きが $2a + 1$ | (8) (a, a^2), (b, b^2) を通る ($a \neq b$) |

【解答】

- (1) $y + 2 = -2(x - 3) \Leftrightarrow y = -2x + 4$
- (2) 傾きは $\frac{-6 - 4}{5 - 3} = -5$ なので, $y - 4 = -5(x - 3) \Leftrightarrow y = -5x + 19$
- (3) $y + 4 = 3(x - p) \Leftrightarrow y = 3x - 3p - 4$
- (4) 右欄外の図から、直線 $y = -2$
- (5) $y - 3 = a(x - 2)$
- (6) 傾きは $\frac{t - 1}{s - 3}$ なので, $y - 1 = \frac{t - 1}{s - 3}(x - 3)$
- (7) $y - (a^2 + a) = (2a + 1)(x - a) \Leftrightarrow y = (2a + 1)x - a^2$
- (8) 傾きは $\frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{b - a} = b + a$ なので,
 $y - a^2 = (b + a)(x - a) \Leftrightarrow y = (b + a)x - ba$



【練習 26 : x 切片, y 切片が与えられた直線の方程式】

$a \neq 0, b \neq 0$ とする。($a, 0$), ($0, b$) を通る直線の方程式は方程式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ に一致することを示せ。

【解答】 傾きは $\frac{0 - b}{a - 0} = -\frac{b}{a}$ なので,

$$y - b = -\frac{b}{a}(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{b}{a}x + b \Leftrightarrow \frac{b}{a}x + y = b \\ \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

◀ 移項して

◀ 両辺 $\frac{1}{b}$ 倍

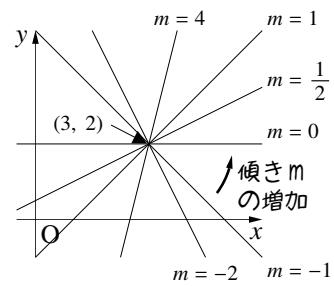


上の事実は「 x 切片, y 切片が与えられた直線の方程式」として、しばしば便利である。

D. 一定の条件を満たす直線の集まり

方程式 $L : y - 2 = m(x - 3)$ のグラフは、 m の値によって異なる。しかし、『直線の方程式』(p.96) から分かるように常に $(3, 2)$ を通る。この m の値に関わらず通る $(3, 2)$ は、 L の定点 (constant point) と言われる。また、傾きは m なので m の増加に従い、直線は反時計回りに回転する。

逆に、 $(3, 2)$ を通る直線を考えると、 y 軸に平行な直線 ($x = 3$) 以外は、 $y - 2 = m(x - 3)$ という形の方程式で表される。



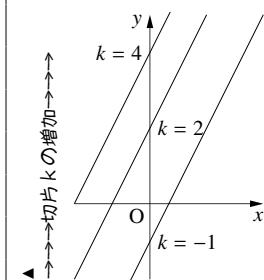
【例題 27】

k は実数とする。以下の $\boxed{\quad}$ に座標を、() に「増加」「減少」のいずれかを入れなさい。

1. 方程式 $y - 3 = k(x + 2)$ のグラフは、**ア** を必ず通る。また、 k の (イ) によって、グラフは反時計回りに回転する。
2. 方程式 $y = kx - 3$ のグラフは、**ウ** を必ず通る。また、 k の (エ) によって、グラフは反時計回りに回転する。
3. 方程式 $y = 2x + k$ のグラフは、 k の増加によって、グラフの y 切片は (オ) する。

【解答】

1. 直線 $y - 3 = k(x + 2)$ は $(-2, 3)$ を通り傾き k であるから、**ア** が定点になる。また、 k の增加 (イ) によって傾きは増加し、反時計回りに回転する。
2. 傾き k 、 y 切片 -3 の直線なので、定点は **ウ**。また、 k の增加 (エ) によって傾きは増加し、反時計回りに回転する。
3. 傾き 2 、 y 切片 k の直線なので、 k の増加によって y 切片は **オ** する。



【暗記 28：一定の条件を満たす直線の集まり～その 1～】

k を実数とする。方程式 $l : kx + x + y + 3k = 0$ の定点を答えよ。また、 k の増加によって、グラフの傾き、 y 切片はどうなるか答えよ。

【解答】

k についての降べきの順にまとめると

$$kx + x + y + 3k = 0 \Leftrightarrow k(x + 3) + x + y = 0$$

よって、定点を (x, y) について、連立方程式 $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ が成り立つ。こ

れを解いて $(x, y) = (-3, 3)$ なので、定点は $(-3, 3)$ 。

一方、 l の式を y について解くと $y = (-k - 1)x - 3k$ となるので、 k の増加によって、傾き $-k - 1$ も y 切片 $-3k$ も減少する。つまり、 k の増加によつて l は時計回りに回転し、 y 切片は減少する。

◀ k の 1 次の係数が 0 でなければ、式 $k(x+3)+x+y$ は k の値によつて変化してしまうので、 $x+3=0$ 。このとき、 $k(x+3)+x+y=0 \Leftrightarrow x+y=0$ も成り立たないといけない。

【練習 29 : 直線の定点】

次の方程式の定点を、それぞれ答えよ。

(1) $2x + 3ky + 4y + 3k = 0$

(2) $3kx + 2x - 4ky - 3y + 2k + 3 = 0$

【解答】

(1) k について降べきの順にすると $k(3y + 3) + (2x + 4y) = 0$ なので、連立

方程式 $\begin{cases} 3y + 3 = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$ を解いて $(x, y) = (2, -1)$.

よって、定点は $(2, -1)$.

(2) k について降べきの順にすると $k(3x - 4y + 2) + (2x - 3y + 3) = 0$ なの

で、連立方程式 $\begin{cases} 3x - 4y + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$ を解いて $(x, y) = (6, 5)$.

よって、定点は $(6, 5)$.

2. 直線の平行・垂直

A. 平行な 2 直線の傾きの条件

2 直線の平行は、中学でも学んでいるように以下が成り立つ。

互いに平行な 2 直線の方程式

「異なる 2 直線 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$ が平行」 $\iff m_1 = m_2$ (n_1, n_2 の値には無関係)

【例題 30】

1. $(3, 1)$ を通り、 $y = 2x - 4$ と平行な直線の方程式は、 $y - \boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{イ}}(x - \boxed{\text{ウ}})$ となり、これを整頓して $y = \boxed{\text{エ}}$ となる。

2. $(3, -2)$ を通り、 $4x + y - 2 = 0$ と平行な直線の方程式は、 $y - \boxed{\text{オ}} = \boxed{\text{カ}}(x - \boxed{\text{キ}})$ となり、これを整頓して $y = \boxed{\text{ク}}$ となる。

【解答】

1. $(3, 1)$ を通って傾き 2 の直線となり、 $y - 1 = 2(x - 3)$ と表せるから

ア : 1, イ : 2, ウ : 3, エ : $2x - 5$

◀ 『直線の方程式』 (p.96)

2. $4x + y - 2 = 0 \iff y = -4x + 2$ から、 $(3, -2)$ を通って傾き -4 の直線なので、オ : -2, カ : -4, キ : 3, ク : $-4x + 10$

◀ 『直線の一般形』 (p.95)

B. 垂直な2直線の傾きの条件

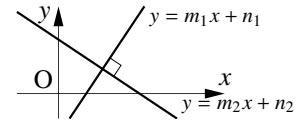
座標平面上の2本の直線が、垂直であることは、以下のようにまとめることができる。

互いに垂直な2直線の方程式

異なる2直線 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$ ($m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$) について

- 互いに直交する必要十分条件は $m_1m_2 = -1$

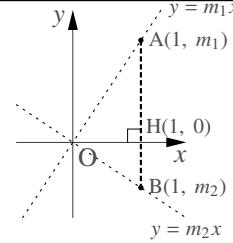
であり、それぞれの傾きのみで定まる (n_1, n_2 の値には無関係)。



(証明) 直線を平行移動しても2直線の間の角の大きさは変わらないので、原点を通る2直線 $y = m_1x$, $y = m_2x$ が直交するときを考えればよい。

右下図のように x 座標が1の点 A, B, H をとる。 $\angle AOH = 90^\circ - \angle BOH = \angle OBH$ なので、2つの直角三角形 $\triangle AOH$ と $\triangle OBH$ は相似である。よって

$$\begin{aligned} AH : HO &= OH : HB \Leftrightarrow m_1 : 1 = 1 : (-m_2) \\ &\Leftrightarrow m_1m_2 = -1 \end{aligned}$$



が成り立つ。これは、逆も成立する。

「傾き m の直線と直交するのは傾き $-\frac{1}{m}$ の直線」または「傾きの符号を変え、逆数をとれば直交する」のように捉えるとよい。

また、直線 $x = a$ や $y = b$ に平行・直交な直線は、図を描いて考えればよい。

【例題 31】

1. 次の直線と直交する直線の傾きはいくつか。

$$1) y = 2x \quad 2) y = 2x + 1 \quad 3) y = \frac{1}{4}x + 3 \quad 4) y = -\frac{3}{2}x - 5$$

2. (3, 2) を通り直線 $y = 3x - 4$ に直交する直線の方程式は $y - \boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{イ}}(x - \boxed{\text{ウ}})$ となり、これを整頓して方程式 $y = \boxed{\text{エ}}$ を得る。

3. (-1, 2) を通り直線 $y = 3$ に直交する直線を図示し、方程式を求めなさい。

【解答】

1. 求める傾きを、 m とおく。

1) $2m = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$	2) 1)と同じく $m = -\frac{1}{2}$
3) $\frac{1}{4}m = -1 \Leftrightarrow m = -4$	4) $-\frac{3}{2}m = -1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$

2. $y = 3x - 4$ に直交するので、傾きは $-\frac{1}{3}$ である。

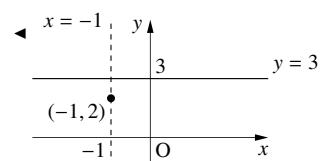
$(3, 2)$ を通つて傾き $-\frac{1}{3}$ の直線は、 $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3)$ と表せるから

ア:2, イ: $-\frac{1}{3}$, ウ:3, エ: $-\frac{1}{3}x + 3$

3. 右欄外のようになるので、求める方程式は $x = -1$ 。

◀ 切片の大きさは求める傾きに影響を与えない

◀ 『直線の方程式』(p.96)



【練習 32 : 与えられた点を通り、与えられた直線に直交する直線の方程式】

- (1) $(-3, 1)$ を通り直線 $3x - y + 4 = 0$ に平行な直線、垂直な直線をそれぞれ求めなさい。
- (2) $(1, -2)$ を通り直線 $x - 2y + 3 = 0$ に平行な直線、垂直な直線をそれぞれ求めなさい。

【解答】

(1) 直線 $3x - y + 4 = 0$ は $y = 3x + 4$ と変形でき、傾きは 3。

これと平行な直線の傾きは同じ 3 なので

$$y - 1 = 3\{x - (-3)\} \Leftrightarrow 3x - y + 10 = 0$$

直交する直線の傾きは $-\frac{1}{3}$ なので

$$y - 1 = -\frac{1}{3}\{x - (-3)\} \Leftrightarrow x + 3y = 0$$

(2) 直線 $x - 2y + 3 = 0$ は $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ と変形でき、傾きは $\frac{1}{2}$ 。

これと平行な直線の傾きは同じ $\frac{1}{2}$ なので

$$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow x - 2y - 5 = 0$$

直交する直線の傾きは -2 なので

$$y - (-2) = -2(x - 1) \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

◀ 『平行な 2 直線の方程式』(p.100)

◀ $y = 3x + 10$

◀ 『垂直な 2 直線の方程式』(p.101)

◀ $y = -\frac{1}{3}x$ と同じ

◀ $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

◀ $y = -2x$ と同じ

【発展 33 : 一般形の直線の方程式における平行・垂直】

$a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ とするとき、以下の問い合わせに答えなさい。

- ① 2 直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ が平行なとき、 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ であることを示せ。
- ② 2 直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ が垂直なとき、 $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ であることを示せ。

【解答】

① 直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ は $y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}$ より傾きは $-\frac{a_1}{b_1}$ 。

一方、 $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ から直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ は x 軸にも y 軸にも平行でない。直線 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ も x 軸にも y 軸にも平行でない。よって、 $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ なので、直線 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ は $y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}$ より傾きは $-\frac{a_2}{b_2}$ 。

2 直線は平行なので傾きが一致するから

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad \blacksquare$$

◀ 『平行な 2 直線の方程式』(p.100)

② 1. と同様にして、直線 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ は x 軸にも y 軸にも平行でなく、2 直線の傾きは $-\frac{a_1}{b_1}, -\frac{a_2}{b_2}$

2 直線は垂直なので

$$-\frac{a_1}{b_1} \times -\frac{a_2}{b_2} = -1 \Leftrightarrow a_1a_2 = -b_1b_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \quad \blacksquare$$

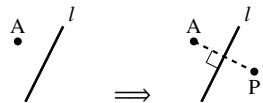
◀ 『垂直な 2 直線の方程式』(p.101)

… 上の事実は、 $a_1 = 0$ のときや、 $b_1 = 0$ のときでも成立する。

C. 直線に対して対称な点

与えられた直線 l に対し、点 A と対称な点を P とすると、以下のことが成り立つ。

- (1) 直線 AP は直線 l と垂直である。
- (2) 線分 AP の中点は直線 l 上にある。



【暗記】34：直線に対して対称な点～直線が座標軸に平行でないとき】

直線 l : $x - 2y + 3 = 0$ に対し、 $A(1, -2)$ と対称な点 P を求めなさい。

【解答】 $P(s, t)$ とおく。

l と AP は直交するので (l の傾き) \times (AP の傾き) $= -1$ である。 $l \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ から l の傾きは $\frac{1}{2}$ 、直線 AP の傾きは $\frac{t - (-2)}{s - 1}$ なので

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{t - (-2)}{s - 1} = -1 \Leftrightarrow \frac{t + 2}{2(s - 1)} = -1 \Leftrightarrow t + 2 = -2(s - 1) \\ \Leftrightarrow t = -2s \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

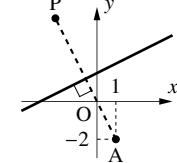
また、線分 AP の中点 $\left(\frac{s+1}{2}, \frac{t-2}{2}\right)$ は直線 l 上にあるので

$$\frac{s+1}{2} - 2 \cdot \frac{t-2}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow (s+1) - 2(t-2) + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow s = 2t - 11 \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ に } \textcircled{1} \text{ を代入して, } s = 2(-2s) - 11 \Leftrightarrow s = -\frac{11}{5}.$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入して } t = \frac{22}{5}, \text{ よって } P\left(-\frac{11}{5}, \frac{22}{5}\right).$$

◀ 『垂直な 2 直線の方程式』(p.101)

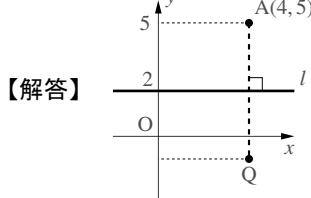


◀ 『内分点の座標』(p.86)

◀ 両辺 2 倍した

【暗記】35：直線に対して対称な点～直線が座標軸に平行なとき】

直線 l : $y = 2$ に対し、 $A(4, 5)$ と対称な点 P を求めなさい。



左の図から、

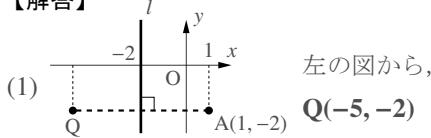
$$Q(4, -1)$$

◀ まず、 A と P は x 座標が等しい。
また、直線 l より y 方向に 3 増える
と A なので、 l より y 方向に 3
減らせば P になる。

【練習 36 : 直線に対して対称な点】

- (1) 直線 l : $x = -2$ に対し, $A(1, -2)$ と対称な点 P を求めなさい.
- (2) 直線 m : $-x + 3y - 2 = 0$ に対し, $A(3, -1)$ と対称な点 Q を求めなさい.

【解答】



(2) $Q(s, t)$ とおく. l と AQ は直交するので (m の傾き) \times (AQ の傾き) $= -1$ である. $l \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ から l の傾きは $\frac{1}{3}$, 直線 AQ の傾きは $\frac{t - (-1)}{s - 3}$ なので

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{t - (-1)}{s - 3} = -1 \Leftrightarrow \frac{t + 1}{3(s - 3)} = -1 \Leftrightarrow t + 1 = -3(s - 3) \\ \Leftrightarrow t = -3s + 8 \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

また, 線分 AQ の中点 $\left(\frac{s+3}{2}, \frac{t+(-1)}{2}\right)$ は直線 l 上にあるので

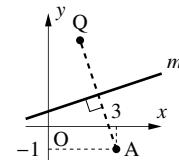
$$-\frac{s+3}{2} + 3 \cdot \frac{t-1}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow (s+3) - 3(t-1) + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow s = 3t - 10 \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

①に②を代入して, $t = -3(3t - 10) + 8 \Leftrightarrow t = \frac{19}{5}$.

これを②に代入して $s = \frac{7}{5}$, よって, $Q\left(\frac{7}{5}, \frac{19}{5}\right)$.

◀ まず, A と P は y 座標が等しい. また, 直線 l より x 方向に 3 増えると A なので, l より x 方向に 3 減らせば P になる.

◀ 『垂直な 2 直線の方程式』(p.101)



◀ 『内分点の座標』(p.86)

◀ 両辺 -2 倍した

【発展 37 : $AP + BP$ が最短になるとき】

$A(-3, 4)$, $B(2, 4)$ がある. 直線 $y = x$ 上に点 P を取るとき, $AP + BP$ が最小になるときの P の座標と, その最小値を求めなさい.

【解答】 直線 $y = x$ について B と対称な点を C とする. このとき

$$AP + BP = AP + CP \geq AC$$

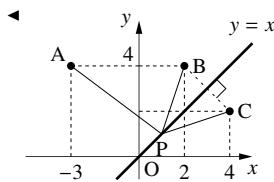
であるから, P が線分 AC 上にあるときが求める点で, 線分 AC の長さが最小値である. $(2, 4)$ を直線 $y = x$ について対称移動した点が C なので, 右欄外の図より $C(4, 2)$ と分かり, 最小値は $AC = \sqrt{(-3 - 4)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{53}$.

直線 AC は傾きが $\frac{4-2}{-3-4} = -\frac{2}{7}$ であり, 方程式は $y - 4 = -\frac{2}{7}(x + 3)$.

これと $y = x$ の交点を求めるとき,

$$x - 4 = -\frac{2}{7}(x + 3) \Leftrightarrow 7x - 28 = -2x - 6 \therefore x = \frac{22}{9}$$

よって, $P\left(\frac{22}{9}, \frac{22}{9}\right)$ のとき, $\sqrt{53}$ で最小となる.



◀ x 座標と y 座標を入れ替えれば $y = x$ に対して対称移動できる.

◀ 両辺を 7 倍して解いた

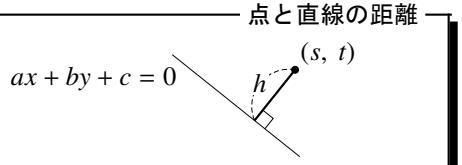
…複数の線分の和の最小値を求めるには, いずれかの点を対称移動して考えるとよい.

3. 点と直線の距離

与えられた直線 l と、その直線上にない 1 点 A の距離は次の式で与えられる。

直線 $ax + by + c = 0$ と点 (s, t) の距離 h は

$$h = \frac{|as + bt + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
 で求められる。



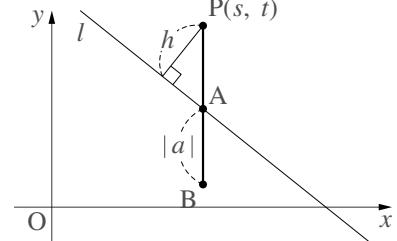
(証明) $a = 0$ または $b = 0$ のときは省略。直線 $ax + by + c = 0$ を l 、点 (s, t) を P 、 P から l への垂線の足を H とする。

右図のように、 x 座標が s の点 A, B を A は l 上に、 B は $AB = |a|$ となるよう P の反対側にとる。 A の y 座標は $-\frac{as+c}{b}$ となる。

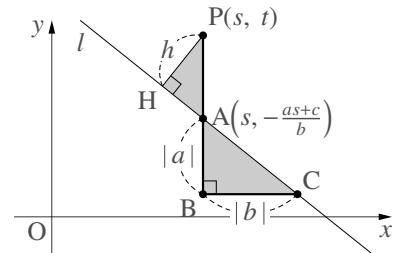
ここで、右下のように B と y 座標が等しい l 上の点 C をとると、直線 l の傾きは $-\frac{a}{b}$ なので $BC = |b|$ である。

2 角が等しいから $\triangle PAH \sim \triangle CAB$ となるので

$$\begin{aligned} PH : PA = CB : CA &\Leftrightarrow PH : \left| t - \left(-\frac{as+c}{b} \right) \right| = |b| : \sqrt{a^2 + b^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \times PH = \left| b \left(t + \frac{as+c}{b} \right) \right| \\ &\Leftrightarrow PH = \frac{|as + bt + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$



この公式を覚えるには、「分子は「直線の式の左辺に $(x, y) = (s, t)$ を代入し、絶対値をつける（距離なので）」、分母は「 a, b に三平方の定理を用いる」」のようにするとよい。



【例題 38】 それぞれ与えられた直線 l と一点 A について、直線 l と点 A の距離を求めなさい。

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $l: 2x - y + 4 = 0, A(2, -1)$ | 2. $l: 3x - 4y - 2 = 0, A(0, 0)$ |
| 3. $l: 3x - 4y - 2 = 0, A(-4, -4)$ | 4. $l: -3x + 2y + 1 = 0, A(2, k)$ |

【解答】

1. $\frac{|2 \cdot 2 - (-1) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$
2. $\frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$
3. $\frac{|3 \cdot (-4) - 4 \cdot (-4) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$
4. $\frac{|-3 \cdot 2 + 2 \cdot k + 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = \frac{|2k - 5|}{\sqrt{13}}$

◀ $|2k - 5|$ はこれ以上簡単にできない。

【練習 39 : 点と直線の距離～その 1～】

以下の直線と、点 $(2, -1)$ の距離をそれぞれ答えなさい。

$$(1) 2x - y + 1 = 0$$

$$(2) -x + 3y - 5 = 0$$

$$(3) y = 3x - 2$$

【解答】

$$(1) \frac{|2 \cdot 2 - (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$(2) \frac{|-2 + 3 \cdot (-1) - 5|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

(3) 直線の式は $3x - y - 2 = 0$ と変形できるので

$$\frac{|3 \cdot 2 - (-1) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

◀ 有理化すれば $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

【練習 40 : 点と直線の距離～その 2～】

(1) 直線 $l: 3x - 4y - k = 0$ と $A(2, 1)$ の距離が 3 であるとき、 k の値を求めよ。

(2) 直線 $l: 2kx + y - 2 = 0$ と $A(2, 1)$ の距離が 1 であるとき、 k の値を求めよ。

【解答】

(1) 直線 l と A の距離は $\frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|2 - k|}{5}$ であり、これが 3 に等しいので

$$\frac{|2 - k|}{5} = 3 \Leftrightarrow |2 - k| = 15$$

$2 - k = \pm 15$ を解いて、 $k = 17, -13$ を得る。

(2) 直線 l と A の距離は $\frac{|(2k) \cdot 2 + 1 - 2|}{\sqrt{(2k)^2 + 1^2}} = \frac{|4k - 1|}{\sqrt{4k^2 + 1}}$ であり、これが 1 に等しいので

$$\frac{|4k - 1|}{\sqrt{4k^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |4k - 1| = \sqrt{4k^2 + 1}$$

両辺とも正なので、両辺 2 乗して

$$\Leftrightarrow (4k - 1)^2 = 4k^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 12k^2 - 8k = 0 \quad \therefore \quad k = 0, \frac{2}{3}$$

◀ 『点と直線の距離』(p.105)

◀ $2 - k = 15$ のときは $k = -13$
 $2 - k = -15$ のときは $k = 17$

◀ $|4k - 1|^2 = (4k - 1)^2$
 $|4k - 1| = 4k - 1$ のときも、
 $|4k - 1| = -(4k - 1)$ のときも、
2 乗すれば $(4k - 1)^2$ になる

4. 三角形の面積

【例題 41】 M(1, 2), A(3, 4), B(4, -3) があるとき

1. 線分 AB の長さを求めよ.
2. 直線 AB の方程式を求めよ.
3. M と直線 AB の距離を求めよ.
4. $\triangle MAB$ の面積を求めよ.

【解答】

1. $AB = \sqrt{(4-3)^2 + (-3-4)^2} = 5\sqrt{2}$

◀ 『2 点間の距離』(p.84)

2. 傾きは $\frac{4-(-3)}{3-4} = -7$ なので

$$y-4 = -7(x-3) \Leftrightarrow y = -7x + 25$$

3. 直線 AB の式を変形すると $7x+y-25=0$ なので

$$\frac{|7 \cdot 1 + 2 - 25|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{|-16|}{5\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

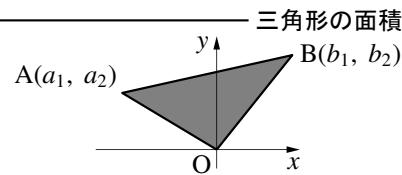
◀ 『点と直線の距離』(p.105)

4. $\triangle MAB = \frac{1}{2}AB \times \frac{8\sqrt{2}}{5} = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times \frac{8\sqrt{2}}{5} = 8$

座標平面上の三角形は、頂点のうち 1 点が原点にあれば、次のようにして求められる。

原点を O, A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) とするとき

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$



証明は p.139 を参照のこと



△ 三角形のどの頂点も原点でないときは、下の 2. のように平行移動を用いて求める。

【例題 42】

1. O(0, 0), A(2, 1), B(-3, 2) のとき, $\triangle OAB$ の面積を求めよ.
2. M(1, 2), A(3, 4), B(4, -3) とする. $\triangle MAB$ を平行移動して $\triangle OA'B'$ になったという.
 - i) A', B' の座標を求めよ.
 - ii) $\triangle OA'B'$, $\triangle MAB$ の面積を求めよ.

【解答】

1. $\triangle OAB = \frac{1}{2}|2 \cdot 2 - 1 \cdot (-3)| = \frac{1}{2}|7| = \frac{7}{2}$

◀ 『三角形の面積』(p.107)

2. i) x 軸方向に -1, y 軸方向に -2 平行移動するので

$$A(3, 4) \rightarrow A'(2, 2) \quad B(4, -3) \rightarrow B'(3, -5)$$

ii) $\triangle OA'B' = \frac{1}{2}|2 \cdot (-5) - 2 \cdot 3| = \frac{1}{2}|-16| = 8$. また、 $\triangle MAB$ を平行移動して $\triangle OA'B'$ になったので、 $\triangle MAB = \triangle OA'B' = 8$.



2.5 平面上の円と方程式



この節では、平面上の円が、座標平面上ではどう表現されるか考えていく。

1. 円の方程式～平方完成形

A. 円は中心と半径のみで決まる

円は、中心と半径を決めればただ1つに定まり、次の式で表される。

円の方程式～平方完成形

点 (a, b) を中心とし、半径が $r (> 0)$ である円の方程式は、次のように表される。

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

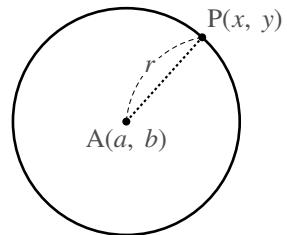
この円の方程式は、平方完成形の方程式といわれる。

(証明) 円 C の周上にある点 P の座標を (x, y) とする。2点 A, P の間の距離が r であることと同値である。『2点間の距離』(p.84) で学んだように、 $AP = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ であるから

P が円 C の周上にある $\Leftrightarrow AP = r$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

等式①の両辺は共に正であるので両辺を2乗し、円の方程式を得る。

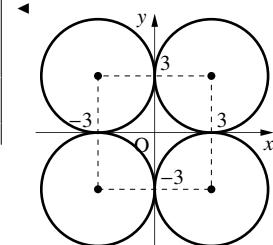


【例題 43】

1. 座標平面上に次のような円があるとき、その方程式をそれぞれ求めよ。
(a) 中心 $(3, 2)$, 半径 3 (b) 中心 $(-3, 1)$, 半径 2 (c) 中心 $(0, -2)$, 半径 $\sqrt{3}$
2. x 軸, y 軸の両方に接する半径が 3 の円はいくつあるか。また、それの方程式を求めよ。

【解答】

1. (a) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ (b) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
(c) $x^2 + (y + 2)^2 = 3$
2. 右欄外の図から、条件を満たす円は 4 つある。 $(\pm 3, \pm 3)$ が中心なので
 $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$, $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$,
 $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$, $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$



2. 円の方程式～一般形

A. 円は $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ という形の式でも表される

中心 $(2, -1)$, 半径 3 の円の方程式は $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ となるが, この式は

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0\end{aligned}$$

と変形することができる. この形の円の方程式を一般形と言う.

【例題 44】以下の円の方程式を, 一般形で表せ.

1. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 1$

2. 中心が $(4, -1)$ で半径 3 の円

【解答】

1. 左辺を展開すると, $x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 5y + \frac{25}{4} = 1$ となる., 右辺が 0 になるよう移項して $x^2 - 3x + y^2 + 5y + \frac{15}{2} = 0$.

2. 円の方程式は $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$ となる. 展開・整理して

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x + y^2 + 2y + 8 = 0\end{aligned}$$

◀ 右辺が 0 になるよう移項した

B. 一般形を平方完成形に変形する

方程式 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ は

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{(x^2 - 4x + 4)}_{x \text{ について平方完成}} + \underbrace{(y^2 + 2y + 1)}_{y \text{ について平方完成}} - 4 = 4 + 1 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9\end{aligned}$$

と変形し, 中心 $(2, -1)$, 半径 3 の円の方程式に一致することがわかる.

【例題 45】次の円の方程式の中心と半径を求めよ.

1. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

2. $x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0$

【解答】

1. (与式) $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + 1 = 1 + 4$
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

◀ 両辺に 1 と 4 を足した

となるので, 中心は $(1, -2)$, 半径は 2 である.

2. (与式) $\Leftrightarrow x^2 + (y^2 - 6y + 9) + 1 = 9$
 $\Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 8$

◀ 両辺に 9 を足した

となるので, 中心は $(0, 3)$, 半径は $2\sqrt{2}$ である.

x, y についての2次式であり、どちらの2次の係数も1である方程式

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

は、 $\frac{l^2}{4} + \frac{m^2}{4} - n > 0$ のときに円の方程式を表し、一般形の方程式といわれる。

方程式 $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ を、 x について、 y について別々に平方完成すれば

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2 + lx)}_{x^2, x \text{ の項をまとめた}} + \underbrace{(y^2 + my)}_{y^2, y \text{ の項をまとめた}} + n = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2}_{x \text{ について平方完成}} + \underbrace{\left(y + \frac{m}{2}\right)^2}_{y \text{ について平方完成}} = \frac{l^2}{4} + \frac{m^2}{4} - n$$

と変形できるので、 $\frac{l^2}{4} + \frac{m^2}{4} - n > 0$ であれば、円の方程式を表していることになる。

… $\frac{l^2}{4} + \frac{m^2}{4} - n = 0$ のとき、 $(x, y) = \left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right)$ だけが $x^2 + lx + y^2 + my + n = 0$ を満たす。

【練習 46】円の方程式～平方完成形と一般形】

(1) 中心が $(-2, -1)$ で半径 $\sqrt{3}$ の円の方程式を、平方完成形で表せ。また、一般形で表せ。

(2) 次の中から円の方程式を表すものを選び、その円の中心と半径を求めよ。

a) $x^2 + y^2 - 3x + 5 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = 0$ c) $2x^2 + 2y^2 + 8x - 4y = 0$

【解答】

(1) 平方完成形は $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 3$

左辺を展開し、一般形は $x^2 + 4x + y^2 + 2y + 2 = 0$

◀ 右辺が 0 になるよう移項した

(2) それぞれ、与えられた式を平方完成すれば

$$\begin{aligned} \text{a) } (\text{与式}) &\Leftrightarrow \left\{x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} + y^2 + 5 = \frac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = -\frac{11}{4} \end{aligned}$$

◀ 両辺に $\frac{9}{4}$ を足した

b) (与式) $\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 0$

◀ 両辺を 2 で割って平方完成

c) (与式) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

以上より、円を表すものは c)。中心は $(-2, 1)$ 、半径は $\sqrt{5}$ である。

3. 円の方程式の決定

A. 準備～方程式への代入

たとえば、円 C : $(x - 2)^2 + (y - b)^2 = 5$ が $(3, 2)$ を通るならば、 $(x - 2)^2 + (y - b)^2 = 5$ に $(x, y) = (3, 2)$ を代入した等式は成り立つ、つまり

$$\begin{aligned} (3 - 2)^2 + (2 - b)^2 = 5 &\Leftrightarrow 1 + 4 - 4b + b^2 = 5 \\ &\Leftrightarrow b^2 - 4b = 0 \Leftrightarrow b(b - 4) = 0 \end{aligned}$$

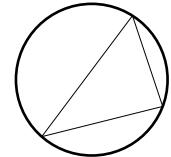
これを解いて $b = 0, 4$ を得る。特に、円 C の中心は $(2, 0)$ または $(2, 4)$ と分かる。

【例題 47】 円 $C : (x - a)^2 + (y - 3)^2 = 13$ が $(5, 5)$ を通るとき、 a の値を答えよ。

【解答】 $(x - a)^2 + (y - 3)^2 = 13$ に $(x, y) = (5, 5)$ を代入して

$$(5 - a)^2 + (5 - 3)^2 = 13 \Leftrightarrow 25 - 10a + a^2 + 4 = 13 \\ \Leftrightarrow a^2 - 10a + 16 = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a - 8) = 0$$

これを解いて $a = 2, 8$ である。



B. 与えられた 3 点を通る円の方程式

どんな三角形も、外接円はただ 1 つに定まった。これは、(同一直線上にない) 3 点を通る円周がただ 1 つに定まるることを意味する。

【暗記 48：円の方程式～その 2～】

3 点 $A(3, 0)$, $B(0, -2)$, $C(-2, 1)$ を通る円 K の方程式について、□に適する式・数値を入れよ。

1. K の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とおく。ここで以下が成立する。

A を通るから方程式 □ア, B を通るから方程式 □イ, C を通るから方程式 □ウ

3 式を連立して $(l, m, n) = (\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}})$ と解けて、 K の方程式 □キを得る。

2. K の中心を $O(p, q)$ とする。ここで

$OA = OB$ から p, q の方程式 □クが、 $OA = OC$ から p, q の方程式 □ケが成り立つ。

2 つの式を連立して解けば $(p, q) = (\boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}})$ である。

つまり、 $OA^2 = \boxed{\text{シ}}$ であるので K の方程式は □スと分かる。

【解答】

1. $A(3, 0)$ を代入し $3^2 + 0 + 3l + 0 + n = 0 \Leftrightarrow 3l + n = -9$ (ア)

$B(0, -2)$ を代入し $0 + (-2)^2 + 0 - 2m + n = 0 \Leftrightarrow -2m + n = -4$ (イ)

$C(-2, 1)$ を代入し $(-2)^2 + 1^2 - 2l + m + n = 0 \Leftrightarrow -2l + m + n = -5$ (ウ)

ア : -1, オ : -6, カ : $x^2 + y^2 - x - y - 6 = 0$

2. ク : $OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{(p - 3)^2 + q^2} = \sqrt{p^2 + (q + 2)^2}$

$\Leftrightarrow (p - 3)^2 + q^2 = p^2 + (q + 2)^2 \Leftrightarrow 5 = 6p + 4q$

ケ : $OA = OC \Leftrightarrow \sqrt{(p - 3)^2 + q^2} = \sqrt{(p + 2)^2 + (q - 1)^2}$

$\Leftrightarrow (p - 3)^2 + q^2 = (p + 2)^2 + (q - 1)^2 \Leftrightarrow 2 = 5p - q$

ク, ケを整理して、連立方程式 $\begin{cases} 6p + 4q = 5 \\ 5p - q = 2 \end{cases}$ を得る。これを解いて

て $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (サ) を得る。よって、 $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $A(3, 0)$ であるから、

$OA^2 = \left(\left(\frac{1}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2\right) = \frac{13}{2}$ (シ) であるので、 K の方程式は

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$ (ス) となる。

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3l + n = -9 & \dots \dots \dots \textcircled{1} \\ -2m + n = -4 & \dots \dots \dots \textcircled{2} \\ -2l + m + n = -5 & \dots \dots \dots \textcircled{3} \end{cases} \\ & \textcircled{2} + 2 \times \textcircled{3} \text{ より} \\ & \quad -2m + n = -4 \\ & \textcircled{1} - \textcircled{2}' \text{ より } 13l = -13 \text{ と} \\ & \text{なって } l = -1. \textcircled{2}, \textcircled{1} \text{ から } m, n \\ & \text{を求めればよい} \end{aligned}$$

◀ 両辺 2 乗して p^2, q^2 を消去し、
両辺整頓した

◀ 『2 点間の距離』(p.84)

【練習 49：円の方程式～その 2～】

A(3, 1), B(4, -4), C(-1, -5) とする。△ABC の外接円の中心と半径を求めよ。

【解答】 △ABC の外接円は 3 点 A, B, C を通る円に一致する。その方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とおく。

$$A \text{ を通ることから } 3^2 + 1^2 + l \cdot 3 + m \cdot 1 + n = 0$$

$$B \text{ を通ることから } 4^2 + (-4)^2 + l \cdot 4 + m \cdot (-4) + n = 0$$

$$C \text{ を通ることから } (-1)^2 + (-5)^2 + l \cdot (-1) + m \cdot (-5) + n = 0$$

である。これらを整頓して、連立方程式を得る。

$$\begin{cases} 3l + m + n = -10 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 4l - 4m + n = -32 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ -l - 5m + n = -26 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

これを解いて $(l, m, n) = (-2, 4, -8)$ 。よって、△ABC の外接円の方程式は

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 13$$

となり、△ABC の外接円の中心は (1, -2)、半径は $\sqrt{13}$ である。

【(2) の別解 (略解)】

外接円の中心を O(x, y) とすると、OA = OB = OC であるので

$$\begin{cases} \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y + 4)^2} \\ \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 5)^2} \end{cases}$$

これを解いて、中心は $(x, y) = (1, -2)$,

外接円の半径は $OA = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{13}$.

◀ ① - ②, ② - ③ から得られた

2 式を連立して $(l, m) = (-2, 4)$.

①から $n = -8$

◀ 中心と半径を求めるため平方完成型に変形

◀ (1) も同じようにして解くことができる

C. 円を図形的に考える

円が通る 3 点が与えられた場合も、図を描けば簡単に分かる場合がある。

【練習 50：図形的に考える～その 1～】

3 点 A(2, 2), B(-4, 2), C(-4, 4) を通る円 K について考えてみよう。

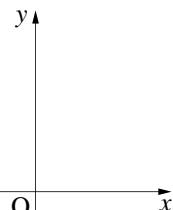
右に 3 点を図示すれば、K の中心 R は AB の垂直二等分線上にある

から R の [ア] 座標は [イ]、K の中心 R は BC の垂直二等分線上に

あるから R の [ウ] 座標は [エ] と分かる。

よって、R の座標は [オ] であり、K の半径は RA = [カ] なので、K

の方程式は [キ] と求められる。



【解答】 ア : x, イ : -1, ウ : y, エ : 3, オ : (-1, 3)

カ : $\sqrt{10}$, キ : $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$

◀ K の半径は RB や RC で求めてよい。

D. 中心や半径の条件が与えられた円の方程式

中心や半径の条件が与えられた場合は、平方完成形 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ を用いて考えよう。

【例題 51】以下の□に i. (2, b), ii. (a, 2), iii. (a, b), iv. (a, a) のうち最も適するものを答え、それぞれの問い合わせに答えなさい。

1. 中心が直線 $x = 2$ 上にある円 C_1 の中心は □ とおくことができる。さらに、 C_1 が A(3, 2), B(0, 3) を通るとき、円 C_1 の方程式を求めよ。
2. 中心が直線 $y = x$ 上にある円 C_2 の中心は □ とおくことができる。さらに、 C_2 が P(1, 3), Q(-2, 1) を通るとき、円 C_2 の方程式を求めよ。
3. y 座標が正の側で x 軸に接し、円の半径が 2 である C_3 の中心は □ とおくことができる。さらに、 C_3 が T(2, 1) を通るとき、円 C_3 の方程式を求めよ。

【解答】

1. C_1 の中心の x 座標は 2 になるから i. (ア) である。これによって、求める円の方程式は $(x - 2)^2 + (y - b)^2 = r^2$ とおくことができる。

$$A \text{ を通ることから } (3 - 2)^2 + (2 - b)^2 = r^2$$

$$B \text{ を通ることから } (0 - 2)^2 + (3 - b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4b + 5 = r^2 \\ b^2 - 6b + 13 = r^2 \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad \text{①} \quad \dots \dots \dots \quad \text{②}$$

① - ② から $2b - 8 = 0$ なので $b = 4$ である。これを②に代入して $r^2 = 5$ となるので、求める円の方程式は $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$ 。

► 整頓して、連立した①の r^2 に②を代入すると考えてよい

2. C_2 の中心は、 x 座標と y 座標が等しいから iv. (イ)

求める円の方程式は $(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2$ とおくことができる。

$$A \text{ を通ることから } (1 - a)^2 + (3 - a)^2 = r^2$$

$$B \text{ を通ることから } (-2 - a)^2 + (1 - a)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 8a + 10 = r^2 \\ 2a^2 + 2a + 5 = r^2 \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad \text{③} \quad \dots \dots \dots \quad \text{④}$$

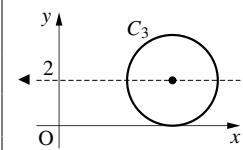
③ - ④ から $-10a + 5 = 0$ なので $a = \frac{1}{2}$ 。これを④に代入して $r^2 = \frac{13}{2}$

となるので、求める円の方程式は $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$ 。 C_3 の中心は右欄外のようになり、中心の y 座標は 2 と定まるから ii. (ウ)、求める円の方程式は $(x - a)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$ とおくことができる。

$$T \text{ を通ることから } (2 - a)^2 + (1 - 2)^2 = 2^2 \text{ である。}$$

これを整理して解けば、 $a^2 - 4a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \pm \sqrt{3}$ なので、求める円の方程式は、 $\{x - (2 \pm \sqrt{3})\}^2 + (y - 2)^2 = 4$ 。

► 中心は直線 $y = x$ 上にあるので、中心の x 座標を a とおくと、 y 座標も a になる



$$\begin{aligned} & \{x - (2 + \sqrt{3})\}^2 + (y - 2)^2 = 4 \\ & \{x - (2 - \sqrt{3})\}^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{aligned}$$

【練習 52 : 円の方程式～その 1～】

- (1) 中心が直線 $y = 2$ 上にあり, $(3, 5), (2, -2)$ を通る円の方程式を求めよ.
- (2) 中心が直線 $y = -x$ 上にあり, $(4, -1), (-3, 0)$ を通る円の方程式を求めよ.
- (3) $(-3, 5)$ を通り, x 座標が負の側で y 軸に接する半径が 2 の円の方程式を求めよ.

【解答】

(1) 求める円の方程式は $(x - a)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ とおくことができる.

A を通ることから $(3 - a)^2 + (5 - 2)^2 = r^2$

B を通ることから $(2 - a)^2 + (-2 - 2)^2 = r^2$

$$\begin{array}{lcl} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - 6a + 18 = r^2 \\ a^2 - 4a + 20 = r^2 \end{array} \right. & \cdots \cdots \cdots \cdots & \textcircled{1} \\ & \cdots \cdots \cdots \cdots & \textcircled{2} \end{array}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ から $-2a - 2 = 0$ なので $a = -1$ である. これを $\textcircled{2}$ に代入すれば $r^2 = 25$ なので, 求める円の方程式は $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

(2) 求める円の方程式は $(x - a)^2 + (y + a)^2 = r^2$ とおくことができる.

A を通ることから $(4 - a)^2 + (-1 + a)^2 = r^2$

B を通ることから $(-3 - a)^2 + (0 + a)^2 = r^2$

$$\begin{array}{lcl} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a^2 - 10a + 17 = r^2 \\ 2a^2 + 6a + 9 = r^2 \end{array} \right. & \cdots \cdots \cdots \cdots & \textcircled{3} \\ & \cdots \cdots \cdots \cdots & \textcircled{4} \end{array}$$

$\textcircled{4} - \textcircled{3}$ から $16a - 8 = 0$ なので $a = \frac{1}{2}$ これを $\textcircled{3}$ に代入すれば $r^2 = \frac{25}{2}$

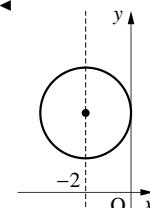
であるので, 求める円の方程式は $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

(3) 右欄外の図から, 中心の x 座標が -2 とわかるので, 求める方程式を $(x + 2)^2 + (y - b)^2 = 2^2$ とおくことができる. これが $(-3, 5)$ を通るので $(-3 + 2)^2 + (5 - b)^2 = 2^2 \Leftrightarrow 1 + 25 - 10b + b^2 = 4$

$$\Leftrightarrow b^2 - 10b + 22 = 0 \quad \therefore r = 5 \pm \sqrt{3}$$

なので, 求める円の方程式は $(x + 2)^2 + \{y - (5 \pm \sqrt{3})\}^2 = 4$

◀ 中心は直線 $y = -x$ 上にあるので,
中心の x 座標を a とおくと, y 座標は $-a$ になる

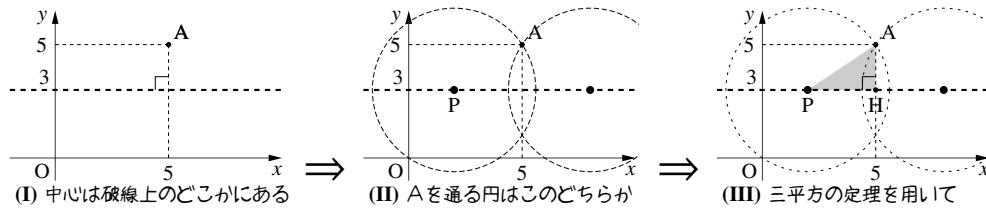


【発展 53 : 円の方程式～その 2～】

- (1) 中心が直線 $y = -2x + 1$ 上にあり, $(4, 2), (-6, -2)$ を通る円の方程式を求めよ.
- (2) 中心が直線 $3x - y - 4 = 0$ 上にあり, x 軸, y 軸の両方に接する円の方程式を求めよ.

【練習 54 : 円を図形的に考える~その 2 ~】

「円 C : $(x - a)^2 + (y - 3)^2 = 13$ が $A(5, 5)$ を通る」場合について考えてみよう。



まず、円 C の中心は $(a, 3)$ なので、図 (I) の破線上のどこかに C の中心はある。

A の y 座標が 5 なので $AH = \boxed{\text{ア}}$ であり、 C の半径を考えて $AP = \boxed{\text{イ}}$ なので、(III) の直角三角形 APH を考えて、 $PH = \boxed{\text{ウ}}$ と分かる。

ここから、 C の中心の座標は **エ**, **オ** のいずれかと分かる。

【解答】 ア : 2, イ : $\sqrt{13}$, ウ : $PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = 3$,

エ, オ : $(2, 3), (8, 3)$

◀ 【確認 47】の結果と一致している

4. 円と直線の関係

A. 円と直線の交点

円と直線の交点の座標を求めるには、連立方程式を解けばよい。このとき、「グラフの交点の座標と連立方程式の解は一致する」。また、連立方程式の解が無い場合は、グラフの交点も無い。

【例題 55】 座標平面上に円 C : $x^2 + y^2 = 5$ があるとき、以下の問いに答えよ。

1. 直線 $l_1 : x + y = 3$ と円 C の共有点があれば、すべて求めよ。
2. 直線 $l_2 : x + y = 4$ と円 C の共有点があれば、すべて求めよ。

【解答】

1. l_1 の方程式より $y = 3 - x$ であるので、 $x^2 + y^2 = 5$ に代入すれば

$$\begin{aligned} x^2 + (3 - x)^2 &= 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 = 5 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$

これを解いて $x = 1, 2$ である。右欄外の①より、共有点の座標は

(2, 1), (1, 2) である。

2. l_1 の方程式より $y = 4 - x$ であるので、 $x^2 + y^2 = 5$ に代入すれば

$$x^2 + (4 - x)^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 11 = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。2 次方程式⑤の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - 2 \cdot 11 = -6 < 0$$

であるので⑤は実数解を持たない。つまり、 l_2 と C は共有点を持たない。

◀ 直線 l_1 と円 C の共有点は、連立方程式

$$\begin{cases} x + y = 3 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 5 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

の解に一致する。

◀ ①に代入して y を解く

◀ 直線 l_2 と円 C の共有点は、連立方程式

$$\begin{cases} x + y = 4 & \dots \textcircled{3} \\ x^2 + y^2 = 5 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

解に一致する。

◀ ⑤は実数解を持たないことは、連立方程式③, ④は実数解を持たないことになるため

【練習 56 : 円と直線の共有点の個数】

次の円と直線の、共有点の座標を求めなさい。なければ「共有点なし」と答えること。

- (1) 円 $x^2 + y^2 = 10$ と直線 $y = 2x - 5$
- (3) 円 $x^2 + y^2 = 9$ と直線 $x - 2y + 7 = 0$

- (2) 円 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$ と直線 $y = 3x + 3$

【解答】

(1) 直線の式を代入して $x^2 + (2x - 5)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

よって $x = 1, 3$ なので、直線の式から交点は $(1, -3), (3, 1)$.

(2) 直線の式を代入して

$$(x + 2)^2 + (3x + 3 - 2)^2 = 5 \Leftrightarrow 10x^2 + 10x = 0$$

よって $x = 0, -1$ なので、直線の式から交点は $(0, 3), (-1, 0)$.

(3) 直線の式を x について解くと $x = 2y - 7$ なので

$$(2y - 7)^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow 5y^2 - 28y + 40 = 0$$

この 2 次方程式の判別式は $\frac{D}{4} = (-14)^2 - 5 \cdot 40 = -4 < 0$ であるので、

共有点はない。

◀ 展開・整頓して、両辺を 5 で割った

◀ 解の公式で解くと

$$y = \frac{28 \pm \sqrt{-16}}{10}$$

となって実数解
は存在しない。

B. 円と直線の共有点の個数

円と直線の関係は、「円の中心と、直線の距離」でも決まる。

【暗記 57 : 円と直線の共有点の個数】

円 $C : x^2 + y^2 = 5$ と直線 $l : x + y = k$ が共有点を持つような実数 k の範囲を、次の 2 通りで求めよ。

1. 2 次方程式の判別式を用いる。

2. 『点と直線の距離』(p.105) を用いる。

【解答】

1. 連立方程式 $\begin{cases} x + y = k & \dots \text{①} \\ x^2 + y^2 = 5 & \dots \text{②} \end{cases}$ が実数解を持つような k の範囲

を求める。①より $y = k - x$ なので、②に代入して、

$$x^2 + (k - x)^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 2kx + k^2 - 5 = 0 \dots \text{③}$$

この 2 次方程式③が実数解を持つので、

不等式 $\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 5) \geq 0 \dots \text{④}$ を得る。

$$\text{④} \Leftrightarrow k^2 - 10 \leq 0 \Leftrightarrow (k - \sqrt{10})(k + \sqrt{10}) \leq 0$$

よって、求める k の範囲は $-\sqrt{10} \leq k \leq \sqrt{10}$ である。

◀ 直線 l と円 C の共有点は、この連立方程式の解であるため。

◀ ①, ② の実数解と、③の実数解は個数が一致

◀ $D = (2k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 5) \geq 0$ でもよい。いずれにしても、実数解をもつには判別式が 0 か正ならばよい。

2. 条件「直線 $l : x + y = k$ が円 C と共有点を持つ」は

条件「直線 $l : x + y = k$ と円 C の中心の距離が、 $\sqrt{5}$ 以下」 $\dots \text{⑤}$

と必要十分条件である。直線 l と円 C の中心 $(0, 0)$ の距離は

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

であるので、⑤の条件は $\frac{|k|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{5} \dots \text{⑥}$

となる。これを解いて、⑥ $\Leftrightarrow |k| \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq k \leq \sqrt{10}$

◀ 直線 $x + y - k = 0$ と点 $(0, 0)$ の距離を『点と直線の距離』(p.105) で計算

円 $C : (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ と直線 $L : ax + by + c = 0$ を考えるとき

- 円 C と直線 L の共有点の個数
- 方程式 $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ と $ax + by + c = 0$ を連立して得られる 2 次方程式の判別式 D
- 円の中心 (p, q) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 $h = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

について、次のようにまとめることができる。

円 C と直線 L の位置関係			
C と L の共有点の個数	2 個	1 個	0 個
2 次方程式の判別式 D	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
(p, q) と直線 L の距離 h	$h < r$	$h = r$	$h > r$

【練習 58 : 円と直線の共有点の個数】

- (1) 円 $x^2 + y^2 = k$ と直線 $3x - 4y + 10 = 0$ の共有点の個数を、以下の k についてそれぞれ答えなさい。
- 1) $k = 1$ 2) $k = 4$ 3) $k = 9$
- (2) 円 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$ と直線 $2x + 3y - 4 = 0$ が共有点を持つような、実数 r の範囲を求めよ。

C. 円が切り取る線分の長さ

【暗記】 59 : 円が切り取る線分の長さ～その 1～

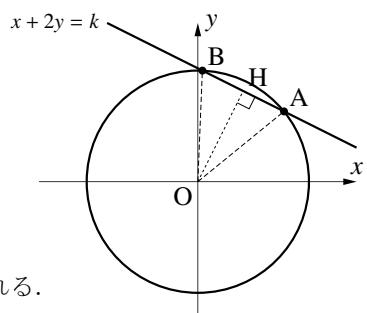
円 $C : x^2 + y^2 = 6$ と直線 $l : x + 2y = k$ が 2 点 A, B で交わり、 $AB = 2$ であるとき、 k の値を求めたい。

以下の $\boxed{\quad}$ に入る式・言葉・値を答えよ。

右図のように、円の中心を O とし、O から直線 $x + 2y = k$ へ下ろした垂線の足を H とおく。このとき、 $OA = \boxed{\text{ア}}$, $AH = \boxed{\text{イ}}$ であるので、三平方の定理より、 $OH = \boxed{\text{ウ}}$ 。

ところで、点 O と直線 l の距離を『点と直線の距離』(p.105) で計算すると $\boxed{\text{エ}}$ であるが、これは OH の長さに一致する。

よって、方程式 $\boxed{\text{ウ}} = \boxed{\text{エ}} (= OH)$ を解けば、 $k = \boxed{\text{オ}}$ と求められる。



【解答】 ア : $\sqrt{6}$, イ : $\frac{1}{2}AB = 1$, ウ : $\sqrt{(\sqrt{6})^2 - 1^2} = \sqrt{5}$

$$\text{エ} : \frac{|0 + 2 \cdot 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

$$\text{オ} : \frac{|k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |k| = 5, \text{つまり}, k = \pm 5.$$

◀ 直線 $x + 2y - k = 0$ と点 $(0, 0)$ の距離を『点と直線の距離』(p.105) で計算

【練習 60 : 円が切り取る線分の長さ～その 2～】

円 $x^2 + y^2 = 10$ と直線 $y - 1 = m(x - 2)$ が A, B で交わり $AB = 6$ であるとき, m の値を求めよ.

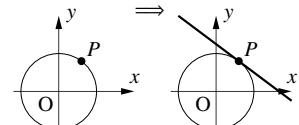
【発展 61 : 円が切り取る線分の長さ～その 3～】

円 $C : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$ と直線 $l : x + ky - 2 = 0$ の交点を A, B とし, AB の中点を M, 円 C の中心を O とする. 以下の問い合わせよ.

- ① どんな k の値に対しても, 直線 l はある定点 P を通る. その定点 P を求めよ.
- ② $AM = a, OM = b$ とおくとき, $\triangle OAB$ の大きさを a, b で表せ.
- ③ $\triangle OAB = 3$ のとき, AM, OM の長さを求め, k の値を求めよ.

D. 円の接線～その 1～（円周上の接点が与えられ, 接線は 1 本）

簡単のため, 円 C の中心が原点 $O(0, 0)$ である場合を考えると右図のようになり, 円周上の点 P で C に接する直線は 1 本しか存在しないと分かる.



円周上の点から引いた接線の方程式

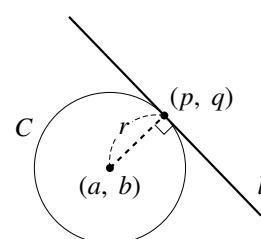
円 $C : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ の周上の点 (p, q) から引いた接線

l の方程式は

$$(p - a)(x - a) + (q - b)(y - b) = r^2$$

となる. 特に, 円 C の中心が原点にある場合は次のようになる.

$$px + qy = r^2 \quad \leftarrow a = b = 0 \text{ を接線 } l \text{ の式に代入した}$$



(証明) p.140 を参照のこと.

… 円の方程式において, 2乗のうち片方のみに, $(x, y) = (p, q)$ を代入すると覚えるとよい. また, 次で学ぶ「円周外の点から引いた接線の方程式」と混同しないようにしよう. 接線が 1 本に決まるかどうかで判断するとよい.

【例題 62】

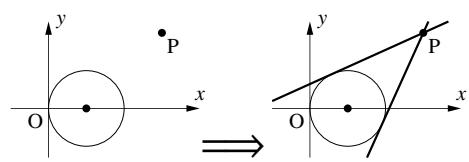
1. 円 $x^2 + y^2 = 13$ の周上の点 $(2, 3)$ で接する, 接線の方程式を求めよ.
2. 円 $x^2 + y^2 = 13$ の周上の点 $(2, -3)$ で接する, 接線の方程式を求めよ.
3. 円 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$ の周上の点 $(2, -1)$ で接する, 接線の方程式を求めよ.
4. 円 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ の周上の点 $(0, -1)$ で接する, 接線の方程式を求めよ.

【解答】

1. $2 \cdot x + 3 \cdot y = 13 \Leftrightarrow 2x + 3y = 13$
2. $2 \cdot x + (-3) \cdot y = 13 \Leftrightarrow 2x - 3y = 13$
3. $(2 - 1)(x - 1) + (-1 + 2)(y + 2) = 2 \Leftrightarrow x + y = 1$
4. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ を平方完成形に変形して $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$ となる. よって, $(0, -1)$ で接する接線の方程式は
 $(0 - 1)(x - 1) + (-1 + 2)(y + 2) = 2 \Leftrightarrow x - y = 1$

E. 円の接線～その2～（円周外の点から引き、接線は2本）

円 C の外に点 P をとり、 P から引いた円 C の接線を考えよう。右図のようにして、そのような直線は2本存在することが分かる。



【暗記】63：円周外の点から引いた接線の方程式】

円 $C : x^2 + y^2 = 2$ と点 $P(3, 1)$ について、 P から引いた C の接線 l の方程式を求めよ。

【解答】 直線 l の傾きを m とする。 l の方程式は $y - 1 = m(x - 3)$ となる。

「円 C と直線 l が接する」と「円 C の半径 $\sqrt{2}$ と直線 l の距離が等しい」は必要十分条件であり、 l と、円 C の中心 $(0, 0)$ の距離は

$$\frac{|m \cdot 0 - 0 - 3m + 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

であるので

$$\frac{|-3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |-3m + 1| = \sqrt{2} \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 6m + 1 = 2m^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 7m^2 - 6m - 1 = 0 \quad \therefore m = -\frac{1}{7}, 1$$

よって、 l の方程式は

$$m = -\frac{1}{7} \text{ のとき, } y - 1 = -\frac{1}{7}(x - 3) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{10}{7}.$$

$$m = 1 \text{ のとき, } y - 1 = 1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = x - 2.$$

(別解) 接点を $A(a, b)$ とおく。このとき

- A での接線の方程式 $ax + by = 2$ が $P(3, 1)$ を通るから

$$3a + b = 2 \cdots \textcircled{1} \text{ を満たす。}$$

- A が円 C の周上にあるので $a^2 + b^2 = 2 \cdots \textcircled{2}$ を満たす。

①より $b = 2 - 3a$ であるので、②に代入すれば

$$a^2 + (2 - 3a)^2 = 2 \Leftrightarrow 5a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5a - 1)(a - 1) = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{5}, 1$$

$a = \frac{1}{5}$ のとき、①より $b = \frac{7}{5}$ なので、接線の方程式は $\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}y = 2$

$a = 1$ のとき、①より $b = -1$ なので、接線の方程式は $x - y = 2$

◀『直線の方程式』(p.96)

◀『点と直線の距離』(p.105)

◀両辺とも正なので、両辺2乗して

◀一般形なら $x + 7y - 10 = 0$

◀一般形なら $x - y - 2 = 0$

【練習 64 : 円の接線】

(1) 円 $C : x^2 + y^2 = 4$ の周上にある $(1, \sqrt{3})$ で接する C の接線を求めよ.

(2) 円 $C : x^2 + y^2 = 4$ の接線のうち、 $(-2, 5)$ を通るものをすべて求めよ.

【解答】

$$(1) 1 \cdot x + \sqrt{3}y = 4 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y = 4$$

(2) $(-2, 5)$ と円 C を書くと、右欄外の図のようになり、直線 $x = -2$ が接線になると分かる。

もう 1 本は x 軸や y 軸に平行ではないので求める接線を

$$y - 5 = m(x + 2) \Leftrightarrow mx - y + 2m + 5 = 0$$

とおく。この直線と C の中心 $(0, 0)$ の距離が、2 であればよいので

$$\begin{aligned} \frac{|m \cdot 0 - 0 + 2m + 5|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} &= 2 \Leftrightarrow |2m + 5| = 2\sqrt{m^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow (2m + 5)^2 = 2^2(m^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow 20m + 25 = 0 \quad \therefore m = -\frac{21}{20} \end{aligned}$$

よって、 $y - 5 = -\frac{21}{20}(x + 2) \Leftrightarrow y = -\frac{21}{20}x + \frac{29}{10}$ は接線になる。

つまり、求める接線は $x = -2, y = -\frac{21}{20}x + \frac{29}{10}$ の 2 本。

(別解) 接点を $A(a, b)$ とおく。このとき

- A での接線の方程式 $ax + by = 4$ が $P(-2, 5)$ を通るから
 $-2a + 5b = 4 \dots \text{①} \text{を満たす}.$
- A が円 C の周上にあるので $a^2 + b^2 = 4 \dots \text{②} \text{を満たす}.$

①より $a = \frac{5}{2}b - 2$ であるので、②に代入すれば

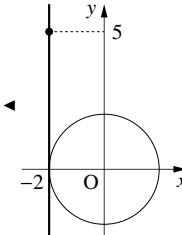
$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2}b - 2\right)^2 + b^2 &= 4 \Leftrightarrow \frac{29}{4}b^2 - 10b = 0 \\ &\Leftrightarrow 29b^2 - 40b = 0 \quad \therefore b = 0, \frac{40}{29} \end{aligned}$$

$b = 0$ のとき、①より $a = -2$ なので、

接線の方程式は $-2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$

$b = \frac{40}{29}$ のとき、①より $a = \frac{5}{2} \cdot \frac{40}{29} - 2 = \frac{42}{29}$ なので、

接線の方程式は $\frac{42}{29}x + \frac{40}{29}y = 2 \Leftrightarrow 21x + 20y = 29$.



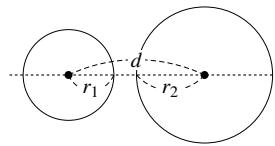
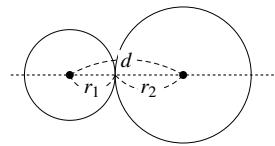
◀ 『点と直線の距離』(p.105)

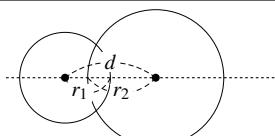
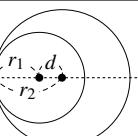
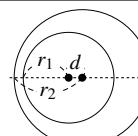
5. 2 円の関係

A. 2 円の位置関係

数学 A で学んだように、2 円の位置関係は以下の 5 つの状態しかない。

2 円の半径を r_1, r_2 ($r_1 < r_2$), 中心間の距離を d とすると, 以下のようなになる.

2 円の図		
2 円の位置関係	離れている	外接している
2 円の共有点の個数	0 個	1 個(外接)
2 円の中心間の距離 d	$r_2 + r_1 < d$	$d = r_2 + r_1$

		
交わっている	内接している	一方が他方を含む
2 個	1 個(内接)	0 個
$r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1$	$d = r_2 - r_1$	$d < r_2 - r_1$



円が複数個あるときは, まず, 中心間を線で結んだ図を描こう. そのうえで, 上のような条件を考えるとよい.

【例題 65】 円 $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ と, 半径 5 の円 C_2 がある. C_2 の中心 A が次の点にあるとき, C_1 と C_2 の位置関係を答えよ.

1. A(4, 0) 2. A(10, 0) 3. A(2, 0) 4. A(6, 8) 5. A(-3, 1)
 6. A の y 座標は 4 であり, 円 C_1 と C_2 が外接するとき, A の座標を答えなさい.

【解答】 円 C_1 の中心 $(0, 0)$ を O とすると, $OA = 5 + 3 = 8$ のとき 2 円は外接, $OA = 5 - 3 = 2$ のとき 2 円は内接であるので,

- $8 < OA$ のとき 2 円は離れている
 - $2 < OA < 8$ のとき 2 円は交わっている
 - $OA < 2$ のとき C_2 が C_1 を含む
1. $OA = 4$ なので, 2 円は交わっている.
 2. $OA = 10$ なので 2 円は離れている.
 3. $OA = 2$ なので 2 円は内接している.
 4. $OA = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ なので 2 円は離れている.
 5. $OA = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$ なので 2 円は交わっている.
 6. A($x, 4$) とおく. 外接するには $OA = 8$ であればよいので

$$\sqrt{x^2 + 4^2} = 8 \Leftrightarrow x^2 + 16 = 64 \Leftrightarrow x^2 = 48$$

よって, $x = \pm 4\sqrt{3}$ であるから, A($\pm 4\sqrt{3}, 4$).

B. 2円の共通接線

数学Aでも学んだように、2円の共通接線の本数は、2円の位置関係によって異なる。

2円の共通接線

本数	4本	3本	2本	1本	0本
2円と共通接線の図					
2円の位置関係	離れている	外接している	交わっている	内接している	一方が他方を含む
共通外接線	2本	2本	2本	1本	0本
共通内接線	2本	1本	0本	0本	0本

【例題 66】前ページの【例題】と同じように、円 $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ と、半径 5 の円 C_2 がある。 C_2 の中心 A が次の点にあるとき、 C_1 と C_2 の共通接線の本数を答えよ。

1. A(4, 0) 2. A(10, 0) 3. A(2, 0) 4. A(6, 8) 5. A(-3, 1)

【解答】前ページの答えを利用して

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1. 2円は交わっているので 2本 . | 2. 2円は離れているので 4本 . |
| 3. 2円は内接しているので 1本 . | 4. 2円は離れているので 4本 . |
| 5. 2円は交わっているので 2本 . | |

【備考】67: 共通接線の長さ】

2円 $C_1 : x^2 + (y - 1)^2 = 1$, $C_2 : (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$ がある。

1. 2円の共通外接線と C_1 , C_2 の接点をそれぞれ A_1 , A_2 で接するとき、線分 A_1A_2 の長さを求めよ。
 2. 2円の共通内接線と C_1 , C_2 の接点をそれぞれ B_1 , B_2 で接するとき、線分 B_1B_2 の長さを求めよ。

【解答】円 C_1 , C_2 の中心を、それぞれ O_1 , O_2 とする。

1. O_1 から O_2A_2 へ下ろした垂線の足を H とすると

$$A_1A_2 = O_1H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2}$$

である。 $O_1O_2 = \sqrt{(3 - 0)^2 + (3 - 1)^2} = 13$

$O_2H = A_2O_2 - A_2H = 2 - 1 = 1$ なので

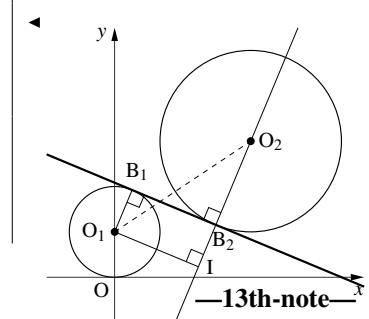
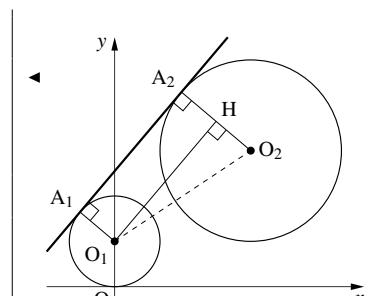
$$A_1A_2 = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 1^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

2. O_1 から直線 O_2B_2 へ下ろした垂線の足を I とすると

$$B_1B_2 = O_1I = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2I^2}$$

である。 $O_1O_2 = \sqrt{13}$, $O_2I = O_2B_2 + B_1O_1 = 2 + 1 = 3$ なので

$$B_1B_2 = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = 2$$



【発】 68 : 2 円の共通接線】

2つの円 $C_1 : (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$, $C_2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ がある。この2円に対し、共通内接線 l 、共通外接線 L を考え、2本ある L の交点を P とする。

① 円 C_1, C_2 と接線 l, L を座標平面上に描き、共通内接線 l の方程式を求めよ。

② P の座標を求めよ。

③ 共通外接線 L の傾きを求めよ。

6. (発) 69 : 円と放物線

円と放物線の場合は、基本的に2つの方程式を連立して考えるしかない。『点と直線の距離』は使えないし、相似などを用いた图形的に解くこともできないからである。

【発】 69 : 円と放物線】

放物線 $H : y = x^2$ と、中心が $P(0, 2)$ にある円 C が、2点 A, B で接している。

① 円 C の半径を求めよ。

② $\triangle APB$ の面積を求めよ。

7. 2つのグラフの交点を通るグラフ

一般に、2つの陰関数 $F(x, y) = a, G(x, y) = b$ があるとき、2つのグラフの交点を通るグラフは

$$k\{F(x, y) - a\} + \{G(x, y) - b\} = 0 \quad \dots \quad ①$$

という形で表される（グラフ $F(x, y) = a$ 以外は全て表わされる）。

逆に、 k がどんな実数でも①のグラフは、 $F(x, y) = a, G(x, y) = b$ の交点を必ず通る。

【暗記】 70 : 2つのグラフの交点を通る円】

直線 $L : 2x + 3y = 1$ 、円 $C : x^2 + y^2 = 4$ の交点 A, B と、原点 O を通る円の方程式を求めよ。

【解答】 $F(x, y) = k(2x + 3y - 1) + (x^2 + y^2 - 4) = 0$ とおくと、関数 $F(x, y) = 0$ は、 L と C の2交点 A, B を必ず通る。

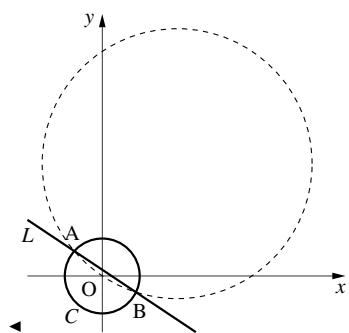
これが原点を通るとき、 $F(0, 0) = 0$ であればよいので

$$F(0, 0) = k(-1) + (-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -k - 4 = 0 \quad \therefore k = -4$$

よって、求める円の方程式は

$$\begin{aligned} & -4(2x + 3y - 1) + (x^2 + y^2 - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 - 8x - 12y = 0 \end{aligned}$$



【発】 71 : 2 円の交点と、それを通る直線・円】

2円 $C_1 : x^2 + y^2 = 2$, $C_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$ の2交点を A, B とする。

① 直線 AB の方程式を求めよ。② A, B の座標を求めよ（ x 座標は A の方が小さいとする）。

③ A, B を通り、原点を通る円の方程式を求めよ。

2.6 軌跡

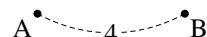
この節では、方程式や関数を利用して、様々な軌跡の表し方について学ぶ。

1. 軌跡

軌跡 (locus) とは、「ある条件を満たす点すべてを集めてできる線状の図形」のことである。

【例題 72】右の点 A, B について、以下の条件を満たす軌跡を、それぞれ図示しなさい。

1. $AP = 1$ を満たして動く点 P の軌跡
2. $AQ = BQ$ を満たす点 Q の軌跡
3. $\angle ARB = 90^\circ$ を満たす点 R の軌跡



【解答】

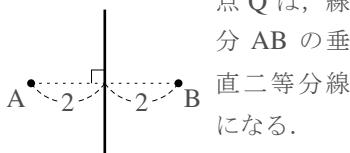
1.



B

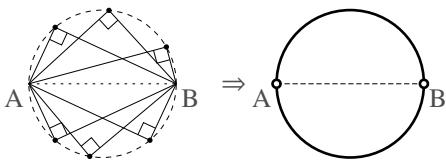
点 P の軌跡は上の実線部分、半径 1 の円周になる。

2.



点 Q は、線分 AB の垂直二等分線になる。

3.



点 R の軌跡は線分 AB を直径とする円の円周上にある。ただし、点 A, B を除く。

△AQB が常に二等辺三角形になる。

R が A, B と一致したときは、 $\angle ARB = 90^\circ$ どころか、 $\angle ARB$ が存在しない。

2. 座標平面上の軌跡

A. 軌跡の方程式

座標平面上で考えると、軌跡は x と y の間の方程式で表され、それは軌跡の方程式 (equation of locus) といわれる。これを求めるには、軌跡上の点を (x, y) において、 x と y が満たすべき等式を考えればよい。

【例題 73】 $A(1, 2)$, $B(3, 6)$ とする。 $AP^2 + BP^2 = AB^2$ を満たす点 P の軌跡を考える。

1. $P(x, y)$ とおく。 AP^2 , BP^2 をそれぞれ x , y で表せ。
2. 点 P の軌跡の方程式を求めなさい。また、それはどんな図形か答えなさい。

【解答】

$$1. AP^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2, BP^2 = (x - 3)^2 + (y - 6)^2$$

2. $AB^2 = (3 - 1)^2 + (6 - 2)^2 = 20$ であるから

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 &= AB^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 20 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 2y^2 - 16y + 50 = 20 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 8y + 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5 \end{aligned}$$

よって、Pの軌跡の方程式は $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$ であり、中心が(2, 4)であり半径 $\sqrt{5}$ の円になる。

◀ 『2点間の距離』(p.84)

◀ 【別解】 $AP^2 + BP^2 = AB^2$ ならば $\angle APB = 90^\circ$ なので、PはABを直径とする円の周上にあり、PがA, Bに一致してもよい。よって軌跡は、ABの中点(2, 4)を中心とし、半径 $\frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$ の円になる。

【例題 74】 座標平面上において、2点 A(1, 3), B(4, -3)について、 $AP : PB = 1 : 2$ となる点Pが描く軌跡の方程式を求めなさい。また、それはどのような図形か。

【解答】 P(x, y)とおく。このとき

$$AP^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2, BP^2 = (x - 4)^2 + (y + 3)^2 \quad \dots \textcircled{①}$$

である。一方、 $AP : PB = 1 : 2$ は

$$AP^2 : BP^2 = 1 : 4 \quad \dots \textcircled{②}$$

と同値である。①を②に代入して整頓すると

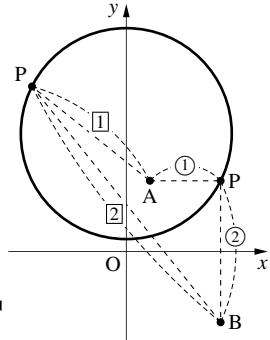
$$\begin{aligned} &\{(x - 1)^2 + (y - 3)^2\} : \{(x - 4)^2 + (y + 3)^2\} = 1 : 4 \\ &\Leftrightarrow 4\{(x - 1)^2 + (y - 3)^2\} = (x - 4)^2 + (y + 3)^2 \\ &\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 6y + 9) = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 30y + 40 - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10y + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - 5)^2 = 20 \end{aligned}$$

となる。つまり、点P(x, y)の軌跡の方程式は $x^2 + (y - 5)^2 = 20$ であり、中心(0, 5)、半径 $2\sqrt{5}$ の円になる。

◀ 『2点間の距離』(p.84)

◀ $AP : PB = 1 : 2$ から、 $AP = k, BP = 2k$ と書ける(k は正の数)ので $AP^2 : BP^2 = k^2 : 4k^2 = 1 : 4$

◀ 「外同士の積=内同士の積」



上の式変形はすべて、同値の記号 \Leftrightarrow で結ばれ、また、 $AP : PB = 1 : 2$ と $AP^2 : BP^2 = 1 : 4$ は「同値」となっている。

この「同値な変形である」ことは重要で、解答に明記しなければならない。明記しないと、「点P(x, y)が $x^2 + (y - 5)^2 = 20$ を必ず満たす」ことは導かれても、「円 $x^2 + (y - 5)^2 = 20$ 上のすべての点がPの軌跡である」ことを示したことになっていない。

もし、同値関係を書かない場合は、解答の最後に「逆に、円 $x^2 + (y - 5)^2 = 20$ 上のすべての点(x, y)は、上の計算を逆にたどって、Pの条件を満たす。」と明記しなければならない。

【練習 75 : 軌跡～その 1～】

3 点 A(2, 1), B(4, 0), C(0, -1) について, $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 40$ となる点 P の軌跡を求めよ.

【解答】 $P(x, y)$ とおくと

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y+1)^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 3y^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 10$$

よって, (2, 0) を中心として半径 $\sqrt{10}$ の円になる.

◀ 「軌跡を求めよ」という問題なので, ここまで解いて「円 $x^2 - 4x + y^2 = 6$ になる」でもよい.

◀ この (2, 0) は, $\triangle ABC$ の重心になっている.

【練習 76 : 軌跡～その 2～】

2 点 A(1, 2), B(5, -2) について, $AP : PB = 3 : 1$ となる点 P が描く軌跡を求めよ.

【解答】 $P(x, y)$ とおくと

$$AP : PB = 3 : 1 \Leftrightarrow AP^2 : PB^2 = 9 : 1 \Leftrightarrow 9PB^2 = AP^2$$

$$\Leftrightarrow 9\{(x-5)^2 + (y+2)^2\} = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 88x + 8y^2 + 40y + 256 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + y^2 + 5y + 32 = 0$$

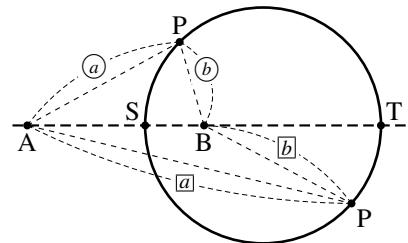
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

よって, $\left(\frac{11}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ を中心として半径 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ の円になる.

◀ 「軌跡を求めよ」という問題なので, ここまで解いて「円 $x^2 - 11x + y^2 + 5y + 32 = 0$ になる」でもよい.



一般に, $AP : PB = a : b$ を満たす点 P の軌跡は, $a \neq b$ ならば円になる (これをアポロニオスの円 (circle of Apollónios) という). この円は, 線分 AB を $a : b$ に内分する点 (右図の S), $a : b$ に外分する点 (右図の T) が直径の両端になる. $a = b$ ならば, P の軌跡は線分 AB の垂直二等分線である.



【発展 77 : 軌跡～その 3～】

直線 $l : y = 2$ と $F(0, -3)$ について, 直線 l との距離が, F までの距離と等しくなる点の軌跡を求めよ.

【発展 78 : 軌跡～その 4～】

直線 $l : y = -x + 1$ と直線 $m : y = 7x - 2$ から等距離にある点の軌跡を K とおく. ただし, 点が直線上にあるときは, 直線との距離を 0 とする. K は, 直線 l, m にとってのどんな図形を描くか答えよ. また, K の方程式を求めよ.

B. 軌跡を描く点の他にも動点がある場合

軌跡を描く点の他にも動点がある場合を考えてみよう。

【例題 79】 点 A が放物線 $y = x^2$ の周上を動くとき、A と点 B(0, 2)の中点 P の軌跡を考える。

1. A(a, a^2) とするとき、P の座標を a で表せ.
2. P が描く軌跡の方程式を求めよ.

【解答】

1. P は O(0, 2) と A(a, a^2) の中点なので

$$\left(\frac{0+a}{2}, \frac{2+a^2}{2} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2+2}{2} \right) \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

2. P(x, y) とおく。 (1) より $\begin{cases} x = \frac{a}{2} & \dots \dots \textcircled{2} \\ y = \frac{a^2+2}{2} & \dots \dots \textcircled{3} \end{cases}$ である。 ②から

$a = 2x$ なので、③に代入すれば $y = \frac{(2x)^2 + 2}{2} = 2x^2 + 1$ であるから P の軌跡は放物線 $y = 2x^2 + 1$ と分かる。

◀ 『内分点の公式』(p.86)

… 上では P(x, y) とおいているが、問題と文字がかぶるため、P(X, Y) とおくことが多い。詳しくは p.129 参照のこと。

【例題 80】 原点 O について、点 A が円 $C : (x - 6)^2 + y^2 = 9$ の周上を動き、線分 OA を 2:1 に内分する点を P とする。

1. P(x, y), A(s, t) とする。 x と s の間に成り立つ式、 y と t の間に成り立つ式を求めよ.
2. P が描く軌跡の方程式を求めよ.

【解答】

1. P は O(0, 0) と A(s, t) による線分 OA を 2:1 に内分するので

$$x = \frac{2s+0}{2+1} \Leftrightarrow 3x = 2s \quad y = \frac{2t+0}{2+1} \Leftrightarrow 3y = 2t \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

2. 点 A は円 $C : (x - 6)^2 + y^2 = 9$ の周上にあるので

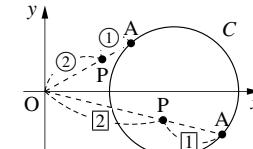
$$(s - 6)^2 + t^2 = 9 \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

を満たす。 ②を s, t について解けば $s = \frac{3}{2}x, t = \frac{3}{2}y$ であるから、これを②に代入して

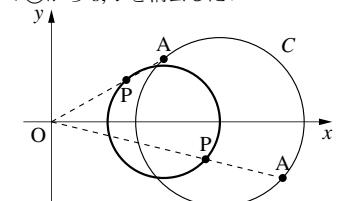
$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}x - 6 \right)^2 + \left(\frac{3}{2}y \right)^2 &= 9 \Leftrightarrow \left\{ \frac{3}{2}(x - 4) \right\}^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{4}(x - 4)^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9 \end{aligned}$$

この両辺に $\frac{4}{9}$ を掛けて、P の軌跡は円 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ と分かる。

◀ 『内分点の公式』(p.86)



◀ ②から s, t を消去したい



… 軌跡を求めるごとに、(連立) 方程式の文章題を解くごとに共通点がある。 いずれも「求めたいものを x, y とおき」「 x, y が満たす式を作り」「それを解く」「条件に満たしていることを確かめる」という 3 段階を踏む。

【練習 81 : 動点をもつ軌跡～その 1～】

A(0, -3) とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 B が放物線 $y = -2x^2$ 上を動くとき、線分 AB を 2:1 に内分する点 P の軌跡を求めなさい。
- (2) 点 C が円 $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ 上を動くとき、線分 AC を 1:3 に外分する点 Q の軌跡を求めなさい。

【解答】

(1) B(a, -2a²), P(x, y) とおく。P は線分 AB を 2:1 に内分するので

$$\begin{cases} x = \frac{0+2a}{2+1} \\ y = \frac{-3+2 \cdot (-2a^2)}{2+1} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2a}{3} \\ y = \frac{-4a^2-3}{3} \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} x = \frac{0+2a}{2+1} \\ y = \frac{-3+2 \cdot (-2a^2)}{2+1} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2a}{3} \\ y = \frac{-4a^2-3}{3} \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad \textcircled{2}$$

①より、 $a = \frac{3}{2}x$ であるので、②に代入して

$$y = \frac{-4a^2-3}{3} = \frac{-4\left(\frac{3}{2}x\right)^2-3}{3} = \frac{-9x^2-3}{3} = -3x^2-1$$

よって、求める軌跡は放物線 $y = -3x^2 - 1$ になる。

(2) C(s, t), P(x, y) とおく。Q は線分 AC を 1:3 に外分するので

$$\begin{cases} x = \frac{0+(-1)s}{-1+3} \\ y = \frac{3+(-3)t}{-1+3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-s}{2} \\ y = \frac{-9-t}{2} \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{cases} x = \frac{0+(-1)s}{-1+3} \\ y = \frac{3+(-3)t}{-1+3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-s}{2} \\ y = \frac{-9-t}{2} \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad \textcircled{4}$$

C(s, t) は円 $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ 上にあるので、

$$(s-1)^2 + t^2 = 4 \quad \dots \dots \dots \quad \textcircled{5}$$

を満たす。③より $s = -2x$, ④より $t = -2y - 9$ であるので、⑤に代入すれば

$$\begin{aligned} (-2x-1)^2 + (-2y-9)^2 = 4 &\Leftrightarrow \left\{ -2\left(x + \frac{1}{2}\right) \right\}^2 + \left\{ -2\left(y + \frac{9}{2}\right) \right\}^2 = 4 \\ &4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = 4 \end{aligned}$$

よって、求める軌跡は円 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = 1$ になる。

【練習 82 : 動点をもつ軌跡～その 2～】

A(2, 1), B(1, -4) があり、点 P が円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動くとき、△ABP の重心の軌跡を求めなさい。

【練習 83 : 頂点の描く軌跡】

放物線 $y = x^2 + 2ax + 4x - 3a + 4$ の頂点を A とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) A の座標を a を用いて表せ。
- (2) A の軌跡の方程式を求めよ。

【(選)題 84 : 動点をもつ軌跡～その 3～】

直線 $l: y = x - 3$ と放物線 $C: y = x^2$ がある。点 A が l 上を、点 B が C 上を、線分 AB が y 軸と平行であるように動くとき、線分 AB を 2:1 に内分する点 P の軌跡を求めなさい。

3. (発) 定義域に注意すべき軌跡

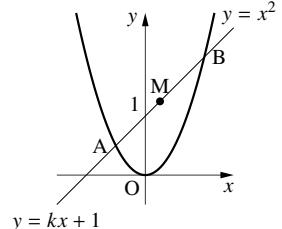
A. グラフの交点の中点が描く軌跡（常にグラフが交点を持つ場合）

放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = kx + 1$ の 2 交点 A, B について、線分 AB の中点を M とし、 k がすべての実数をとったときの、M の軌跡について考える。

このとき、A と B の座標は連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = kx + 1 \end{cases}$ の解に一致する。A と B

を直接求めるならば、この連立方程式を解いて

$$x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$



となる（このとき、 k がどんな値でも $k^2 + 4$ は正なので、これらは常に実数である。）。複雑な形をしているが、これが A, B の x 座標である。そこで、M の x 座標を計算すると

$$(M \text{ の } x \text{ 座標}) = \frac{A \text{ の } x \text{ 座標} + B \text{ の } x \text{ 座標}}{2} = \frac{\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} + \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}}{2} = \frac{k}{2}$$

となり、簡潔な値となる。では、複雑な A, B の値を求めず、M の値を計算する方法はないだろうか。

それには、『解と係数の関係』(p.55) を用いるとよい。

【暗記】85：2 交点の中点の軌跡】

A, B の x 座標を α, β , M(X, Y) とする。A, B とも放物線 $y = x^2$ 上にあるので、 α, β を用いて、
A(α , ア), B(β , イ), X = ウ, Y = エ と表される。

A, B の座標を求めるには、C と l の式を連立して x の 2 次方程式 オ を解けばよい。オ の 2 解は α, β であり、オ の判別式 D は、 $D = \text{カ} > \text{キ}$ なので、 k の値によらず α, β は常に実数である。ここで、2 次方程式 オ について、『解と係数の関係』(p.55) より、次の等式が成り立つ。

$$\alpha + \beta = \text{ク}, \quad \alpha\beta = \text{ケ}$$

よって、 k のみを用いて $X = \text{コ}$, $Y = \text{サ}$ となり、 k を消去し、M の軌跡の方程式 シ を得る。

【解答】 ア: a^2 , イ: β^2 , ウ: $\frac{\alpha + \beta}{2}$, エ: $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$

オ: $x^2 = kx + 1$ ($\Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0$)

カ: $k^2 + 4$, キ: 0, ク: $-(-k) = k$, ケ: -1 , コ: $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{k}{2}$

サ: $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} = \frac{k^2 - 2(-1)}{2} = \frac{k^2 + 2}{2}$

シ: $Y = 2X^2 + 1$ という等式を得た結果、 $y = 2x^2 + 1$ が軌跡の方程式になる。

◀ コより $k = 2X$
これをサに代入

上の例題の最後に「 $Y = 2X^2 + 1$ であるから軌跡は $y = 2x^2 + 1$ 」とした。これは、次の内容を簡潔に述べた結果である（『陰関数のグラフ』(p.94) 参照）。

「P の x 座標を X , P の y 座標を Y とすれば、 $Y = 2X^2 + 1$ を満たしている。これは、P(X, Y) が $y = 2x^2 + 1$ というグラフの上にあることを意味しているから、これが P の軌跡になる。」

【練習 86 : 2 交点の中点の軌跡】

放物線 $y = x^2 - 2$ と直線 $y = k(x - 1)$ の 2 交点 A, B について、線分 AB の中点を M とする。定数 k がすべての実数をとるとき、M が描く軌跡の方程式を求めよ。

【解答】 M(X, Y) とする。A($\alpha, \alpha^2 - 2$), B($\beta, \beta^2 - 2$) とおくと

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2}, Y = \frac{(\alpha^2 - 2) + (\beta^2 - 2)}{2} \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

ここで、 α, β は、 $y = x^2 - 2$ と $y = k(x - 1)$ を連立した

$$x^2 - 2 = k(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - kx + k - 2 = 0 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

の 2 解と一致する。②の判別式を D とすると

$$D = (-k)^2 - 4(k - 2) = k^2 - 4k + 8 = (k - 2)^2 + 4 > 0$$

であるので、②は任意の k で解を持つ。②において解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = k - 2$$

が成り立つ。これを①に代入すると

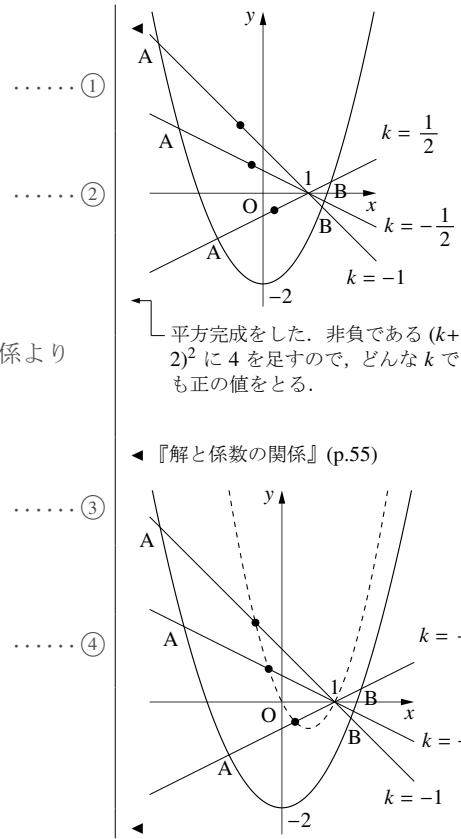
$$X = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{k}{2} \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

$$Y = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4}{2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 4}{2} \\ = \frac{k^2 - 2(k - 2) - 4}{2} = \frac{k^2 - 2k}{2} \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

③より $k = 2X$ となるのでこれを④に代入して

$$Y = \frac{(2X)^2 - 2 \cdot (2X)}{2} = 2X^2 - 2X$$

よって、M の軌跡の方程式は $y = 2x^2 - 2x$ である。



B. 定義域に注意すべき軌跡

これまでの問題では、2つのグラフには必ず共有点があった。 k の値によってグラフが交点を持たないような場合は、次のことについて注意して、軌跡の方程式の定義域に注意しないといけない。

- 2次方程式の解を α, β などでおいたとき、実数解を持つかどうか
- 式で割り算するとき、その式が 0 になることはないだろうか

【発展 87 : 2 交点の中点の軌跡～その 3～】

放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = kx - 1$ について、C と l が異なる 2 交点 A, B をもつよう定数 k が変化するとき、AB の中点を M の軌跡を考える。

① M が存在するための k の範囲を求めよ。

② M の軌跡の方程式を求める。

【解答】

① C と l の方程式を連立し、y を消去すると、x についての 2 次方程式

$$x^2 - kx + 1 = 0 \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = kx - 1 \end{cases}$$

を得る。これが実数解をもてばよいので、①の判別式 D

$$D > 0 \Leftrightarrow k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \Leftrightarrow (k-2)(k+2) > 0$$

より、 $k < -2, 2 < k$ が求める範囲である。

② A, B は放物線 $y = x^2$ 上にあるので A(α, α^2), B(β, β^2) とおける。

$$M(x, y) \text{ とすると, } x = \frac{\alpha+\beta}{2}, y = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \text{ となる。}$$

α, β は①の 2 解に一致するので、 $\alpha+\beta=k, \alpha\beta=1$ である。よって、 $k < -2, 2 < k$ のとき、M(x, y) について

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{k}{2} \quad \dots \dots \text{②}$$

$$y = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} = \frac{k^2 - 2}{2} \quad \dots \dots \text{③}$$

となる。②から $k = 2x$ であるので、③に代入して

$$y = \frac{(2x)^2 - 2}{2} = 2x^2 - 1$$

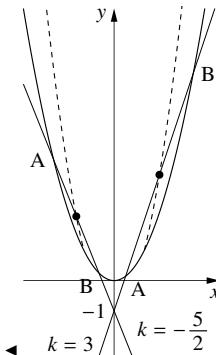
また、 k のとる範囲 $k < -2, 2 < k$ に代入して

$$2x < -2, 2 < 2x \Leftrightarrow x < -1, 1 < x$$

以上より、M の軌跡の方程式は $y = 2x^2 - 1$ ($x < -1, 1 < x$) である。

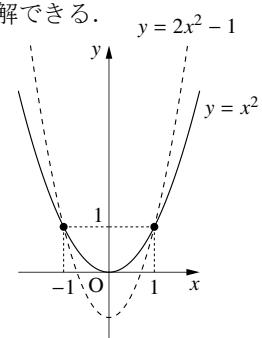
◀ 実数解をもてば A, B は存在し、M も存在する。逆も正しい。

◀ 『解と係数の関係』(p.55)



上の例題において、求める軌跡が放物線の一部分になったことは、次のように理解できる。

- 直線 $l : y = kx - 1$ は k の値に関わらず定点 A(0, -1) を通り、 k の値によっては C と l は交わらない。
- 右図のように、M の軌跡の方程式 $y = 2x^2 - 1$ は放物線 C の下に突き抜ける。M は放物線 C より上にあるはずなので、C の下につきぬけた部分は軌跡として適さない。放物線 C と $y = 2x^2 - 1$ の共有点を求めるところ(1, 1), (-1, 1) であるから、 $-1 \leq x \leq 1$ の部分が適さないと分かる。これは上で求めた結果と一致する。



【発】88：2 交点の中点の軌跡～その4～】

円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と直線 $l : y = kx + 2$ について、C と l が異なる 2 交点 A, B をもつよう定数 k が変化するとき、AB の中点 M の軌跡を求めよ。

【発】89：対称式で表された座標の軌跡】

$a^2 + b^2 = 10$ を満たしながら a, b が実数全体を動くとき、M($a+b, ab$) の軌跡の方程式を求めよ。

【発】90：2 直線の交点の軌跡】

2 直線 $l_1 : kx + y + 1 = 0, l_2 : x - ky - 1 = 0$ の交点 P が描く軌跡を求めよ。

2.7 領域

1. 領域とは

A. 領域とは

平面上の領域 (domain) とは、「平面的広がり^{*8}をもつ、平面の一部分」である^{*9}。

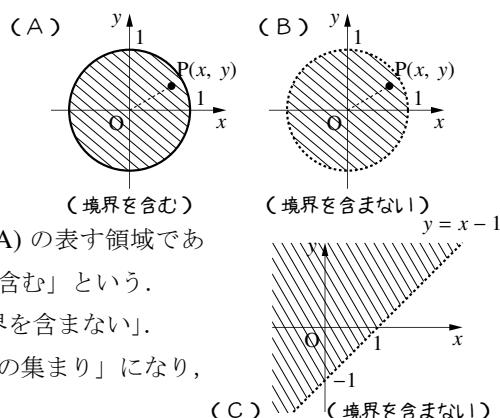
たとえば、以下の不等式は座標平面上の領域を表す。

(A) $x^2 + y^2 \leq 1$ (B) $x^2 + y^2 < 1$ (C) $y > x - 1$

$P(x, y)$ について、 $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす点 P の集まりが、(A) の表す領域である^{*10}。これは領域の境界線上も含むので「境界 (boundary) を含む」という。

(A) の領域から円周上の点を除けば(B) の領域になり、「境界を含まない」。

(C) の表す領域は、「直線 $y = x - 1$ よりも y 座標の大きい点の集まり」になり、直線 $y = x - 1$ より上部（境界を含まない）である。



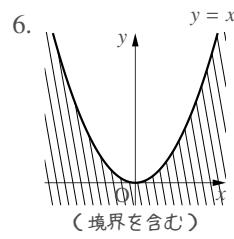
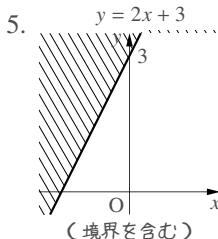
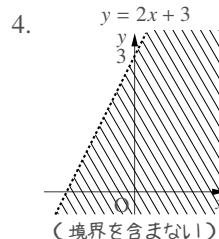
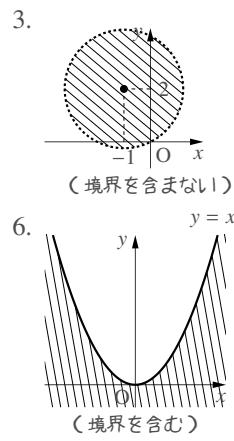
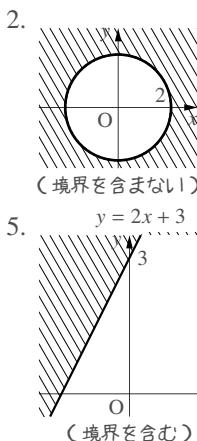
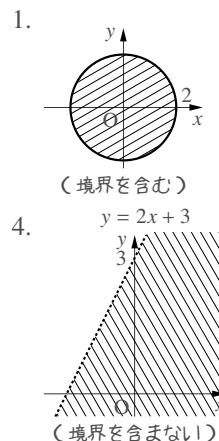
【例題 91】座標平面上の以下の領域を、図示しなさい。（領域の図示をするときは、「境界を含む」または「境界を含まない」を書くこと。これは、以後の問題でも同様である。）

1. $x^2 + y^2 \leq 4$ 2. $x^2 + y^2 > 4$ 3. $x^2 + 2x + y^2 - 4y < 0$ 4. $y < 2x + 3$ 5. $y \geq 2x + 3$
 6. $y \leq x^2$ 7. $y - x^2 > 0$ 8. $2x - y + 1 > 0$

【解答】 3. は、与えられた不等式の左辺を平方完成すると

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) < 1 + 4 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 < 5 \end{aligned}$$

となるので、円周 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ が境界になる。



◀ (1) は中心から 4 以下の点、(2) は中心から 4 より離れている点、のように考えられる。

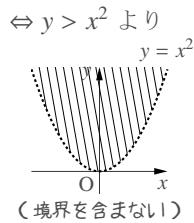
◀ 1., 2. は直線 $y = 2x + 3$ が、3., 4. は放物線 $y = x^2$ が境界になる。

*8 平面の一部分が曲線や点であるときは、それを領域とは言わない。「平面的広がり」という表現は曖昧であるが、これを厳密に定義するには高校数学の範囲を大きく超えてしまう。また、空間の領域とは「空間的広がりをもつ、空間の一部分」である。

*9 大学以降の数学においては「領域」の定義が異なり、「境界を含まない連続的な（高校数学の）領域」のみを指す。

*10 このことから、(A) の領域を $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ と表すこともできる。

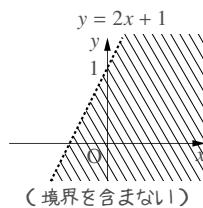
7. $y - x^2 > 0$



8. $2x - y + 1 > 0$ は

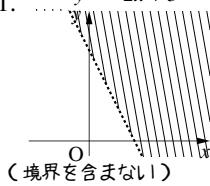
$2x + 1 > y$
 と変形できるので、直線 $y = 2x + 1$
 より下部が領域になる。

$y = 2x + 1$

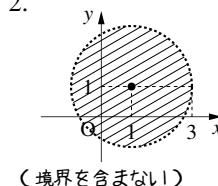


【例題 92】以下の座標平面上の領域を、式で表しなさい。

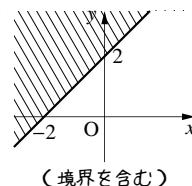
1. $y = -2x + 3$



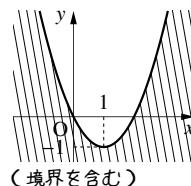
2.



3.



4.



【解答】

1. 直線 $y = -2x + 3$ の上部なので $y > -2x + 3$

2. 境界は円 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$ であり、
 領域はその内部なので $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 4$

3. 境界は切片 2, 傾き 1 の直線なので $y = x + 2$ であり、
 領域はその上部なので $y \geq x + 2$

4. 境界は放物線 $y = (x - 1)^2 - 1$ であり、
 領域はその下部なので $y \geq (x - 1)^2 - 1$

◀ 境界の円は中心が $(1, 1)$, 半径は 2

◀ 傾きは, $\frac{2}{2} = 1$

◀ 境界の放物線は頂点が $(1, 1)$, $y = a(x - 1)^2 - 1$ に $(x, y) = (0, 0)$ を代入して $a = 1$

B. 複数の不等式が表す領域

たとえば、領域 $\begin{cases} y < -x^2 + 2 \\ 2x + y + 1 > 0 \end{cases}$ とは、領域 $y < -x^2 + 2$ と領域 $2x + y + 1 > 0$ の共通部分を表す。

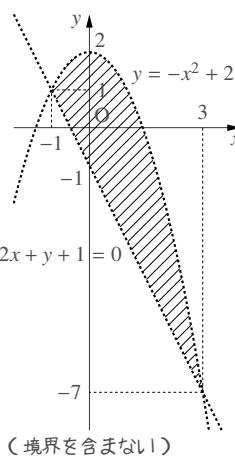
【例題 93】領域 $\begin{cases} y < -x^2 + 2 \\ 2x + y + 1 > 0 \end{cases}$ ① ② を座標平面上に図示しなさい。

【解答】 $2x + y + 1 > 0$ は $y > -2x - 1$ と変形できるので、求める領域は

- $y = -x^2 + 2$ より下部
- $y = -2x - 1$ より上部

であり境界を含まない。

また、連立方程式 $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$ を解いて $2x + y + 1 = 0$ で $y = -x^2 + 2$ を代入して $2x - x^2 + 2 + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ から $x = 3, -1$ となり、これを $y = -x^2 + 2$ に代入すればよい。



【練習 94 : いろいろな領域】

(1) 領域 $x^2 + 2x + y > 4$ を図示しなさい.

(2) 以下の領域を、それぞれ図示せよ.

$$\text{i) } \begin{cases} y < x + 2 \\ y < 2x - 1 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} y < x^2 + 1 \\ x + y - 3 > 0 \end{cases}$$

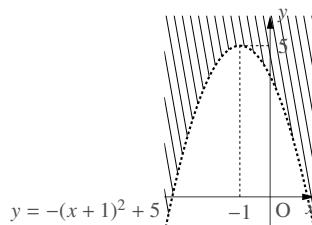
$$\text{iii) } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5 \\ 0 \leq x - y + 1 \end{cases}$$

$$\text{iv) } x^2 \leq y \leq -3x + 4$$

【解答】

(1) 不等式 $x^2 + 2x + y > 4$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &> -x^2 - 2x + 4 \\ &= -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4 \\ &= -(x + 1)^2 + 5 \end{aligned}$$



となるので、右の斜線部分が求める領域になる。

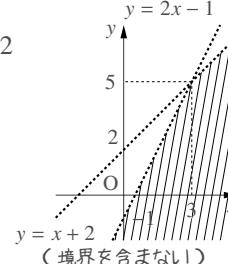
(2) i) 境界は 2 直線 $y = x + 2$, $y = 2x - 1$ であり、2

直線の交点は $(3, 5)$ と求められる。

求める領域は

- 直線 $y = x + 2$ より下部
- 直線 $y = 2x - 1$ より下部

であり境界を含まないので、右図のようになる。



◀ 左辺が y だけになるよう移項

◀ グラフを書くため、平方完成

◀ 頂点が $(-1, 5)$ の放物線

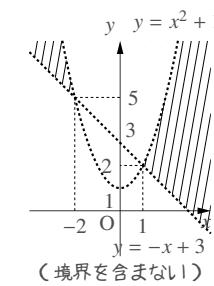
ii) 境界は放物線 $y = x^2 + 1$ と直線 $x + y - 3 = 0$

であり、交点は $(-2, 5), (1, 2)$ と求められる。

$x + y - 3 > 0 \Leftrightarrow y > -x + 3$ より、求める領域は

- 放物線 $y = x^2 + 1$ より下部
- 直線 $y = -x + 3$ より上部

であり境界を含まないので、右図のようになる。



◀ $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ を解けばよい。

$y = x + 2$ を $y = 2x - 1$ に代入し

$$x + 2 = 2x - 1 \quad \therefore x = 3$$

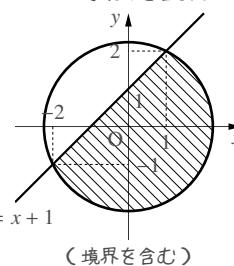
となり、これを $y = x + 2$ に代入すればよい。

iii) 境界は円 $x^2 + y^2 = 5$, 直線 $x - y + 1 = 0$ で
あり、交点は $(1, 2), (-2, -1)$ と求められる。

$0 \leq x - y + 1 \Leftrightarrow y \leq x + 1$ から、求める領域は

- 円 $x^2 + y^2 = 5$ の内側
- 直線 $y = x + 1$ より下部

であり境界を含むので、右図のようになる。



◀ $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ を解けばよい。

$x + y - 3 = 0$ に $y = x^2 + 1$ を代入し

$$\begin{aligned} &x + (x^2 + 1) - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \end{aligned}$$

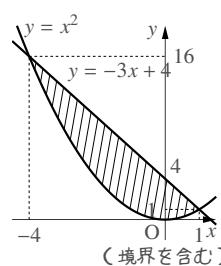
$x = -2, 1$ となるので、それぞれ
 $y = x^2 + 1$ に代入すればよい。

iv) 求める領域は $x^2 \leq y$ かつ $y \leq -3x + 4$ を満たせばよい。つまり

- 放物線 $y = x^2$ より下部
- 直線 $y = -3x + 4$ より上部

であり境界を含む。

境界は放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -3x + 4$ であり、
交点は $(1, 1), (-4, 16)$ となる。よって、右図の
ようになる。



◀ $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -3x + 4 \end{cases}$ を解けばよい。

y を消去して $x^2 = -3x + 4$ 、これを
解いて $x = -4, 1$ 。

【練習 95 : 点が領域に含まれるか調べる】

A(1, 2), B(-2, 3), C(-3, -1) とする.

(1) 点 A, B, C のうち, 領域 $y > 2x + 3$ に含まれる点をすべて答えよ.

(2) 点 A, B, C のうち, 不等式 $x^2 + y^2 < 6$ に含まれる点をすべて答えよ.

【解答】

(1) $y > 2x + 3 \leadsto$ A, B, C の座標を代入すると

A は $2 > 2 \cdot 1 + 3$ を満たさない, B は $3 > 2 \cdot (-2) + 3$ を満たす,

C は $-1 > 2 \cdot (-3) + 3$ を満たすので, 含まれるのは点 B, C である.

(2) $x^2 + y^2 < 6 \leadsto$ A, B, C の座標を代入すると

A は $1^2 + 2^2 < 6$ を満たす, B は $(-2)^2 + 3^2 < 6$ を満たさない,

C は $(-3)^2 + (-1)^2 < 6$ を満たさないので, 含まれるのは点 A である.

2. 領域の利用

A. 条件を満たす (x, y) を xy 平面上に図示する

【例題 96】 x, y を実数とするとき, 以下の問いに答えよ.

- 不等式 $(x - y)(x + y - 2) > 0$ を満たす (x, y) を座標平面上に図示せよ.
- $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 2$ ならば $x + y > 0$ であることを, 領域を用いて示せ.

【解答】

1. 不等式 $(x - y)(x + y - 2) > 0$ は

$$\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y - 2 < 0 \end{cases}$$

と同値な条件になる. それぞれ変形すると

$$\begin{cases} y < x \\ y > -x + 2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y > x \\ y < -x + 2 \end{cases}$$

が成立すればよいと分かり, どちらの領域も

$y = x$ と $y = -x + 2$ を境界とし, その交点は $(1, 1)$ となる.

よって求める領域は右上図のように図示できる.

2. 円 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ と直線 $x + y = 0$ の

共有点を求める

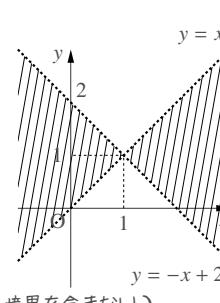
$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (-x - 1)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2 &= 2 \quad \therefore x = 0 \end{aligned}$$

よって, 共有点は $(0, 0)$ のみ^{*11}であるから,

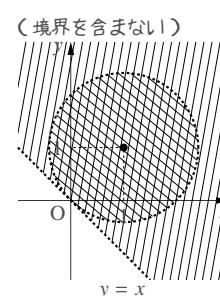
領域 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 2$ と領域 $x + y > 0$

は右図のようになる.

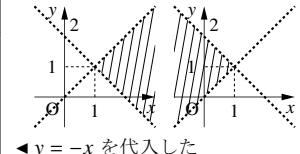
よって, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 2$ を満たす (x, y) は, すべて $x + y > 0$ を満たしていることが分かるので, 題意は満たされた. ■



◀ 2つの式を掛け正になるための必要十分条件は, どちらも正か, どちらも負になることである.



◀ それぞれ図示すれば, 次の 2 つのどちらかを満たす領域が, 求めるものと分かる.



◀ $y = -x$ を代入した

【練習 97 : 領域の利用】

- (1) 領域 $(y + 2x)(y - 2x^2) \leq 0$ を座標平面上に図示せよ.
- (2) $x^2 + (y - 3)^2 \geq 16$ ならば $x^2 + (y - 1)^2 \geq 4$ であることを、領域を用いて示せ.

【解答】

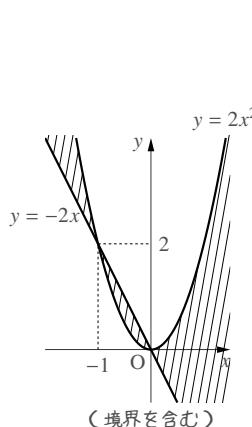
(1) 不等式 $(y + 2x)(y - 2x^2) \leq 0$ は

$$\begin{cases} y + 2x \geq 0 \\ y - 2x^2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y + 2x \leq 0 \\ y - 2x^2 \geq 0 \end{cases}$$

と同値な条件になる. それぞれ変形すると

$$\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq 2x^2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leq -2x \\ y \geq 2x^2 \end{cases}$$

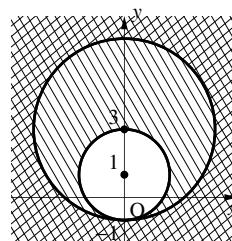
が成立すればよいと分かる. 境界である $y = -2x$ と $y = 2x^2$ の交点は $(-1, 2), (0, 0)$ となるから、求める領域は右図のようになる.



◀ 2 つの式を掛けて負になるための必要十分条件は、一方が正、他方が負になることである。

(2) 連立方程式 $\begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 = 16 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 4 \end{cases}$ を解くと $(x, y) = (0, -1)$ であり、こ

の 2 円は $(0, -1)$ で接している. これをもとにそれぞれの領域を描くと、右欄外の図のようになる. 図より、 $x^2 + (y - 3)^2 \geq 16$ を満たす (x, y) は全て $x^2 + (y - 1)^2 \geq 4$ を満たす領域に含まれている. ■



【発展 98 : 領域の利用】

a, b, x, y を実数とするとき、以下の問い合わせに答えよ.

- ① 領域 $x^2 - y^2 + 2y - 1 > 0$ を座標平面上に図示しなさい.
- ② $(x - 1)^2 + y^2 \leq 5$ ならば $x^2 + (y + 2)^2 \leq 20$ であることを示せ.
- ③ 領域 $y \leq -x^2 + ax + b$ が点 $(1, 0)$ を含む a, b の範囲を ab 平面上に図示せよ.

【発展 99 : 絶対値を含む不等式の領域】

- ① 領域 $|x| + |y| \leq 1$ を図示しなさい.

- ② $0 < k$ について、2 つの領域 $D_1 : |x| + |y| \leq k$, $D_2 : x^2 + y^2 \leq 4$ を考える. $D_1 \subset D_2$ となる k の条件, $D_1 \supset D_2$ となる k の条件をそれぞれ答えよ.

B. 最大・最小と領域

$x^2 + y^2 \leq 4$ を満たす (x, y) のうち、 $2x + y$ がとる最大値・最小値を考えてみよう. この問題は、 $2x + y = k$ とおいて、次のようにして領域の問題と置き換えられる.

$x^2 + y^2 \leq 4$ を満たす (x, y) のうち、 $2x + y = k$ がとる最大値・最小値を求める

$\leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$ 且 $2x + y = k$ を同時に満たす (x, y) が存在するような、 k の最大値・最小値を求める

\leftrightarrow 座標平面において、領域 $x^2 + y^2 \leq 4$ と直線 $2x + y = k$ が共有点を持つような、 k の最大値・最小値を求める

こうして、式 $2x + y$ の最大・最小の問題は、座標平面上の問題に置き換えられる.

【暗記】100：最大・最小と領域～その1～】

$x^2 + y^2 \leq 4$ を満たす (x, y) のうち、 $2x + y$ がとる最大値・最小値を求め、それにおける x, y の値も求めよ。

【解答】 $2x + y = k$ とおく。座標平面上で、領域 $x^2 + y^2 \leq 4$ が直線 $k = 2x + y$ と共有点を持つような、 k の最大値・最小値を求めればよい。

右図から、領域 $x^2 + y^2 \leq 4$ と直線 $k = 2x + y$ が共有点を持つには、直線 $k = 2x + y \Leftrightarrow 2x + y - k = 0$ と $(0, 0)$ の距離が、2 以下であればよい。

この条件を『点と直線の距離』(p.105) を用いて解けば

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \leq 2 \Leftrightarrow |k| \leq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow -2\sqrt{5} \leq k \leq 2\sqrt{5}$$

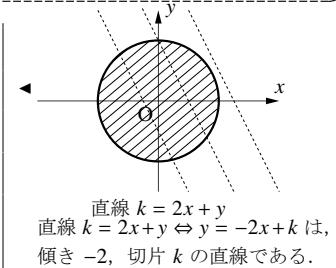
であるから k の最大値は $2\sqrt{5}$ 、最小値は $-2\sqrt{5}$ と分かる。

最大値をとる (x, y) の値は、 $x^2 + y^2 = 4$ と $2x + y = 2\sqrt{5}$ を連立して解いて $(x, y) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ と分かる。

同様に、最小値をとる (x, y) の値は、 $x^2 + y^2 = 4$ と $2x + y = -2\sqrt{5}$ を連立して解いて $(x, y) = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ と分かる。よって

$(x, y) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき k は最大値 $2\sqrt{5}$

$(x, y) = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき k は最小値 $-2\sqrt{5}$ をとる。



または、「円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $2x + y = k$ が共有点を持てばよい」と考えて、 $y = k - 2x$ から $x^2 + (k - 2x)^2 = 4$ の判別式 $D \geq 0$ を解いてよい。

【暗記】101：最大・最小と領域～その2～】

$0 \leq x, 0 \leq y, 2x + y \leq 8, x + 3y \leq 9$ を満たす領域を D とする。

1. 領域 D を図示しなさい。

2. D を満たす (x, y) について、 $x + y$ の最大値・最小値を求め、それにおける x, y の値も求めよ。

【解答】

$$1. 2x + y \leq 8 \Leftrightarrow y \leq -2x + 8, \quad x + 3y \leq 9 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{3}x + 3$$

より、領域 D は $0 \leq x, 0 \leq y, y \leq -2x + 8, y \leq -\frac{1}{3}x + 3$ の共通部分になる。よって、領域 D は右のようになる。

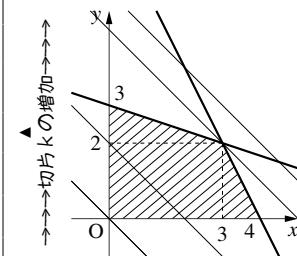
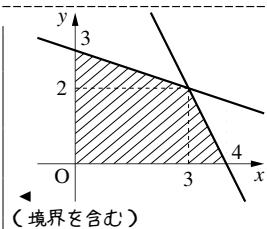
2. 直線 $x + y = k$ が領域 D と共有点をもつような、 k の最大値・最小値を求めればよい。直線 $x + y = k \Leftrightarrow y = -x + k$ は切片 k なので、 k の増加によって y 軸正の方向へ動く。

また、直線 $x + y = k$ の傾き -1 は、 $y = -2x + 8$ の傾きより大きく、 $y = -\frac{1}{3}x + 3$ の傾きより小さい。

以上から、右欄外の図のように、 D と直線 $x + y = k$ が共有点を持つのは、 $(3, 2)$ を通るときから原点を通るまでである。よって

$(x, y) = (3, 2)$ のとき k は最大値 5

$(x, y) = (0, 0)$ のとき k は最小値 0 をとる。



【練習 102 : 最大・最小と領域～その 3～】

x, y を実数とするとき、以下の最大値・最小値を求め、それぞれにおける x, y の値も求めなさい。

- (1) $x^2 + y^2 \leq 5$ のとき、 $x - 2y$ の取り得る最大値・最小値
- (2) $0 \leq x, 0 \leq y \leq -x + 3, y \geq 2x - 3$ を満たす (x, y) のうち、 $x + 2y$ がとる値の最大値・最小値と、 $3x - y$ がとる値の最大値・最小値

【解答】

(1) 座標平面上において、領域 $x^2 + y^2 \leq 5$ と直線 $x - 2y = k$ が共有点をもつような k の最大値・最小値を求めればよい。

領域 $x^2 + y^2 \leq 5$ と直線 $x - 2y = k$ が共有点をもつには、直線 $x - 2y - k = 0$ と $(0, 0)$ の距離が $\sqrt{5}$ 以下であればよいので

$$\frac{|0 - 0 - k|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |k| \leq 5$$

よって、 k の最大値は 5、最小値は -5 である。

$k = 5$ のとき、領域と直線の共有点は、円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $x - 2y = 5$ の共有点になるので、これを連立して解いて $(x, y) = (1, -2)$, $k = -5$ のときも同様にして $(x, y) = (-1, 2)$ である。以上より

$(x, y) = (1, -2)$ のとき、 $k = x - 2y$ は最大値 5

$(x, y) = (-1, 2)$ のとき、 $k = x - 2y$ は最小値 -5 をとる。

(2) 領域 $0 \leq x, 0 \leq y \leq -x + 3, y \geq 2x - 3$ を図示すると右下のようになる。

この領域が直線 $x + 2y = k$ と共有点をもつ k の最大値・最小値と、直線 $3x - y = l$ と共有点をもつ l の最大値・最小値を求めればよい。

直線 $x + 2y = k$ は $y = -\frac{x}{2} + \frac{k}{2}$ であるから、切片 $\frac{k}{2}$ は k の増加によって y 軸正の方向へ動く。また、傾き $-\frac{1}{2}$ は、 $y = 2x - 3$ の傾きより小さく、 $y = -3x + 7$ の傾きより大きい。よって、右欄外の図のように

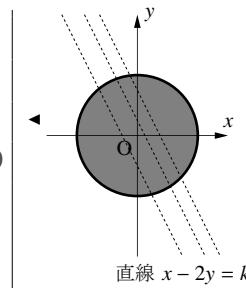
$(x, y) = (0, 3)$ のとき、 $k = x + 2y$ は最大値 6

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、 $k = x + 2y$ は最小値 0 をとる。

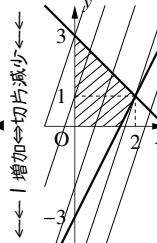
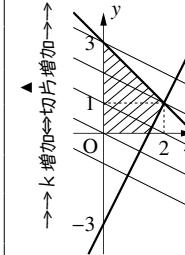
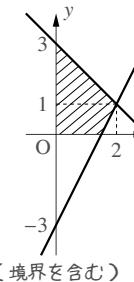
次に、直線 $3x - y = l$ は $y = 3x - l$ であるから、切片 $-l$ は l の増加によって y 軸負の方向へ動く。また、傾き 3 は、 $y = 2x - 3$, $y = -3x + 7$ の傾きより大きい。よって、右欄外の図のように

$(x, y) = (2, 1)$ のとき、 $l = 3x - y$ は最大値 5

$(x, y) = (0, 3)$ のとき、 $l = 3x - y$ は最小値 -3 をとる。



◀ 境界の直線の交点は求めておこう



【(発)展 103 : 最大・最小と領域～その 4～】

① $0 \leq y \leq -x^2 + 4$ のとき、値 $x + 2y$ のとりうる範囲を求めよ。

② $y \geq 3x + 3$ または $y \geq -2x + 2$ のとき、 $x^2 + y^2$ がとりうる値の最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。



2.8 第3章の補足



A. 三角形の面積の証明 (p.107)

【発展】 104 : 三角形の面積】

原点を O とし, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ とする. ただし, $a_1 \neq b_1$ とする.

- ① 原点から直線 AB へ引いた垂線の長さ h を求めよ.
- ② 線分 AB の長さを求め, $\triangle OAB$ の面積を求めよ.

【解答】

- ① 原点 O と直線 AB の間の距離が h と一致する. 直線 AB は, A を通り傾き $\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ の直線であるので, その方程式は

$$y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)$$

$$\Leftrightarrow (b_1 - a_1)y - (b_1 - a_1)a_2 = (b_2 - a_2)x - (b_2 - a_2)a_1$$

$$\Leftrightarrow -(b_2 - a_2)x + (b_1 - a_1)y - a_2b_1 + a_1b_2 = 0$$

と表される. よって, 求める垂線の長さ h は次のようにになる.

$$\begin{aligned} h &= \frac{|-(b_2 - a_2) \times 0 + (b_1 - a_1) \times 0 - a_2b_1 + a_1b_2|}{\sqrt{(-(b_2 - a_2))^2 + (b_1 - a_1)^2}} \\ &= \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}} \end{aligned}$$

- ② $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, $\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h$ より

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \cdot \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} |a_1b_2 - a_2b_1| \end{aligned}$$

◀ 『点と直線の距離』 (p.105)

◀ 『2 点間の距離』 (p.84)



この公式は, 数学Bで学ぶ「ベクトル」を用いても証明できる.

B. 『円周上の点から引いた接線の方程式』(p.140) の証明

—円周上の点から引いた接線の方程式—

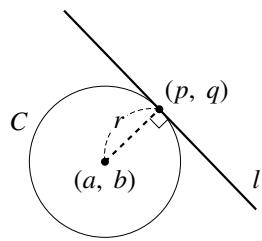
円 $C : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ の周上の点 (p, q) から引いた接線

l の方程式は

$$(p - a)(x - a) + (q - b)(y - b) = r^2$$

となる。特に、円 C の中心が原点にある場合は次のようになる。

$$px + qy = r^2 \quad \leftarrow a = b = O \text{ を接線 } l \text{ の式に代入した}$$



(証明) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ の中心を $O(a, b)$ とすると、接線 l は線分 OP と直交する直線し、線分 OP の傾きは $\frac{q - b}{p - a}$ であるので、

$$\frac{q - b}{p - a} \times (\text{直線 } l \text{ の傾き}) = -1 \Leftrightarrow (\text{直線 } l \text{ の傾き}) = -\frac{p - a}{q - b}$$

となる。よって、 l は (p, q) を通り傾き $-\frac{p - a}{q - b}$ の直線と分かるので

$$\begin{aligned} y - q &= -\frac{p - a}{q - b}(x - p) \Leftrightarrow (q - b)(y - q) = -(p - a)(x - p) \\ &\Leftrightarrow (q - b)(y - b + b - q) = -(p - a)(x - a + a - p) \\ &\Leftrightarrow (q - b)(y - b) + (q - b)(b - q) = -(p - a)(x - a) - (p - a)(a - p) \\ &\Leftrightarrow (p - a)(x - a) + (q - b)(y - b) = (p - a)^2 + (q - b)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 P は円 C の周上にあるので、 $(p - a)^2 + (q - b)^2 = r^2$ を満たす。つまり、 l の方程式は $(p - a)(x - a) + (q - b)(y - b) = r^2$ となる。

…この方程式は、数学Bで学ぶベクトルを用いて導くこともできる。

【発展：円の方程式～その2～】(p.114)

① 中心の座標を $(a, -2a + 1)$, 半径を r とおけば求める円の方程式は $(x - a)^2 + \{y - (-2a + 1)\}^2 = r^2$ となる.

$$(4, 2) \text{ を通ることから } (4 - a)^2 + \{2 - (-2a + 1)\}^2 = r^2$$

$$(-6, -2) \text{ を通ることから } (-6 - a)^2 + \{-2 - (-2a + 1)\}^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 - 4a + 17 = r^2 \\ 5a^2 + 45 = r^2 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array}$$

① - ② より $-4a - 28 = 0$ なので $a = -7$ である. これを②に代入すれば $r^2 = 290$ なので, 求める円の方程式は $(x + 7)^2 + (y - 15)^2 = 290$.

② x 軸と y 軸に接するので, 中心は, 直線 $y = x$ 上, $y = -x$ 上のいずれかにある.

直線 $y = x$ 上に中心があるとき, 2 直線 $\begin{cases} y = x \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}$ の交点が円の中心になる. これを解いて中心は $(2, 2)$ とわかる.

直線 $y = -x$ 上に中心があるとき, 2 直線 $\begin{cases} y = -x \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}$ の交点が円の中心になる. これを解いて中心は $(1, -1)$ とわかる.

半径は x 座標に等しいので, 求める円の方程式は $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$, $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$.

◀ 中心の x 座標を a とおけばよい.

◀ $y = x$ を $3x - y - 4 = 0$ に代入して $2x - 4 = 0$ から $x = 2$

◀ $y = -x$ を $3x - y - 4 = 0$ に代入して $4x - 4 = 0$ から $x = 1$

◀ 円は x 軸, y 軸に接するため, 精確には, x 座標または y 座標の絶対値に等しい.

【練習：円と直線の共有点の個数】(p.117)

(1) $x^2 + y^2 = k$ の中心 $(0, 0)$ と直線 $3x - 4y + 10 = 0$ の距離は

$$\frac{|0 - 0 + 10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

である. つまり, $\sqrt{k} = 2 \Leftrightarrow k = 4$ なら円と直線は接している.

1) $k = 1 < 4$ なので, 共有点は **0 個** 2) 共有点は **1 個**

3) $k = 9 > 4$ なので, 共有点は **2 個**

(2) 円の中心 $(2, 1)$ と直線 $2x + 3y - 4 = 0$ の距離は

$$\frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

である. よって, $r \geq \frac{3}{\sqrt{13}}$ であればよい.

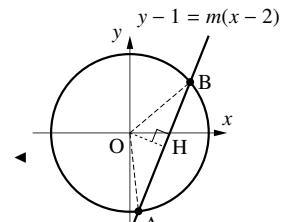
◀ 『点と直線の距離』(p.105)

【練習：円が切り取る線分の長さ～その2～】(p.118)

円 C の中心を O とし, 直線 $y - 1 = m(x - 2)$ へ下ろした垂線の足を H とおく. $AB = 6$ のとき, $AH = 3$, $OA = \sqrt{10}$ であるから, $\triangle AOH$ について三平方の定理より, $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = 1$.

一方, OH は O と直線 $y - 1 = m(x - 2) \Leftrightarrow mx - y - 2m + 1 = 0$ の距離に等しく, 『点と直線の距離』(p.105) より

$$\begin{aligned} \frac{|-2m + 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} &= OH = 1 \Leftrightarrow |-2m + 1| = \sqrt{m^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow (-2m + 1)^2 = m^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 = m^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 3m^2 - 4m = 0 \quad \therefore m = 0, \frac{4}{3} \end{aligned}$$



◀ 『点と直線の距離』(p.105) を用いるため, 一般形に直した

◀ 両辺に $\sqrt{m^2 + 1}$ を掛けた

◀ 両辺を 2 乗した, 絶対値の性質より $| -2m + 1 |^2 = (-2m + 1)^2$

【発展：円が切り取る線分の長さ～その3～】(p.118)

- ① l の方程式を k について降べきの順に整理すれば

$$yk + (x - 2) = 0$$

となる。つまり、任意の k で等式が成り立つのは $y = 0, x - 2 = 0$ のときであるので、直線 l が通る定点 P は $(2, 0)$ である。

$$\textcircled{2} \quad \triangle OAB = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot (2a) \cdot b = ab$$

$$\textcircled{3} \quad \triangle OAM \text{ は直角三角形なので } a^2 + b^2 = 10 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

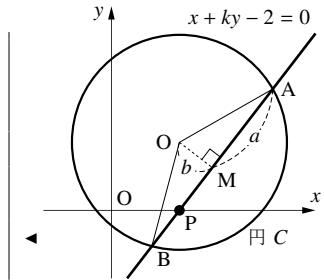
一方、(2) より $\triangle OAB = ab = 3$ であり、 $a \neq 0$ より $b = \frac{3}{a}$ である。これを①に代入すれば

$$\begin{aligned} a^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 &= 10 \Leftrightarrow a^4 + 9 = 10a^2 \\ &\Leftrightarrow a^4 - 10a^2 + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 - 1)(a^2 - 9) = 0 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるので、 $a = 1, 3$ 。 $ab = 3$ より、 $(a, b) = (1, 3), (3, 1)$ 。ここで、 $OM < OP = 2$ であるので、 $b < 2$ が成り立つから、 $\mathbf{AM} = 3, \mathbf{OM} = 1$ である。また、 OM は $O(2, 2)$ と直線 $l: x + ky - 2 = 0$ の距離に一致するので

$$\begin{aligned} \frac{|2 + 2k - 2|}{\sqrt{1^2 + k^2}} &= 1 \Leftrightarrow |2k| = \sqrt{1 + k^2} \\ &\Leftrightarrow 4k^2 = 1 + k^2 \end{aligned}$$

よって、 $k^2 = \frac{1}{3}$ であるので、 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。



◆ 三平方の定理より
 $OM^2 + MA^2 = MA^2$

◆ $OM = 3$ として計算を進めると

$$\begin{aligned} \frac{|2 + 2k - 2|}{\sqrt{1^2 + k^2}} &= 3 (= OM) \\ \Leftrightarrow |2k| &= 3\sqrt{1 + k^2} \\ \Leftrightarrow 4k^2 &= 9 + 9k^2 \end{aligned}$$

より $k^2 = -\frac{9}{5}$ となって不適。

【発展：2円の共通接線】(p.123)

- ① 問題を座標平面上に図示すれば右欄外の図のようになる。

2本の l は軸に平行な直線と分かり、その方程式は $x = 1, y = 1$ である。

- ② 右欄外の図のように、2円の中心を A, B 、2接点を S, T とする。このとき、 $\triangle PSA \sim \triangle PTB$ であり、その相似比は $SA : TB = 2 : 1$ 。

よって、 $PA : PB = 2 : 1$ であるから、 B は線分の AP の中点となる。 $P(a, b)$ における

$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right) = (2, 2) \Leftrightarrow (a, b) = (5, 5)$$

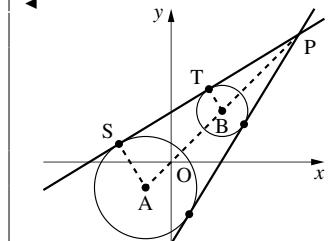
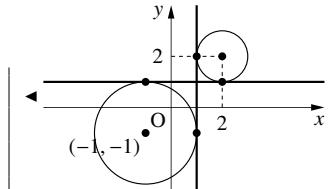
よって、 $P(5, 5)$ である。

- ③ L の傾きを m とおく。 L は P を通るので

$$y - 5 = m(x - 5) \Leftrightarrow mx - y - 5m + 5 = 0$$

が L の方程式となる。この直線と B の距離が、円 C_2 の半径 1 に等しくなければよいので

$$\begin{aligned} \frac{|m \cdot 2 - 2 - 5m + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} &= 1 \\ \Leftrightarrow |-3m + 3| &= \sqrt{m^2 + 1} \\ \Leftrightarrow (3m - 3)^2 &= m^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 4 &= 0 \quad \therefore m = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8} \end{aligned}$$



◆ 両辺とも正なので、両辺 2乗

【発展：円と放物線】(p.123)

- ① 右欄外の図から、放物線 H と円 C の共有点の y 座標は 1 つに定まる。円 C の半径を r とおくと、円 C の方程式は $x^2 + (y - 2)^2 = r^2$ となる。つまり、 A, B の座標は連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 & \dots \text{①} \\ x^2 + (y - 2)^2 = r^2 & \dots \text{②} \end{cases}$ の解であり、これが y の解をただ 1 つしかもたなければよい。 x を消去すれば

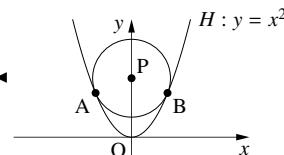
$$y + (y - 2)^2 = r^2 \Leftrightarrow y^2 - 3y + (4 - r^2) = 0 \quad \dots \text{③}$$

この方程式の判別式 D が 0 になればよいので

$$D = (-3)^2 - 4(4 - r^2) = 0 \Leftrightarrow -7 + 4r^2 = 0 \quad r > 0 \text{ より } r = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

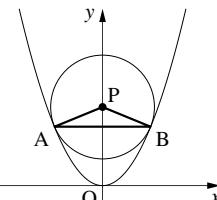
- ② ③に $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$ を代入し、 y について解けば $y = \frac{3}{2}$ 。 A, B は $y = x^2$ 上の点なので、 $\frac{3}{2} = x^2$ を解いて、 $A\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2}\right), B\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 。

$$\triangle APB \text{ は, 底辺 } AB = \sqrt{6}, \text{ 高さは } \frac{1}{2} \text{ となるので, } \triangle APB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$



◆ ①式の $x^2 = y$ を、②に代入した。

◆ y の解はただ 1 つに定まり、重解となる



【発展：2円の交点と、それを通る直線・円】(p.123)

- ① A, B の座標 (x, y) は、連立方程式 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \dots \text{①} \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3 & \dots \text{②} \end{cases}$ の解

に一致する。② - ① により

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 3$$

$$\begin{array}{rcrccl} -) x^2 & & +y^2 & & = 2 & \\ -2x + 1 & & -4y + 4 = 1 & \Leftrightarrow & x + 2y - 2 = 0 & \dots \text{③} \end{array}$$

A, B の座標 (x, y) は必ず③を満たすので、この $x + 2y - 2 = 0$ が直線 AB の方程式になる。

- ② ③より $x = 2 - 2y$ なので①に代入して

$$(2 - 2y)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow 5y^2 - 8y + 2 = 0$$

これを解いて $y = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}$ 。 $x = 2 - 2y$ に代入して

$$x = 2 - \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{5} = \frac{2 \mp 2\sqrt{6}}{5} \text{ なので}$$

$$A\left(\frac{2 - 2\sqrt{6}}{5}, \frac{4 + \sqrt{6}}{5}\right), B\left(\frac{2 + 2\sqrt{6}}{5}, \frac{4 - \sqrt{6}}{5}\right).$$

- ③ k を実数とすると

$$F(x, y) = k(x^2 + y^2 - 2) + (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 3$$

とおけば、 $F(x, y) = 0$ のグラフは円 C_1, C_2 の交点 A, B を共に通る。これが原点を通ればよいので、

$$\begin{aligned} F(0, 0) = 0 &\Leftrightarrow F(0, 0) = k(-2) + (-1)^2 + (-2)^2 - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2k + 2 = 0 \quad \therefore k = 1 \end{aligned}$$

よって、求める円の方程式は

$$\begin{aligned} 1 \cdot (x^2 + y^2 - 2) + (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 2y^2 - 4y &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 2y &= 0 \end{aligned}$$

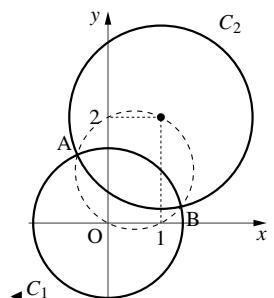
◆ 2次の項を消すため、② - ①をする

◆ 分けて計算すれば、たとえば、

$$y = \frac{4 + \sqrt{6}}{5} \text{ のとき}$$

$$x = 2 - \frac{8 + 2\sqrt{6}}{5}$$

$$= \frac{10 - (8 + 2\sqrt{6})}{5} = \frac{2 - 2\sqrt{6}}{5}$$



【発展：軌跡～その3～】(p.126)

$P(x, y)$ とおく。 P と直線 l の距離は $|2-y|$ であり、 FP の長さと等しいので
 $|2-y| = \sqrt{x^2 + (y+3)^2} \Leftrightarrow (2-y)^2 = x^2 + (y+3)^2$
 $\Leftrightarrow 4 - 4y = x^2 + 6y + 9$

これを整理して、放物線 $y = -\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{2}$ が求める軌跡になる。

【発展：軌跡～その4～】(p.126)

直線 l, m から等距離にある点 P をとる。 P が l, m の交点 A に一致しないとき、右欄外の図について $\triangle PAC \cong \triangle PAD$ であるから、常に $\angle PAC = \angle PAD$ が成り立つ。よって、 K は直線 l, m のなす角を二等分する直線になる。

$P(x, y)$ とする。 P と l の距離が P と m の距離と等しく、 l, m はそれぞれ $x+y-1=0, 7x-y-2=0$ と変形できるから

$$\begin{aligned} & \frac{|x+y-1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|7x-y-2|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} \\ \Leftrightarrow & \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x-y-2|}{5\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow & 5|x+y-1| = |7x-y-2| \\ \Leftrightarrow & 5(x+y-1) = 7x-y-2 \text{ または } -5(x+y-1) = 7x-y-2 \end{aligned}$$

つまり、 K の軌跡は直線 $2x-6y+3=0$ 、直線 $12x+4y-7=0$ の2本になる。

【練習：動点をもつ軌跡～その2～】(p.128)

$P(s, t)$ とおくと、 $s^2 + t^2 = 1 \dots \textcircled{1}$ を満たしている。また、 $\triangle ABP$ の重心を (x, y) とすると

$$\begin{cases} x = \frac{2+1+s}{3} \\ y = \frac{1+(-4)+t}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+s}{3} \\ y = \frac{-3+t}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 3x-3 \\ t = 3y+3 \end{cases}$$

この2式を①に代入すれば

$$\begin{aligned} (3x-3)^2 + (3y+3)^2 = 1 & \Leftrightarrow [3(x-1)]^2 + [3(y+1)]^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow 9(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 1 \end{aligned}$$

よって、求める軌跡は円 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{9}$ になる。

【練習：頂点の描く軌跡】(p.128)

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= x^2 + (2a+4)x - 3a + 4 \\ &= \{x+(a+2)\}^2 - (a+2)^2 - 3a + 4 \\ &= \{x+(a+2)\}^2 - a^2 - 7a \end{aligned}$$

であるから、頂点は $A(-a-2, -a^2-7a)$ となる。

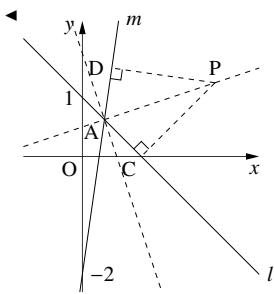
$$(2) \quad A(x, y) \text{ とおけば } \begin{cases} x = -a-2 & \dots \textcircled{1} \\ y = -a^2-7a & \dots \textcircled{2} \end{cases} \text{ となる。} \quad \textcircled{1} \text{ より } a = -x-2 \text{ であるから} \textcircled{2} \text{ に代入して}$$

$$y = -(-x-2)^2 - 7(-x-2) = -x^2 + 3x + 10$$

であるから、 A の軌跡は放物線 $y = -x^2 + 3x + 10$ である。

◀ 厳密には $2-y$ になる。というのも図を描けば、直線 l との距離が FP と等しいので、 P の y 座標は 2 より小さいと分かる。

◀ このような軌跡を考えて得られた放物線について直線 l は準線、点 F は焦点と言われる。



◀ 両辺とも絶対値であればこのようになるとよい。2乗してしまうと計算が大変になる。

◀ 実際、 l, m の角の二等分線は2本存在する。

◀ 『三角形の重心の座標』(p.88)

【発展：動点をもつ軌跡～その3～】(p.128)

$A(s, s-3)$ とおく。線分 AB が y 軸に平行なので B の x 座標も s になり、 B は $y = x^2$ 上にあるので、 $B(s, s^2)$ と分かる。

$P(x, y)$ とおく。 P は線分 AB を $2:1$ に内分するので

$$\begin{cases} x = \frac{s+2s}{2+1} \\ y = \frac{s-3+2s^2}{2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = \frac{2s^2+s-3}{3} \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad \text{①} \quad \text{②}$$

①を②に代入して、 P の軌跡は放物線 $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 1$ と分かる。

◀ $B(s, s^2)$ において、 A の座標を求めてよい

◀ 実は、計算するまでもなく P の x 座標は s になることが、図を描けば分かる。

【発展：2交点の中点の軌跡～その4～】(p.131)

A, B の x 座標をそれぞれ α, β とすると、これは

$$x^2 + (kx + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow (k^2 + 1)x^2 + 4kx + 3 = 0$$

の 2 解である。これが異なる 2 實数解をもつので

$$\frac{D}{4} > 0 \Leftrightarrow (2k)^2 - (k^2 + 1) \cdot 3 > 0 \Leftrightarrow k^2 - 3 > 0 \quad \therefore k < -\sqrt{3}, \sqrt{3} < k \quad \dots \dots \dots \quad \text{①}$$

一方、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -\frac{4k}{k^2 + 1}, \quad \alpha\beta = \frac{3}{k^2 + 1}$$

となる。また、 A も B も直線 l 上にあるので、 $A(\alpha, k\alpha + 2), B(\beta, k\beta + 2)$ となる。よって、 $M(x, y)$ とおくと

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{2k}{k^2 + 1} \quad \dots \dots \dots \quad \text{②}$$

$$y = \frac{k\alpha + 2 + k\beta + 2}{2} = \frac{k(\alpha + \beta) + 4}{2} = \frac{-\frac{4k^2}{k^2 + 1} + 4}{2} = \frac{-4k^2 + 4(k^2 + 1)}{2(k^2 + 1)} = \frac{2}{k^2 + 1} \quad \dots \dots \dots \quad \text{③}$$

となる。②、③から $\frac{2}{k^2 + 1}$ を消去して

$$x = -k \cdot \frac{2}{k^2 + 1} = -ky$$

③より $y \neq 0$ であるので $k = -\frac{x}{y}$ 。これを③に代入して

$$y = \frac{2}{\left(-\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = \frac{2y^2}{x^2 + y^2}$$

両辺を y で割って整理すれば

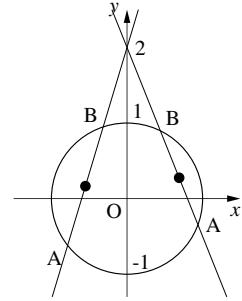
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 1 = \frac{2y}{x^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2y \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad \text{④}$$

これが、 M の軌跡を表す。

ただし、①において、 $k^2 > 3$ であったので

$$4 < k^2 + 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{k^2 + 1} < \frac{1}{4}$$

◀ 直線 l は、定点 $(0, 2)$ を通る。

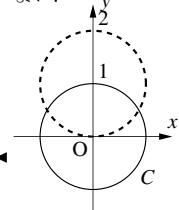


◀ 圓 C の方程式を用いて、 A, B の y 座標を求めることはできない。

◀ 分母・分子に $k^2 + 1$ を掛けて整頓した

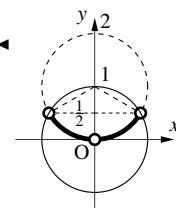
◀ ②、③も、 k について解くと 2 つの解ができる。そこで、いったん k の 2 次式を消す。

◀ $y \neq 0$ なので、両辺 y で割ってよい。



◀ すべての辺が正なので、分母と分子を入れ替えると大小関係が逆転する。

となり、③より $y = 2 \cdot \frac{1}{k^2 + 1}$ であるので、 $0 < y < \frac{1}{2}$ 。以上をまとめて、M の軌跡は円 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ のうち、 $0 < y < \frac{1}{2}$ の部分である。



④の行以降について

- M は必ず円 C の内部にあるので、円④のうち円 C の内部のみ有効
- 直線 l は「(0, 2) を通り、y 軸に平行でない直線の集まり」であるので、M が原点になることはないという条件をまとめて、 $0 < y < \frac{1}{2}$ のみが有効という結論を導いてもよい。

【発展：対称式で表された座標の軌跡】(p.131)

$M(x, y)$ とする。つまり、 $x = a + b$, $y = ab$ である。与えられた式を変形すれば $a^2 + b^2 = 10 \Leftrightarrow (a + b)^2 - 2ab = 10$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2y = 10$$

となる。y について解き、M の軌跡 $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$ を得る。

ここで $x = a + b$, $y = ab$ から、t についての 2 次方程式

$$t^2 - xt + y = 0 \quad \dots \dots \dots \quad ①$$

の 2 解が a, b となる。a, b が実数なので、①の判別式は $D = x^2 - 4y \geq 0$ でないといけない。まとめると M(x, y) は $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 5 & \dots \dots \dots \quad ② \\ x^2 - 4y \geq 0 & \dots \dots \dots \quad ③ \end{cases}$ を同時に満たす x, y の値である。②を③に代入して

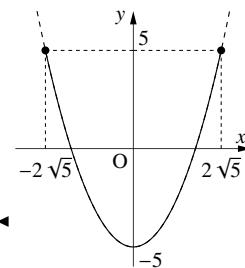
$$x^2 - 4\left(\frac{1}{2}x^2 - 5\right) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 20 \geq 0$$

から $-2\sqrt{5} \leq x \leq 2\sqrt{5}$ となる。

よって、M の軌跡は放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$ ($-2\sqrt{5} \leq x \leq 2\sqrt{5}$) である。

◀ M の軌跡の方程式は x, y が満たす等式に一致する。

◀ 『解と係数の関係』(p.55) を逆に用いた。



【発展：2 直線の交点の軌跡】(p.131)

連立方程式 $\begin{cases} kx + y + 1 = 0 & \dots \dots \dots \textcircled{1} \\ x - ky - 1 = 0 & \dots \dots \dots \textcircled{2} \end{cases}$ を同時に満たす (x, y) が P である.

②を k について解けば

$$ky = x - 1 \Leftrightarrow k = \frac{x-1}{y} \quad (y \neq 0) \quad \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

i) $y \neq 0$ のとき、③を①に代入して

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{y} \cdot x + y + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + y = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{ただし, } y \neq 0) \end{aligned}$$

ii) $y = 0$ のとき、P が l_2 上にあるので

$$x - k \cdot 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

でないといけない。逆に、点 $(1, 0)$ を l_1 の式に代入して $k = -1$ を得るので、この点を P は通る。

以上より、P の軌跡は以下をまとめたものと分かる。

- $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ (ただし, $y \neq 0$)
- 点 $(1, 0)$

これを座標平面上に書き出すと右欄外の図のようになります。

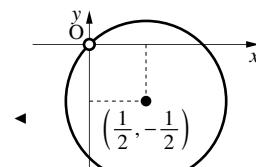
$\text{円} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ のうち、 $(0, 0)$ を除いた部分が P の軌跡と分かる。

【別解：図形的に解く】直線 $l_1 : kx + (y + 1) = 0$ は定点 A($0, -1$) をもち、直線 $l_2 : -ky + (x - 1) = 0$ は定点 B($1, 0$) をもつ。P は AP \perp PB を満たすので、P は線分 AB を直径とする円周上の点になる。

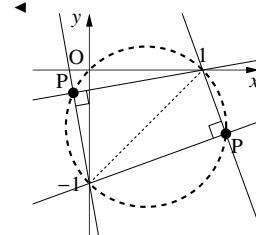
ただし、 l_1 は y 軸に平行な直線 $x = 0$ にはならず、 l_2 は x 軸に平行な直線 $y = 0$ になることはない。つまり、 $x = 0, y = 0$ の交点である $(0, 0)$ に P が一致することはない。よって、AB を直径とする $\text{円} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ のうち、 $(0, 0)$ を除いた部分が P の軌跡と分かる。

◀ ①と②から k を消去して、x と y の関係式を求めればよい。

◀ つまり、 $k = -1$ のときに、 l_1 と l_2 が $(1, 0)$ で交わる。



◀ p.99 を参照のこと



【発展：領域の利用】(p.136)

$$\textcircled{1} \quad x^2 - y^2 + 2y - 1 > 0 \text{ の左辺を因数分解すると}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow x^2 - (y^2 - 2y + 1) > 0 \Leftrightarrow x^2 - (y-1)^2 > 0 \\ & \Leftrightarrow (x+y-1)(x-y+1) > 0 \end{aligned}$$

となるから、求める領域は

$$\begin{cases} x+y-1 > 0 \\ x-y+1 > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x+y-1 < 0 \\ x-y+1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > -x+1 \\ y < x+1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y < -x+1 \\ y > x+1 \end{cases}$$

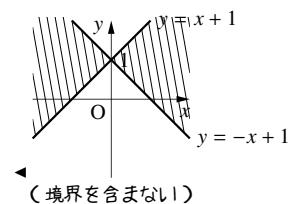
となる。これを図示して、右欄外の図のようになる。

$$\textcircled{2} \quad \text{連立方程式} \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 5 & \dots \dots \dots \textcircled{1} \\ x^2 + (y+2)^2 = 20 & \dots \dots \dots \textcircled{2} \end{cases} \text{を解くと } x = 6 - 2y \text{ なので、これを}$$

を①に代入すると

$$(6 - 2y - 1)^2 + y^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 25 - 20y + 4y^2 + y^2 = 5$$



◀ (境界を含まない)

$$\Leftrightarrow (y - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

$y = 2$ を $x = 6 - 2y$ に代入すると $x = 2$ であり、解が 1 つに定まるので、2 円は $(2, 2)$ でお互いに接している。これをもとにそれぞれの領域を描くと、右欄外の図のようになる。図より、 $(x-1)^2 + y^2 \leq 5$ を満たす領域は全て $x^2 + (y+2)^2 \leq 20$ を満たす領域に含まれる。■

- ③ 領域 $y \leq -x^2 + ax + b$ が点 $(1, 0)$ を含むので

$$0 \leq -1^2 + a \cdot 1 + b$$

を満たす。これを整頓して $b \geq -a + 1$ を満たせばよいと分かる。これを ab 平面上に図示すれば、右欄外のようになる。

【発展：絶対値を含む不等式の領域】(p.136)

- ① x, y の正負によって場合分けをすると

- i) $x \geq 0, y \geq 0$ のとき、求める領域は

$$x + y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq -x + 1$$

となるので、右欄外のようになる。

- ii) $x \geq 0, y < 0$ のとき、求める領域は

$$x - y \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq y$$

となるので、右欄外のようになる。

- iii) $x < 0, y \geq 0$ のとき、求める領域は

$$-x + y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq x + 1$$

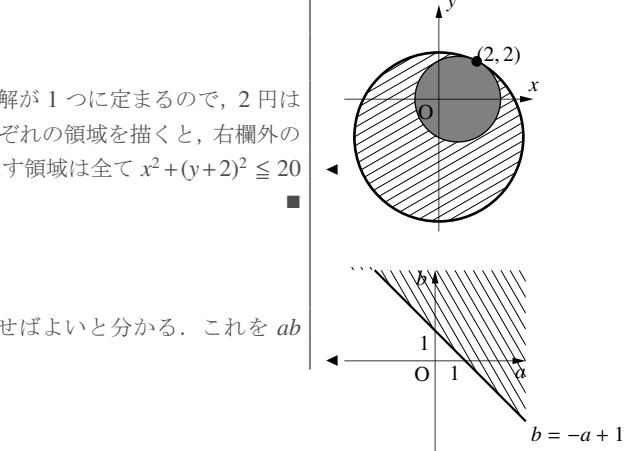
となるので、右欄外のようになる。

- iv) $x \geq 0, y \geq 0$ のとき、求める領域は

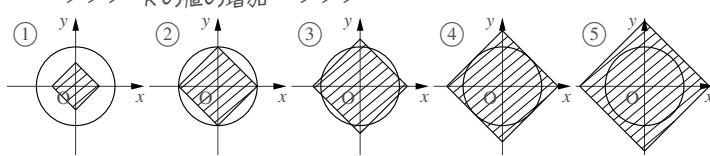
$$-x - y \leq 1 \Leftrightarrow -x - 1 \leq y$$

となるので、右欄外のようになる。

以上をまとめると、求める領域は右図のようになる。



- ② ①と同様にして、領域 D_1 は右欄外のようになる。領域 D_2 は半径 2 の円の内部であるから、 D_1, D_2 の関係は k の値によって以下のように変わる。



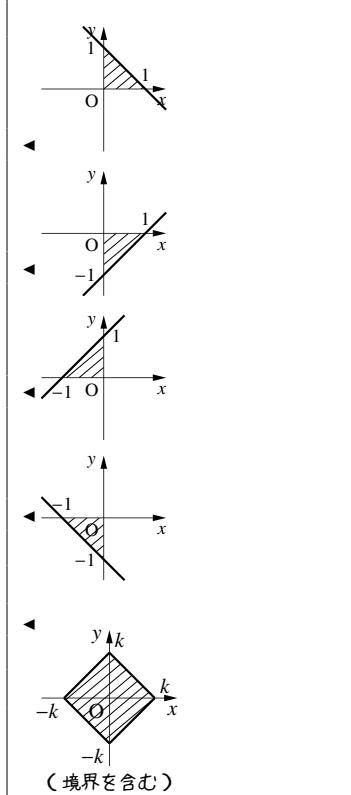
$D_1 \subset D_2$ になるのは、①、②のときになる。②のときは $k = 2$ であるから $0 < k \leq 2$ であればよい。

$D_1 \supset D_2$ になるのは、④、⑤のときに限る。④のときは、直線 $x + y = k$ が原点から 2 の距離にあるときなので

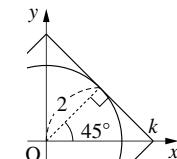
$$\frac{|0 + 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2 \Leftrightarrow k = 2\sqrt{2} \quad (0 < k \text{ より})$$

であるから、 $2\sqrt{2} \leq k$ であればよい。

以上をまとめて、 $D_1 \subset D_2$ のときは $0 < k \leq 2$ 、 $D_1 \supset D_2$ のときは $2\sqrt{2} \leq k$ が求める条件となる。



次のように図形的に考えても、 $k = 2\sqrt{2}$ とわかる。



【発展：最大・最小と領域～その4～】(p.138)

- ① 領域 $0 \leq y \leq -x^2 + 4$ が直線 $x + 2y = k$ と共に点をもつような k の最大値・最小値を求めればよい。

直線 $x + 2y = k$ は $y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$ であるから、切片 $\frac{k}{2}$ は k の増加によって
 y 軸正の方向へ動く。つまり、 k が最小値をとるのは $(-2, 0)$ のときであり、
 $k = x + 2y = (-2) + 2 \cdot 0 = -2$.

また、放物線 $y = -x^2 + 4$ と直線 $x + 2y = k$ が接するときに k は最大値をとる。放物線 $y = -x^2 + 4$ と直線 $x + 2y = k$ が接するときは

$$x + 2(-x^2 + 4) = k \Leftrightarrow 2x^2 - x + k - 8 = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

が重解をもつので、この 2 次方程式の判別式を D とすれば

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2(k-8) = 0 \Leftrightarrow 1 - 8k + 64 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{65}{8}$$

以上より、 k のとりうる範囲は $-2 \leq k \leq \frac{65}{8}$ である.

- ② 領域 $y \geq 3x + 3$ または $y \geq -2x + 2$ が、 $x^2 + y^2 = k$ と共有点をもつような k の最小値を求めればよい.

円 $x^2 + y^2 = k$ が $y \geq 3x + 3$ と共に点を持つには

$$\sqrt{k} \geq \frac{|3|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow k \geq \frac{9}{10}$$

であればよい。また、 $y = -2x + 2$ と共有点を持つのは

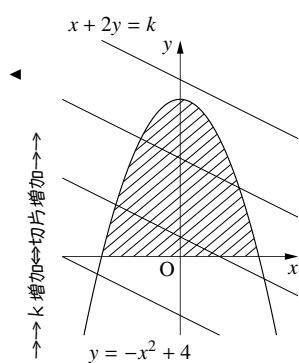
$$\sqrt{k} \geq \frac{|2|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow k \geq \frac{4}{5}$$

である。この少なくとも一方を満たせばよいので、 k の最小値は $\frac{4}{5}$ である。

このときの x, y は、連立方程式 $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ x^2 + y^2 = \frac{4}{5} \end{cases}$ の解である。

$x^2 + (-2x + 2)^2 = \frac{4}{5}$ を解いて $x = \frac{4}{5}$, $y = -2x + 2 = \frac{2}{5}$ となるから

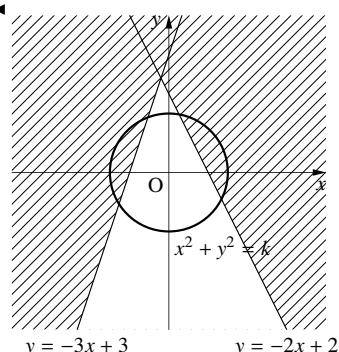
$(x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ のとき、 k は最小値 $\frac{4}{5}$ をとる。



◀ このときの x, y を求めるには,
 $k = \frac{65}{8}$ として方程式を解く.

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 2x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{から } x = \frac{1}{4}, y = -x^2 + 4 = \frac{63}{16}.$$



索引

アポロニオスの円, 126	幾何学, 83 軌跡, 124 軌跡の方程式, 124 境界, 132	重心 (三角形の) , 88 多変数関数, 92 定点, 99 内分, 85 領域, 132
陰関数, 92		
解	グラフ, 94 陰関数の——, 94	
陰関数の——, 93		
解析幾何, 83		
外分, 87	座標幾何学, 83	

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち、背景が灰色である文字は、数学 I で用いられることがある。

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー, グサイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	\circ
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π , ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ , ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	пси, プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω