13th-note 数学II

（新学習指導要領（平成 **24** 年度～）向け）

この教材を使う際は

- 表示：原著作者のクレジット「13th-note」を表示してください.
- 非営利：この教材を営利目的で利用してはいけません．ただし，学校・塾・家庭教師の授業で利用するための無償配布は可能です.
- 継承：この教材を改変した結果生じた教材には，必ず，原著作者のクレジット「13th-note」を表示してください.
- クレジットを外して使用したいという方はご一報（kutomi@collegium.or.jp）ください.

Ver3.01(2013-8-31)

目次

第 2 章　図形と方程式 83

§2.1　図形を座標の上に 83

§2.2　平面上の点と座標 84

§1.　2 点間の距離 84

§2.　線分の内分点・外分点 85

§3.　三角形の重心 88

§4.　座標幾何学の応用 89

§2.3　多変数関数と陰関数 92

§2.4　平面上の直線と方程式 96

§1.　直線の方程式 96

§2.　直線の平行・垂直 100

§3.　点と直線の距離 105

§4.　三角形の面積 107

§2.5　平面上の円と方程式 108

§1.　円の方程式〜平方完成形 108

§2.　円の方程式〜一般形 109

§3.　円の方程式の決定 110

§4.　円と直線の関係 115

§5.　2 円の関係 121

§6.　㊘㊙　円と放物線 123

§7.　2 つのグラフの交点を通るグラフ 123

§2.6　軌跡 124

§1.　軌跡 124

§2.　座標平面上の軌跡 124

§3.　㊘㊙　定義域に注意すべき軌跡 129

§2.7　領域 132

§1.　領域とは 132

§2.　領域の利用 135

§2.8　第３章の補足 139

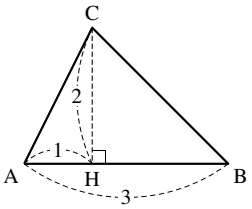
索引

第2章　図形と方程式

この章では，方程式を用いて図形の問題を扱う．この考え方が，数学があらゆる分野に浸透するための礎を作った．

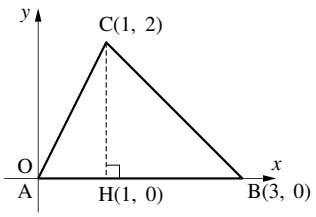
2.1　図形を座標の上に

たとえば，右の図形を言葉で説明すると，次のようになる．



「長さ 3 の線分 AB を底辺とし，高さが 2 となる点 C をとり，△ABC を作る．このとき，線分 AB 上に AH = 1 となるよう H をとり，線分 CH が辺 AB と垂直であるようにとる」

この図形を座標平面上に書こう．A を原点に，直線 AB を x 軸に一致させれば次のようになる．



「A(0, 0)，B(3, 0)，C(1, 2) とし，△ABC を考える．また，H(1, 0) として辺 AB に垂直な線分 CH を考える．」

結果として，説明が簡潔で分かりやすくなる．

このように，座標平面上に図形を描いて考えることを，**座標幾何学** (coordinate geometry) という[*1]．

【例題 1】　次の 2 つの文章が同じ図形を表すよう，［　　］に適当な数値を入れよ．

- 辺 AB を斜辺とし，OA = 3, OB = ［ア］の直角三角形 OAB を考える．
- O(0, 0)，A(［イ］, 0)，B(［ウ］, 2) とし，△OAB を考える．

[*1] 図形を扱う学問（**幾何学** (geometry) と言われる）を座標の上で行うので座標幾何学と言われる．また，**解析幾何** (analytic geometry) ともいわれる．歴史的には，ルネ・デカルトが「幾何学 (1637)」において，この方法を最初に用いたとされる．

BY-NC-SA

2.2 平面上の点と座標

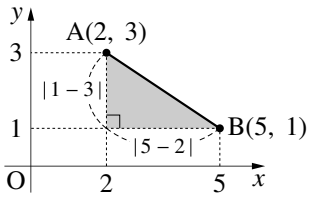
1. 2 点間の距離

2 点 A, B が座標平面上にあるとき，A と B の間の距離は三平方の定理を用いて計算できる．

たとえば A(2, 3)，B(5, 1) のとき，y 座標の差について，3 − 1 も 1 − 3 も 2 乗すれば同じであることに注意すれば

$$AB^2 = (5-2)^2 + (1-3)^2 \quad \therefore \ AB = \sqrt{13}$$

と求められる．このやり方を一般化して，次の公式を得る．

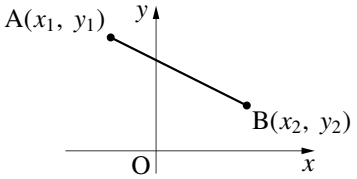


座標平面上の 2 点間の距離

座標平面上の 2 点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ に対し

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \quad \left(= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}\right)$$

である．特に，A が原点のときは $AB = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ である．

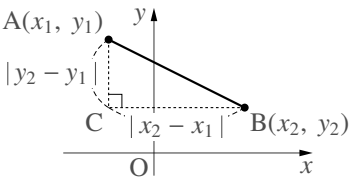


（証明）右図のように，$C(x_1, y_2)$ をとる．$AC \neq 0$, $CB \neq 0$ であれば，三平方の定理から

$$AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

が成り立ち，$AB > 0$ より $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ と分かる．

$BC = 0$ または $CA = 0$ のときは，$x_1 - x_2 = 0$ または $y_1 - y_2 = 0$ なので，明らかに成り立つ．



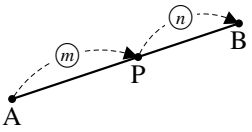
【例題 2】 2 点 A, B が次の座標にあるとき，2 点 A, B の間の距離を求めよ．

1. A(1, 3)，B(5, 6)　　2. A(−3, −5)，B(2, 3)　　3. A(6, −1)，B(−2, 4)

【例題 3】 A(3, 2) と P(x, 0) の距離を x を用いて表せ．また，$AP = 2\sqrt{2}$ のとき，x の値を求めよ．

2. 線分の内分点・外分点

A. 数直線上の内分点

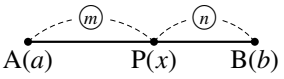


P が線分 AB を $m : n$ に**内分** (interior division) するとは，P が線分 AB 上にあり，$AP : PB = m : n$ を満たすときのことをいった（数学 A，p.116 参照）．

まず，線分 AB に定規を当てて A，B の目盛りは a, b であったとき，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の目盛りについて考えよう．これは，数直線上の線分 AB について考えていることと同じである．

数直線上の内分点の座標

数直線上の A(a)，B(b) について，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P は $\dfrac{na+mb}{m+n}$ で求められる．

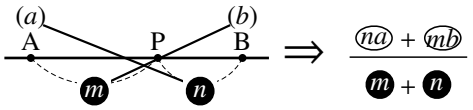


（証明）点 P の目盛りを x とおく．A の目盛り (a) に $x-a$ を足せば P の目盛り (x) であり，P の目盛りに $b-x$ を足せば B の目盛り (b) である．$x-a$, $b-x$ の正負は一致し，$AP : PB = m : n$ となるので

$$(x-a) : (b-x) = m : n \iff n(x-a) = m(b-x)$$

これを解いて，$x = \dfrac{na+mb}{m+n}$ と求められる．

上の公式を使うには，右のような図を描き，「比だけを足すと分母，座標と比を交差して掛けて足すと分子になる」と考えると計算しやすい．



【例題 4】 以下の点 A, B について，それぞれ，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，線分 AB を 2 : 3 に内分する点 Q の座標を求めよ．

1. A(1)，B(6)　　2. A(−2)，B(7)　　3. A(−3)，B(−1)

B. 内分点の座標

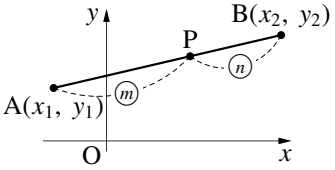
線分 AB が座標平面上にあった場合は次のようになる．

座標平面上の内分点の座標

座標平面上の 2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ に対し，線分 AB を $m : n$ に内分する点を P とすると，P の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

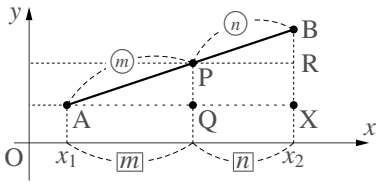
である．特に，P が中点のとき，$m=n$ より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ である．



（証明）右下図のように考えれば，△APQ ∽ △ABX であるので Q は線分 AX を $m : n$ に内分する点である．x 座標だけを見れば $A(x_1)$, $X(x_2)$ であるので

$$(\mathrm{Q}\text{ の }x\text{ 座標})=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}=(\mathrm{P}\text{ の }x\text{ 座標})$$

となる．同様にして $(\mathrm{P}\text{ の }y\text{ 座標})=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$ である．

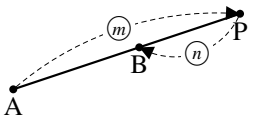


【例題 5】 以下の点 A, B について，それぞれ，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，線分 AB を 2 : 3 に内分する点 Q，線分 AB の中点 H の座標を求めよ．

1. A(2, 5)，B(3, 2)　　2. A(−2, 3)，B(3, −1)　　3. A(0, 0)，B(3, −4)

C. 外分点の座標

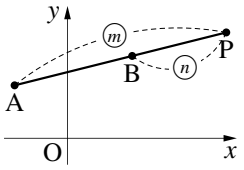
P が線分 AB を $m : n$ に**外分** (exterior division) するとは，P が線分 AB を除く直線 AB 上にあり，AP : PB = $m : n$ を満たすときのことをいった（数学 A，p.116 参照）．



外分の場合は，A から P へ向かう向きと，P から B へ向かう向きが逆なので，結果的には，次の 3 つの計算が同じとなる（【発展 ：直線上の外分点】(p.90) を参照のこと）．

座標平面上の外分点の座標

座標幾何学においては



- AP : PB を $m : n$ に外分する点 P を考える
- AP : PB を $m : (-n)$ に内分する点 P を考える
- AP : PB を $(-m) : n$ に内分する点 P を考える

ことは同じことである（ただし，$m \neq n$）．つまり，座標平面上の 2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ に対し，線分 AB を $m : n$ に外分する点 P の座標は次のようになる．

$$P\left(\frac{(-n)x_1 + mx_2}{m + (-n)},\ \frac{(-n)y_1 + my_2}{m + (-n)}\right) \text{ または } P\left(\frac{nx_1 + (-m)x_2}{(-m) + n},\ \frac{ny_1 + (-m)y_2}{(-m) + n}\right)$$

$m > n$ の時は $\left(\dfrac{-nx_1 + mx_2}{m - n},\ \dfrac{-ny_1 + my_2}{m - n}\right)$，$m < n$ の時は $\left(\dfrac{nx_1 - mx_2}{-m + n},\ \dfrac{ny_1 - my_2}{-m + n}\right)$ を用いると，分母に負の数が表れず，計算ミスが起こりにくい．

【例題 6】 以下の点 A, B について，それぞれ，線分 AB を 3 : 1 に外分する点 P，2 : 3 に外分する点 Q，4 : 3 に外分する点 R の座標を求めよ．

1. A(2, 5)，B(3, 2)
2. A(−2, 3)，B(3, −1)

【練習 7：平面図形】

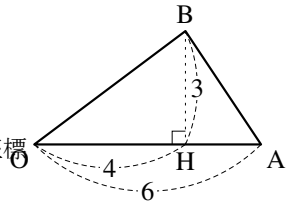
右の △OAB を座標平面上に O(0, 0)，A(6, 0) となるよう描いて考える．

(1) H の座標，B の座標，辺 OB の中点 N の座標を求めよ．

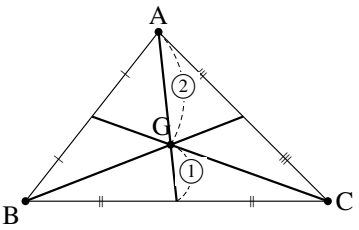
(2) 辺 OA の中点 M，線分 BM を 2 : 1 に内分する点 G_1 の座標を求めよ．

(3) 線分 BM を 2 : 1 に外分する点 D，線分 AN を 2 : 1 に外分する点 E の座標を求めよ．

(4) OB，BA，AD，DO の長さをすべて求めよ．



3. 三角形の重心



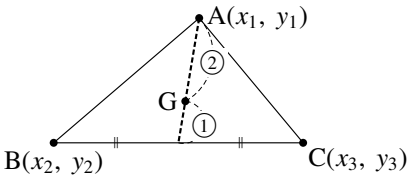
どんな三角形でも，各頂点から引いた 3 本の中線は 1 点で交わった．これを三角形の**重心** (centroid, barycenter) といい，重心は，中線を 2 : 1 に内分する点であった（数学 A，p.128 参照）．

座標平面上で考えると，△ABC の重心の座標は次のように表される．

座標平面上の三角形の重心の座標

座標平面上の $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ について，△ABC の重心を G の座標は次のようになる．

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$



（証明）辺 BC の中点を N とすると，$N\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ である．重心 G は線分 AN を 2 : 1 に内分するので G の座標は

$$\left(\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

となる．

三角形の重心の座標は，三角形の 3 頂点の座標の平均だと覚えると良い．

【例題 8】

1. A(3, 2)，B(−1, 4)，C(−3, −5) に対し，△ABC の重心 G の座標を求めよ．
2. A(1, a)，B(b, 2)，C(3, −3) の重心が原点であるとき，a, b の値を求めよ．

4. 座標幾何学の応用

A. 求める点を (x, y) とおく

座標平面上で考えると，条件を満たす点を求める問題は，方程式を解く問題に帰着できる．

【暗記 9：求める点を (x, y) とおく】

A(5, 4)，B(0, −1) があって，点 P(x, y) とする．以下の問いにそれぞれ答えよ．

1. 線分 AP を 2 : 1 に内分する点の座標が (0, 0) であるとき，x, y の値を求め，P の座標を答えよ．
2. AP = BP = $\sqrt{13}$ であるとき，x, y の値を求め，P の座標を答えよ．

【練習 10：求める点を (x, y) とおく】

A$(-1, 4)$，B$(1, 2)$ がある．

(1) AP = BP となる点 P を y 軸上にとるとき，P の座標を求めよ．

(2) AQ : BQ : AB = 1 : 1 : $\sqrt{2}$ であるとき，点 Q の座標を求めよ．

(3) △ABR が正三角形となるとき，点 R の座標を求めよ．

【発展 11：直線上の外分点】

線分 AB に定規をあてると，A，B の目盛りは a, b であったという．線分 AB を $m : n$ に外分する点 P の目盛りを x とおく．

A の目盛り a に［ア］を足せば P の目盛り x であり，P の目盛り x に［イ］を足せば B の目盛り b である．AP : PB = $m : n$ となるが，P は辺 AB の外側にあるため［ア］と［イ］の符号が異なるから，

［ア］：［イ］$= m : (-n)$ $\left(= (-m) : n\right)$ となる．これを解いて，$x =$［ウ］．

B. 点について対称

【暗記 12：点について対称】

A$(1, 3)$ について，P$(3, 2)$ と対称な点 Q の座標を答えよ．

【練習 13：点について対称】

(1) $(4, 3)$ について，$(8, 1)$ と対称な点の座標を答えなさい．

(2) $(s, 1)$ と $(1, t)$ が，$(-2, -4)$ について対称なとき，s, t を求めなさい．

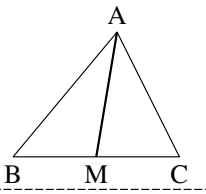
C. 発展 平面図形の証明

【暗記 14：座標平面上で証明する】

△ABC において，辺 BC の中点を M とする．このとき

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + MB^2)$$

であることを，座標平面を用いて示せ．



上で証明した等式は「中線定理」といわれる．

【暗記 15：重心】

△ABC について，辺 AB，BC，CA を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．△ABC の重心と △DEF の重心が一致することを示せ．

上の事実は，数学 B の「ベクトル」を用いても証明できる．

2.3 多変数関数と陰関数

変数を 2 つ以上持つ関数のことを**多変数関数** (multivariable function) という．もし，ある関数が x, y を変数にもつならば，その関数は $f(x, y)$ のように表される．

A. 多変数関数の例

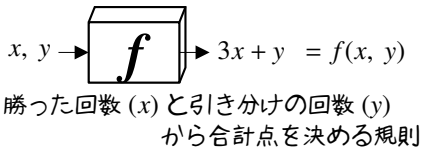
例として，勝ちに 3 点，引き分けに 1 点，負けに 0 点を与えるときの合計点を考える．

勝った回数が x 回，引き分けた回数が y 回であるときの合計点を $f(x, y)$ とおけば

$$f(x, y) = 3x + y \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

と求められる．x, y はどちらも変数であり，代入は変数が 1 つのときと同じように以下のように書く．

$$f(6, 4) = 18 + 4 = 22 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$



式②は「6 勝 4 引き分けならば，合計点は 22 点である」ことを表している．

【例題 16】

1. $G(x, y) = x^2 + y^2 - 10$ のとき，$G(1, 1)$, $G(3, -1)$, $G(-4, t)$ の値を求めよ．
2. 1 個 x 円のりんごを 5 個，1 個 y 円のみかんを 7 個買うときの合計を $s(x, y)$ 円とするとき，$s(x, y)$ を求めよ．また，$s(100, 50)$, $s(a, 60)$ の値を求めよ．

B. 陰関数とは

上の関数 $f(x, y) = 3x + y$ の値が 30 であったとする．つまり

$$3x + y = 30 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

もし，$x = 7$ であれば，等式①によって $y = 9$ と決まる．このように，x の値に対し，等式①が y の値を与える．

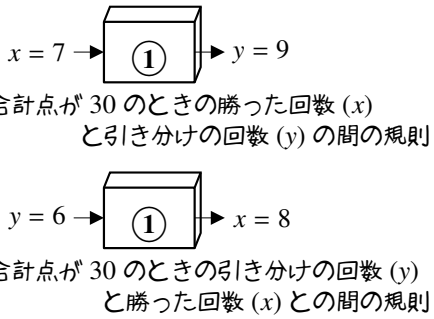
逆に，$y = 6$ であれば，等式①によって $x = 8$ と決まる．このように，y の値に対しても，等式①が x の値を与える．

一般に，①のように

$$F(x, y) = k \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

という形の等式を（x, y についての）**陰関数** (implicit function) といい，x, y を変数と呼ぶ[*2]．

陰関数 $F(x, y) = k$ を満たす (x, y) の組を，その陰関数の**解** (solution) という．たとえば，$(x, y) = (7, 9), (8, 6)$ は陰関数①の解になっている．



[*2] 陰関数という名前の由来は，文字 y が左辺の中で「陰」になっていることにある．また，上の関数 F の変数は 2 つだが，変数が 3 つ以上であってもやはり陰関数という．ただし，F の変数が 1 つのときは陰関数とは呼ばれない．

【例題 17】

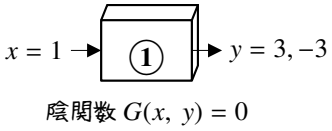
1. $A(x,\ y) = 2x + 3y - 40$ とする．陰関数 $A(x,\ y) = 0$ において，$x = 5$ のときの y の値と，$y = 4$ のときの x の値を求めよ．
2. 陰関数 $4x - ay = 15$ が $(x,\ y) = (-3,\ 2)$ を解にもつとき，a の値を求めよ．

C. 陰関数とこれまでの関数の違い

陰関数 $F(x,\ y) = k$ は「x の値から変数 y の値を定め」「y の値から x の値を定め」るが，それによってただ 1 つの値に定めるとは限らない．

たとえば，関数 $G(x,\ y) = x^2 + y^2 - 10$ の値が 0 である陰関数

$$G(x,\ y) = x^2 + y^2 - 10 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$



陰関数 $G(x,\ y) = 0$

は 1 つの x の値に対して y を 1 つに定めない．たとえば $x = 1$ のとき

$$1 + y^2 - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 9$$

であるので，①は $y = \pm 3$ となり，y の値をただ 1 つには定めない．

【例題 18】

1. $H(x,\ y) = x + y^2 - 30$ とする．陰関数 $H(x,\ y) = 0$ において，$x = 5$ のときの y の値と，$y = 4$ のときの x の値を求めよ．
2. 陰関数 $x^2 + y - 5 = 0$ と関数 $y = p(x)$ は同値な等式であるという．$p(x)$ を求めよ．

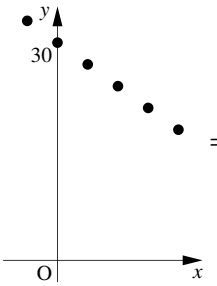
D. 陰関数のグラフ

座標平面上の点 $(x,\ y)$ のうち，陰関数 $F(x,\ y) = k$ を満たす点をすべて集めてできる図形を，陰関数 $F(x,\ y) = k$ の**グラフ** (graph) という．

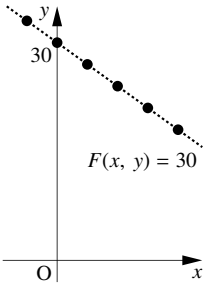
たとえば，関数 $F(x,\ y) = 3x + y = 30$ のグラフは次のように書くことができる．

x	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	33	30	27	24	21	18	$\cdots$

$\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$



それぞれを座標平面上に点でとると，真ん中の図のようになり，最終的には右上図の直線となる．この直線を関数 $F(x,\ y) = 30$ の**グラフ** (graph) という．

上の陰関数 $F(x,\ y) = 3x + y = 30$ を y について解けば $y = -3x + 30$ となる．つまり，$F(x,\ y) = 30$ のグラフは直線 $y = -3x + 30$ と一致する．

【例題 19】 上の $F(x,\ y)$ について，以下の［　　］にあてはまる数値を答えよ．

1. 点 $(6,$［ア］$)$, $(-3,$［イ］$)$, $\left(\dfrac{2}{3},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ は $F(x,\ y) = 30$ のグラフ上にある．
2. 点 $($［エ］$, 15)$, $($［オ］$, -3)$, $\left(\boxed{\text{カ}}, 20\right)$ は $F(x,\ y) = 30$ のグラフ上にある．

E. これまでの関数と陰関数の間の関係

y を与える x の関数 $y = f(x)$ は，必ず陰関数に変形できる[*3]．たとえば，関数 $y = 2x - 3$ は陰関数 $y - 2x + 3 = 0$ と同じ式を表す．このように，関数 $y = f(x)$ は陰関数 $y - f(x) = 0$ に一致する．

一方，陰関数の式を y について解けば，y を与える x の関数に変形できる．

【例題 20】 以下の (a)〜(f) の中から，等しい関数の組をすべて答えよ．

(a) $x + y = 1$　(b) $y = x - 1$　(c) $x + y^2 = 0$　(d) $x^2 + y - 1 = 0$　(e) $y = -x + 1$

(f) $y = -x^2 + 1$

F. 直線の一般形 $ax + by + c = 0$

$ax + by + c = 0$ という形の式は直線を表し，直線の方程式の一般形といわれる．

- $(a,\ b,\ c) = (2,\ 3,\ -1)$ のとき，$2x + 3y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$ となり傾き $-\dfrac{2}{3}$，切片 $\dfrac{1}{3}$ の直線
- $(a,\ b,\ c) = (2,\ 0,\ -1)$ のとき，$2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$ となり，y 軸に平行な直線

【暗記 21：2 直線の相等】

1. 2 つの方程式 $y = 2x + b$ と $y = (a - 1)x + 3$ が同じ直線を表わすとき，$a,\ b$ の値を求めよ．
2. 2 つの方程式 $2x + 3y - 3b + 1 = 0$ と $bx + y - a = 0$ が同じ直線を表わすとき，$a,\ b$ の値を求めよ．

[*3] この意味で，陰関数の概念は，これまで学んだ関数の概念より広い概念である．

2.4 平面上の直線と方程式

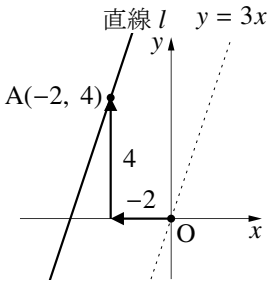
1. 直線の方程式

A. 与えられた 1 点を通り，傾きが定まった直線の方程式

たとえば，A(−2, 4) を通り，傾き 3 の直線を l としよう．

右図のように，原点を通る直線 $y = 3x$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 4 平行移動させれば直線 l になる．数学 I で学んだように[*4]

- 「x 軸方向に -2 平行移動」と「x を $x+2$ に置き換え」は一致する
- 「y 軸方向に 4 平行移動」と「y を $y-4$ に置き換え」は一致する



から，l の方程式は $y - 4 = 3(x + 2)$ と表され，整頓して $y = 3x + 10$ を得る．

（1 点と傾きが与えられた）直線の方程式

傾きが m で点 (p, q) を通る直線の方程式は，次の式で与えられる．

$$y - q = m(x - p)$$

（証明）$y = mx$ が (p, q) を通るように「x 軸方向に p 平行移動し（$\Leftrightarrow$ x を $x-p$ に置き換え）」，「y 軸方向に q 平行移動し（$\Leftrightarrow$ y を $y-q$ に置き換え）」て，$y - q = m(x - p)$ という方程式が得られる．

【例題 22】 次の条件を満たす直線の方程式を，上の方法で導け．

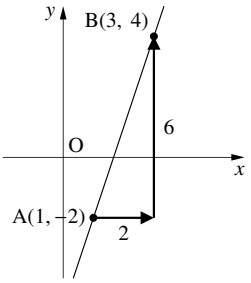
1. (3, 1) を通り，傾きが -3　　2. (4, −2) を通り，傾きが 2　　3. (a, b) を通り，傾きが 2

上の方法は，中学校で学ぶ方法とは異なるが，今後は上のやり方を採用するのがよい．特に，条件に文字が入った場合にたいへん計算しやすくなる．

[*4] 頂点 (p, q) の放物線の方程式は，以下のように考えることができた（数学 I の p.97 参照）．

頂点 (0, 0) の放物線 $y = ax^2$ $\xrightarrow[y \text{ 方向に } q \text{ 平行移動（} y \text{ を } y-q \text{ に置き換える）}]{x \text{ 方向に } p \text{ 平行移動（} x \text{ を } x-p \text{ に置き換える）}}$ $y - q = a(x - p)^2 \iff y = a(x - p)^2 + q$ は頂点 (p, q)

B. 与えられた 2 点を通る直線の方程式



たとえば，A(1, −2)，B(3, 4) を通る直線を m としよう．

m の傾きは，$\dfrac{(y\text{ 座標の増加分})}{(x\text{ 座標の増加分})} = \dfrac{4-(-2)}{3-1} = 3$ である[*5]．そこで『直線の方程式』(p.96) を用いれば

$y+2 = 3(x-1)$ （または，$y-4 = 3(x-3)$）[*6]

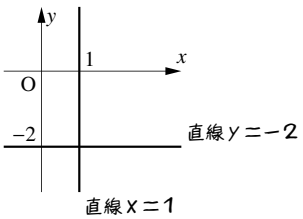
が直線 m の方程式と分かる．これを整頓して $y = 3x-5$ となる．

【例題 23】

次の 2 点を通る直線の方程式を，上の方法で導け．ただし，$a \neq 0$ とする．

1. (1, 2), (3, 4)　　2. (2, 1), (−1, −3)　　3. (5, 1), (−4, −2)　　4. (0, 2), (a, 3)

C. x 軸や y 軸に垂直な直線



x 座標が p である点をすべて集めてできる直線は，「直線 $x = p$」と表され，y 軸に平行になる[*7]．

同じように，y 座標が q である点をすべて集めてできる直線は，「直線 $y = q$」と表され，x 軸に平行になる．

【例題 24】 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ．

1. (2, 1), (2, −3)　　2. (3, −2), (−3, −2)　　3. (−5, 3), (4, 3)

[*5] 傾きを求めるとき，B の座標から A の座標を引いても，A の座標から B の座標を引いても，構わない．たとえば上の例では，$\dfrac{(y\text{ 座標の増加分})}{(x\text{ 座標の増加分})} = \dfrac{(-2)-4}{1-3}$ としても，同じ値 3 を得る．分母と分子の，引く順番が揃っていればよい．

[*6] m を A を通り傾き 3 の直線と考えれば $y+2 = 3(x-1)$，B を通り傾き 3 の直線と考えれば $y-4 = 3(x-3)$ となる．

[*7] 実際，数学 I(p.170) で学んだように，放物線 $y = a(x-p)^2+q$ の軸は直線 $x = p$ であった．

【練習 25：直線の方程式】

以下の条件を満たす直線の方程式を求めよ．

(1) $(3, -2)$ を通り，傾きが -2

(2) 2 点 $(3,\ 4)$, $(5, -6)$ を通る

(3) $(p, -4)$ を通り，傾きが 3

(4) 2 点 $(3, -2)$, $(5, -2)$ を通る

(5) $(2,\ 3)$ を通り，傾きが a

(6) 2 点 $(3,\ 1)$, $(s,\ t)$ を通る（$s \neq 3$）

(7) ㊘㊙ $(a,\ a^2 + a)$ を通り，傾きが $2a + 1$

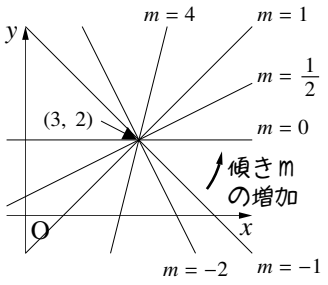
(8) ㊘㊙ 2 点 $(a,\ a^2)$, $(b,\ b^2)$ を通る（$a \neq b$）

【練習 26：x 切片，y 切片が与えられた直線の方程式】

$a \neq 0$, $b \neq 0$ とする．$(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ を通る直線の方程式は方程式 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ に一致することを示せ．

上の事実は「x 切片，y 切片が与えられた直線の方程式」として，しばしば便利である．

D. 一定の条件を満たす直線の集まり



方程式 L : $y-2=m(x-3)$ のグラフは，m の値によって異なる．しかし，『直線の方程式』(p.96) から分かるように常に (3, 2) を通る．この m の値に関わらず通る (3, 2) は，L の**定点** (constant point) と言われる．また，傾きは m なので m の増加に従い，直線は反時計回りに回転する．

逆に，(3, 2) を通る直線を考えると，y 軸に平行な直線（$x=3$）以外は，$y-2=m(x-3)$ という形の方程式で表される．

【例題 27】

k は実数とする．以下の［　　］に座標を，（　　）に「増加」「減少」のいずれかを入れなさい．

1. 方程式 $y-3=k(x+2)$ のグラフは，［ア］を必ず通る． また，k の （**イ**） によって，グラフは反時計回りに回転する．
2. 方程式 $y=kx-3$ のグラフは，［ウ］を必ず通る． また，k の （**エ**） によって，グラフは反時計回りに回転する．
3. 方程式 $y=2x+k$ のグラフは， k の増加によって，グラフの y 切片は （**オ**） する．

【暗記 28：一定の条件を満たす直線の集まり～その１～】

k を実数とする．方程式 l : $kx+x+y+3k=0$ の定点を答えよ．また，k の増加によって，グラフの傾き，y 切片はどうなるか答えよ．

【練習 29：直線の定点】

次の方程式の定点を，それぞれ答えよ．

(1) $2x + 3ky + 4y + 3k = 0$　　(2) $3kx + 2x - 4ky - 3y + 2k + 3 = 0$

2. 直線の平行・垂直

A. 平行な 2 直線の傾きの条件

2 直線の平行は，中学でも学んでいるように以下が成り立つ．

互いに平行な 2 直線の方程式

「異なる 2 直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ が平行」 $\Longleftrightarrow$ $m_1 = m_2$（n_1, n_2 の値には無関係）

【例題 30】

1. (3, 1) を通り，$y = 2x - 4$ と平行な直線の方程式は，$y -$ ア $=$ イ $\left(x -$ ウ $\right)$ となり，これを整頓して $y =$ エ となる．
2. (3, −2) を通り，$4x + y - 2 = 0$ と平行な直線の方程式は，$y -$ オ $=$ カ $\left(x -$ キ $\right)$ となり，これを整頓して $y =$ ク となる．

B. 垂直な 2 直線の傾きの条件

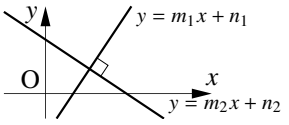
座標平面上の 2 本の直線が，垂直であることは，以下のようにまとめることができる．

互いに垂直な 2 直線の方程式

異なる 2 直線 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$（$m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$）について

- 互いに直交する必要十分条件は $m_1m_2 = -1$

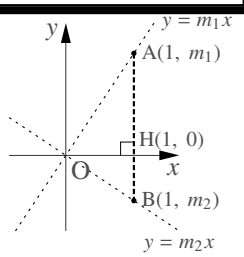
であり，それぞれの傾きのみで定まる（n_1, n_2 の値には無関係）．



（証明）直線を平行移動しても 2 直線の間の角の大きさは変わらないので，原点を通る 2 直線 $y = m_1x$, $y = m_2x$ が直交するときを考えればよい．
右下図のように x 座標が 1 の点 A，B，H をとる．$\angle AOH = 90° - \angle BOH = \angle OBH$ なので，2 つの直角三角形 $\triangle AOH$ と $\triangle OBH$ は相似である．よって

$$\begin{aligned} AH : HO = OH : HB &\Leftrightarrow m_1 : 1 = 1 : (-m_2) \\ &\Leftrightarrow m_1m_2 = -1 \end{aligned}$$

が成り立つ．これは，逆も成立する．



「傾き m の直線と直交するのは傾き $-\dfrac{1}{m}$ の直線」または「傾きの符号を変え，逆数をとれば直交する」のように捉えるとよい．
また，直線 $x = a$ や $y = b$ に平行・直交な直線は，図を描いて考えればよい．

【例題 31】

1. 次の直線と直交する直線の傾きはいくつか．
   1) $y = 2x$　　2) $y = 2x + 1$　　3) $y = \dfrac{1}{4}x + 3$　　4) $y = -\dfrac{3}{2}x - 5$
2. (3, 2) を通り直線 $y = 3x - 4$ に直交する直線の方程式は $y - \boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{イ}}(x - \boxed{\text{ウ}})$ となり，これを整頓して方程式 $y = \boxed{\text{エ}}$ を得る．
3. $(-1, 2)$ を通り直線 $y = 3$ に直交する直線を図示し，方程式を求めなさい．

【練習 32：与えられた点を通り，与えられた直線に直交する直線の方程式】

(1) $(-3,\ 1)$ を通り直線 $3x - y + 4 = 0$ に平行な直線，垂直な直線をそれぞれ求めなさい．

(2) $(1, -2)$ を通り直線 $x - 2y + 3 = 0$ に平行な直線，垂直な直線をそれぞれ求めなさい．

【㊙㊟ 33：一般形の直線の方程式における平行・垂直】

$a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

① 2 直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ が平行なとき，$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ であることを示せ．

② 2 直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ が垂直なとき，$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ であることを示せ．

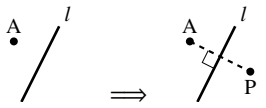
上の事実は，$a_1 = 0$ のときや，$b_1 = 0$ のときでも成立する．

C. 直線に対して対称な点

与えられた直線 l に対し，点 A と対称な点を P とすると，以下のことが成り立つ．

(1) 直線 AP は直線 l と垂直である．

(2) 線分 AP の中点は直線 l 上にある．



【暗記 34：直線に対して対称な点～直線が座標軸に平行でないとき】

直線 l : $x-2y+3=0$ に対し，A$(1,-2)$ と対称な点 P を求めなさい．

【暗記 35：直線に対して対称な点～直線が座標軸に平行なとき】

直線 l : $y=2$ に対し，A$(4,5)$ と対称な点 P を求めなさい．

【練習 36：直線に対して対称な点】

(1) 直線 l : $x = -2$ に対し，A$(1, -2)$ と対称な点 P を求めなさい．

(2) 直線 m : $-x + 3y - 2 = 0$ に対し，A$(3, -1)$ と対称な点 Q を求めなさい．

【㊘㊙ 37：AP ＋ BP が最短になるとき】

A$(-3,\ 4)$，B$(2,\ 4)$ がある．直線 $y = x$ 上に点 P を取るとき，AP + BP が最小になるときの P の座標と，その最小値を求めなさい．

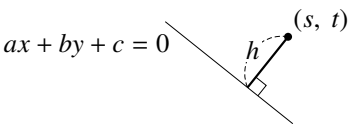
複数の線分の和の最小値を求めるには，いずれかの点を対称移動して考えるとよい．

3. 点と直線の距離

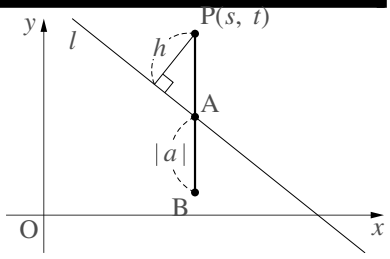
与えられた直線 l と，その直線上にない 1 点 A の距離は次の式で与えられる．

点と直線の距離

直線 $ax+by+c=0$ と点 $(s,\ t)$ の距離 h は
$h=\dfrac{|as+bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で求められる．



（証明）$a=0$ または $b=0$ のときは省略．直線 $ax+by+c=0$ を l，点 $(s,\ t)$ を P，P から l への垂線の足を H とする．
右図のように，x 座標が s の点 A, B を A は l 上に，B は $AB=|a|$ となるよう P の反対側にとる．A の y 座標は $-\dfrac{as+c}{b}$ となる．
ここで，右下のように B と y 座標が等しい l 上の点 C をとると，直線 l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ なので $BC=|b|$ である．

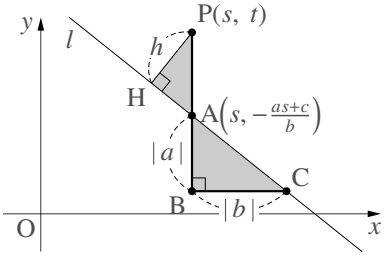


2 角が等しいから $\triangle PAH \backsim \triangle CAB$ となるので

$$PH:PA=CB:CA \Leftrightarrow PH:\left|t-\left(-\frac{as+c}{b}\right)\right|=|b|:\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\times PH=\left|b\left(t+\frac{as+c}{b}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow PH=\frac{|as+bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



この公式を覚えるには，分子は「直線の式の左辺に $(x,\ y)=(s,\ t)$ を代入し，絶対値をつける（距離なので)」，分母は「$a,\ b$ に三平方の定理を用いる」のようにするとよい．

【例題 38】 それぞれ与えられた直線 l と一点 A について，直線 l と点 A の距離を求めなさい．

1. $l: 2x-y+4=0$，A$(2,-1)$
2. $l: 3x-4y-2=0$，A$(0,\ 0)$
3. $l: 3x-4y-2=0$，A$(-4,-4)$
4. $l: -3x+2y+1=0$，A$(2,\ k)$

【練習 39：点と直線の距離～その１～】

以下の直線と，点 $(2, -1)$ の距離をそれぞれ答えなさい．

(1) $2x - y + 1 = 0$　　(2) $-x + 3y - 5 = 0$　　(3) $y = 3x - 2$

【練習 40：点と直線の距離～その２～】

(1) 直線 $l : 3x - 4y - k = 0$ と A$(2,\ 1)$ の距離が 3 であるとき，k の値を求めよ．

(2) 直線 $l : 2kx + y - 2 = 0$ と A$(2,\ 1)$ の距離が 1 であるとき，k の値を求めよ．

4. 三角形の面積

【例題 41】 M(1, 2)，A(3, 4)，B(4, −3) があるとき

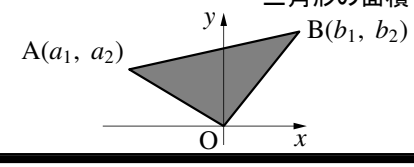
1. 線分 AB の長さを求めよ．
2. 直線 AB の方程式を求めよ．
3. M と直線 AB の距離を求めよ．
4. △MAB の面積を求めよ．

座標平面上の三角形は，頂点のうち 1 点が原点にあれば，次のようにして求められる．

三角形の面積

原点を O，A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ とするとき

$$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$



証明は p.139 を参照のこと

三角形のどの頂点も原点にないときは，下の 2. のように平行移動を用いて求める．

【例題 42】

1. O(0, 0)，A(2, 1)，B(−3, 2) のとき，△OAB の面積を求めよ．
2. M(1, 2)，A(3, 4)，B(4, −3) とする．△MAB を平行移動して △OA′B′ になったという．
   i) A′，B′ の座標を求めよ．　　ii) △OA′B′，△MAB の面積を求めよ．

2.5 平面上の円と方程式

この節では，平面上の円が，座標平面上ではどう表現されるか考えていく．

1. 円の方程式～平方完成形

A. 円は中心と半径のみで決まる

円は，中心と半径を決めればただ 1 つに定まり，次の式で表される．

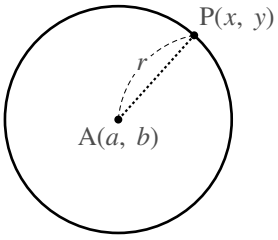
円の方程式～平方完成形

点 $(a,\ b)$ を中心とし，半径が $r\ (>0)$ である円の方程式は，次のように表される．

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

この円の方程式は，平方完成形の方程式といわれる．

（証明）円 C の周上にある点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．2 点 A, P の間の距離が r であることと同値である．『2 点間の距離』(p.84) で学んだように，$\mathrm{AP}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ であるから



$$\text{P が円 } C \text{ の周上にある} \iff \mathrm{AP}=r$$

$$\iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \qquad \cdots\cdots①$$

等式①の両辺は共に正であるので両辺を 2 乗し，円の方程式を得る．

【例題 43】

1. 座標平面上に次のような円があるとき，その方程式をそれぞれ求めよ．
   (a) 中心 $(3,\ 2)$，半径 3　　(b) 中心 $(-3,\ 1)$，半径 2　　(c) 中心 $(0,\ -2)$，半径 $\sqrt{3}$
2. x 軸，y 軸の両方に接する半径が 3 の円はいくつあるか．また，それぞれの方程式を求めよ．

2. 円の方程式〜一般形

A. 円は $x^2+y^2+lx+my+n=0$ という形の式でも表される

中心 $(2,-1)$，半径 3 の円の方程式は $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ となるが，この式は

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=9$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y-4=0$$

と変形することができる．この形の円の方程式を一般形と言う．

【例題 44】 以下の円の方程式を，一般形で表せ．

1. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=1$
2. 中心が $(4,-1)$ で半径 3 の円

B. 一般形を平方完成形に変形する

方程式 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ は

$$x^2+y^2-4x+2y-4=0 \Leftrightarrow \underbrace{(x^2-4x+4)}_{x\text{ について平方完成}}+\underbrace{(y^2+2y+1)}_{y\text{ について平方完成}}-4=4+1$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=9$$

と変形し，中心 $(2,-1)$，半径 3 の円の方程式に一致することがわかる．

【例題 45】 次の円の方程式の中心と半径を求めよ．

1. $x^2+y^2-2x+4y+1=0$
2. $x^2+y^2-6y+1=0$

円の方程式～一般形

x, y についての 2 次式であり，どちらの 2 次の係数も 1 である方程式

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

は，$\dfrac{l^2}{4} + \dfrac{m^2}{4} - n > 0$ のときに円の方程式を表し，**一般形の方程式**といわれる．

方程式 $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ を，x について，y について別々に平方完成すれば

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(x^2 + lx)}_{x^2,\ x\ \text{の項を}\ \text{まとめた}} + \underbrace{(y^2 + my)}_{y^2,\ y\ \text{の項を}\ \text{まとめた}} + n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2}_{x\ \text{について}\ \text{平方完成}} + \underbrace{\left(y + \frac{m}{2}\right)^2}_{x\ \text{について}\ \text{平方完成}} = \frac{l^2}{4} + \frac{m^2}{4} - n$$

と変形できるので，$\dfrac{l^2}{4} + \dfrac{m^2}{4} - n > 0$ であれば，円の方程式を表していることになる．

$\dfrac{l^2}{4} + \dfrac{m^2}{4} - n = 0$ のとき，$(x,\ y) = \left(-\dfrac{l}{2}, -\dfrac{m}{2}\right)$ だけが $x^2 + lx + y^2 + my + n = 0$ を満たす．

【練習 46：円の方程式～平方完成形と一般形】

(1) 中心が $(-2, -1)$ で半径 $\sqrt{3}$ の円の方程式を，平方完成形で表せ．また，一般形で表せ．

(2) 次の中から円の方程式を表すものを選び，その円の中心と半径を求めよ．

a) $x^2 + y^2 - 3x + 5 = 0$　　b) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = 0$　　c) $2x^2 + 2y^2 + 8x - 4y = 0$

3. 円の方程式の決定

A. 準備～方程式への代入

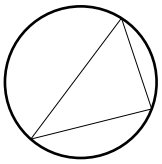
たとえば，円 C：$(x-2)^2 + (y-b)^2 = 5$ が $(3,\ 2)$ を通るならば，$(x-2)^2 + (y-b)^2 = 5$ に $(x,\ y) = (3,\ 2)$ を代入した等式は成り立つ，つまり

$$(3-2)^2 + (2-b)^2 = 5 \ \Leftrightarrow 1 + 4 - 4b + b^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow b^2 - 4b = 0 \ \Leftrightarrow \ b(b-4) = 0$$

これを解いて $b = 0,\ 4$ を得る．特に，円 C の中心は $(2,\ 0)$ または $(2,\ 4)$ と分かる．

【例題 47】 円 C : $(x-a)^2+(y-3)^2=13$ が $(5,\ 5)$ を通るとき，a の値を答えよ．

B. 与えられた 3 点を通る円の方程式



どんな三角形も，外接円はただ 1 つに定まった．これは，（同一直線上にない）3 点を通る円周がただ 1 つに定まることを意味する．

【暗記 48：円の方程式～その２～】

3 点 A$(3,\ 0)$，B$(0,\ -2)$，C$(-2,\ 1)$ を通る円 K の方程式について，□ に適する式・数値を入れよ．

1. K の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく．ここで以下が成立する．

   A を通るから方程式 **ア**，B を通るから方程式 **イ**，C を通るから方程式 **ウ**

   3 式を連立して $(l,\ m,\ n)=$ (**エ**, **オ**, **カ**) と解けて，K の方程式 **キ** を得る．

2. K の中心を O$(p,\ q)$ とする．ここで

   OA = OB から $p,\ q$ の方程式 **ク** が，OA = OC から $p,\ q$ の方程式 **ケ** が成り立つ．

   2 つの式を連立して解けば $(p,\ q)=$ (**コ**, **サ**) である．

   つまり，$\mathrm{OA}^2=$ **シ** であるので K の方程式は **ス** と分かる．

【練習 49：円の方程式～その２～】

A(3, 1)，B(4, −4)，C(−1, −5) とする．△ABC の外接円の中心と半径を求めよ．

C. 円を図形的に考える

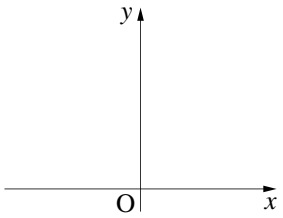
円が通る 3 点が与えられた場合も，図を描けば簡単に分かる場合がある．

【練習 50：図形的に考える～その１～】

3 点 A(2, 2)，B(−4, 2)，C(−4, 4) を通る円 K について考えてみよう．

右に 3 点を図示すれば，K の中心 R は AB の垂直二等分線上にあるから R の［ア］座標は［イ］，K の中心 R は BC の垂直二等分線上にあるから R の［ウ］座標は［エ］と分かる．

よって，R の座標は［オ］であり，K の半径は RA = ［カ］なので，K の方程式は［キ］と求められる．



D. 中心や半径の条件が与えられた円の方程式

中心や半径の条件が与えられた場合は，平方完成形 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を用いて考えよう．

【例題 51】 以下の［　　］に　i. $(2,\ b)$，ii. $(a,\ 2)$，iii. $(a,\ b)$，iv. $(a,\ a)$　のうち最も適するものを答え，それぞれの問いに答えなさい．

1. 中心が直線 $x=2$ 上にある円 C_1 の中心は［ア］とおくことができる．さらに，C_1 が A(3, 2), B(0, 3) を通るとき，円 C_1 の方程式を求めよ．
2. 中心が直線 $y=x$ 上にある円 C_2 の中心は［イ］とおくことができる．さらに，C_2 が P(1, 3), Q(−2, 1) を通るとき，円 C_2 の方程式を求めよ．
3. y 座標が正の側で x 軸に接し，円の半径が 2 である C_3 の中心は，［ウ］とおくことができる．さらに，C_3 が T(2, 1) を通るとき，円 C_3 の方程式を求めよ．

【練習 52：円の方程式～その１～】

(1) 中心が直線 $y = 2$ 上にあり，$(3,\ 5)$, $(2, -2)$ を通る円の方程式を求めよ．

(2) 中心が直線 $y = -x$ 上にあり，$(4, -1)$, $(-3,\ 0)$ を通る円の方程式を求めよ．

(3) $(-3,\ 5)$ を通り，x 座標が負の側で y 軸に接する半径が 2 の円の方程式を求めよ．

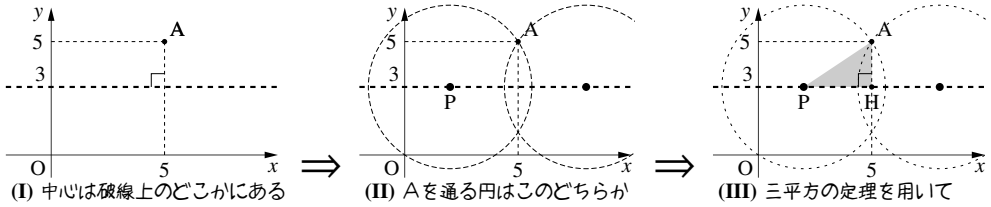
【㊙㊐ 53：円の方程式～その２～】

① 中心が直線 $y = -2x + 1$ 上にあり，$(4,\ 2)$, $(-6, -2)$ を通る円の方程式を求めよ．

② 中心が直線 $3x - y - 4 = 0$ 上にあり，x 軸，y 軸の両方に接する円の方程式を求めよ．

【練習 54：円を図形的に考える～その２～】

「円 C : $(x-a)^2+(y-3)^2=13$ が A(5, 5) を通る」場合について考えてみよう．



まず，円 C の中心は $(a,\ 3)$ なので，図 (I) の破線上のどこかに C の中心はある．

A の y 座標が 5 なので AH = ア であり，C の半径を考えて AP = イ なので，(III) の直角三角形 APH を考えて，PH = ウ と分かる．

ここから，C の中心の座標は エ，オ のいずれかと分かる．

4. 円と直線の関係

A. 円と直線の交点

円と直線の交点の座標を求めるには，連立方程式を解けばよい．このとき，「グラフの交点の座標と連立方程式の解は一致する」．また，連立方程式の解が無い場合は，グラフの交点も無い．

【例題 55】 座標平面上に円 $C: x^2+y^2=5$ があるとき，以下の問いに答えよ．

1. 直線 $l_1: x+y=3$ と円 C の共有点があれば，すべて求めよ．
2. 直線 $l_2: x+y=4$ と円 C の共有点があれば，すべて求めよ．

【練習 56：円と直線の共有点の個数】

次の円と直線の，共有点の座標を求めなさい．なければ「共有点なし」と答えること．

(1) 円 $x^2 + y^2 = 10$ と直線 $y = 2x - 5$　　(2) 円 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$ と直線 $y = 3x + 3$

(3) 円 $x^2 + y^2 = 9$ と直線 $x - 2y + 7 = 0$

B. 円と直線の共有点の個数

円と直線の関係は，「円の中心と，直線の距離」でも決まる．

【暗記 57：円と直線の共有点の個数】

円 $C : x^2 + y^2 = 5$ と直線 $l : x + y = k$ が共有点を持つような実数 k の範囲を，次の 2 通りで求めよ．

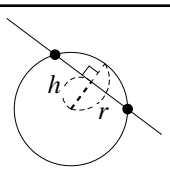
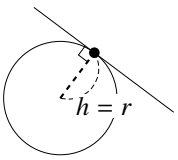
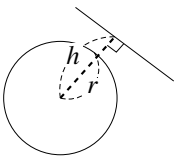
1. 2 次方程式の判別式を用いる．　　2. 『点と直線の距離』(p.105) を用いる．

「円と直線の共有点」について

円 C : $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ と直線 L : $ax+by+c=0$ を考えるとき

- 円 C と直線 L の共有点の個数
- 方程式 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ と $ax+by+c=0$ を連立して得られる 2 次方程式の判別式 D
- 円の中心 $(p,\ q)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 $h=\dfrac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

について，次のようにまとめることができる．

円 C と直線 L の位置関係			
C と L の共有点の個数	**2 個**	**1 個**	**0 個**
2 次方程式の判別式 D	$\boldsymbol{D>0}$	$\boldsymbol{D=0}$	$\boldsymbol{D<0}$
$(p,\ q)$ と直線 L の距離 h	$\boldsymbol{h<r}$	$\boldsymbol{h=r}$	$\boldsymbol{h>r}$

【練習 58 : 円と直線の共有点の個数】

(1) 円 $x^2+y^2=k$ と直線 $3x-4y+10=0$ の共有点の個数を，以下の k についてそれぞれ答えなさい．

1) $k=1$　　2) $k=4$　　3) $k=9$

(2) 円 $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$ と直線 $2x+3y-4=0$ が共有点を持つような，実数 r の範囲を求めよ．

C. 円が切り取る線分の長さ

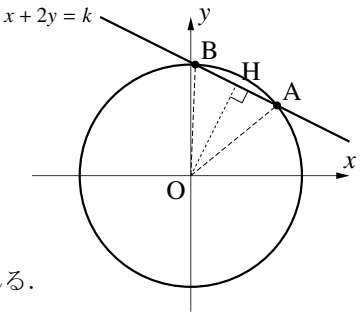
【暗記 59 : 円が切り取る線分の長さ～その１～】

円 C : $x^2+y^2=6$ と直線 l : $x+2y=k$ が 2 点 A，B で交わり，AB = 2 であるとき，k の値を求めたい．以下の［　］に入る式・言葉・値を答えよ．

右図のように，円の中心を O とし，O から直線 $x+2y=k$ へ下ろした垂線の足を H とおく．このとき，OA = ［ア］，AH = ［イ］ であるので，三平方の定理より，OH = ［ウ］．

ところで，点 O と直線 l の距離を『点と直線の距離』(p.105) で計算すると［エ］であるが，これは OH の長さに一致する．

よって，方程式［ウ］=［エ］(= OH) を解けば，k = ［オ］ と求められる．



【練習 60：円が切り取る線分の長さ～その２～】

円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y-1=m(x-2)$ が A，B で交わり AB = 6 であるとき，m の値を求めよ．

【㊙㊐ 61：円が切り取る線分の長さ～その３～】

円 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=10$ と直線 $l:x+ky-2=0$ の交点を A，B とし，AB の中点を M，円 C の中心を O とする．以下の問いに答えよ．

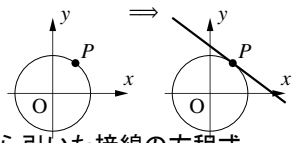
① どんな k の値に対しても，直線 l はある定点 P を通る．その定点 P を求めよ．

② AM = a, OM = b とおくとき，△OAB の大きさを a, b で表せ．

③ △OAB = 3 のとき，AM，OM の長さを求め，k の値を求めよ．

D.　円の接線～その１～（円周上の接点が与えられ，接線は１本）

簡単のため，円 C の中心が原点 O(0, 0) である場合を考えると右図のようになり，円周上の点 P で C に接する直線は 1 本しか存在しないと分かる．



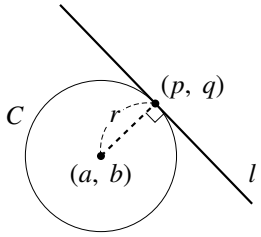
円周上の点から引いた接線の方程式

円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の周上の点 (p, q) から引いた接線 l の方程式は

$$(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$$

となる．特に，円 C の中心が原点にある場合は次のようになる．

$$px+qy=r^2$$　←a＝b＝0を接線 l の式に代入した



（証明）p.140 を参照のこと．

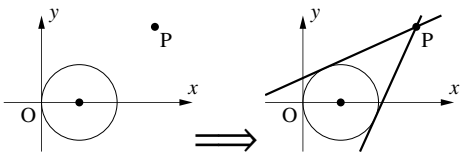
円の方程式において，2 乗のうち片方のみに，$(x, y)=(p, q)$ を代入すると覚えるとよい．また，次で学ぶ「円周外の点から引いた接線の方程式」と混同しないようにしよう．接線が 1 本に決まるかどうかで判断するとよい．

【例題 62】

1. 円 $x^2+y^2=13$ の周上の点 (2, 3) で接する，接線の方程式を求めよ．
2. 円 $x^2+y^2=13$ の周上の点 (2, −3) で接する，接線の方程式を求めよ．
3. 円 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$ の周上の点 (2, −1) で接する，接線の方程式を求めよ．
4. 円 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ の周上の点 (0, −1) で接する，接線の方程式を求めよ．

E. 円の接線～その２～（円周外の点から引き，接線は２本）

円 C の外に点 P をとり，P から引いた円 C の接線を考えよう．右図のようにして，そのような直線は 2 本存在することが分かる．



【暗記 63：円周外の点から引いた接線の方程式】

円 C ：$x^2 + y^2 = 2$ と点 P(3, 1) について，P から引いた C の接線 l の方程式を求めよ．

【練習 64：円の接線】

(1) 円 C ：$x^2+y^2=4$ の周上にある $(1,\ \sqrt{3})$ で接する C の接線を求めよ．

(2) 円 C ：$x^2+y^2=4$ の接線のうち，$(-2,\ 5)$ を通るものをすべて求めよ．

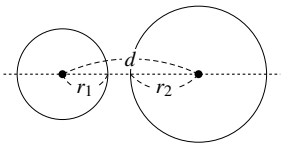
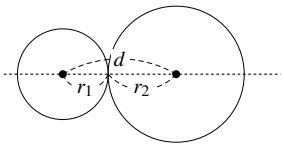
5. 2円の関係

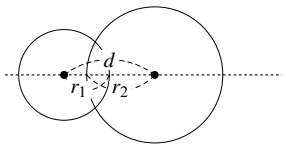
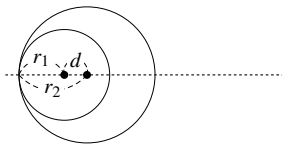
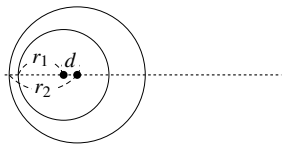
A. 2円の位置関係

数学Aで学んだように，2円の位置関係は以下の5つの状態しかない．

2円の位置関係

2円の半径を r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$，中心間の距離を d とすると，以下のようになる．

2円の図		
2円の位置関係	離れている	外接している
2円の共有点の個数	0個	1個(外接)
2円の中心間の距離 d	$\boldsymbol{r_2 + r_1 < d}$	$\boldsymbol{d = r_2 + r_1}$

		
交わっている	内接している	一方が他方を含む
2個	1個(内接)	0個
$\boldsymbol{r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1}$	$\boldsymbol{d = r_2 - r_1}$	$\boldsymbol{d < r_2 - r_1}$

円が複数個あるときは，まず，中心間を線で結んだ図を描こう．そのうえで，上のような条件を考えるとよい．

【例題 65】 円 C_1 : $x^2 + y^2 = 9$ と，半径5の円 C_2 がある．C_2 の中心Aが次の点にあるとき，C_1 と C_2 の位置関係を答えよ．

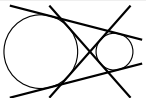
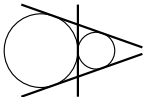
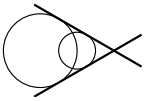
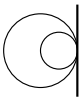
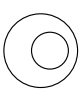
1. A(4, 0)　　2. A(10, 0)　　3. A(2, 0)　　4. A(6, 8)　　5. A(−3, 1)

6. Aの y 座標は4であり，円 C_1 と C_2 が外接するとき，Aの座標を答えなさい．

B. 2 円の共通接線

数学 A でも学んだように，2 円の共通接線の本数は，2 円の位置関係によって異なる．

2 円の共通接線

本数	4 本	3 本	2 本	1 本	0 本
2 円と共通接線の図					
2 円の位置関係	離れている	外接している	交わっている	内接している	一方が他方を含む
共通外接線	2 本	2 本	2 本	1 本	0 本
共通内接線	2 本	1 本	0 本	0 本	0 本

【例題 66】 前ページの**【例題】**と同じように，円 C_1 ： $x^2+y^2=9$ と，半径 5 の円 C_2 がある．C_2 の中心 A が次の点にあるとき，C_1 と C_2 の共通接線の本数を答えよ．

1. A(4, 0)　　2. A(10, 0)　　3. A(2, 0)　　4. A(6, 8)　　5. A(−3, 1)

【暗記 67：共通接線の長さ】

2 円 $C_1: x^2+(y-1)^2=1$, $C_2: (x-3)^2+(y-3)^2=4$ がある．

1. 2 円の共通外接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ A_1，A_2 で接するとき，線分 A_1A_2 の長さを求めよ．
2. 2 円の共通内接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ B_1，B_2 で接するとき，線分 B_1B_2 の長さを求めよ．

【発展 68：2 円の共通接線】

2 つの円 $C_1 : (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$，$C_2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ がある．この 2 円に対し，共通内接線 l，共通外接線 L を考え，2 本ある L の交点を P とする．

① 円 C_1, C_2 と接線 l, L を座標平面上に描き，共通内接線 l の方程式を求めよ．

② P の座標を求めよ．　　③ 共通外接線 L の傾きを求めよ．

6. 発展 円と放物線

円と放物線の場合は，基本的に 2 つの方程式を連立して考えるしかない．『点と直線の距離』は使えないし，相似などを用い図形的に解くこともできないからである．

【発展 69：円と放物線】

放物線 $H : y = x^2$ と，中心が P(0, 2) にある円 C が，2 点 A, B で接している．

① 円 C の半径を求めよ．　　② △APB の面積を求めよ．

7. 2 つのグラフの交点を通るグラフ

一般に，2 つの陰関数 $F(x, y) = a$, $G(x, y) = b$ があるとき，2 つのグラフの交点を通るグラフは

$$k\{F(x, y) - a\} + \{G(x, y) - b\} = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

という形で表される（グラフ $F(x, y) = a$ 以外は全て表わされる）．

逆に，k がどんな実数でも①のグラフは，$F(x, y) = a$, $G(x, y) = b$ の交点を必ず通る．

【暗記 70：2 つのグラフの交点を通る円】

直線 L : $2x + 3y = 1$，円 C : $x^2 + y^2 = 4$ の交点 A, B と，原点 O を通る円の方程式を求めよ．

【発展 71：2 円の交点と，それを通る直線・円】

2 円 $C_1 : x^2 + y^2 = 2$, $C_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$ の 2 交点を A, B とする．

① 直線 AB の方程式を求めよ．　② A, B の座標を求めよ（x 座標は A の方が小さいとする）．

③ A, B を通り，原点を通る円の方程式を求めよ．

2.6 軌跡

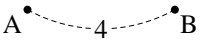
この節では，方程式や関数を利用して，様々な軌跡の表し方にについて学ぶ．

1. 軌跡

軌跡 (locus) とは，「ある条件を満たす点すべてを集めてできる線状の図形」のことである．

【例題 72】 右の点 A，B について，以下の条件を満たす軌跡を，それぞれ図示しなさい．

1. AP = 1 を満たして動く点 P の軌跡
2. AQ = BQ を満たす点 Q の軌跡
3. ∠ARB = 90° を満たす点 R の軌跡



2. 座標平面上の軌跡

A. 軌跡の方程式

座標平面上で考えると，軌跡は x と y の間の方程式で表され，それは**軌跡の方程式** (equation of locus) といわれる．これを求めるには，軌跡上の点を (x, y) とおいて，x と y が満たすべき等式を考えればよい．

【例題 73】 A(1, 2)，B(3, 6) とする．$AP^2 + BP^2 = AB^2$ を満たす点 P の軌跡を考える．

1. P(x, y) とおく．AP^2, BP^2 をそれぞれ x, y で表せ．
2. 点 P の軌跡の方程式を求めなさい．また，それはどんな図形か答えなさい．

【例題 74】 座標平面上において，2 点 A(1, 3)，B(4, −3) について，AP : PB = 1 : 2 となる点 P が描く軌跡の方程式を求めなさい．また，それはどのような図形か．

上の式変形はすべて，同値の記号 ⇔ で結ばれ，また，AP : BP = 1 : 2 と $AP^2 : BP^2 = 1 : 4$ は「同値」となっている．

この「同値な変形である」ことは重要で，解答に明記しなければならない．明記しないと，「点 $P(x, y)$ が $x^2 + (y-5)^2 = 20$ を必ず満たす」ことは導かれていても，「円 $x^2 + (y-5)^2 = 20$ 上のすべての点が P の軌跡である」ことを示したことになっていない．

もし，同値関係を書かない場合は，解答の最後に「逆に，円 $x^2 + (y-5)^2 = 20$ 上のすべての点 (x, y) は，上の計算を逆にたどって，P の条件を満たす．」と明記しなければならない．

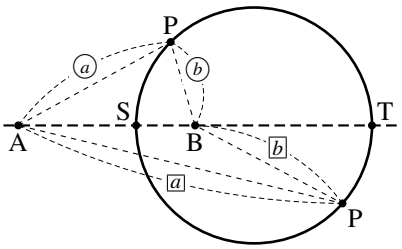
【練習 75：軌跡～その１～】

3 点 A(2, 1)，B(4, 0)，C(0, −1) について，$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 40$ となる点 P の軌跡を求めよ．

【練習 76：軌跡～その２～】

2 点 A(1, 2)，B(5, −2) について，AP : PB = 3 : 1 となる点 P が描く軌跡を求めよ．

一般に，AP : PB = a : b を満たす点 P の軌跡は，$a \neq b$ ならば円になる（これを**アポロニオスの円** (circle of Apollōnios) という）．この円は，線分 AB を a : b に内分する点（右図の S），a : b に外分する点（右図の T）が直径の両端になる．$a = b$ ならば，P の軌跡は線分 AB の垂直二等分線である．



【㊙㊐ 77：軌跡～その３～】

直線 l : $y = 2$ と F(0, −3) について，直線 l との距離が，F までの距離と等しくなる点の軌跡を求めよ．

【㊙㊐ 78：軌跡～その４～】

直線 l : $y = -x + 1$ と直線 m : $y = 7x - 2$ から等距離にある点の軌跡を K とおく．ただし，点が直線上にあるときは，直線との距離を 0 とする．K は，直線 l, m にとってのどんな図形を描くか答えよ．また，K の方程式を求めよ．

B. 軌跡を描く点の他にも動点がある場合

軌跡を描く点の他にも動点がある場合を考えてみよう．

【例題 79】 点 A が放物線 $y = x^2$ の周上を動くとき，A と点 B(0, 2) の中点 P の軌跡を考える．

1. A(a, a^2) とするとき，P の座標を a で表せ．　　2. P が描く軌跡の方程式を求めよ．

上では P(x, y) とおいているが，問題と文字がかぶるため，P(X, Y) とおくことも多い．詳しくは p.129 参照のこと．

【例題 80】 原点 O について，点 A が円 $C : (x-6)^2 + y^2 = 9$ の周上を動き，線分 OA を 2 : 1 に内分する点を P とする．

1. P(x, y)，A(s, t) とする．x と s の間に成り立つ式，y と t の間に成り立つ式を求めよ．
2. P が描く軌跡の方程式を求めよ．

軌跡を求めることと，（連立）方程式の文章題を解くことには共通点がある．いずれも「求めたいものを $x(, y)$ とおき」「$x(, y)$ が満たす式を作り」「それを解く」「条件に満たしていることを確かめる」という 3 段階を踏む．

【練習 81：動点をもつ軌跡〜その１〜】

A$(0, -3)$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 点 B が放物線 $y = -2x^2$ 上を動くとき，線分 AB を $2 : 1$ に内分する点 P の軌跡を求めなさい．

(2) 点 C が円 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 上を動くとき，線分 AC を $1 : 3$ に外分する点 Q の軌跡を求めなさい．

【練習 82：動点をもつ軌跡〜その２〜】

A$(2,\ 1)$，B$(1, -4)$ があり，点 P が円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動くとき，$\triangle$ABP の重心の軌跡を求めなさい．

【練習 83：頂点の描く軌跡】

放物線 $y = x^2 + 2ax + 4x - 3a + 4$ の頂点を A とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) A の座標を a を用いて表せ．

(2) A の軌跡の方程式を求めよ．

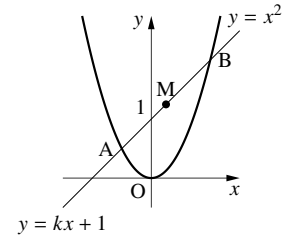
【発展 84：動点をもつ軌跡〜その３〜】

直線 $l : y = x - 3$ と放物線 $C : y = x^2$ がある．点 A が l 上を，点 B が C 上を，線分 AB が y 軸と平行であるように動くとき，線分 AB を $2 : 1$ に内分する点 P の軌跡を求めなさい．

3. ㊘㊙ 定義域に注意すべき軌跡

A. グラフの交点の中点が描く軌跡（常にグラフが交点を持つ場合）

放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = kx + 1$ の 2 交点 A，B について，線分 AB の中点を M とし，k がすべての実数をとったときの，M の軌跡について考える．



このとき，A と B の座標は連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = kx + 1 \end{cases}$ の解に一致する．A と B を直接求めるならば，この連立方程式を解いて

$$x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0 \qquad \therefore\ x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

となる（このとき，k がどんな値でも $k^2 + 4$ は正なので，これらは常に実数である．）．複雑な形をしているが，これが A，B の x 座標である．そこで，M の x 座標を計算すると

$$(\text{M の } x \text{ 座標}) = \frac{\text{A の } x \text{ 座標} + \text{B の } x \text{ 座標}}{2} = \frac{\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} + \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}}{2} = \frac{k}{2}$$

となり，簡潔な値となる．では，複雑な A，B の値を求めず，M の値を計算する方法はないだろうか．

それには，『解と係数の関係』(p.55) を用いるとよい．

【暗記 85：2 交点の中点の軌跡】

A，B の x 座標を α, β，M(X, Y) とする．A，B とも放物線 $y = x^2$ 上にあるので，α, β を用いて，A$(\alpha,$ ア$)$，B$(\beta,$ イ$)$，$X =$ ウ，$Y =$ エ と表される．

A，B の座標を求めるには，C と l の式を連立して x の 2 次方程式 オ を解けばよい．オ の 2 解は α, β であり，オ の判別式 D は，$D =$ カ $>$ キ なので，k の値によらず α, β は常に実数である．

ここで，2 次方程式 オ について，『解と係数の関係』(p.55) より，次の等式が成り立つ．

$\alpha + \beta =$ ク，$\alpha\beta =$ ケ

よって，k のみを用いて $X =$ コ，$Y =$ サ となり，k を消去し，M の軌跡の方程式 シ を得る．

上の例題の最後に「$Y = 2X^2 + 1$ であるから軌跡は $y = 2x^2 + 1$」とした．これは，次の内容を簡潔に述べた結果である（『陰関数のグラフ』(p.94) 参照）．

「P の x 座標を X，P の y 座標を Y とすれば，$Y = 2X^2 + 1$ を満たしている．これは，P(X, Y) が $y = 2x^2 + 1$ というグラフの上にあることを意味しているから，これが P の軌跡になる．」

【練習 86：2 交点の中点の軌跡】

放物線 $y = x^2 - 2$ と直線 $y = k(x - 1)$ の 2 交点 A，B について，線分 AB の中点を M とする．定数 k がすべての実数をとるとき，M が描く軌跡の方程式を求めよ．

B. 定義域に注意すべき軌跡

これまでの問題では，2 つのグラフには必ず共有点があった．k の値によってグラフが交点を持たないような場合は，次のことに注意して，軌跡の方程式の定義域に注意しないといけない．

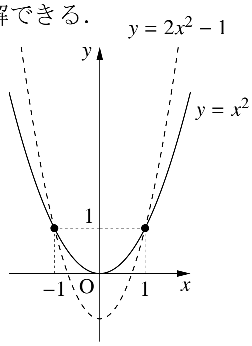
- 2 次方程式の解を α, β などでおいたとき，実数解を持つかどうか
- 式で割り算するとき，その式が 0 になることはないだろうか

【㊙㊐ 87：2 交点の中点の軌跡～その３～】

放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = kx - 1$ について，C と l が異なる 2 交点 A，B をもつよう定数 k が変化するとき，AB の中点を M の軌跡を考える．

① M が存在するための k の範囲を求めよ．　　② M の軌跡の方程式を求めよ．

上の例題において，求める軌跡が放物線の一部分になったことは，次のように理解できる．



- 直線 $l: y=kx-1$ は k の値に関わらず定点 A$(0,-1)$ を通り，k の値によっては C と l は交わらない．
- 右図のように，M の軌跡の方程式 $y=2x^2-1$ は放物線 C の下に突き抜ける．M は放物線 C より上にあるはずなので，C の下につきぬけた部分は軌跡として適さない．放物線 C と $y=2x^2-1$ の共有点を求めると $(1,\ 1),\ (-1,\ 1)$ であるから，$-1 \leqq x \leqq 1$ の部分が適さないと分かる．これは上で求めた結果と一致する．

【㊗㊦ 88：2 交点の中点の軌跡〜その４〜】

円 $C: x^2+y^2=1$ と直線 $l: y=kx+2$ について，C と l が異なる 2 交点 A，B をもつよう定数 k が変化するとき，AB の中点 M の軌跡を求めよ．

【㊗㊦ 89：対称式で表された座標の軌跡】

$a^2+b^2=10$ を満たしながら $a,\ b$ が実数全体を動くとき，M$(a+b\ ,ab)$ の軌跡の方程式を求めよ．

【㊗㊦ 90：2 直線の交点の軌跡】

2 直線 $l_1: kx+y+1=0$，$l_2: x-ky-1=0$ の交点 P が描く軌跡を求めよ．

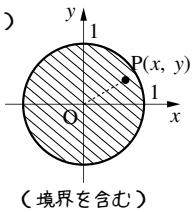
1. 領域とは

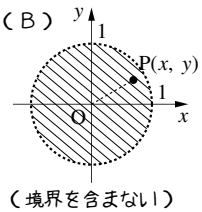
A. 領域とは

平面上の**領域** (domain) とは，「平面的広がり[*8]をもつ，平面の一部分」である[*9].

たとえば，以下の不等式は座標平面上の領域を表す.

(A) $x^2+y^2 \leqq 1$　　(B) $x^2+y^2<1$　　(C) $y>x-1$

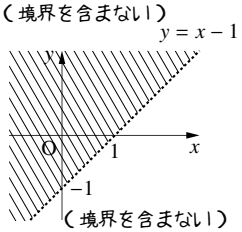




P$(x,\ y)$ について，$x^2+y^2 \leqq 1$ を満たす点 P の集まりが，(A) の表す領域である[*10]．これは領域の境界線上も含むので「**境界** (boundary) を含む」という．

(A) の領域から円周上の点を除けば (B) の領域になり，「境界を含まない」.

(C) の表す領域は，「直線 $y=x-1$ よりも y 座標の大きい点の集まり」になり，直線 $y=x-1$ より上部（境界を含まない）である．



【例題 91】 座標平面上の以下の領域を，図示しなさい．（領域の図示をするときは，「境界を含む」または「境界を含まない」を書くこと．これは，以後の問題でも同様である．）

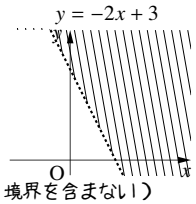
1. $x^2+y^2 \leqq 4$　　2. $x^2+y^2>4$　　3. $x^2+2x+y^2-4y<0$　　4. $y<2x+3$　　5. $y \geqq 2x+3$
6. $y \leqq x^2$　　7. $y-x^2>0$　　8. $2x-y+1>0$

[*8] 平面の一部分が曲線や点であるときは，それを領域とは言わない．「平面的広がり」という表現は曖昧であるが，これを厳密に定義するには高校数学の範囲を大きく超えてしまう．また，空間の領域とは「空間的広がりをもつ，空間の一部分」である．

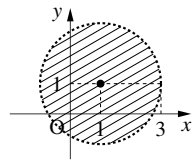
[*9] 大学以降の数学においては「領域」の定義が異なり，「境界を含まない連続的な（高校数学の）領域」のみを指す.

[*10] このことから，(A) の領域を $\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1\}$ と表すこともできる.

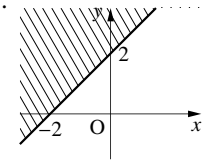
【例題 92】 以下の座標平面上の領域を，式で表しなさい．

1. 

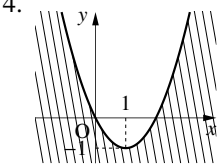
（境界を含まない）

2. 

（境界を含まない）

3. 

（境界を含む）

4. 

（境界を含む）

B. 複数の不等式が表す領域

たとえば，領域 $\begin{cases} y < -x^2 + 2 \\ 2x + y + 1 > 0 \end{cases}$ とは，領域 $y < -x^2 + 2$ と領域 $2x + y + 1 > 0$ の共通部分を表す．

【例題 93】 領域 $\begin{cases} y < -x^2 + 2 & \cdots\cdots ① \\ 2x + y + 1 > 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ を座標平面上に図示しなさい．

【練習 94：いろいろな領域】

(1) 領域 $x^2 + 2x + y > 4$ を図示しなさい.

(2) 以下の領域を，それぞれ図示せよ.

i) $\begin{cases} y < x + 2 \\ y < 2x - 1 \end{cases}$　ii) $\begin{cases} y < x^2 + 1 \\ x + y - 3 > 0 \end{cases}$　iii) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 5 \\ 0 \leqq x - y + 1 \end{cases}$　iv) $x^2 \leqq y \leqq -3x + 4$

【練習 95：点が領域に含まれるか調べる】

A(1, 2)，B(−2, 3)，C(−3, −1) とする．

(1) 点 A，B，C のうち，領域 $y > 2x + 3$ に含まれる点をすべて答えよ．

(2) 点 A，B，C のうち，不等式 $x^2 + y^2 < 6$ に含まれる点をすべて答えよ．

2. 領域の利用

A. 条件を満たす (x, y) を xy 平面に図示する

【例題 96】 x, y を実数とするとき，以下の問いに答えよ．

1. 不等式 $(x - y)(x + y - 2) > 0$ を満たす (x, y) を座標平面上に図示せよ．
2. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 2$ ならば $x + y > 0$ であることを，領域を用いて示せ．

【練習 97：領域の利用】

(1) 領域 $(y+2x)(y-2x^2) \leqq 0$ を座標平面上に図示せよ．

(2) $x^2+(y-3)^2 \geqq 16$ ならば $x^2+(y-1)^2 \geqq 4$ であることを，領域を用いて示せ．

【発展 98：領域の利用】

$a,\ b,\ x,\ y$ を実数とするとき，以下の問いに答えよ．

① 領域 $x^2-y^2+2y-1>0$ を座標平面上に図示しなさい．

② $(x-1)^2+y^2 \leqq 5$ ならば $x^2+(y+2)^2 \leqq 20$ であることを示せ．

③ 領域 $y \leqq -x^2+ax+b$ が点 $(1,\ 0)$ を含む $a,\ b$ の範囲を ab 平面に図示せよ．

【発展 99：絶対値を含む不等式の領域】

① 領域 $|x|+|y| \leqq 1$ を図示しなさい．

② $0<k$ について，2 つの領域 $D_1 : |x|+|y| \leqq k$，$D_2 : x^2+y^2 \leqq 4$ を考える．$D_1 \subset D_2$ となる k の条件，$D_1 \supset D_2$ となる k の条件をそれぞれ答えよ．

B. 最大・最小と領域

$x^2+y^2 \leqq 4$ を満たす $(x,\ y)$ のうち，$2x+y$ がとる最大値・最小値を考えてみよう．この問題は，$2x+y=k$ とおいて，次のようにして領域の問題と置き換えられる．

$x^2+y^2 \leqq 4$ を満たす $(x,\ y)$ のうち，$2x+y=k$ がとる最大値・最小値を求める

$\leftrightarrow$ $x^2+y^2 \leqq 4$ と $2x+y=k$ を同時に満たす $(x,\ y)$ が存在するような，k の最大値・最小値を求める

$\leftrightarrow$ 座標平面において，領域 $x^2+y^2 \leqq 4$ と直線 $2x+y=k$ が共有点を持つような，k の最大値・最小値を求める

こうして，式 $2x+y$ の最大・最小の問題は，座標平面上の問題に置き換えられる．

【暗記 100：最大・最小と領域～その１～】

$x^2+y^2 \leqq 4$ を満たす $(x,\ y)$ のうち，$2x+y$ がとる最大値・最小値を求め，それぞれにおける $x,\ y$ の値も求めよ．

【暗記 101：最大・最小と領域～その２～】

$0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 2x+y \leqq 8,\ x+3y \leqq 9$ を満たす領域を D とする．

1. 領域 D を図示しなさい．
2. D を満たす $(x,\ y)$ について，$x+y$ の最大値・最小値を求め，それぞれにおける $x,\ y$ の値も求めよ．

【練習 102：最大・最小と領域～その３～】

x, y を実数とするとき，以下の最大値・最小値を求め，それぞれにおける x, y の値も求めなさい．

(1) $x^2+y^2 \leqq 5$ のとき，$x-2y$ の取り得る最大値・最小値

(2) $0 \leqq x$, $0 \leqq y \leqq -x+3$, $y \geqq 2x-3$ を満たす $(x,\ y)$ のうち，$x+2y$ がとる値の最大値・最小値と，$3x-y$ がとる値の最大値・最小値

【㊙㊐ 103：最大・最小と領域～その４～】

① $0 \leqq y \leqq -x^2+4$ のとき，値 $x+2y$ のとりうる範囲を求めよ．

② $y \geqq 3x+3$ または $y \geqq -2x+2$ のとき，x^2+y^2 がとりうる値の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ．

2.8 第３章の補足

A. 三角形の面積の証明（p.107）

【発展 104：三角形の面積】

原点を O とし，A(a_1, a_2)，B(b_1, b_2) とする．ただし，$a_1 \neq b_1$ とする．

① 原点から直線 AB へ引いた垂線の長さ h を求めよ．

② 線分 AB の長さを求め，△OAB の面積を求めよ．

この公式は，数学 B で学ぶ「ベクトル」を用いても証明できる．

B. 『円周上の点から引いた接線の方程式』(p.140) の証明

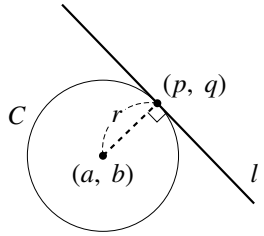
円周上の点から引いた接線の方程式

円 $C : (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の周上の点 $(p,\ q)$ から引いた接線 l の方程式は

$$(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$$

となる．特に，円 C の中心が原点にある場合は次のようになる．

$$px+qy=r^2$$ ←a=b=0を接線 l の式に代入した



（証明）$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の中心を $\mathrm{O}(a,\ b)$ とすると，接線 l は線分 OP と直交する直線し，線分 OP の傾きは $\dfrac{q-b}{p-a}$ であるので，

$$\frac{q-b}{p-a}\times(\text{直線 } l \text{ の傾き})=-1 \iff (\text{直線 } l \text{ の傾き})=-\frac{p-a}{q-b}$$

となる．よって，l は $(p,\ q)$ を通り傾き $-\dfrac{p-a}{q-b}$ の直線と分かるので

$$\begin{aligned} y-q=-\frac{p-a}{q-b}(x-p) &\Leftrightarrow (q-b)(y-q)=-(p-a)(x-p)\\ &\Leftrightarrow (q-b)(y-b+b-q)=-(p-a)(x-a+a-p)\\ &\Leftrightarrow (q-b)(y-b)+(q-b)(b-q)=-(p-a)(x-a)-(p-a)(a-p)\\ &\Leftrightarrow (p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=(p-a)^2+(q-b)^2 \end{aligned}$$

となる．ここで，P は円 C の周上にあるので，$(p-a)^2+(q-b)^2=r^2$ を満たす．つまり，l の方程式は $(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$ となる．

この方程式は，数学 B で学ぶベクトルを用いて導くこともできる．

索引

アポロニオスの円, 126

陰関数, 92

解
　陰関数の——, 93
解析幾何, 83
外分, 87

幾何学, 83
軌跡, 124
軌跡の方程式, 124
境界, 132

グラフ, 94
　陰関数の——, 94

座標幾何学, 83

重心（三角形の）, 88

多変数関数, 92

定点, 99

内分, 85

領域, 132

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 I で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グサイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π，ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ，ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω