13th-note 数学II

（新学習指導要領（平成 **24** 年度～）向け）

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 I で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グサイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π, ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ, ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω

Ver3.00(2013-4-14)

目次

第4章　三角関数

身の回りには，一定時間ごとに同じことを繰り返す現象は数多く存在する．

- 波立った後の水面に浮かぶ物体の上下の揺れ
- ばねにつるされた重りの，自然な上下運動
- 音のうなり（空気の圧力（もしくは気圧）の周期的な変化）

これらの現象を解析するためには，この章で学ぶ三角関数が様々な分野で用いられる．

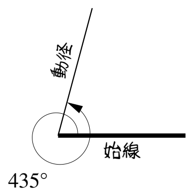
4.1　弧度法と一般角

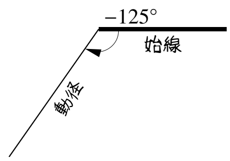
ここでは，単位円を用い，新たな角度の表現である「弧度法」を学ぶ．

1. 角度の拡張

これまで，0° から 360° しか考えてこなかった．しかし，右のようにしてそれ以外の大きさの角を考える．

つまり，動径が 1 周以上回転すれば 360° 以上になり，反対方向（時計回り）に回転すれば，0° より小さい負の角になる．

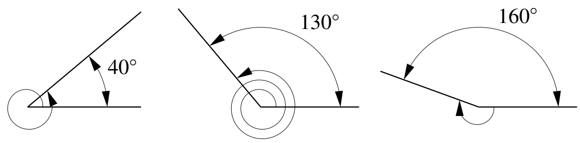




【例題 1】

1. 右の図の角の大きさをそれぞれ答えなさい．
2. 次の大きさの角を図示しなさい．

   460°，− 420°，1200°

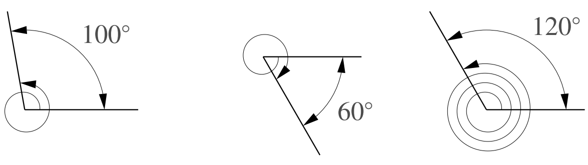


【解答】

1. 左から順に，360° + 40° = **400°**

   2 × 360° + 130° = **850°**，− 360° + 160° = **−200°**

2.



◀ 460° = 360° + 100°
−420° = −360° − 60°
1200 ÷ 360 = 3 · · · 120 なので
1200° = 3 × 360° + 120°

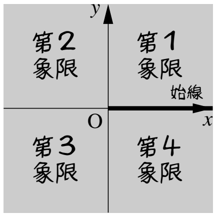
【練習 2：角度の拡張】

(1) 右図のように，座標平面は 4 つの象限に分れていた．以下の角のとき動径は第何象限にあるか．ただし，始線は x 軸の正の部分にとる．

1) 390°　　2) 700°　　3) −220°　　4) −500°

(2) 上の 1) から 4) のうち，500° と動径の位置が一致するものを選べ．

(3) 右の座標平面を用い，900°，− 180° を図示しなさい．

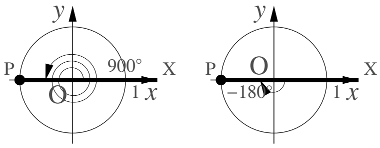


【解答】

(1) 1) 第 **1** 象限　　2) 第 **4** 象限　　3) 第 **2** 象限　　4) 第 **3** 象限

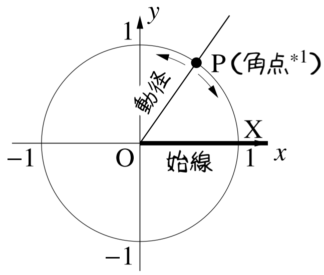
(2) 500° − (−220°) = 720° となり，ちょうど 2 周異なるから **3)**.

(3)



2. 弧度法

A. 単位円と動径・角点



数学 I で学んだように，座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を**単位円** (unit circle) という．また，P が X(1, 0) から単位円周上を動き，動径 OP を作ると考える．このとき，この動く P を**角点** (angular point) という[*1].

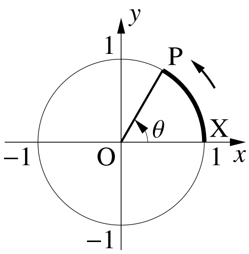
B. 弧度法とは

ラジアン (radian) という単位で角度を表す方法を**弧度法** (radian system) といい[*2]，単位円と動径・角点を用いて，次のようにして定義される．

弧度法の定義

角点 P が X(1, 0) から反時計回りに単位円周上を動くと ∠POX ができる．このとき ∠POX を

$\theta = \angle\mathrm{POX} = \overset{\frown}{\mathrm{XP}}$ の長さ (rad) = 角点 P の動いた長さ



で定義し，単位を「ラジアン (rad)」で表す．ほとんどの場合，単位「ラジアン (rad)」は省略され，書かれない[*3].

半径 1 の円の円周の長さは 2π なので，次の関係が成り立つ．

（1 周）= 2π ラジアン = 2π (rad) = 2π = 360°　　……… ①

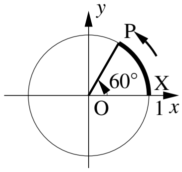
[*1] 「角点」という用語は，13th-note 数学教科書独自の用語であるので注意すること．

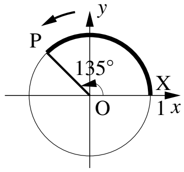
[*2] これまでの，単位「度」を用いて角度を表す方法を**度数法**という．度数法では，1 周が「360」度と決められているが，この「360」が採用された理由として，1 年が 360 日に近い（そのため，天体の星の位置が 1 日でほぼ 1 度ずれることになる）こと，360 は約数を多く持つこと，の 2 点が考えられている．紀元前から使われたきたほどに歴史の古い度数法であるが，度数法で表われた角の値はどんな図形の長さとも関係がないため，近代以降の数学を学ぶにあたっては不便が生じる．たとえば，数学 III で学ぶ三角関数の微分・積分においては，弧度法を用いないと煩雑な計算が起こる．

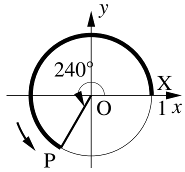
[*3] 厳密な弧度法の定義は，半径 r，弧の長さ l のおうぎ形の中心角を θ として，$\theta = \dfrac{l}{r}$ =（半径 1 あたりの弧の長さ）で与えられる．つまり，弧度法による角度の値は「2 つの長さの比」であり，通常，比には単位をつけない．これが，単位をしばしば省略

弧度法の場合，単位円において「中心角の大きさの値」と「弧の長さの値」が一致する．

【例題 3】 次の単位円において，角点 P が動いた長さを求めよ．また，$\angle$POX の大きさを弧度法で答えよ．

1. 

2. 

3. 

【解答】

1. 角点 P は $2\pi \times \dfrac{60}{360} = \dfrac{1}{3}\pi$ 動いた．$\angle\mathbf{POX} = \dfrac{1}{3}\pi$ **(rad)**
2. 角点 P は $2\pi \times \dfrac{135}{360} = \dfrac{3}{4}\pi$ 動いた．$\angle\mathbf{POX} = \dfrac{3}{4}\pi$ **(rad)**
3. 角点 P は $2\pi \times \dfrac{240}{360} = \dfrac{4}{3}\pi$ 動いた．$\angle\mathbf{POX} = \dfrac{4}{3}\pi$ **(rad)**

◀ つまり，$60^\circ = \dfrac{1}{3}\pi$ (rad)

◀ つまり，$135^\circ = \dfrac{3}{4}\pi$ (rad)

◀ つまり，$240^\circ = \dfrac{4}{3}\pi$ (rad)

C. 度数法と弧度法との間の変換

度数法と弧度法の間の変換

度数法から弧度法へ

p.2 の式①の両辺を 360 または 2 で割って

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \text{(rad)}, \qquad 180^\circ = \pi\ \text{(rad)}$$

（例） $60^\circ = \cancel{60} \times \dfrac{\pi}{\cancel{180}^{\,3}} = \dfrac{\pi}{3}$

$240^\circ = 180^\circ + 60^\circ = \pi + \dfrac{1}{3}\pi = \dfrac{4}{3}\pi$

弧度法から度数法へ

p.2 の式①の両辺を 2 で割って

$$\pi\ \text{(rad)} = 180^\circ$$

（例） $\dfrac{1}{4}\pi = \dfrac{\cancel{180^\circ}^{\,45^\circ}}{\cancel{4}} = 45^\circ$

$\dfrac{5}{4}\pi = \pi + \dfrac{1}{4}\pi = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

【例題 4】 次の角度を弧度法で表しなさい．

1. 30°　2. 120°　3. 150°　4. 180°　5. $210^\circ = 180^\circ + \boxed{\text{ア}}^\circ = \pi + \boxed{\text{イ}} = \boxed{\text{ウ}}$

6. $390^\circ = 360^\circ + \boxed{\text{エ}}^\circ = 2\pi + \boxed{\text{オ}} = \boxed{\text{カ}}$　7. $330^\circ = 360^\circ - \boxed{\text{キ}}^\circ = 2\pi - \boxed{\text{ク}} = \boxed{\text{ケ}}$

8. $1110 \div 180$ は商 $\boxed{\text{コ}}$，余り $\boxed{\text{サ}}$ であるから，$1110^\circ = 180^\circ \times \boxed{\text{コ}} + \boxed{\text{サ}}^\circ = \boxed{\text{シ}}$

【解答】

1. $30^\circ = \cancel{30} \times \dfrac{\pi}{\cancel{180}^{\,6}} = \dfrac{\pi}{6}$
2. $120^\circ = \cancel{120}^{\,2} \times \dfrac{\pi}{\cancel{180}^{\,3}} = \dfrac{2}{3}\pi$
3. $150^\circ = \cancel{150}^{\,5} \times \dfrac{\pi}{\cancel{180}^{\,6}} = \dfrac{5}{6}\pi$
4. π
5. ア : **30**，イ : $\dfrac{\pi}{6}$，ウ : $\dfrac{7}{6}\pi$
6. エ : **30**，オ : $\dfrac{\pi}{6}$，カ : $\dfrac{13}{6}\pi$
7. キ : **30**，ク : $\dfrac{\pi}{6}$，ケ : $\dfrac{11}{6}\pi$
8. コ : **6**，サ : **30**，シ : $\dfrac{37}{6}\pi$

◀ $180^\circ - 60^\circ = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$ と計算してもよい．

$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ が，それぞれ $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$ であることを用い，$\pi = 180^\circ$，$2\pi = 360^\circ$，$\cdots$ とどれだけ違うか考えると，度数法と弧度法の変換は考えやすい．

する理由である．このように，比によって定義されて単位が不要な数は無名数といわれる．

【例題 5】 次の角度を度数法で表しなさい.

1. $\dfrac{\pi}{3}$　2. $\dfrac{\pi}{2}$　3. $\dfrac{2}{3}\pi$　4. $\dfrac{5}{6}\pi$　5. 4π　6. $\dfrac{7}{6}\pi = \pi + \boxed{\text{ア}} = 180^\circ + \boxed{\text{イ}}^\circ = \boxed{\text{ウ}}^\circ$

7. $\dfrac{4}{3}\pi = \pi + \boxed{\text{エ}} = 180^\circ + \boxed{\text{オ}}^\circ = \boxed{\text{カ}}^\circ$　8. $\dfrac{11}{6}\pi = 2\pi - \boxed{\text{キ}} = 360^\circ - \boxed{\text{ク}}^\circ = \boxed{\text{ケ}}^\circ$

9. $\dfrac{21}{4}$ を帯分数にすると $\boxed{\text{コ}}$ であるから, $\dfrac{21}{4}\pi = 5\pi + \boxed{\text{サ}} = \boxed{\text{シ}}^\circ + \boxed{\text{ス}}^\circ = \boxed{\text{セ}}^\circ$

【解答】

1. $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\cancel{180^\circ}^{60^\circ}}{\cancel{3}} = \mathbf{60^\circ}$

2. $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\cancel{180^\circ}^{90^\circ}}{\cancel{2}} = \mathbf{90^\circ}$

3. $\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{2}{\cancel{3}} \times \cancel{180^\circ}^{60^\circ} = \mathbf{120^\circ}$

4. $\dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{5}{\cancel{6}} \times \cancel{180^\circ}^{30^\circ} = \mathbf{150^\circ}$

5. $4\pi = 4 \times 180^\circ = \mathbf{720^\circ}$

6. ア : $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$, イ : **30**, ウ : **210**

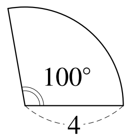
7. エ : $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$, オ : **60**, カ : **240**

8. キ : $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$, ク : **30**, ケ : **330**

9. コ : $\boldsymbol{5\dfrac{1}{4}}$, サ : $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$, シ : **900**, ス : **45**, セ : **945**

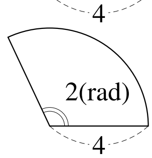
D. 弧度法とおうぎ形

たとえば, 半径 4, 中心角 100° のおうぎ形の面積は, 次のようにして計算できた.



$$4^2\pi \times \frac{100^\circ}{360^\circ} = \cancel{4^2}^{\,4} \times \frac{\cancel{100}^{10}}{\cancel{360}\,\cancel{90}^{9}} = \frac{40}{9}\pi$$

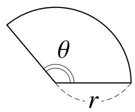
弧度法の場合, 1 周が 2π ラジアンなので, 半径 4, 中心角 2(rad) のおうぎ形の面積は次のようになる[*4].



$$4^2\pi \times \frac{2}{2\pi} = 16$$

【暗記 6 : 弧度法とおうぎ形】

$0 < \theta < 2\pi$ とする. 半径 r, 中心角 θ のおうぎ形の面積を S, 弧の長さを l とするとき, S と l を r, θ で表せ.



【解答】 半径 r の円の面積, 円周は πr^2, $2\pi r$ であるから

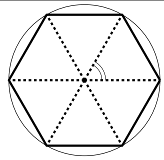
$$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = \boldsymbol{r\theta}, \qquad S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{2}r^2\theta}$$

◀ l は, 半径 1, 中心角 θ のおうぎ形を中心について r 倍して, $l = \theta \times r = r\theta$ とも計算できる.

結果的に $S = \dfrac{1}{2}lr$ であるので, おうぎ形を, 底辺 l, 高さ r の三角形とみなして面積を求めることができる.

【発展 7 : 正多角形と弧度法】

次の正多角形の中心角(例として, 右図に正六角形の中心角を載せてある)の大きさを, 弧度法で答えよ.



① 正六角形　② 正八角形　③ 正十二角形

[*4] おうぎ形の面積に π が無いのは, 中心角の値に π が含まれないためである.

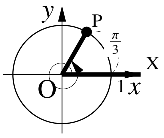
3. 一般角

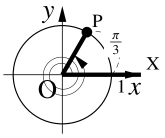
A. 弧度法における角度の拡張

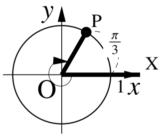
角点 P が 1 周以上動けば 2π より大きな角度となり，角点 P が反時計回りに動けば負の角度となる．

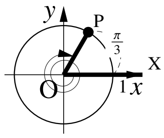
【例題 8】

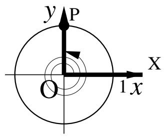
1. 以下の単位円において，$\angle$POX を求めよ．

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

2. 以下の角が第何象限にあるか，答えなさい（象限は p.2) を参照）．

a) $\dfrac{9}{4}\pi$　　b) $\dfrac{13}{4}\pi$　　c) $\dfrac{11}{3}\pi$　　d) $-\dfrac{8}{3}\pi$

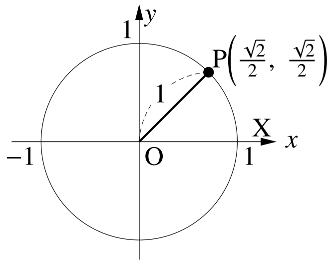
【解答】

1. a) $2\pi + \dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{\dfrac{7}{3}\pi}$　　b) $2\cdot 2\pi + \dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{\dfrac{13}{3}\pi}$　　c) $-2\pi + \dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{-\dfrac{5}{3}\pi}$

   d) $(-2)\cdot 2\pi + \dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{-\dfrac{11}{3}\pi}$　　e) $2\cdot 2\pi + \dfrac{\pi}{2} = \boldsymbol{\dfrac{9}{2}\pi}$

2. a) **第 1 象限**　　b) **第 3 象限**　　c) **第 4 象限**　　d) **第 3 象限**

B. 一般角とは



右の単位円において，$\angle$POX の大きさは

$$\cdots,\quad \frac{\pi}{4}+(-4\pi),\quad \frac{\pi}{4}+(-2\pi),\quad \frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{4}+2\pi,\quad \frac{\pi}{4}+4\pi,\quad \cdots$$

のいずれとも考えられる．そのため，

$$\angle\mathrm{POX} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \ (n \text{ は整数})$$

と表すことがある．このような表し方を**一般角** (general angle) とよぶ．

一般角として「$\theta + 2n\pi$ (n は整数)」のように表すときは，θ の値は $0 \leqq \theta < 2\pi$ となるようにとる．

【例題 9】

1. $\dfrac{11}{2}\pi$ から 2π を $\boxed{\text{ア}}$ 回引くと，0 以上 2π 未満の値 $\boxed{\text{イ}}$ になる．つまり，$\dfrac{11}{2}\pi$ を一般角で表すと $\boxed{\text{ウ}}$ と書ける．
2. $-\dfrac{8}{3}\pi$ に 2π を $\boxed{\text{エ}}$ 回足すと，0 以上 2π 未満の値 $\boxed{\text{オ}}$ になる．つまり，$-\dfrac{8}{3}\pi$ を一般角で表すと $\boxed{\text{カ}}$ と書ける．

【解答】

1. ア : **2**，イ : $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\pi}$，ウ : $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\pi + 2n\pi}$（**$n$ は整数**）
2. エ : **2**，オ : $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi}$，カ : $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi + 2n\pi}$（**$n$ は整数**）

【練習 10：一般角】

以下の角を一般角 $\theta+2n\pi$（n は整数，$0 \leqq \theta < 2\pi$）の形で表せ．

(1) 13π　(2) $\dfrac{11}{3}\pi$　(3) -5π　(4) $-\dfrac{7}{2}\pi$　(5) $-\dfrac{11}{3}\pi$

【解答】 0 から 2π の間になるよう，2π の整数倍を引いて

(1) $13\pi-12\pi=\pi$，つまり，$\pi+2n\pi=\boldsymbol{(2n+1)\pi}$（$\boldsymbol{n}$ **は整数**）．

(2) $\dfrac{11}{3}\pi-2\pi=\dfrac{5}{3}\pi$，つまり，$\boldsymbol{\dfrac{5}{3}\pi+2n\pi}$（$\boldsymbol{n}$ **は整数**）．

0 から 2π の間になるよう，2π の整数倍を足して

(3) $-5\pi+6\pi=\pi$，つまり，$\pi+2n\pi=\boldsymbol{(2n+1)\pi}$（$\boldsymbol{n}$ **は整数**）．

(4) $-\dfrac{7}{2}\pi+4\pi=\dfrac{\pi}{2}$，つまり，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}$（$\boldsymbol{n}$ **は整数**）．

(5) $-\dfrac{11}{3}\pi+4\pi=\dfrac{\pi}{3}$，つまり，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}+2n\pi}$（$\boldsymbol{n}$ **は整数**）．

◀ (5) は，(2) と値が異なることに注意

4.2 三角比から三角関数へ

1. 三角比の拡張

A. 任意の角での cos，sin，tan の定義

数学 I の**三角比** (trigonometric ratio) の定義において，動径（または角点）の動きを任意に許せば，自然に次の定義を得る．任意の角へ拡張された三角比は，**三角関数** (trigonometric function) とよばれる．

三角関数の定義

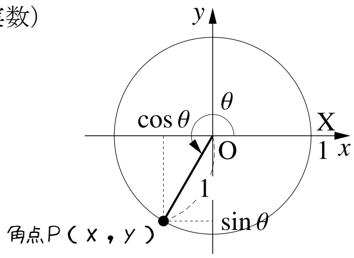
単位円周上の角点を P，X(1, 0) とする．$\angle\mathrm{POX}=\theta$（$\theta$ は任意の実数）とするとき

$\cos\theta=$（角点 P の x 座標）

$\sin\theta=$（角点 P の y 座標）

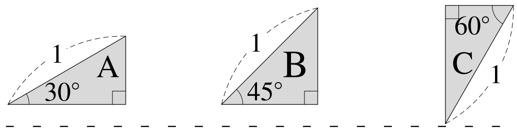
$\tan\theta=\dfrac{\text{（角点 P の } y \text{ 座標）}}{\text{（角点 P の } x \text{ 座標）}}=$（動径 OP の傾き）

とする．ただし，角点 P の x 座標が 0 のとき，つまり $\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ (n は整数) のときは $\tan\theta$ は定義されない．

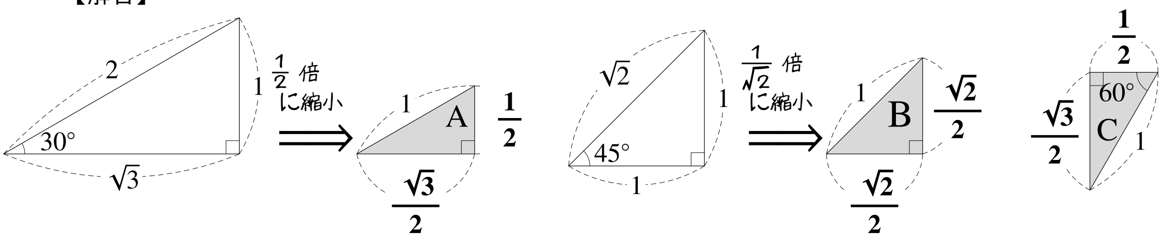


$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$\dfrac{y}{x}=\tan\theta$

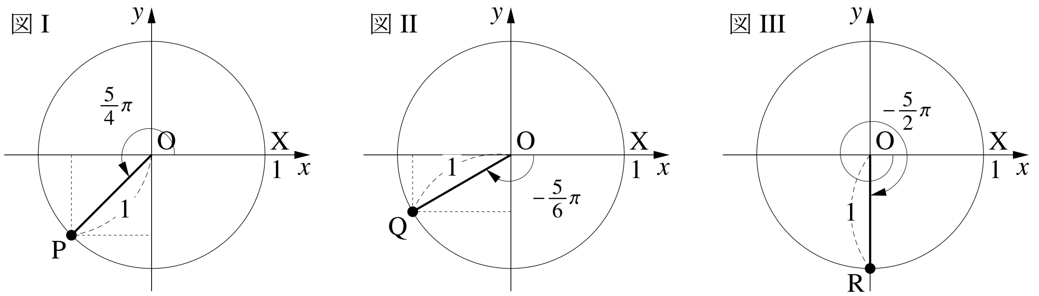
【例題 11】　右図の，斜辺が 1 の直角三角形 A, B, C について，斜辺以外の 2 辺の長さをそれぞれ求めなさい．



【解答】



【暗記 12：一般の三角関数〜その１〜】

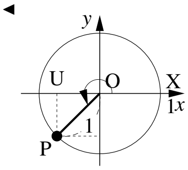


1. 図 I の角点 P の座標を求め，$\cos\frac{5}{4}\pi$，$\sin\frac{5}{4}\pi$，$\tan\frac{5}{4}\pi$[*5] の値を求めなさい．
2. 図 II の角点 Q の座標を求め，$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right), \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right), \tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$[*5] の値を求めなさい．
3. 図 III の角点 R の座標を求め，$\cos\left(-\frac{5}{2}\pi\right), \sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right), \tan\left(-\frac{5}{2}\pi\right)$ の値を求めなさい．

【解答】

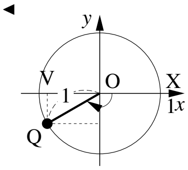
1. △OPU は 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$ の直角三角形だから，$\mathbf{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ であるので

$$\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \tan\frac{5}{4}\pi = 1$$



2. △OQV は 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{1}{2}$ の直角三角形だから，$\mathbf{Q}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ であるので

$$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2},\ \tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



3. $\mathbf{R(0, -1)}$ であるので

$$\cos\left(-\frac{5}{2}\pi\right) = 0,\ \sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right) = -1,\ \tan\left(-\frac{5}{2}\pi\right)$$ は定義できない

[*5] 正の角度に対する三角関数では，$\cos\frac{5}{4}\pi$ のように括弧をつけないことが多い．一方，$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ のように，負の角度に対する三角関数では，必ず括弧をつける．

【暗記 13：一般の三角関数～その２～】

図 I

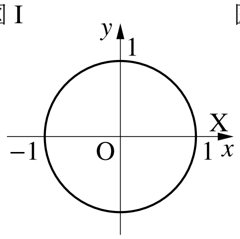


図 II

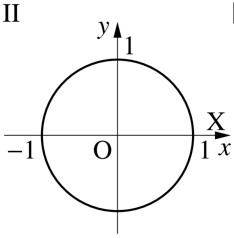


図 III

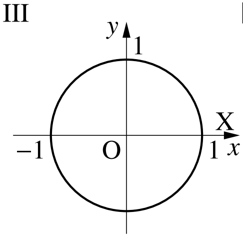
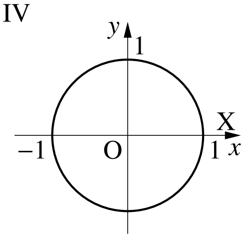


図 IV

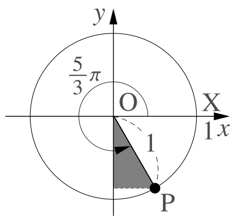


1. $\angle \mathrm{POX} = \dfrac{5}{3}\pi$ となる角点 P を図 I に書き込み，$\cos\dfrac{5}{3}\pi$，$\sin\dfrac{5}{3}\pi$，$\tan\dfrac{5}{3}\pi$ の値を求めよ．
   （図に書き込む点は**およその位置**でよい，これは以下の問題でも同様である．）
2. $\angle \mathrm{QOX} = \dfrac{7}{6}\pi$ となる角点 Q を図 II に書き込み，$\cos\dfrac{7}{6}\pi$，$\sin\dfrac{7}{6}\pi$，$\tan\dfrac{7}{6}\pi$ の値を求めよ．
3. $\angle \mathrm{ROX} = \dfrac{23}{3}\pi$ となる角点 R を図 III に書き込み，$\cos\dfrac{23}{3}\pi$，$\sin\dfrac{23}{3}\pi$，$\tan\dfrac{23}{3}\pi$ の値を求めよ．
4. $\angle \mathrm{SOX} = -\dfrac{15}{4}\pi$ となる角点 S を図 IV に書き込み，$\cos\left(-\dfrac{15}{4}\pi\right)$，$\sin\left(-\dfrac{15}{4}\pi\right)$，$\tan\left(-\dfrac{15}{4}\pi\right)$ の値を求めよ．

【解答】

1. $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であるので

$$\cos\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2},\quad \sin\frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan\frac{5}{3}\pi = -\sqrt{3}$$



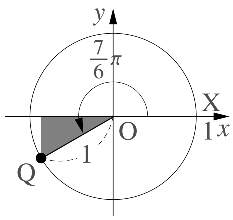
◀ 3 辺の長さが 1, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{2}$ の直角三角形を用いた

◀ cos は P の x 座標
sin は P の y 座標

◀ tan は OP の傾きに等しく，$\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$ で求められる．

2. $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ であるので

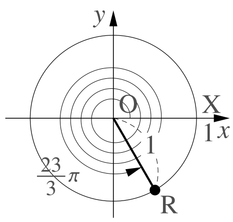
$$\cos\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2},$$
$$\tan\frac{7}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



◀ tan は OQ の傾きに等しく，$\dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ で求められる．

3. $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であるので

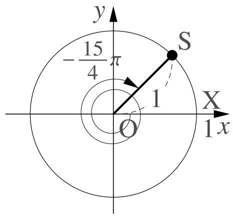
$$\cos\frac{23}{3}\pi = \frac{1}{2},\quad \sin\frac{23}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan\frac{23}{3}\pi = -\sqrt{3}$$



◀ $\dfrac{5}{3}\pi$ の三角関数に等しい．

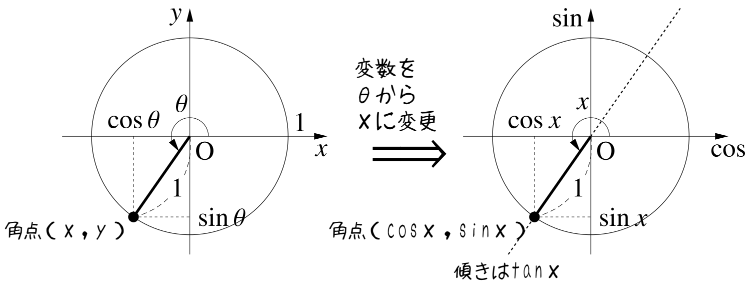
4. $\mathrm{S}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ であるので

$$\cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\tan\left(-\frac{15}{4}\pi\right) = 1$$



B.　三角関数の性質

「ある値を決めれば，ただ 1 つの値を定める式」のことを，関数とよんだ（数学 I p.161）．この意味で，$\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ はいずれも（θ の）関数であり，θ の代わりに x を用いることがある．



θ の代わりに x を用いるとき，単位円の横軸を cos 軸，縦軸を sin 軸で表す[*6]ことにする．

関数 cos, sin, tan の性質を以下にまとめる．

	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
値	角点の cos 座標の値	角点の sin 座標の値	動径の傾き
三角関数の定義域	x は任意の実数をとる		$\dfrac{\pi}{2}+n\pi$（n は整数）を除く任意の実数
三角関数の値域	-1 以上 1 以下の値のみをとる		$\tan x$ は任意の実数をとる
周期[*7]	x が 2π 増えるごとに同じ値をとる		x が π 増えるごとに同じ値をとる

【練習 14：角の大きさと三角関数の符号】

単位円周上に角点 P があり，$\angle\mathrm{POX}=x$ とする．

(1) P が第 3 象限にあるとき，$\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ の符号を答えよ．

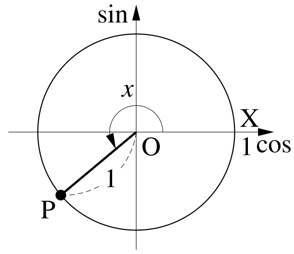
(2) $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき，$\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ の符号を答えよ．

(3) $\sin x<0$ のとき，P は第何象限にあるか．

(4) $\cos x<0$, $\sin x<0$ のとき，P は第何象限にあるか．

(5) $\sin x<0$, $\tan x<0$ のとき，P は第何象限にあるか．

(6) $\tan x$ が存在しないとき，$\cos x$ はいくつか．



【解答】

(1) P が第 3 象限にあるとき，P は cos 座標，sin 座標とも負であるので，
$\cos x<0$, $\sin x<0$, $\tan x>0$.

(2) $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき，P は cos 座標が負，sin 座標が正であるので，
$\cos x<0$, $\sin x>0$, $\tan x<0$.

(3) P の sin 座標が負であればよいので，**P は第 3 象限，第 4 象限にある**．

(4) P の cos 座標も sin 座標も負であればよいので，**P は第 3 象限にある**．

(5) P の sin 座標が負，OP の傾きは負であればよいので，**P は第 4 象限にある**．

(6) $\tan x$ が存在しないとき，P が $(0,\ 1)$, $(0,-1)$ のいずれかなので
$\cos x=0$.

[*6] 横軸を x 軸で表すと，変数の x と文字がかぶってしまう．ただし，13th-note 以外のテキストでは，単位円の横軸を x 軸，縦軸を y 軸で表すことも多いので，注意すること．

[*7] 周期については，p.17 でも詳しく学ぶ．

C.　三角関数を含む方程式・不等式

【練習 15：三角関数を含む方程式】

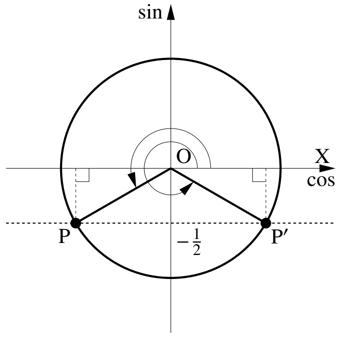
(1) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ を満たす x をすべて求めよ.

(2) $0 \leqq x < 4\pi$ のとき，$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ を満たす x をすべて求めよ.

(3) x を任意の実数とする．$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ を満たす x をすべて求めよ.

(4) $-\pi \leqq x < \pi$ のとき，$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ を満たす x をすべて求めよ.

【解答】　(角点の y 座標の値) $= -\dfrac{1}{2}$ であればよいので，求める x は，右欄外の図の $\angle$POX, $\angle$P'OX に等しい.



(1) $0 \leqq x < 2\pi$ では $\angle\mathrm{POX} = \dfrac{7}{6}\pi$, $\angle\mathrm{P'OX} = \dfrac{11}{6}\pi$ となる．つまり，$\boldsymbol{x = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$.

(2) $0 \leqq x < 4\pi$ では $\angle\mathrm{POX} = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi + 2\pi$, $\angle\mathrm{P'OX} = \dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi + 2\pi$ となる．つまり，$\boldsymbol{x = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{19}{6}\pi,\ \dfrac{23}{6}\pi}$.

(3) x は任意であるので，$\boldsymbol{x = \dfrac{7}{6}\pi + 2n\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi + 2n\pi}$ **(n は整数)**.

(4) $-\pi \leqq x < \pi$ では $\angle\mathrm{POX} = \dfrac{7}{6}\pi - 2\pi$, $\angle\mathrm{P'OX} = \dfrac{11}{6}\pi - 2\pi$ となる．つまり，$\boldsymbol{x = -\dfrac{5}{6}\pi,\ -\dfrac{1}{6}\pi}$.

【練習 16：三角関数を含む不等式】

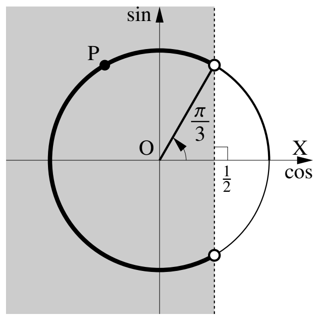
(1) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\cos x < \dfrac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよ.

(2) $0 \leqq x < 4\pi$ のとき，$\cos x < \dfrac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよ.

(3) x を任意の実数とする．$\cos x < \dfrac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよ.

(4) $-\pi \leqq x < \pi$ のとき，$\cos x < \dfrac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよ.

【解答】　(角点の x 座標の値) $< \dfrac{1}{2}$ であればよい．そのためには，角点が右欄外の太線部分にあればよい.



(1) $0 \leqq x < 2\pi$ では，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi}$.

(2) $0 \leqq x < 4\pi$ では，1. に加えて $\dfrac{1}{3}\pi + 2\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi + 2\pi$ も満たすので，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi < x < \dfrac{11}{3}\pi}$.

(3) x は任意であるので，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\pi + 2n\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi + 2n\pi}$ **(n は整数)**

(4) $-\pi \leqq x < \pi$ では $-\pi \leqq x < \dfrac{5}{3}\pi - 2\pi$, $\dfrac{1}{3}\pi < x < \pi$ となる．つまり，$\boldsymbol{-\pi \leqq x < -\dfrac{1}{3}\pi,\ \dfrac{1}{3}\pi < x < \pi}$.

【発展 17：範囲をもつ変数の置き換え】

① $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，式 $2x - \dfrac{\pi}{3}$ の値がとりうる範囲を求めよ.

② $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解きなさい.

③ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解きなさい.

2. 三角関数の間の相互関係

A. 拡張された sin，cos，tan の間の関係

三角関数においても，数学 I(p.111) で学んだ三角比の相互関係が成り立つ.

（拡張された）三角関数の相互関係

任意の実数 x について，次の式が成り立つ.（分母が 0 となる場合は考えない.）

1. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$　2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$　3. $\dfrac{1}{\tan^2 x} + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$　4. $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

1., 2. は定義より明らか．2. の両辺を $\sin^2 x$，$\cos^2 x$ で割れば，3., 4. がそれぞれ導かれる.

【例題 18】

1.（a）$\cos x = \dfrac{1}{3}$ とする．$0 < x < \pi$ のとき，$\sin x$，$\tan x$ の値を求めなさい.

（b）$\cos x = \dfrac{1}{3}$ とする．$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x$，$\tan x$ の値を求めなさい.

2. $\pi < x < 2\pi$，$\tan x = 2$ のとき，$\cos x$，$\sin x$ の値を求めなさい.

【解答】

1. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \dfrac{8}{9}$ より，$\sin x = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

（a）$0 < x < \pi$ より，$\sin x > 0$ であるので

$$\boldsymbol{\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}}.\ \text{また，}\tan x = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}} \times \cancel{3}}{\frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3}} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}.$$

◀『三角関数の相互関係 1.』(p.11)

（b）$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin x = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ はどちらも適する．よって

$$\boldsymbol{(\sin x,\ \tan x) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\ 2\sqrt{2}\right),\ \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -2\sqrt{2}\right)}.$$

◀ $(\sin x,\ \tan x) = \left(\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \pm 2\sqrt{2}\right)$（複号同順）としてもよい.

2. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 5$ より，$\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}}$.

◀『三角関数の相互関係 4.』(p.11)

ここで，$\pi < x < 2\pi$，$\tan x > 0$ より x は第 3 象限の角であるから，$\cos x < 0$．よって，$\boldsymbol{\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$.

また，$\sin x = \tan x \cos x = 2 \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$.

◀『三角関数の相互関係 1.』(p.11)

【暗記 19：三角関数の相互関係の利用～その１～】

1. 等式 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ をどう変形すれば，等式 $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ が導かれるか.

2. $\cos^2 x - \sin^2 x = \boxed{\text{ア}} \cos^2 x - 1 = 1 - \boxed{\text{イ}} \sin^2 x$ の $\boxed{}$ に当てはまる数値を答えなさい.

【解答】

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ の両辺を $\cos^2 x$ で割ればよい．そうすれば

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

となって，導かれる.

2. まず，$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = {}_{(ア)}\underline{\mathbf{2}} \cos^2 x - 1$.
また，$\cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - {}_{(イ)}\underline{\mathbf{2}} \sin^2 x$

◀ $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$ に注意.

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

【練習 20：三角関数の相互関係の利用～その２～】

(1) $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi$，$\sin x = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos x$，$\tan x$ の値を求めなさい.

(2) $-\pi < x < 0$，$\tan x = -3$ のとき，$\cos x$，$\sin x$ の値を求めなさい.

【解答】

(1) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \dfrac{9}{25}$ より，$\cos x = \pm\dfrac{3}{5}$．$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi$ より
$\cos x < 0$ であるから $\boldsymbol{\cos x = -\dfrac{3}{5}}$，$\tan x = \dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \boldsymbol{-\dfrac{4}{3}}$.

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

(2) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 10$ より，$\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{10}}$.
ここで，$-\pi < x < 0$，$\tan x < 0$ より x は第 4 象限の角であるから，
$\cos x > 0$．よって，$\boldsymbol{\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}}$.
また，$\sin x = \tan x \cos x = (-3) \times \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$.

◀『三角関数の相互関係 4.』(p.11)

◀『三角関数の相互関係 1.』(p.11)

【発展 21：三角関数の相互関係の利用～その３～】

① 等式 $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 = 1$ を証明しなさい.

② 等式 $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$ を示しなさい.

【発展 22：$\cos x + \sin x$ と $\cos x - \sin x$ と $\cos x \sin x$ の関係】

① (a) $\cos x + \sin x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos x \sin x$，$\cos x - \sin x$ の値を求めなさい.
(b) さらに，$0 < x < \pi$ であるとき，$\cos x$，$\sin x$ の値を求めなさい.

② $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$，$\cos x \sin x = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos x$，$\sin x$ の値を求めなさい.

B.　三角関数を含む関数・方程式・不等式～その１～

【練習 23：三角関数を含む関数・方程式・不等式～その１～】

(1) 関数 $y = \cos^2 x - 2\sin x + 1\ \ (0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ.

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin^2 x = \cos x + 1$ を解きなさい.

(3) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $2\cos^2 x + \sin x > 2$ を解きなさい.

【解答】

(1)　$y = \cos^2 x - 2\sin x + 1$

$\quad = (1 - \sin^2 x) - 2\sin x + 1$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11) を用いて $\sin x$ にそろえた.

$\sin x = t$ とおく．$0 \leqq x < 2\pi$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ なので

$y = -t^2 - 2t + 2$

$\quad = -(t+1)^2 + 3\ \ (-1 \leqq t \leqq 1)$

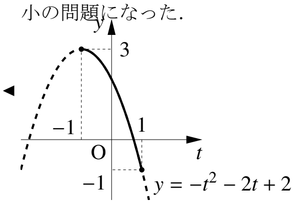
◀ t についての 2 次関数の最大・最小の問題になった.

右欄外の図より，y は

$t = -1$ のとき最大値 3，$t = 1$ のとき最小値 -1

をとる．$t = \sin x$ であるので

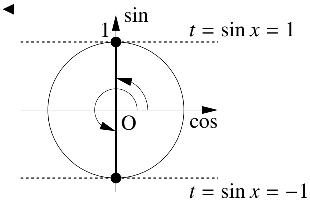
◀



$\sin x = -1$ のとき $x = \dfrac{3}{2}\pi$，$\sin x = 1$ のとき $x = \dfrac{1}{2}\pi$

であるから

◀



$x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最大値 3，$x = \dfrac{1}{2}\pi$ のとき最小値 -1

(2)　$\sin^2 x = \cos x + 1 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = \cos x + 1$

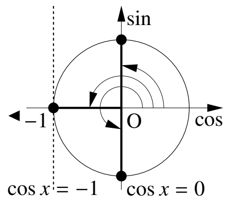
$\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0, -1$

$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で $\cos x = 0, -1$ を満たす x は，右欄外の図より **$x = \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$.**

◀



(3)　$2\cos^2 x + \sin x > 2 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + \sin x > 2$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x > 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) < 0$

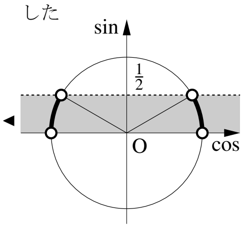
$\Leftrightarrow 0 < \sin x < \dfrac{1}{2}$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11) を用いて $\cos x$ にそろえた.

◀ $\sin^2 x$ の係数を正にするため，両辺を -1 で割ってから因数分解した

$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で上の不等式を満たす x の範囲は，右欄外の図の太線部分である．すなわち

◀



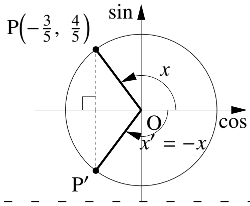
$0 < x < \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi < x < \pi$

3. $-x$, $\pi+x$, $2\pi-x$ の三角関数

この節で学ぶ式については，暗記するのではなく，図を描いて導けるようにしよう．また，後に学ぶ『三角関数の加法定理』を用いて，p.28 のように求めることもできる．

A. $-x$ の三角関数

【例題 24】 右の単位円において，$x'=-x$，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ とする．
このとき，P′ の座標と，$\cos x'$，$\sin x'$，$\tan x'$ の値をすべて求めよ．



【解答】 P と P′ は cos 軸について対称なので $\mathrm{P}'\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$ となり

$$\cos x'=-\frac{3}{5},\ \sin x'=-\frac{4}{5},\ \tan x'=\frac{4}{3}$$

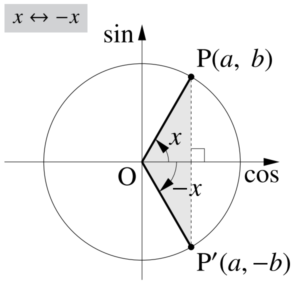
◀ $\tan x'=\dfrac{\sin x'}{\cos x'}=\dfrac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}$

$-x$ の三角関数

任意の角 x において次の等式が成り立つ．

$$\sin(-x)=-\sin x$$
$$\cos(-x)=\cos x$$
$$\tan(-x)=-\tan x$$

ただし，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)$ (n は整数) は考えない．



(証明) 右上図のように，単位円周上に角 x の動径 OP と角 $-x$ の動径 OP′ をとると，$\triangle\mathrm{OPQ}\equiv\triangle\mathrm{OP'Q}$ である．よって，点 P の座標を $(a,\ b)$ とすると，点 P′ の座標は $(a,-b)$ となるから

$$\cos(-x)=a=\cos x$$
$$\sin(-x)=-b=-\sin x$$
$$\tan(-x)=\frac{-b}{a}=-\frac{b}{a}=-\tan x$$

【例題 25】 『$-x$ の三角関数』を用いて，以下の $\boxed{}$ に 0 から π までの値を入れなさい．

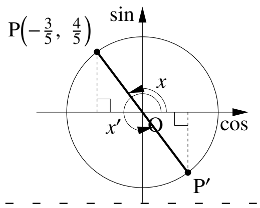
$$\cos\left(-\frac{1}{9}\pi\right)=\cos\boxed{\text{ア}},\quad \sin\left(-\frac{7}{10}\pi\right)=-\sin\boxed{\text{イ}},\quad \tan\left(-\frac{3}{20}\pi\right)=-\tan\boxed{\text{ウ}}$$

【解答】 $\cos\left(-\dfrac{1}{9}\pi\right)=\cos\underline{\dfrac{1}{9}\pi}_{(\text{ア})}$，$\sin\left(-\dfrac{7}{10}\pi\right)=-\sin\underline{\dfrac{7}{10}\pi}_{(\text{イ})}$

$\tan\left(-\dfrac{3}{20}\pi\right)=-\tan\underline{\dfrac{3}{20}\pi}_{(\text{ウ})}$

B. $\pi + x$ の三角関数

【例題 26】
右の単位円において，$x' = x + \pi$，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ とする．
このとき，P′ の座標と，$\cos x'$，$\sin x'$，$\tan x'$ の値をすべて求めよ．



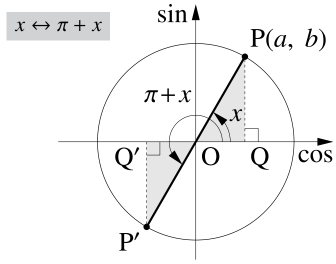
【解答】 P と P′ は原点 O について対称なので $\mathbf{P'}\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$ となり
$\cos x' = \dfrac{3}{5}$，$\sin x' = -\dfrac{4}{5}$，$\tan x' = -\dfrac{4}{3}$

$\pi + x$ の三角関数

任意の角 x において次の等式が成り立つ．

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

ただし，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$（$n$ は整数）は考えない．



（証明）右上図のように，単位円周上に角 x の動径 OP と角 $\pi + x$ の動径 OP′ をとると，△OPQ ≡ △OP′Q′ である．よって，点 P の座標を (a, b) とすると，点 P′ の座標は $(-a, -b)$ となるから

$$\cos(\pi + x) = -a = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -b = -\sin x$$
$$\tan(\pi + x) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = \tan x$$

【例題 27】 『$\pi + x$ の三角関数』を用いて，以下の $\boxed{}$ に 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ までの値を入れなさい．

$\cos\dfrac{10}{9}\pi = -\cos\boxed{ア}$，$\sin\dfrac{11}{8}\pi = -\sin\boxed{イ}$，$\tan\dfrac{4}{3}\pi = \tan\boxed{ウ}$

【解答】 $\cos\dfrac{10}{9}\pi = \cos\left(\pi + \dfrac{1}{9}\pi\right) = -\cos\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{9}\pi}}_{（ア）}$

$\sin\dfrac{11}{8}\pi = \sin\left(\pi + \dfrac{3}{8}\pi\right) = -\sin\underline{\boldsymbol{\dfrac{3}{8}\pi}}_{（イ）}$

$\tan\dfrac{4}{3}\pi = \tan\left(\pi + \dfrac{1}{3}\pi\right) = \tan\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\pi}}_{（ウ）}$

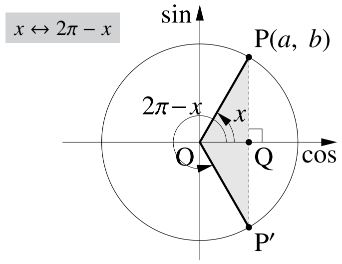
C. $2\pi - x$ の三角関数

$2\pi - x$ の三角関数

任意の角 x において次の等式が成り立つ．

$\cos(2\pi - x) = \cos x$
$\sin(2\pi - x) = -\sin x$
$\tan(2\pi - x) = -\tan x$

ただし，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$ (n は整数) は考えない．



（証明）角 $2\pi - x$ と角 $-x$ では，ちょうど 2π だけ大きさが異なるので，『$-x$ の三角関数』(p.14) のときと同じになることから分かる．

【練習 28：三角関数の値】

p.57 の表を用いて，$\cos\dfrac{13}{10}\pi$，$\sin\dfrac{16}{9}\pi$，$\tan\left(-\dfrac{1}{10}\pi\right)$ の値を求めよ．

【解答】
$\cos\dfrac{13}{10}\pi = \cos\left(\pi + \dfrac{3}{10}\pi\right) = -\cos\dfrac{3}{10}\pi = -\cos 54^\circ = \mathbf{-0.5878}$ ◀『$2\pi - x$ の三角関数』

$\sin\dfrac{16}{9}\pi = \sin\left(2\pi - \dfrac{2}{9}\pi\right) = -\sin\dfrac{2}{9}\pi = -\sin 40^\circ = \mathbf{-0.6428}$ ◀『$\pi + x$ の三角関数』

$\tan\left(-\dfrac{1}{10}\pi\right) = -\tan\dfrac{\pi}{10} = -\tan 18^\circ = \mathbf{-0.3249}$ ◀『$-x$ の三角関数』

【発展 29：$\dfrac{\pi}{2} + x$ の三角関数】

以下の $\boxed{}$ に当てはまる式を，1. から 8. から選びなさい．

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \boxed{ア}$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \boxed{イ}$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \boxed{ウ}$

1. $\cos x$　2. $\sin x$　3. $\tan x$　4. $\dfrac{1}{\tan x}$　5. $-\cos x$　6. $-\sin x$　7. $-\tan x$　8. $-\dfrac{1}{\tan x}$

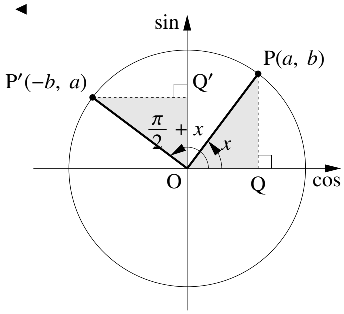
【解答】 右図のように，単位円周上に角 x の動径 OP と角 $\dfrac{\pi}{2} + x$ の動径 OP′ をとると，△OPQ ≡ △OP′Q′ である．よって，点 P の座標を (a, b) とすると，点 P′ の座標は $(-b, a)$ となるから

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -b = -\sin x$　より，<u>**6.**</u>(ア)

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = a = \cos x$　より，<u>**1.**</u>(イ)

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{\tan x}$　より，<u>**8.**</u>(ウ)

◀



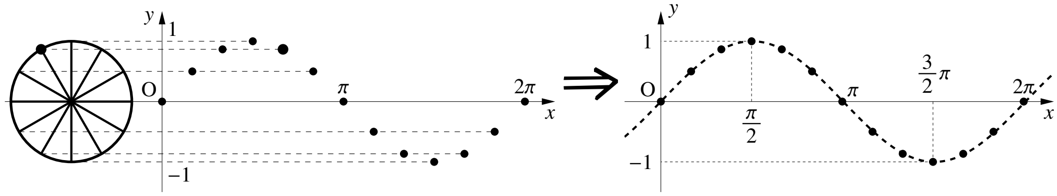
1. $y = \sin x$ のグラフ

A. $y = \sin x$ のグラフ

関数 $y = \sin x$ について，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で x と y の関係を表にすると，以下のようになる．

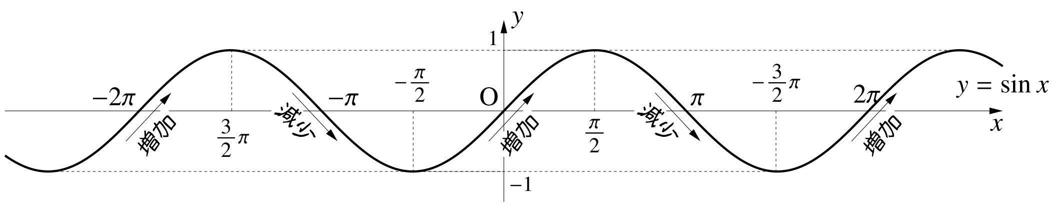
x	$\cdots$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	$\cdots$
$y(=\sin x)$	$\cdots$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\cdots$

座標平面上にとると，次のようになる．ここで描かれる曲線を，**正弦曲線** (sine curve) という．



定義域を任意の実数とすれば，上のグラフを繰り返し，次のようになる．

$y = \sin x$ のグラフの特徴



- y の値は 0 の上下を 1 の幅で動く（これを**振幅** (amplitude) という）．
- 周期が 2π の**周期関数** (periodic function) [*8]である，つまり，2π ごとに同じ値を繰り返す．
- x の値の増加に対し，y の値は増加と減少を交互に繰り返す，**正弦曲線**である．

【例題 30】

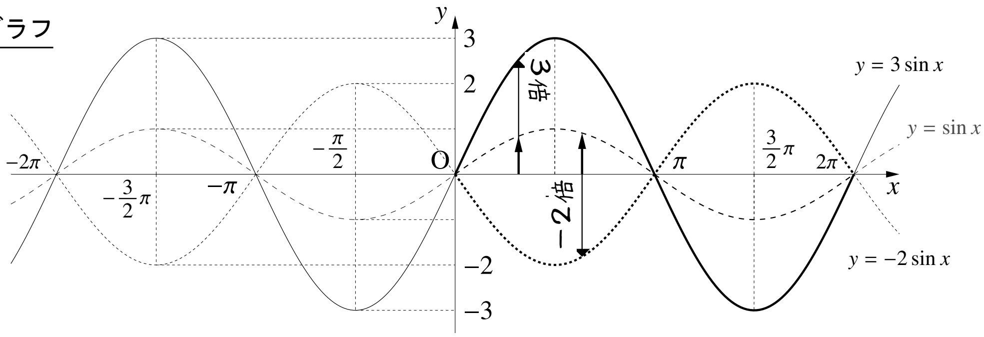
1. 次の範囲では，$y = \sin x$ のグラフは増加しているか，減少しているか，答えなさい．
   (a) $4\pi < x < \frac{9}{2}\pi$　(b) $-\frac{9}{2}\pi < x < -4\pi$　(c) $\frac{13}{2}\pi < x < \frac{15}{2}\pi$
2. $A\left(\frac{\pi}{3}, \boxed{\text{ア}}\right)$, $B\left(\frac{5}{6}\pi, \boxed{\text{イ}}\right)$, $C\left(\frac{11}{3}\pi, \boxed{\text{ウ}}\right)$ が $y = \sin x$ のグラフ上にあるとき，$\boxed{}$ に当てはまる値を答えよ．

【解答】

1. (a) 増加している　(b) 減少している　(c) 減少している
2. ア：$\sin\frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,　イ：$\sin\frac{5}{6}\pi = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$,　ウ：$\sin\frac{11}{3}\pi = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

[*8] ある正の実数 p に対して「どんな実数 x に対しても $f(x) = f(x+p)$ が成立する」とき，$f(x)$ は周期関数であるという．また，この条件を満たす実数 p のうち「最小の正の値」を，$f(x)$ の**周期** (period) という．
たとえば，$y = f(x) = \sin x$ は，$f(x) = f(x+4\pi)$，$f(x) = f(x-2\pi)$ なども成り立つが，2π のみを周期とよぶ．

B.　$y = A\sin x$ のグラフ



たとえば，$y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に 3 倍すると $y = 3\sin x$ のグラフになり，振幅は 3 になる．

また，$y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に -2 倍すると $y = -2\sin x$ のグラフになり，振幅は 2 になる．

$y = A\sin x$ のグラフの特徴

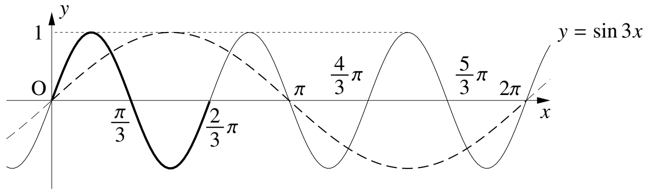
- $y = \sin x$ のグラフを，y 軸方向に A 倍したグラフである，
- 振幅は $|A|$，周期は関数 $y = \sin x$ と同じ 2π である．

C.　$y = \sin bx$ のグラフ

たとえば，関数 $y = f(x) = \sin 3x$[*9] のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを，y 軸に対して x 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍したグラフになる．これは

$$f(0) = \sin 0 = 0,\quad f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin 2\pi = 0$$
$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sin 4\pi = 0,\ f(2\pi) = \sin 6\pi = 0$$

となり，x が 0 から 2π まで増加する間に，y は 3 度同じ値を繰り返すことからも分かる．



（破線 - - - は $y = \sin x$ のグラフ）

$y = \sin bx$ のグラフ

$y = \sin bx$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを「x 軸方向に $\frac{1}{b}$ 倍」したものであり，

周期は $\frac{2\pi}{|b|}$，振幅は 1 である．

【例題 31】

1. $y = 4\sin x$ のグラフ上に $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ \boxed{ア}\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{5}{6}\pi,\ \boxed{イ}\right)$，$\mathrm{C}\left(\frac{11}{3}\pi,\ \boxed{ウ}\right)$ があるとき，$\boxed{}$ に当てはまる値を答えよ．
2. $y = f(x) = \sin 2x$ のグラフを描きなさい．また，$y = f(x)$ のグラフ上に $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ \boxed{エ}\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{5}{6}\pi,\ \boxed{オ}\right)$，$\mathrm{C}\left(\frac{11}{3}\pi,\ \boxed{カ}\right)$ があるとき，$\boxed{}$ に当てはまる値を答えよ．

【解答】

1. ア：$4\sin\frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2\sqrt{3}}$，　イ：$4\sin\frac{5}{6}\pi = 4 \times \frac{1}{2} = \mathbf{2}$

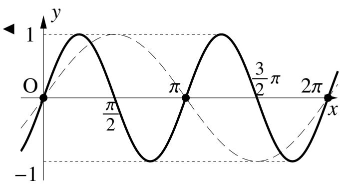
*9 $\sin 3x$ と書いて，$\sin(3x)$ のことを意味する．つまり，角 $3x$ の sin は $\sin 3x$ と表され，普通，括弧は省略される．

ウ： $\sin\dfrac{11}{3}\pi = 4\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathbf{-2\sqrt{3}}$

2. 右欄外の実線のグラフが，$y = f(x) = \sin 2x$ のグラフになる．

エ： $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{2\pi}{3} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，　オ： $f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = \sin\dfrac{5}{3}\pi = \mathbf{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

カ： $f\left(\dfrac{11}{3}\pi\right) = \sin\dfrac{22}{3}\pi = \sin\dfrac{4}{3}\pi = \mathbf{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

◀ 

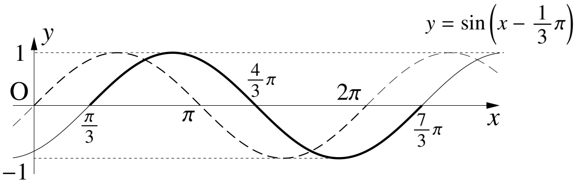
（破線 ‐‐‐ は $y = \sin x$ のグラフ）

D. $y = \sin(x-c)$ のグラフ

数学 I で学んだように，「x を $x-\dfrac{1}{3}\pi$ に置き換える」ことは「グラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{3}\pi$ 平行移動する」ことに一致する．だから，関数 $y = f(x) = \sin\left(x-\dfrac{1}{3}\pi\right)$ のグラフは，右図のようになる．このことは

$$f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sin 0 = 0,\quad f\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \sin 2\pi = 0$$

であることからも確かめられる．



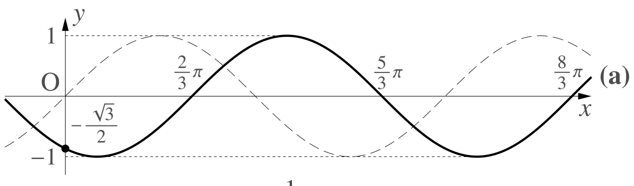
（破線 ‐‐‐ は $y = \sin x$ のグラフ）

$y = \sin(x-c)$ のグラフ

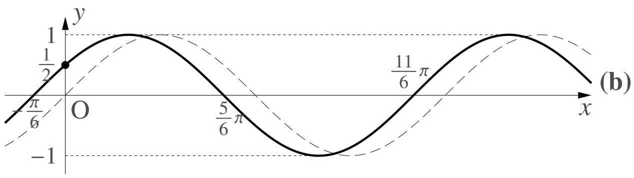
$y = \sin(x-c)$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを「x 軸方向に c 平行移動」したグラフになる．
周期と振幅はそれぞれ 2π，1 であり，$y = \sin x$ と同じになる．

【例題 32】 (a) $y = \sin\left(x-\dfrac{2}{3}\pi\right)$，(b) $y = \sin\left(x+\dfrac{1}{6}\pi\right)$ のグラフを，それぞれ描きなさい．

【解答】 $y = \sin x$ を x 軸方向に $\dfrac{2}{3}\pi$ 平行移動して，(a) のグラフを得る．



$y = \sin x$ を x 軸方向に $-\dfrac{1}{6}\pi$ 平行移動して，(b) のグラフを得る．



◀ a)，b) とも破線 ‐‐‐ は $y = \sin x$ のグラフ

三角関数のグラフを書くときは，「x 軸との交点」「y 軸との交点」はできるだけ書くようにしよう．また，関数が最大値，最小値をとるときの x 座標も，余裕があれば書き込むとよい．

【練習 33：三角関数のグラフ〜その１〜】

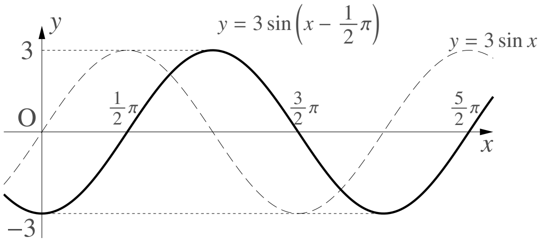
以下の関数のグラフを書きなさい．また，周期と振幅を答えなさい．

(1) $y = 3\sin\left(x - \dfrac{1}{2}\pi\right)$　　(2) $y = 2\sin 4x$　　(3) $y = \sin\dfrac{x}{2}$

【解答】

(1) 周期は $\boldsymbol{2\pi}$

振幅は **3**

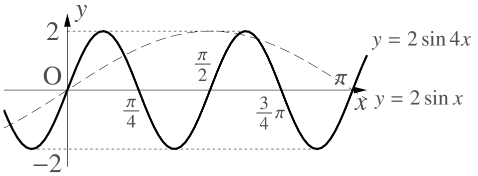


◀ 破線 - - - は $y = 3\sin x$ のグラフ

(2) 周期は

$\dfrac{2\pi}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

振幅は **2**

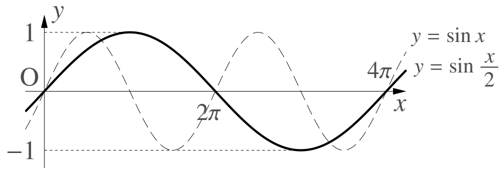


◀ 破線 - - - は $y = 2\sin x$ のグラフ

(3) 周期は

$2\pi \div \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{4\pi}$

振幅は **1**

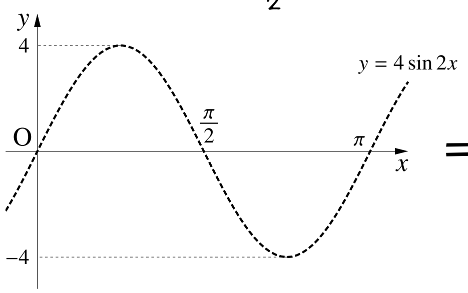


◀ 破線 - - - は $y = \sin x$ のグラフ

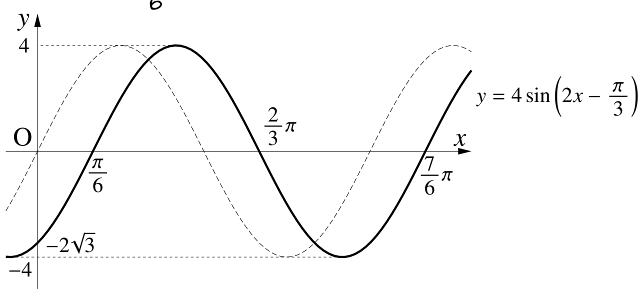
E.　$y = A\sin(bx - c)$ のグラフ

たとえば，関数 $y = 4\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y = 4\sin 2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ と変形され[*10]，次のようになる．

$$y = 4\sin x \xrightarrow[\text{（x軸方向に}\frac{1}{2}\text{倍）}]{x\text{を}2x\text{に代える}} y = 4\sin 2x \xrightarrow[\text{（x軸方向に}\frac{\pi}{6}\text{移動）}]{x\text{を}x-\frac{\pi}{6}\text{に代える}} y = 4\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$



$\Rightarrow$



上のグラフは，次の順序で考えるとわかりやすい．

- $y = \sin 0$ になる $x = \dfrac{1}{6}\pi$ から 1 周期分を始めると，$x = \dfrac{1}{6}\pi + \underbrace{\pi}_{\text{周期}} = \dfrac{7}{6}\pi$ で終わる．
- 振幅は 4 で，y 切片は $4\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 4 \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$

[*10] 厳密には $y = 4\sin\left\{2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ となるが，たいてい，中括弧 { } は省略される．

$y = A\sin(bx - c) = A\sin b\left(x - \dfrac{c}{b}\right)$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを
「原点について，y 軸方向に A 倍，x 軸方向に $\dfrac{1}{b}$ 倍し，x 軸方向に $\dfrac{c}{b}$ 平行移動」
したグラフである．周期は $\dfrac{2\pi}{|b|}$，振幅は A である．

【例題 34】 $y = \sin\left(3x - \dfrac{3}{4}\pi\right)$ のグラフについて以下の問いに答えよ．

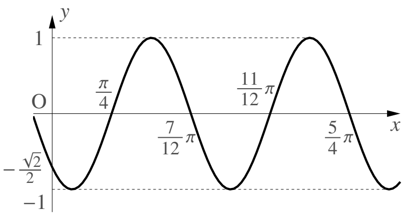
1. $y = \sin 3\left(x - \boxed{\text{ア}}\right)$ であり，周期は $\boxed{\text{イ}}$，振幅は $\boxed{\text{ウ}}$，y 切片は $\boxed{\text{エ}}$ である．
2. $\boxed{\text{ア}} \leqq x \leqq \boxed{\text{オ}}$ で 1 周期分になる．
3. $y = \sin\left(2x - \dfrac{1}{3}\pi\right)$ のグラフを描きなさい．

【解答】 ア：$\sin\left(3x - \dfrac{3}{4}\pi\right) = \sin 3\left(x - \underbrace{\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\pi}}_{(ア)}\right)$

イ：$\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$，ウ：**1**

エ：$\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right) = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

オ：$\dfrac{1}{4}\pi + \dfrac{2}{3}\pi = \boldsymbol{\dfrac{11}{12}}\pi$



【練習 35：三角関数のグラフ〜その２〜】

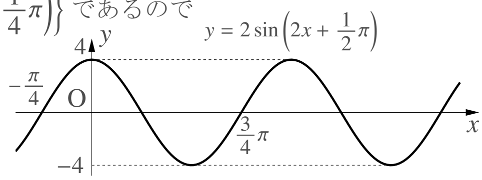
以下の関数のグラフを書きなさい．また，周期と振幅を答えなさい．

(1) $y = 4\sin\left(2x + \dfrac{1}{2}\pi\right)$　　(2) $y = 4\sin(3x - \pi)$

【解答】

(1) $y = 4\sin 2\left\{x - \left(-\dfrac{1}{4}\pi\right)\right\}$ であるので

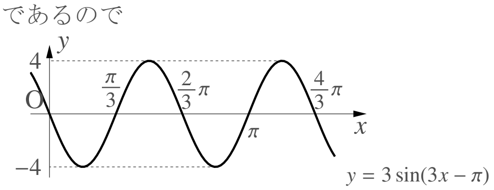
周期は
$\dfrac{2\pi}{2} = \boldsymbol{\pi}$
振幅は 4



◀・$y = \sin 0$ になる $x = -\dfrac{1}{4}\pi$ から 1 周期分を始めると $x = -\dfrac{1}{4}\pi + \pi = \dfrac{3}{4}\pi$ で終わる
・振幅 4，y 切片 $4\sin\dfrac{1}{2}\pi = 4$

(2) $y = 4\sin 3\left(x - \dfrac{1}{3}\pi\right)$ であるので

周期は
$\dfrac{2\pi}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$
振幅は 4



◀・$y = \sin 0$ になる $x = \dfrac{1}{3}\pi$ から 1 周期分を始めると，$x = \dfrac{1}{3}\pi + \dfrac{2}{3}\pi = \pi$ で終わる
・振幅は 4 で，y 切片は $4\sin(-\pi) = 0$

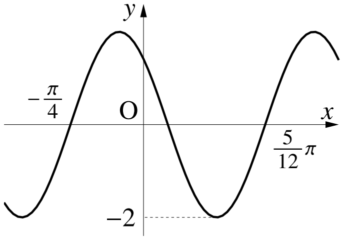
【発展 36：三角関数のグラフ〜その３〜】

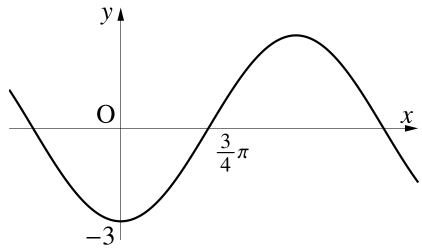
次のグラフを描きなさい．

① $y = \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)$　　② $y = \sin\left(\dfrac{3x}{2} - \pi\right)$

【発展 37：グラフから三角関数を求める】

以下の $y = A\sin(bx+c)$ のグラフ（$A>0,\ b>0,\ -\pi<c<\pi$）について，それぞれ $A,\ b,\ c$ を求めよ．

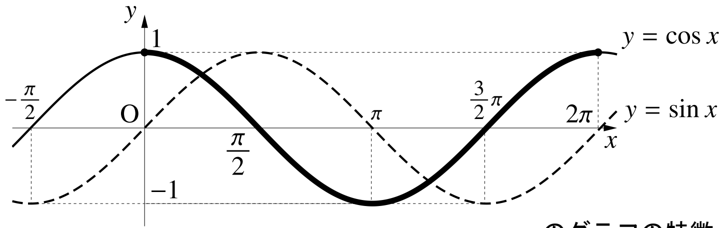
①


②


2. $y=\cos x,\ \ y=\tan x$ のグラフ

A. $y=\cos x$ のグラフ

$\cos x = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるので，$y=\cos x$ のグラフも正弦曲線になる．グラフ $y=\cos x$ の 1 周期分は，右の太線である．



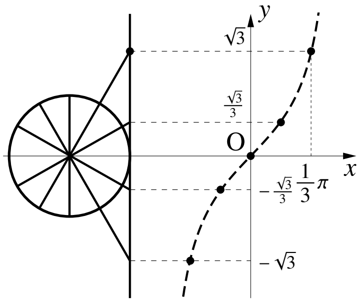
$y=\cos x$ のグラフの特徴

周期が 2π，振幅が 1 の正弦曲線であり，y 切片が 1．

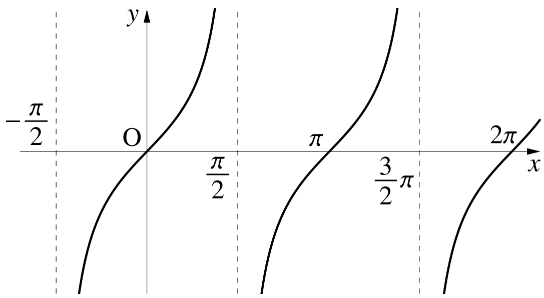
B. $y=\tan x$ のグラフ

関数 $y=\tan x$ について，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ におけるグラフは左下のようになる．x の値が π 増えるごとに，tan の値は同じ値を取るので，$y=\tan x$ のグラフは右下のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\cdots$
$\tan x$	$\cdots$		$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$		$\cdots$



$\Longrightarrow$



曲線 C がある直線 l に限りなく近づく[*11]とき，l を C の**漸近線** (asymptotic line) という．

$y=\tan x$ は直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づくので，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ は曲線 $y=\tan x$ の漸近線になる．

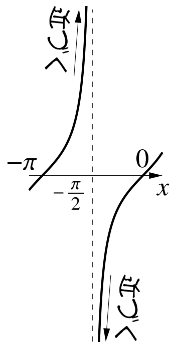
$y=\tan x$ のグラフの特徴

$x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$（n は整数）が漸近線になり，周期が π の曲線である．

[*11] 「限りなく近づく」という表現は厳密性に欠ける．漸近線についての厳密な定義は，数学 III で学ぶ．

【例題 38】 以下の $\boxed{}$ に当てはまる値・文字・式を答えよ．

1. $A\left(\dfrac{\pi}{3},\ \boxed{ア}\right)$，$B\left(\dfrac{5}{6}\pi,\ \boxed{イ}\right)$，$C\left(\dfrac{11}{3}\pi,\ \boxed{ウ}\right)$ は $y = \tan x$ のグラフ上にある．
2. 右のグラフのように，$y = \tan x$ は，$\boxed{エ}$ 座標が $-\pi$ から $-\dfrac{\pi}{2}$ に向かって増加するほど，グラフの $\boxed{オ}$ 座標は無限大へ近づき，直線 $\boxed{カ}$ に限りなく近づく．
一方，$\boxed{エ}$ 座標が 0 から $-\dfrac{\pi}{2}$ に向かって小さくなるにつれ，グラフの $\boxed{オ}$ 座標は負の無限大へ近づき，直線 $\boxed{カ}$ に限りなく近づく．
それゆえ，$\boxed{カ}$ は曲線 $y = \tan x$ の $\boxed{キ}$ である．



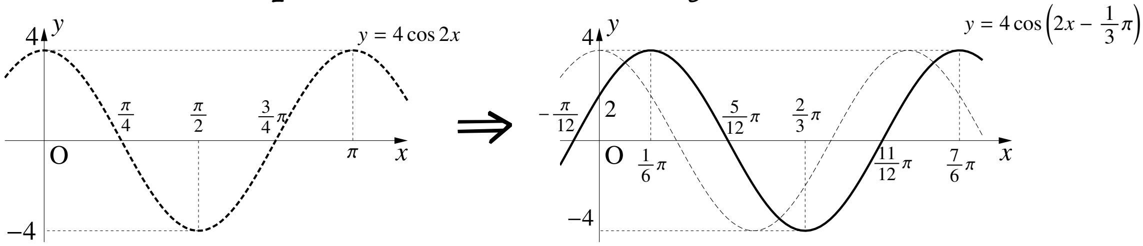
【解答】 ア : $\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$，　イ : $\tan\dfrac{5}{6}\pi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ウ : $\tan\dfrac{11}{3}\pi = -\sqrt{3}$，　エ : x，　オ : y，　カ : $x = -\dfrac{\pi}{2}$，　キ : 漸近線

C. $y = A\cos(bx + \alpha)$，$y = A\tan(bx + \alpha)$ のグラフ

たとえば，関数 $y = 4\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ の場合は，$y = 4\cos 2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ とも表せるので，次のことが分かる．

$$y = 4\cos x \xrightarrow[\text{（x軸方向に }\frac{1}{2}\text{ 倍）}]{\text{xを2xに代える}} y = 4\cos 2x \xrightarrow[\text{（x軸方向に }\frac{\pi}{6}\text{ 移動）}]{\text{xを }x-\frac{\pi}{6}\text{ に代える}} y = 4\cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$



上のグラフは，次の順序で考えるとわかりやすい．

- $y = \cos 0$ になる $x = \dfrac{1}{3}\pi$ から 1 周期分を始めると，$x = \dfrac{1}{3}\pi + \underbrace{\pi}_{\text{周期}} = \dfrac{4}{3}\pi$ で終わる．
- 振幅は 4 で，y 切片は $4\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 2$

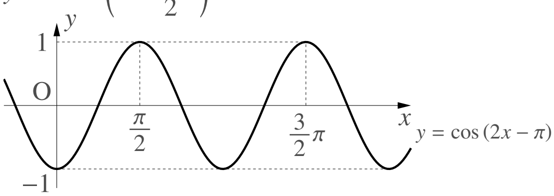
【練習 39：三角関数のグラフ〜その４〜】

以下の関数のグラフを書きなさい．漸近線があればその式を求めなさい．

(1) $y = \cos(2x - \pi)$　　(2) $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

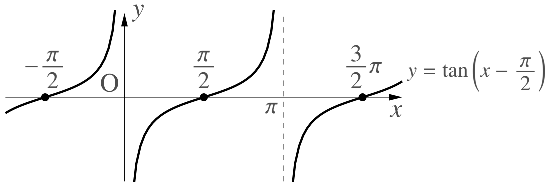
【解答】

(1) $y = \cos 2\left(x - \dfrac{1}{2}\pi\right)$ であるので



◀ ・$y = \cos 0$ は $x = \dfrac{1}{2}\pi$ のとき
・周期は π，$y = \cos 2\pi$ は $x = \dfrac{1}{2}\pi + \pi = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき
・振幅 1，y 切片 $\cos(-\pi) = -1$

(2) 漸近線は直線 $x = n\pi$（n は整数）になる．



◀ ・$y = \tan 0$ は $x = \frac{\pi}{2}$ のとき
・周期は π，$y = \tan\pi$ になるのは $x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$ のとき
・y 切片はなく，y 軸が漸近線，漸近線は，その前後に π ごとにある．

【発展 40：三角関数のグラフ〜その５〜】

以下の関数のグラフを書きなさい．漸近線があればその式を求めなさい．

① $y = 2\cos\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right)$　② $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$　③ $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

4.4 三角関数の加法定理とその応用

この節では，次のような等式が成り立つことを学ぶ．

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

上の等式において $x = \frac{\pi}{3}$ を代入すると，両辺とも 1 になることがわかる．

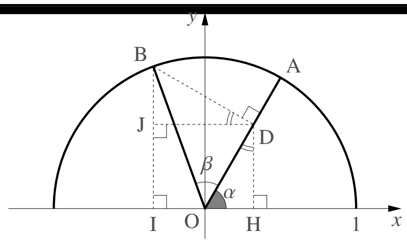
1. 三角関数の加法定理

A. cos，sin の加法定理

$\alpha + \beta$ の余弦の値である $\cos(\alpha + \beta)$，$\alpha + \beta$ の正弦の値である $\sin(\alpha + \beta)$ は，次のようにして $\cos\alpha$，$\sin\alpha$，$\cos\beta$，$\sin\beta$ のみで表すことができる．

$\cos(\alpha + \beta)$，$\sin(\alpha + \beta)$ の加法定理

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$，　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$



（証明）$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする．
（一般の α, β については，『$\alpha+\beta$ の三角関数（一般の場合）』(p.46) を参照のこと）
まず，$BO = 1$，$OD = BO\cos\beta = \cos\beta$ であるから

$$\begin{cases} OD\sin\alpha = DH = JI \\ OD\cos\alpha = OH \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} JI = \sin\alpha\cos\beta \\ OH = \cos\alpha\cos\beta \end{cases}$$

である．次に $\angle BDJ = \frac{\pi}{2} - \angle ODJ = \angle ODH$ と $\angle BJD = \angle OHD = \frac{\pi}{2}$ より $\triangle BJD \backsim \triangle OHD$ となり $\angle DBJ = \alpha$ とわかるので

$$\begin{cases} BO\sin\beta\cos\alpha = BJ \\ BO\sin\beta\sin\alpha = DJ = HI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BJ = \cos\alpha\sin\beta \\ HI = \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

ここで，三角関数の定義より $B(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ であるから，次のようにして求める式を得る．

$$\cos(\alpha+\beta) = OH - HI = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\qquad \sin(\alpha+\beta) = BJ + JI = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

この公式を覚えるための語呂合わせを，一つ紹介しておく．特に，cos の加法定理に現れる $\overset{\text{マイナス}}{-}$ に注意して覚えよう．

$$\cos(\alpha+\beta) = \underbrace{\cos\alpha}_{\text{コスモス}}\ \underbrace{\cos\beta}_{\text{コスモス}}\ \underbrace{-}_{\text{毎日}}\ \underbrace{\sin\alpha}_{\text{咲いた}}\ \underbrace{\sin\beta}_{\text{咲いた}}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \underbrace{\sin\alpha}_{\text{咲いた}}\ \underbrace{\cos\beta}_{\text{コスモス}} + \underbrace{\cos\alpha}_{\text{コスモス}}\ \underbrace{\sin\beta}_{\text{咲いた}}$$

【例題 41】 $\dfrac{5}{12}\pi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$ に注意して，$\cos\dfrac{5}{12}\pi$，$\sin\dfrac{5}{12}\pi$ を計算しなさい．

【解答】

$$\cos\frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

◀ 度数法で表せば $\sin 75^\circ$ の値である．

B. tan の加法定理

$\tan(\alpha+\beta)$ の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

（証明）p.11『三角形の相互関係』i) を用いれば

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

この公式を覚えるための語呂合わせを，一つ紹介しておく．

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\overbrace{\tan\alpha}^{\text{タン}}\ \overbrace{+}^{\text{プラ}}\ \overbrace{\tan\beta}^{\text{タンの}}}{\underbrace{1\ -}_{\text{マイ}}\ \underbrace{\tan\alpha\tan\beta}_{\text{タンタン}}}$$

【例題 42】 $\dfrac{5}{12}\pi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$ に注意して，$\tan\dfrac{5}{12}\pi$ を計算せよ．

【解答】

$$\tan\frac{5}{12}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$

◀『tan の加法定理』(p.25)

$$= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)} = \boldsymbol{2+\sqrt{3}}$$

◀ 分母・分子に 3 を掛けた後，分母を有理化した．

【練習 43：cos, sin の加法定理】

(1) $\dfrac{7}{12}\pi = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ に注意して，$\cos\dfrac{7}{12}\pi$, $\sin\dfrac{7}{12}\pi$ を計算せよ．

(2) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，$\cos x = \dfrac{2}{3}$ のとき，以下の値を求めなさい．

i) $\sin x$　　ii) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$，$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(3) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$，$\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$，$\sin\beta = \dfrac{1}{3}$ とする．

このとき，$\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha+\beta)$ を計算せよ．

【解答】

(1)
$$\cos\frac{7}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

◀ 度数法で表せば $\cos 75^\circ$ の値である．

$$\sin\frac{7}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

(2) i) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin x > 0$ であるので

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

ii)
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin x\sin\frac{\pi}{3}$$

◀『cos の加法定理』(p.24)

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{2-\sqrt{15}}{6}}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3}$$

◀『sin の加法定理』(p.24)

$$= \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6}}$$

(3) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より，$\cos\alpha > 0$，$\cos\beta < 0$ であるので

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

以上より

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

◀『cos の加法定理』(p.24)

$$= \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{-2\sqrt{10}-2}{9}}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

◀『sin の加法定理』(p.24)

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{-4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}}$$

【練習 44：tan の加法定理】

(1) $\dfrac{7}{12}\pi=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ に注意して，$\tan\dfrac{7}{12}\pi$ を計算せよ．

(2) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\tan(\alpha+\beta)$ を計算せよ．

【解答】

(1)
$$\tan\frac{7}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$$

◀『tan の加法定理』(p.25)

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}=\boldsymbol{-2-\sqrt{3}}$$

◀ 分母を有理化した．

(2) $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}-1=\dfrac{9}{4}-1=\dfrac{5}{4}$，

◀『三角関数の相互関係 4.』(p.11)

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\tan\alpha>0$ であるので $\tan\alpha=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$．

同様に, $1+\tan^2\beta=\dfrac{1}{\cos^2\beta}\Leftrightarrow\tan^2\beta=\dfrac{1}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}-1=\dfrac{1}{\frac{1}{3}}-1=3-1=2$,

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，$\tan\beta<0$ であるので $\tan\beta=-\sqrt{2}$.

以上より
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}-\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{10}}$$

◀『tan の加法定理』(p.25) を用いた後，分母・分子に 2 を掛けた．

$$=\frac{\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{10}\right)}{\left(2+\sqrt{10}\right)\left(2-\sqrt{10}\right)}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{2}}$$

◀ 分母を有理化して整頓した．

C. 三角関数の加法定理のまとめ

三角関数の加法定理のまとめ

任意の角 α,β について，以下の式が成り立つ（複号同順）．

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$,　　$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

証明は p.47 を参照のこと．

….　$\alpha+\beta$ を $\alpha-\beta$ に代えるときは，記号 + を − に，記号 − を + に代える，と覚えるとよい．

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

＋を－に
－を＋に
かえる
$\Longrightarrow$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

【練習 45：三角関数の加法定理】

α, β は鋭角，$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\sin\beta = \dfrac{1}{7}$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ．

【解答】 α, β は鋭角より，$\cos\alpha > 0$，$\cos\beta > 0$ であるので

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \qquad \tan\beta = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} = \mathbf{\frac{13}{14}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{7} = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{14}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{12}}{1+\frac{1}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{13}{12}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{13}}\end{aligned}$$

◀【別解】

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{13}{14}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{13}}$$

【暗記 46：$\pi - x$ の三角関数】

$\cos(\pi-x)$，$\sin(\pi-x)$，$\tan(\pi-x)$ を，$\cos x$，$\sin x$，$\tan x$ で表せ．

【解答】

$$\cos(\pi-x) = \cos\pi\cos x + \sin\pi\sin x = \mathbf{-\cos x}$$

$$\sin(\pi-x) = \sin\pi\cos x - \cos\pi\sin x = \mathbf{\sin x}$$

$$\tan(\pi-x) = \frac{\tan\pi - \tan x}{1+\tan\pi\tan x} = \mathbf{-\tan x}$$

◀『cos の加法定理』(p.27)

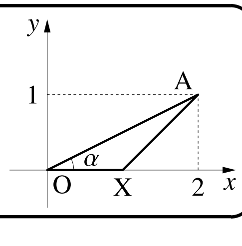
p.14 における $2\pi - x$, $\pi + x$ などの三角関数についても同様のことができる．

【発展 47：三角関数の加法定理と平面図形】

右図のように X(1, 0) と A(2, 1) があり，$\angle \mathrm{AOX} = \alpha$ とする．

① $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ の値を求めよ．

② $\triangle$AOX を O を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ 回転移動し $\triangle$A'OX' になったとする．このとき，$\angle$X'OX, $\angle$A'OX を求めよ．また，X′，A′ の座標を求めよ．



2. 倍角の公式・半角の公式 — 加法定理の応用（1）

A. 倍角の公式

倍角の公式

任意の角 x について，以下の式が成り立つ．

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x, \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1,$$

これらの式をまとめて，**倍角の公式** (formula of double angle) という．

（証明）『cos の加法定理』(p.27) において $\alpha = \beta = x$ を代入すれば，右のようにして導かれる．

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\cdot\cos x + \cos x\cdot\sin x$$
$$= 2\sin x\cos x$$
$$\tan 2x = \tan(x+x) = \frac{\tan x + \tan x}{1-\tan x\cdot\tan x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

【暗記 48：倍角の公式】

上の証明を参考に，$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ を示せ．
さらに，この式を $\cos x$ だけの式で表せ．また，$\sin x$ だけの式で表せ．

【解答】

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

◀『cos の加法定理』(p.27)

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ であるので $\cos 2x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = \mathbf{2\cos^2 x - 1}$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

また，$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ から

$$\cos 2x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = \mathbf{1 - 2\sin^2 x}$$

【例題 49】 $0 < x < \pi$，$\cos x = \dfrac{1}{3}$ のとき，以下の問いに答えよ．

1. $\sin x$，$\tan x$ の値を求めよ．
2. $\cos 2x$，$\sin 2x$，$\tan 2x$ の値を求めよ．

【解答】

1. $0 < x < \pi$ から $\sin x > 0$ となるので

$$\sin x = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}},\quad \tan x = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

2.
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \mathbf{-\frac{7}{9}}$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{1-(2\sqrt{2})^2} = \mathbf{-\frac{4\sqrt{2}}{7}}$$

◀【別解】
$\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{-\frac{7}{9}}{\frac{4\sqrt{2}}{9}} = \mathbf{-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}}$

【練習 50：倍角の公式】

(1) 以下の式を $\cos x$ のみの式か $\sin x$ のみの式で表し，降べきの順に整理しなさい．

(a) $\cos 2x - \sin x$　　(b) $\cos x \sin 2x$

(2) α, β は鋭角とし，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan\beta = 2$ とする．$\cos 2\alpha$，$\tan 2\beta$ を求めなさい．

(3) (2) の α, β について，$\sin 2\alpha$，$\tan 2\alpha$，$\cos 2\beta$，$\sin 2\beta$ を求めなさい．

【解答】

(1) (a) $(\text{与式}) = (1 - 2\sin^2 x) - \sin x$

$= \boldsymbol{-2\sin^2 x - \sin x + 1}$

(b) $(\text{与式}) = \cos x \cdot (2\sin x \cos x) = 2\sin x \cos^2 x$

$= 2\sin x(1 - \sin^2 x) = \boldsymbol{-2\sin^3 x + 2\sin x}$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

(2) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1 = \boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

$\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} = \dfrac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = \boldsymbol{-\dfrac{4}{3}}$

(3) $0 < 2\alpha < \pi$ より $\sin 2\alpha > 0$ であるので，

$\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$.

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

さらに，$\tan 2\alpha = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = \boldsymbol{-2\sqrt{2}}$.

一方，$0 < 2\beta < \pi$，$\tan 2\beta < 0$ より 2β は第 2 象限の角であり $\cos 2\beta < 0$，$\sin 2\beta > 0$．ここで

$$1 + \tan^2 2\beta = \frac{1}{\cos^2 2\beta} \iff 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 2\beta}$$

◀『三角関数の相互関係 4.』(p.11)

$$\iff \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 2\beta}$$

よって，$\cos 2\alpha = -\sqrt{\dfrac{9}{25}} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{5}}$．また

$$\tan 2\beta = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} \iff \sin 2\beta = \tan 2\beta \cos 2\beta$$

◀『三角関数の相互関係 1.』(p.11)

$$= \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

B. 半角の公式

半角の公式

任意の角 x について，以下の式が成り立つ．

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2},\qquad \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},\qquad \tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

これらをまとめて，**半角の公式** (formula of half angle) という．

（証明）『倍角の公式』(p.29) の一つ $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ において，x に $\frac{x}{2}$ を代入すれば

$$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$$

となる．これを $\sin^2\frac{x}{2}$ について解けば

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x\quad\Leftrightarrow\quad \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$$

【暗記 51：半角の公式】

1. 上の証明を参考に，等式 $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$ を導け．
2. 等式 $\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ を示せ．

【解答】

1. 『倍角の公式』(p.29) の一つ $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ において，x に $\frac{x}{2}$ を代入して

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1\Leftrightarrow 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$$
$$\Leftrightarrow\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\quad\blacksquare$$

2. $$\tan^2\frac{x}{2}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{1+\cos x}{2}}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

◀ 分母・分子に 2 を掛けた

【例題 52】 以下の四角に当てはまる，x の定数倍を答えよ．

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos\boxed{\text{ア}}}{2},\quad \sin^2\boxed{\text{イ}}=\frac{1-\cos 3x}{2},\quad 2\cos^2 2x=1+\cos\boxed{\text{ウ}}$$

【解答】 アの半分が x なので**ア**は $\boldsymbol{2x}$，$3x$ の半分が **イ** $=\boldsymbol{\frac{3}{2}x}$，
$\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$ なので **ウ** $=\boldsymbol{4x}$．

【練習 53：半角の公式】

$0 < x < \pi$，$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ とする．このとき，$\cos\dfrac{x}{2}$，$\sin\dfrac{x}{2}$，$\tan\dfrac{x}{2}$ を計算せよ．

【解答】

$0 < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\dfrac{x}{2}$，$\sin\dfrac{x}{2}$，$\tan\dfrac{x}{2}$ はすべて正．

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{\mathbf{3+\sqrt{3}}}{\mathbf{6}}}$$

◀ $\sqrt{3+\sqrt{3}}$ の二重根号を外すことはできない．

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{\mathbf{3-\sqrt{3}}}{\mathbf{6}}}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{6}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6} = \frac{\mathbf{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

【暗記 54：加法定理から導く】

三角関数の加法定理の３つの式

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

から，倍角の公式・半角の公式をすべて導きなさい．

【解答】　（導出は省略）「倍角の公式」は p.29 のように導かれ，「半角の公式」は cos の 2 倍角の公式を用いて，p.31 のように求められる．

加法定理からよい計算練習になるうえ，倍角の公式・半角の公式も自然に覚えられる．

【発展 55：tan の半角で表す】

$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，$\cos x$，$\sin x$，$\tan x$ を t の式で表せ．

C.　三角関数を含む関数・方程式・不等式～その２～

【練習 56：三角関数を含む関数・方程式・不等式～その２～】

(1) 関数 $y = -\cos 2\theta - 2\sin\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 2\theta = \cos\theta$ を解きなさい．

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos^2\dfrac{\theta}{2} \geqq \cos\theta + 1$ を解きなさい．

【解答】

(1) $y = -\cos 2\theta - 2\sin\theta$

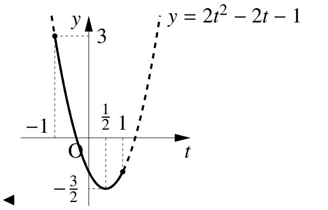
$= -(1 - 2\sin^2\theta) - 2\sin\theta$

『倍角の公式』(p.29) を用いて $\sin\theta$ にそろえた.

$\sin\theta = t$ とおく．$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ なので

$y = 2t^2 - 2t - 1$

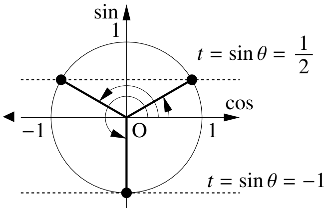
$= 2\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{2}$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$



右欄外の図より，y は

$t = -1$ のとき最大値 3，$t = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{2}{3}$

をとる．$t = \sin\theta$ であるので



$\boldsymbol{\theta = \dfrac{3}{2}\pi}$ **のとき最大値 3**

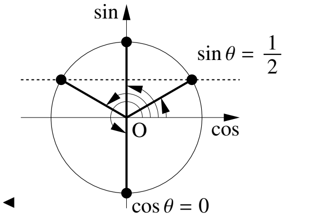
$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}}$

(2) $\sin 2\theta = \cos\theta \Leftrightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

$\Leftrightarrow \cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\theta = 0,\ \sin\theta = \dfrac{1}{2}$

『倍角の公式』(p.29) を用いて共通因数を作った.



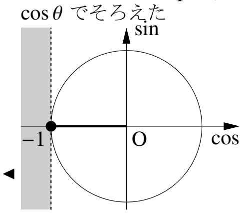
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = 0, \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ は，右欄外の図より $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$.

(3) $\cos^2\dfrac{\theta}{2} \geqq \cos\theta + 1 \Leftrightarrow \dfrac{1 + \cos\theta}{2} \geqq \cos\theta + 1$

$\Leftrightarrow 1 + \cos\theta \geqq 2\cos\theta + 2$

$\Leftrightarrow \cos\theta \leqq -1$

『半角の公式』(p.31) を用いて $\cos\theta$ でそろえた



$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で上の不等式を満たす θ の範囲は，右欄外の図の太線部分である．すなわち $\boldsymbol{\theta = \pi}$.

【発展 57：方程式の解の個数】

$f(x) = \sin x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ とする.

① この関数の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ.

② 方程式 $f(x) = a$ が 4 つの解を持つような a の範囲，3 つの解を持つような a の値を求めよ.

【発展 58：3 倍角の公式】

① $\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ だけの式で表せ．また，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ だけの式で表せ.

② $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，方程式 $\cos 3\theta + 2\cos\theta = 0$ を解きなさい.

上の例題の①で求めた等式を，**3 倍角の公式**という.

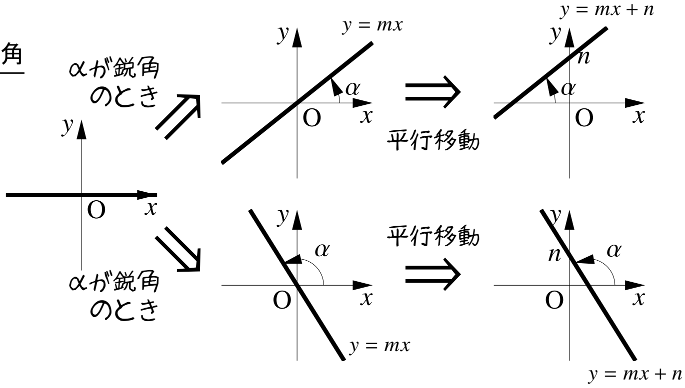
3. 2 直線のなす角 — 加法定理の応用（2）

A. 直線 $y = mx + n$ が x 軸の正の向きとなす角

x 軸を，正の向きへ α 回転させて直線 $y = mx$ になったとする．このとき，tan の定義 (p.6) から $m = \tan\alpha$ が成り立つ．

さらに，$y = mx$ を平行移動すれば，直線 $y = mx + n$ が x 軸の正の向きとなす角 α についても，$m = \tan\alpha$ が成り立つと分かる．

(p.48 も参照のこと)

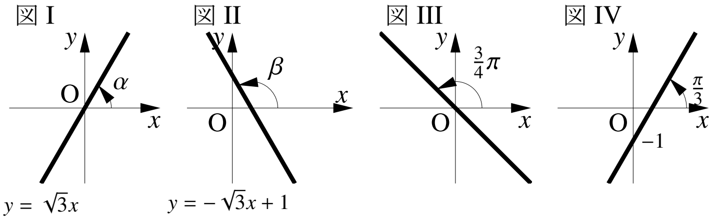


上の事実は，x 軸を α 回転させると直線 $y = (\tan\alpha)x +$（y 切片の値）になる，とも表現できる．

【例題 59】

次の値・式を求めなさい．

1. 図 I の角 α の値
2. 図 II の角 β の値
3. 図 III の直線の式
4. 図 IV の直線の式

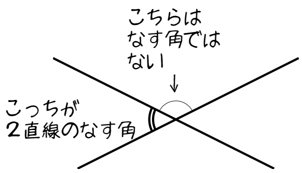


【解答】

1. $\tan\alpha = \sqrt{3}$ になるので，$\boldsymbol{\alpha = \dfrac{\pi}{3}}$.
2. $\tan\beta = -\sqrt{3}$ になるので，$\boldsymbol{\beta = \dfrac{2}{3}\pi}$.
3. 原点を通り，傾きが $\tan\dfrac{3}{4}\pi = -1$ になるので，$\boldsymbol{y = -x}$.
4. 切片が -1，傾きが $\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ になるので，$\boldsymbol{y = \sqrt{3}x - 1}$.

B. 2 直線のなす角

右図のように，座標平面上の 2 直線が交わってできる角のうち，$\dfrac{\pi}{2}$ より小さい方の角を，「2 直線のなす角[*12]」または「2 直線のつくる角」という．



[*12] 「なす角」と「つくる角」は同じ意味である．「つくる角」と言う方が分かりやすいが，「なす角」「角をなしている」などの表現で，しばしば用いられる．

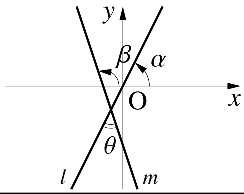
【練習 60：2 直線のなす角】

直線 $l : y = 2x$，$m : y = -3x - 2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) θ を α, β で表せ．

(2) $\tan\alpha$，$\tan\beta$ を求めよ．

(3) $\tan\theta$ を計算し，θ の値を求めよ．



【解答】

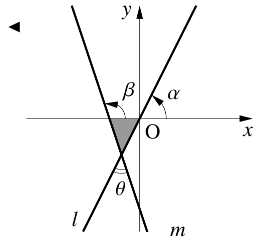
(1) 右欄外の図において，三角形の内角の和は π なので

$$\alpha + \theta + (\pi - \beta) = \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{\theta = \beta - \alpha}$$

(2) $\boldsymbol{\tan\alpha = 2}$, $\boldsymbol{\tan\beta = -3}$

(3) $\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \dfrac{-3 - 2}{1 + (-3)\cdot 2} = 1$

よって，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ である．



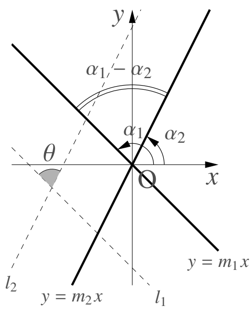
2 直線のなす角

平行・垂直でない 2 直線 $l_1 : y = m_1x + n_1$, $l_2 : y = m_2x + n_2$ のなす角 θ について

$$\tan\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right|$$ （ただし，$\theta \neq \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow m_1m_2 \fallingdotseq -1 \Leftrightarrow$ 「2 直線が直交しない」とする．）

（証明）$0 < \alpha_1 < \pi$, $0 < \alpha_2 < \pi$ とし，$\tan\alpha_1 = m_1$，$\tan\alpha_2 = m_2$ とする．
$0 < \alpha_1 - \alpha_2 < \dfrac{\pi}{2}$ の場合は右図のようになる（詳しくは p.48 を参照のこと）．
θ は $y = m_1x$, $y = m_2x$ のなす角と等しいので，右図から $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ になる．
α_1, α_2 の大小をまとめるため絶対値をつけて

$$\begin{aligned}\tan\theta &= |\tan(\alpha_1 - \alpha_2)| \\ &= \left| \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1\tan\alpha_2} \right| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right|\end{aligned}$$



【例題 61】

1. 2 直線 $y = 2x - 1$, $y = -x + 3$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．
2. 2 直線 $y = \dfrac{1}{2}x - 1$, $y = -\dfrac{2}{3}x + 3$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

【解答】

1. それぞれ傾きは 2，-1 であるので

$$\tan\theta = \left| \frac{2 - (-1)}{1 + 2\cdot(-1)} \right| = |-3| = \mathbf{3}$$

2. それぞれ傾きは $\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{2}{3}$ であるので

$$\tan\theta = \left| \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \right| = \left| \frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}} \right| = \boldsymbol{\frac{7}{4}}$$

【練習 62：2 直線のなす角〜その２〜】

直線 $y = 2x + 3$ とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ である直線の傾き m を求めよ．

【解答】 傾きが 2, m である 2 直線のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であるので

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{2-m}{1+2\cdot m}\right| \Leftrightarrow 1 = \left|\frac{2-m}{2m+1}\right|$$
$$\Leftrightarrow 2m+1 = 2-m \text{ または } 2m+1 = -(2-m)$$

それぞれ解いて，$\boldsymbol{m = \dfrac{1}{3},\ -3}$.

【発展 63：直線のなす角】

座標平面上の 3 本の直線 $y = x + 1$, $y = px$, $y = qx$（$p < q$）が交わって正三角形をつくるとき，p, q の値を求めよ．

4. 三角関数の合成 — 加法定理の応用（３） — 加法定理の逆変形

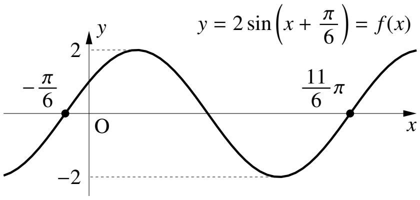
A. 加法定理の逆に用いる

関数 $y = f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ のグラフを描くことは難しい*13.

一方，$y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ に加法定理を用いれば

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin x + \cos x = f(x)$$

となるから，$y = f(x)$ のグラフは右図になる．



【例題 64】

1. 次のうち，$\sin x + \sqrt{3}\cos x$ に一致するものを選べ．
   (a) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ (b) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ (c) $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ (d) $2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
2. 次のうち，$\sin x - \cos x$ に一致するものを選べ．
   (a) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (b) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ (c) $\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ (d) $2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

【解答】

1. (a), (c) に『三角関数の加法定理』(p.27) を用いれば
   (a) $\sin x\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$
   (c) $2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ なので **(c)**

◀ (b), (d) は符号が異なるので誤り

2. (b), (c), (d) に『三角関数の加法定理』(p.27) を用いれば
   (b) $\sin x\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos x\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x$
   (c) $\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x - \cos x$ なので **(c)**

◀ (a) は符号が異なるので明らかに誤り

◀ (d)= $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x$

*13 数学 III で学ぶ微分を用いれば，描くことができる．

B. 三角関数の合成

一般に，式 $a\sin\theta + b\cos\theta$ は，次のようにして $A\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形できる．この変形のことを，**三角関数の合成** (combination of trigonometric function) という．

三角関数の合成

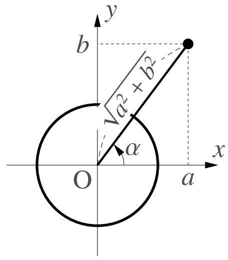
$a,\ b,\ \theta$ を実数とするとき

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

が成り立つ．ただし，α は $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす値である．

（証明）$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta \times \underbrace{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\alpha} + \cos\theta \times \underbrace{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\alpha}\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

上の等式において $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす α は存在し，右の図のように α の大きさを図示できる．実際



$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$$

となっており，$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ を満たしている．

…… 結果的には，$A(a,\ b)$, $X(0,\ 1)$ とおくと，$\angle AOX = \alpha$ となっている．

【暗記 65：sin の加法定理の逆変形】

1. $\sqrt{6}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta$ について，$\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \boxed{ア}$ であり

 $\sqrt{6}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta = \boxed{ア}\left(\sin\theta \underbrace{\times\boxed{イ}}_{\cos\boxed{エ}} + \cos\theta \underbrace{\times\boxed{ウ}}_{\sin\boxed{エ}}\right)$ （ただし，$-\pi < \boxed{エ} < \pi$.）

 となるので，$\sqrt{6}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta = \boxed{ア}\sin\left(\theta + \boxed{エ}\right)$ である．

2. $3\sin x - \sqrt{3}\cos x$ について，$\sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \boxed{オ}$ であり

 $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \boxed{オ}\left(\sin x \underbrace{\times\boxed{カ}}_{\cos\boxed{ク}} + \cos x \underbrace{\times\boxed{キ}}_{\sin\boxed{ク}}\right)$ （ただし，$-\pi < \boxed{ク} < \pi$.）

 となるので，$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = \boxed{オ}\sin\left(x + \boxed{ク}\right)$ である．

【解答】

1. ア：$\mathbf{2\sqrt{2}}$，イ：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，ウ：$\dfrac{1}{2}$

 エ：$-\pi$ から π の間で cos が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，sin が $\dfrac{1}{2}$ になるのは $\dfrac{\pi}{6}$

2. オ：$\mathbf{2\sqrt{3}}$，カ：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，キ：$-\dfrac{1}{2}$

ク：$-\pi$ から π の間で cos が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，sin が $-\dfrac{1}{2}$ になるのは $\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{6}}$

【練習 66：三角関数の合成】

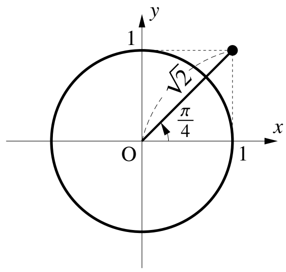
次の三角関数の式を合成し，$A\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形しなさい．α の値が求められないときは，α の大きさを図示しなさい．

(1) $\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　　(3) $3\sin\theta-4\cos\theta$

【解答】

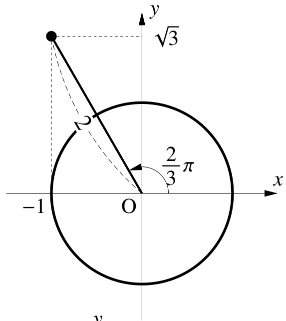
(1) 座標平面上に A(1, 1) をとると，$\angle\mathrm{AOX}=\dfrac{\pi}{4}$，$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$ であるので，次のように合成できる．

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\sin\theta+\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\cos\theta\right)$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$



(2) 座標平面上に A$(-1,\sqrt{3})$ をとると，$\angle\mathrm{AOX}=\dfrac{2}{3}\pi$，OA = 2 であるので，次のように合成できる．

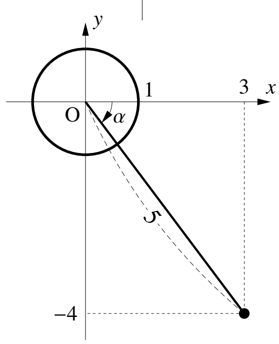
$$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\cos\frac{2}{3}\pi}\sin\theta+\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\frac{2}{3}\pi}\cos\theta\right)$$
$$=\boldsymbol{2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)}$$



(3) 座標平面上に A(3, −4) をとると，OA = 5 である．つまり

$$3\sin\theta-4\cos\theta=5\left(\underbrace{\frac{3}{5}}_{\cos\alpha}\sin\theta\underbrace{-\frac{4}{5}}_{\sin\alpha}\cos\theta\right)$$
$$=\boldsymbol{5\sin(\theta+\alpha)}$$

ここで α は，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$ を満たす値である．



C. 三角関数を含む関数・方程式・不等式〜その３〜

【練習 67：三角関数を含む関数・方程式・不等式〜その３〜】

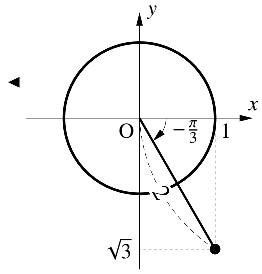
(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$ を解きなさい．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\theta + \cos\theta < 0$ を解きなさい．

(3) 関数 $y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ．

【解答】

(1) 右欄外の図を書いて考えれば



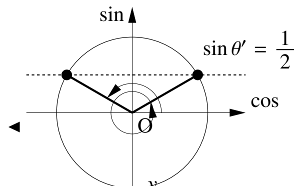
$$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow\ 2\left\{\frac{1}{2}\sin\theta + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\theta\right\} = 1$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

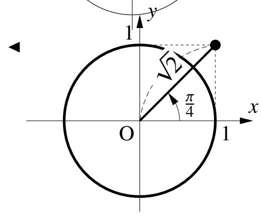
$\theta - \dfrac{\pi}{3} = \theta'$ とおくと $\sin\theta' = \dfrac{1}{2}$.

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta' < \dfrac{5}{3}\pi$ である．この範囲で $\sin\theta' = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ' は，右欄外の図より $\theta' = \dfrac{1}{6}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi$. $\theta = \theta' + \dfrac{\pi}{3}$ なので



$\boldsymbol{\theta = \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi}$.

(2) 右欄外の図を書いて考えれば



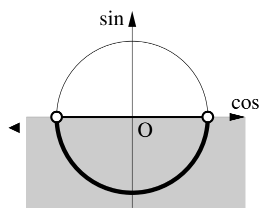
$$\sin\theta + \cos\theta < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right) < 0$$

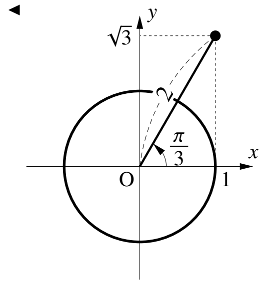
$\theta + \dfrac{1}{4}\pi = \theta'$ とおくと $\sin\theta' < 0$.

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{1}{4}\pi \leqq \theta' < \dfrac{9}{4}\pi$ なので，この範囲で上の不等式を満たす θ' は，右欄外の図の網掛け部分である．すなわち $\pi < \theta' < 2\pi$.



$\theta = \theta' - \dfrac{1}{4}\pi$ なので $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{7}{4}\pi}$.

(3) 右欄外の図を書いて考えれば



$$y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$\theta' = \theta + \dfrac{\pi}{3}$ とおくと，この三角関数は $y = 2\sin\theta'$.

$0 \leqq \theta < 2\theta$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta' < \dfrac{7}{3}\pi$ なので

$\theta' = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 2，$\theta' = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2.

$\theta = \theta' - \dfrac{\pi}{3}$ なので

$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき最大値 2，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{7}{6}\pi}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-2}$

【発展 68：変数の範囲に気をつける】

関数 $f(\theta) = 2\cos\theta + \sin\theta$ について，以下の問いに答えよ．

① $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$f(\theta)$ の最大値・最小値を求めよ．

② $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$f(\theta)$ の最大値・最小値を求めよ．

③ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(\theta)$ の最大値・最小値を求めよ．

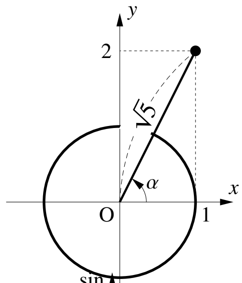
【解答】　右欄外の図を書いて考えれば

◀『三角関数の合成』(p.37)

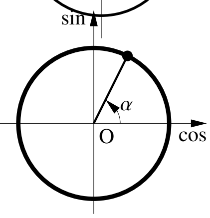
$$y = 2\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{5}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\right\}$$
$$= \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$$

（α は $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす値）

$\theta + \alpha = \theta'$ とおくと $y = \sqrt{5}\sin\theta'$



① $0 \leqq \theta < 2\pi$ より $\alpha \leqq \theta' < 2\pi + \alpha$ なので，この θ' の範囲に対応する角点の範囲は，単位円周上の任意の点である．よって．$-1 \leqq \sin\theta' \leqq 1$ であり，y は，$\theta' = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{5}$ を，$\theta' = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$ をとる．$\theta = \theta' - \alpha$ なので

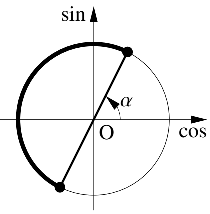


$\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ のとき，最大値 $\sqrt{5}$

$\theta = \dfrac{3}{2}\pi - \alpha$ のとき，最小値 $-\sqrt{5}$

② $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $\alpha \leqq \theta' \leqq \pi + \alpha$.

この θ' の範囲に対応する角点の範囲は，右欄外の太線部分である．つまり



$\sin\theta'$ の最大値は $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

$\sin\theta'$ の最小値は $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

である．よって $y = \sqrt{5}\sin\theta'$ は

$\theta' = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{5}$

$\theta' = \pi + \alpha$ のとき最小値 $\sqrt{5}\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = -2$

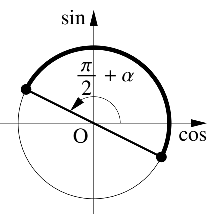
をとる．$\theta = \theta' - \alpha$ なので

$\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ のとき，最大値 $\sqrt{5}$

$\theta = \pi$ のとき，最小値 -2

③ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{2} + \alpha \leqq \theta' < \dfrac{\pi}{2} + \alpha$.

この θ' の範囲に対応する角点の範囲は，右欄外の太線部分である．つまり



$\sin\theta'$ の最大値は $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

$\sin\theta'$ の最小値は

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

である．よって $y = \sqrt{5}\sin\theta'$ は

$\theta' = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{5}$

$\theta' = -\dfrac{\pi}{2} + \alpha$ のとき最小値 $\sqrt{5} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -1$

をとる．$\theta = \theta' - \alpha$ なので

$\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ のとき，最大値 $\sqrt{5}$

$\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ のとき，最小値 -1

【発展 **69**：$t = \sin x + \cos x$ **とおく**】

関数 $f(x) = \sin x \cos x - \sin x - \cos x \ \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ について以下の問いに答えなさい．

① $t = \sin x + \cos x$ とする．$f(x)$ を t の式で表せ．

② t のとりうる値を求めよ．

③ $f(x)$ の最大値・最小値と，それぞれを与える x の値を求めなさい．

5. 和と積の変換公式 — 加法定理の応用（４）

A. 積を和にする公式

$\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$ の加法定理の式を両辺それぞれ加えて，次の等式を得る．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ \cdots\cdots\cdots \ ①$$

$$+) \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \ \cdots\cdots\cdots \ ②$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\} \ \cdots\cdots\cdots \ ③$$

同様に，① − ② によって，$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$ ········ ④ を得る．

【例題 70】 上の③，④を用いて，以下の $\boxed{}$ に適当な数値を入れよ．

$$\sin 2x\cos x = \frac{1}{2}(\sin \boxed{ア} + \sin \boxed{イ}), \quad \cos 3x \sin x = \frac{1}{2}(\sin \boxed{ウ} - \sin \boxed{エ})$$

【解答】

$$\sin 2x\cos x = \frac{1}{2}\{\sin(2x+x) + \sin(2x-x)\} = \frac{1}{2}(\sin \underline{\boldsymbol{3x}}_{(ア)} + \sin \underline{\boldsymbol{x}}_{(イ)})$$

$$\cos 3x\sin x = \frac{1}{2}\{\sin(3x+x) - \sin(3x-x)\} = \frac{1}{2}(\sin \underline{\boldsymbol{4x}}_{(ウ)} - \sin \underline{\boldsymbol{2x}}_{(エ)})$$

【暗記 71：積から和への変換公式】

等式 $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$， $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$ を導け．

【解答】 $\cos(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の加法定理の式を両辺それぞれ加えて

$$\begin{array}{rl} & \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ +) & \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline & \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

また，両辺それぞれ引いて

$$\begin{array}{rl} & \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ -) & \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline & \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$ ■

◀ − が残ることに注意

以上の等式をまとめると，以下のようになる．

三角関数の積を和に変換する公式

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$， $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$，

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$， $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

加法定理から右奥の表を作ると，上の公式のどれか 1 つから，他の 3 つを導くことができる．

$$\begin{cases} \mathbf{sin}(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \mathbf{cos}(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{cases} \Longrightarrow$$

	和	差
sin	sin cos	cos sin
cos	cos cos	−sin sin

たとえば，$\cos A\cos B$ を和にする公式が必要とする．右上の表から cos cos は「cos」の「和」とわかるので右下のように得られる．

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

coscos ↓　↓↓ cosの和 ↓↓

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

【練習 72：三角関数の積を和に変換する】

式 $\cos 2x\cos x$， $\sin 3\alpha\sin 2\alpha$， $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ から，三角関数の積をなくしなさい．

【解答】

$$\cos 2x\cos x = \frac{1}{2}\{\cos(2x+x)+\cos(2x-x)\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)}$$

$$\sin 3\alpha\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}\{\cos(3\alpha+2\alpha)-\cos(3\alpha-2\alpha)\} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}(\cos 5\alpha-\cos\alpha)}$$

◀ 符号 − がつくことに注意

$$\begin{aligned}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2}\left\{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\cos 2x}\end{aligned}$$

◀ $\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$
$= x+\dfrac{\pi}{4}-x+\dfrac{\pi}{4}$

B. 和から積への変換公式

$\begin{cases} \alpha+\beta=A \cdots\cdots ① \\ \alpha-\beta=B \cdots\cdots ② \end{cases}$ とおく．①＋② と ①－② をすると，それぞれ次のようになる．

$$\begin{array}{rl} & \alpha+\beta=A \\ +) & \alpha-\beta=B \\ \hline & 2\alpha=A+B \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \alpha+\beta=A \\ -) & \alpha-\beta=B \\ \hline & 2\beta=A-B \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha=\frac{A+B}{2} \cdots\cdots ③ \qquad \Leftrightarrow\ \beta=\frac{A-B}{2} \cdots\cdots ④$$

「積から和への変換公式」の一つ，$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ の左辺に①，②を代入し，右辺に③，④を代入すると，次の等式を得る．

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)$$

$$\Leftrightarrow\ \sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \cdots\cdots ⑤$$

【例題 73】 上の⑤を用いて，以下の $\boxed{}$ に適当な数値を入れよ．

$\sin 3x+\sin x=2\sin\boxed{ア}\cos\boxed{イ}$， $\sin 4x+\sin 2x=2\sin\boxed{ウ}\cos\boxed{エ}$

【解答】

$$\sin 3x+\sin x=2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=2\sin\underline{\boldsymbol{2x}}_{(ア)}\cos\underline{\boldsymbol{x}}_{(イ)}$$

$$\sin 4x+\sin 2x=2\sin\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2}=2\sin\underline{\boldsymbol{3x}}_{(ウ)}\cos\underline{\boldsymbol{x}}_{(エ)}$$

⑤と同様に，「積を和に変換する公式」に $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$, $\alpha=\dfrac{A+B}{2}$, $\beta=\dfrac{A-B}{2}$ を代入して以下の公式を得る．

三角関数の和を積に変換する公式

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \qquad \sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \qquad \cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

左ページと同じように表を作ると，公式のどれか 1 つから，他の 3 つを導くことができる．

	和	差
sin	sin cos	cos sin
cos	cos cos	− sin sin

$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

cosの差 ↓↓ ↓↓ −sin×sin ↓↓

$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

たとえば，$\cos A-\cos B$ を積にする公式が必要とする．表から「cos」の「差」は $-\sin\sin$ とわかるので必要な公式は右奥のように得られる．

「三角関数の積を和に変換する公式」「三角関数の和を積に変換する公式」をまとめて**和と積の変換公式**（または，**和積公式**）と言う．

【練習 74：三角関数の和を積に変換する】

式 $\cos 3x + \cos x$，$\cos 4x - \cos 2x$，$\sin 2\alpha - \sin\alpha$，$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ から和や差をなくし，三角関数の積で表わしなさい．

【解答】

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = \mathbf{2\cos 2x\cos x}$$

$$\cos 4x - \cos 2x = -2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2} = \mathbf{-2\sin 3x\sin x}$$

$$\sin 2\alpha - \sin\alpha = 2\cos\frac{2\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha-\alpha}{2} = \mathbf{2\cos\frac{3}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}}{2}$$

$$= 2\cos\frac{2x}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \mathbf{\sqrt{2}\cos x}$$

◀ $\dfrac{x+\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

C. 三角関数を含む方程式・不等式〜その４〜

「三角関数の和を積に変換する公式」を用いて，三角関数を含む方程式・不等式を解こう*14.

【練習 75：和積公式と方程式】

方程式 $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$（$0 < x < \pi$）について，以下の $\boxed{}$ に適当な式，値を答えなさい．

$\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x\cos\boxed{ア}$ から

$$\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \times \boxed{イ} = 0$$

$$\sin 2x = \boxed{ウ} \quad \text{または} \quad \cos\boxed{ア} = \boxed{エ}$$

である．つまり，$0 < x < \pi$ において解をすべて書き出すと，$x = \boxed{オ}$ になる．

【解答】 $\sin 3x + \sin x = 2\sin\dfrac{3x+x}{2}\cos\dfrac{3x-x}{2} = 2\sin 2x\cos\underline{\mathbf{x}}_{(ア)}$ から

$$\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\left(\underline{\mathbf{2\cos x + 1}}_{(イ)}\right) = 0$$

$$\sin 2x = \underline{\mathbf{0}}_{(ウ)} \quad \text{または} \quad \cos x = \underline{\mathbf{-\frac{1}{2}}}_{(エ)}$$

$0 < x < \pi$ の範囲では，$\sin 2x = 0$ の解は $x = \dfrac{\pi}{2}$，

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$ の解は $x = \dfrac{2}{3}\pi$ なので，$x = \underline{\mathbf{\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi}}_{(オ)}$．

*14 「三角関数の積を和に変換する公式」は，数学 III で学ぶ積分において必要となる．

【㊜㊝ 76：三角関数を含む方程式・不等式〜その４〜】

① $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$ を解け．

② $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos x - \cos 2x + \cos 3x < \cos 4x$ を解け．

【㊜㊝ 77：三角形の角】

$\triangle$ABC の角 A，B，C について，$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ を示せ．

1. 三角関数の加法定理のまとめ

三角関数の加法定理を，任意の角に対して証明することは，意外と難しい．加法定理の証明には図形的な要素が必要とされる*15が，α, β が鋭角なのか，鈍角なのか，π よりも大きいのか，などで図が大きく異なるため，場合分けがたくさん必要になってしまう．結局，もっとも汎用性の高いベクトルが，加法定理の証明には適している．

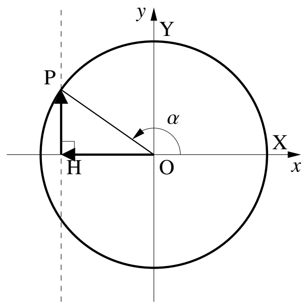
A. $\alpha+\beta$ の三角関数（一般の場合）の証明

$\alpha+\beta$ の三角関数（一般の場合）

任意の角 α, β について，以下の式が成り立つ．

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, 　　　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

（証明）$\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{X}(1,\ 0)$，$\mathrm{Y}(0,\ 1)$，P を通り y 軸に平行な直線と x 軸の交点を H とする．



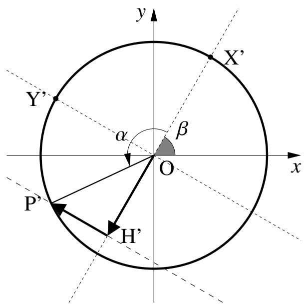
まず，三角関数の定義を角 α に用いると，次が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\cos\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OX}},\quad \overrightarrow{\mathrm{HP}}=(\sin\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OY}} \quad\cdots\cdots\cdots ①$$

次に，この図を，原点を中心にして反時計回りに β 回転させる．この結果，X は X'，Y は Y'，H は H'，P は P' になったとする．三角関数の定義から

$$\overrightarrow{\mathrm{OX'}}=(\cos\beta,\ \sin\beta),\quad \overrightarrow{\mathrm{OY'}}=\left(\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad\cdots\cdots ②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta)) \quad\cdots\cdots ③$$



である．ここで，原点を中心に回転しても①は保たれて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=(\cos\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OX'}},\quad \overrightarrow{\mathrm{H'P'}}=(\sin\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OY'}} \quad\cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立つ．ここで，②，④から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH'}}+\overrightarrow{\mathrm{H'P'}}=(\cos\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OX'}}+(\sin\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OY'}}=(\cos\alpha\cos\beta,\ \cos\alpha\sin\beta)+(-\sin\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\cos\beta)$$

これと，③を合わせれば，次の等式を得る．

$$(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)$$

1 番目の成分のみを比べて cos の加法定理を，2 番目の成分を比べて sin の加法定理を得る．

数学 III（旧課程では数学 C）で学ぶ極座標の考えを用いている（ただし，極座標を用いることはしない方がよい．$\cos\alpha$，$\sin\alpha$ などの正負によって場合分けが必要になってしまう）．

*15 高校数学においては，そもそも cos, sin, tan の定義が図形的であるため

B. $\alpha-\beta$ の三角関数

【暗記 78：$\alpha-\beta$ の三角関数】

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\{\alpha+(-\beta)\}$ から

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

を導け．また，以下の等式も証明しなさい．

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,\qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

【解答】

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\{\alpha+(-\beta)\}\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

◀『三角関数の加法定理』(p.24)

◀『$-x$ の三角関数』(p.14)

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos\{\alpha+(-\beta)\}\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

◀『三角関数の加法定理』(p.24)

◀『$-x$ の三角関数』(p.14)

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\tan\{\alpha+(-\beta)\}=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

◀『三角関数の加法定理』(p.25)

◀『$-x$ の三角関数』(p.14)

2. 2 直線のなす角について

A. 「x 軸の正の向きとなす角」と「x 軸となす角」のちがい (p.34)

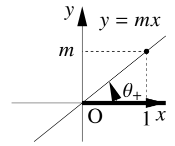
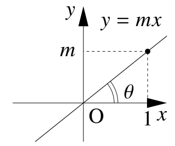
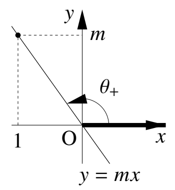
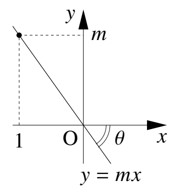
「直線が x 軸の正の向きとなす角」は「直線」が「x 軸の正の向き」と正の向きになす角を表わし，0 から π までの値をとる．

一方，「x 軸となす角」は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ までの値をとる．

具体的に，直線 $y = mx$ の場合で考えてみよう．

$m > 0$ のときは，「x 軸の正の向きとなす角 θ_+」と「x 軸となす角 θ」は同じ角を指す．また，$\tan\theta_+ = \tan\theta = |m|$ が成り立つ．

$m < 0$ のときは，「x 軸の正の向きとなす角 θ_+」と「x 軸となす角 θ」は異なり，$\theta_+ = \pi - \theta$ である．そのため，$\tan\theta_+ = m$ であるが，$\tan\theta = |m|$ となる．

	x 軸の正の向きとなす角	x 軸となす角
$m > 0$		
$m < 0$		

「x 軸の正の向きとなす角」と「x 軸となす角」

「直線 $y = mx$ が x 軸の正の向きとなす角 θ_+」については $\tan\theta_+ = m$ が成り立つ．
一方，「直線 $y = mx$ が x 軸となす角 θ」については $\tan\theta = |m|$ が成り立つ．

B. 「2 直線のなす角」の公式について

p.48 でみた公式の証明を，すべての場合に分けて行うと，次のようになる．

2 直線のなす角

平行・垂直でない 2 直線 $l_1 : y = m_1x + n_1$, $l_2 : y = m_2x + n_2$ のなす角 θ について

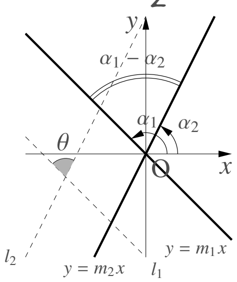
$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right| \quad \left(\text{ただし，}\theta \neq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow m_1m_2 \neq -1 \Leftrightarrow \text{「2 直線が直交しない」とする．}\right)$$

（証明）$0 < \alpha_1 < \pi$, $0 < \alpha_2 < \pi$, $\tan\alpha_1 = m_1$, $\tan\alpha_2 = m_2$ とする．$\alpha_1 > \alpha_2$ としても一般性を失わない．

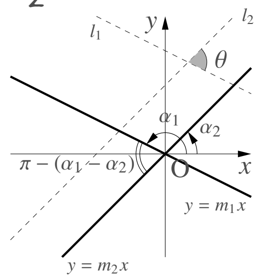
$0 < \alpha_1 - \alpha_2 < \dfrac{\pi}{2}$ の場合は左側の図のようになる．θ は $y = m_1x$, $y = m_2x$ のなす角と等しく，$\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ になる．$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ に注意すると次が成り立つ．

$$\tan\theta = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = |\tan(\alpha_1 - \alpha_2)|$$

$\alpha_1 - \alpha_2 < \dfrac{\pi}{2}$ の場合



$\dfrac{\pi}{2} < \alpha_1 - \alpha_2$ の場合



$\dfrac{\pi}{2} < \alpha_1 - \alpha_2 < \pi$ の場合は右側の図のようになり，$\theta = \pi - (\alpha_1 - \alpha_2)$ になる．$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) < 0$ に注意すると次が成り立つ．

$$\tan\theta = \tan\{\pi - (\alpha_1 - \alpha_2)\} = -\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = |\tan(\alpha_1 - \alpha_2)|$$

つまり，いずれの場合も $\tan\theta = |\tan(\alpha_1 - \alpha_2)| = \left|\dfrac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1\tan\alpha_2}\right| = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$ が成り立つ．

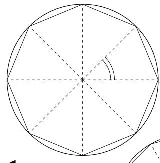
4.6 第４章「三角関数」の解答

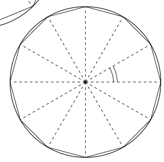
【発展：正多角形と弧度法】(p.4)

① 中心角が 6 つ集まって，1 周，つまり 2π になるので，中心角 1 つの大きさは $2\pi \div 6 = \dfrac{\pi}{3}$

② 2π を 8 等分すればよいので，$2\pi \div 8 = \dfrac{\pi}{4}$

③ 2π を 12 等分すればよいので，$2\pi \div 12 = \dfrac{\pi}{6}$





【発展：範囲をもつ変数の置き換え】(p.11)

① $$0 \leqq x < 2\pi \iff 0 \leqq 2x < 4\pi$$
$$\iff 0 - \frac{\pi}{3} \leqq 2x - \frac{\pi}{3} < 4\pi - \frac{\pi}{3}$$

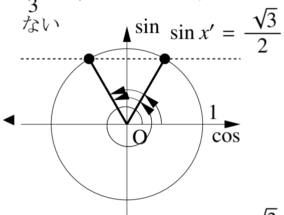
◀ 2 倍しても大小関係は変わらない

◀ $\dfrac{\pi}{3}$ を引いても大小関係は変わらない

より $\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{3} \leqq 2x - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{11}{3}\pi}$ と分かる．

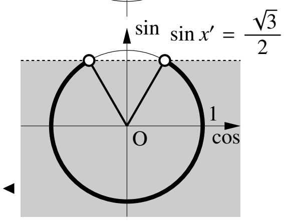
② $x' = 2x - \dfrac{\pi}{3}$ とおいて $\sin x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解く．①より $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x' < \dfrac{11}{3}\pi$ なので，右欄外の図より $x' = \dfrac{1}{3}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi$ となる．$x = \dfrac{x'}{2} + \dfrac{\pi}{6}$ であるので

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi}$$



③ $x' = 2x - \dfrac{\pi}{3}$ とおいて $\sin x' < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解く．①より $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x' < \dfrac{11}{3}\pi$ なので

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x' < \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi < x' < \frac{7}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi < x' < \frac{11}{3}\pi$$



となる．$x' = 2x - \dfrac{\pi}{3}$ を代入して x について解けば

$$\boldsymbol{0 \leqq x < \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi}$$

◀ たとえば
$$\frac{2}{3}\pi < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$
$$\iff \pi < 2x < \frac{8}{3}\pi \iff \frac{\pi}{2} < x < \frac{4}{3}\pi$$

【発展：三角関数の相互関係の利用〜その３〜】(p.12)

① $$\begin{aligned}（左辺） &= \left(\sin^2\alpha\cos^2\beta + \cancel{2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta} + \cos^2\alpha\sin^2\beta\right) \\ &\quad + \left(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \cancel{2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta} + \sin^2\alpha\sin^2\beta\right) \\ &= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\cos^2\beta + \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\sin^2\beta \\ &= \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 = （右辺） \quad \blacksquare\end{aligned}$$

◀ $2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta$ と $2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta$ は，掛け算の順番が違うだけ

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11) を 2 回用いた

② 分母・分子に $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ を用いれば

◀『三角関数の相互関係 1.』(p.11)

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \quad \blacksquare$$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11) を 2 回用いた

【発展：$\cos x + \sin x$ と $\cos x - \sin x$ と $\cos x \sin x$ の関係】(p.12)

① (a) $\cos x + \sin x = \dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗して

$$1 + 2\cos x \sin x = \frac{1}{4} \iff \boldsymbol{\cos x \sin x = -\frac{3}{8}}$$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

また，この値を代入すれば，$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x = \dfrac{7}{4}$

よって，$\boldsymbol{\cos x - \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$.

(b) (a) より，次の連立方程式が成立する．

$$\begin{cases} \cos x + \sin x = \dfrac{1}{2} & \cdots\cdots ① \\ \cos x - \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ② より $2\sin x = \dfrac{1 \mp \sqrt{7}}{2}$ であるが，$0 < x < \pi$ より $\sin x > 0$ であるので，$\boldsymbol{\sin x = \dfrac{1+\sqrt{7}}{4}}$．よって，②について $\cos x - \sin x = -\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ と分かるので，① + ② より $\boldsymbol{\cos x = \dfrac{1-\sqrt{7}}{4}}$ となる．

② まず，$\cos x \pm \sin x$ の 2 乗をそれぞれ考えて

$$(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\cos x \sin x = \frac{5}{3}$$

$$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x = \frac{1}{3}$$

◀『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

$$\iff \cos x + \sin x = \pm\frac{\sqrt{15}}{3},\quad \cos x - \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

である．ここで，$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos x > 0$．$\cos x \sin x > 0$ であるので $\sin x > 0$ と分かる．

よって，$\cos x > 0$，$\sin x > 0$ から $\cos x + \sin x > 0$．

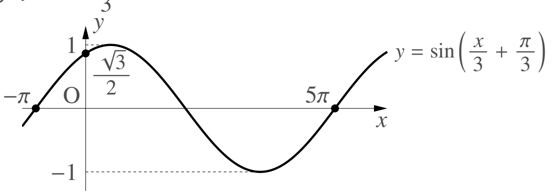
$$\begin{cases} \cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \\ \cos x - \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

この連立方程式を解いて（複号同順）

$$\boldsymbol{(\cos x,\ \sin x) = \left(\frac{\sqrt{15} \pm \sqrt{3}}{6},\ \frac{\sqrt{15} \mp \sqrt{3}}{6}\right)}$$

【発展：三角関数のグラフ〜その３〜】(p.21)

① $y = \sin\dfrac{1}{3}\{x - (-\pi)\}$ であるので

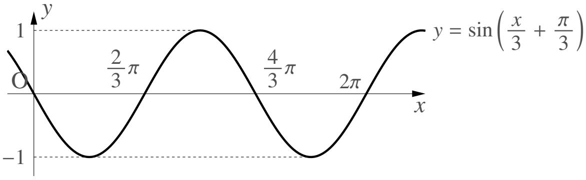


◀ ・周期は $2\pi \div \dfrac{1}{3} = 6\pi$

・$y = \sin 0$ になる $x = -\pi$ から 1 周期分を始めると $x = -\pi + 6\pi = 5\pi$ で終わる

・振幅 1，y 切片 $\sin\dfrac{1}{3}\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

② $y = \sin\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$ であるので



◀ ・周期は $2\pi \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3}\pi$

・$y = \sin 0$ になる $x = \frac{2}{3}\pi$ から 1 周期分を始めると $x = \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 2\pi$ で終わる

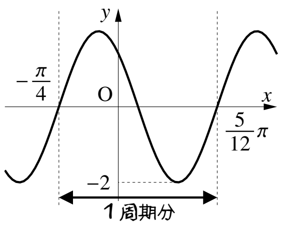
・振幅 1，y 切片 $\sin(-\pi) = 0$

【発展：グラフから三角関数を求める】(p.22)

① 振幅は 2 なので $\boldsymbol{A = 2}$．周期は $\frac{5}{12}\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\pi$ であるので，$\frac{2\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi$ から $\boldsymbol{b = 3}$．さらに，このグラフは $x = -\frac{\pi}{4}$ で 1 周期分が始まるので

$$y = 2\sin 3\left\{x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} = 2\sin\left(3x + \frac{3}{4}\pi\right)$$

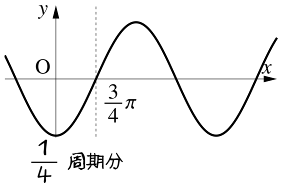
がグラフの関数と分かるので，$\boldsymbol{c = \frac{3}{4}\pi}$.

◀ 

② 振幅は 3 なので $\boldsymbol{A = 3}$．$0 < x < \frac{3}{4}\pi$ で周期の $\frac{1}{4}$ になるから，周期は $\frac{3}{4}\pi \times 4 = 3\pi$ になる．つまり $\frac{2\pi}{b} = 3\pi$ から $\therefore \boldsymbol{b = \frac{2}{3}}$ になる．さらに，このグラフは $x = \frac{3}{4}\pi$ で 1 周期分が始まるので

$$y = 3\sin\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) = 3\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

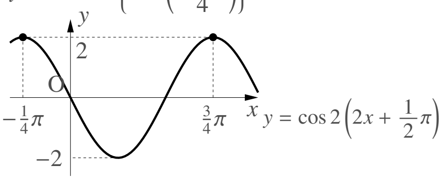
がグラフの関数と分かるので，$\boldsymbol{c = -\frac{1}{2}\pi}$.

◀ 

◀ $x = 0$ のとき $y = -3$ であることから，$-3 = 3\sin c$ として求めてもよい．

【発展：三角関数のグラフ〜その５〜】(p.24)

① $y = 2\cos 2\left\{x - \left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right\}$ であるので

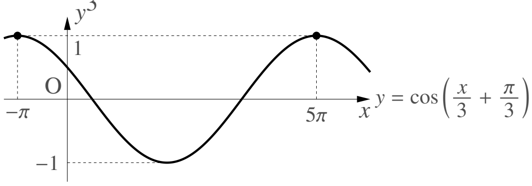


◀ ・周期は $\frac{2\pi}{2} = \pi$

・$y = \cos 0$ になる $x = -\frac{1}{4}\pi$ から 1 周期分を始めると $x = -\frac{1}{4}\pi + \pi = \frac{3}{4}\pi$ で終わる

・振幅 2，y 切片 $2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

② $y = \cos\frac{1}{3}\{x - (-\pi)\}$ であるので

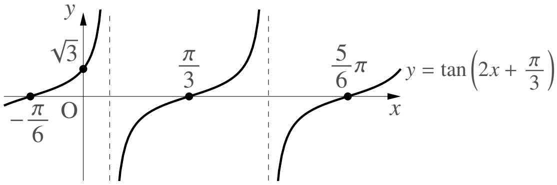


◀ ・周期は $2\pi \div \frac{1}{3} = 6\pi$

・$y = \cos 0$ になる $x = -\pi$ から 1 周期分を始めると $x = \pi + 6\pi = 5\pi$ で終わる

・振幅 1，y 切片 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

③ $y = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ であるので



漸近線は直線 $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{12} + \frac{n}{2}\pi}$（$\boldsymbol{n}$ は整数）になる．

◀ ・周期は $\frac{\pi}{2}$

・$y = \tan 0$ になる $x = -\frac{\pi}{6}$ から 1 周期分を始めると $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$ で終わる

・y 切片は $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

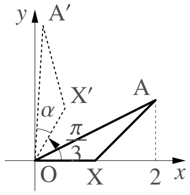
・漸近線は $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$，つまり $x = \frac{\pi}{12}$ のときにあり，その前後 $\frac{\pi}{2}$ ごとにある．

【発展：三角関数の加法定理と平面図形】(p.28)

① OA $= \sqrt{5}$ より，$\boldsymbol{\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}}$，$\boldsymbol{\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$．

◀ (2, 0) を B として，直角三角形 △AOB に着目した．

② 右図のように描くことができ，$\boldsymbol{\angle X'OX = \dfrac{\pi}{3}}$ から



$X'\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ であるので $\boldsymbol{X'\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$．

右図より $\boldsymbol{\angle A'OX = \alpha + \dfrac{\pi}{3}}$，OA' $= \sqrt{5}$ から

$A'\left(\sqrt{5}\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right),\ \sqrt{5}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ であり，

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

◀『cos の加法定理』(p.27)

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

◀『sin の加法定理』(p.27)

より，$\boldsymbol{A'\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)}$．

◀ $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$，$\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ $\sqrt{5}$ 倍した．

【発展：tan の半角で表す】(p.32)

$t^2 = \tan^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ より $(1+\cos x)t^2 = 1-\cos x$

◀ 両辺 $1+\cos x$ 倍した

$$\Leftrightarrow\ t^2 + t^2\cos x = 1 - \cos x$$

$$\Leftrightarrow\ (t^2+1)\cos x = 1 - t^2 \quad \therefore\ \boldsymbol{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

また，倍角の公式より $\tan x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{2t}{1-t^2}}$ であるので

$$\sin x = \cos x\tan x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1-t^2} = \boldsymbol{\frac{2t}{1+t^2}}$$

◀ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ でも計算できるが，符号の判別が難しい．

【発展：方程式の解の個数】(p.33)

① $\sin x = t$ とおくと，$\cos 2x = 1 - 2t^2$ であるから

◀ $\cos 2x$ は $\sin x$ で表せる

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

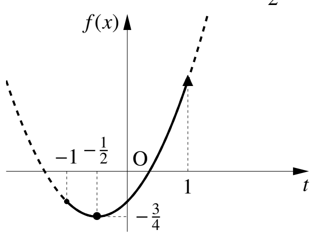
$$= t - \frac{1}{2}(1-2t^2) = t^2 + t - \frac{1}{2}$$

$$= \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

◀ 最大・最小を求めるため平方完成した

となる．$-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲でグラフを書けば右欄外のようになるので

◀



最大値は $t = 1$ のときの $\dfrac{3}{2}$，最小値は $t = -\dfrac{1}{2}$ のときの $-\dfrac{3}{4}$

となる．$t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$，$t = \sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ なので

最大値は $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\ \left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)}$，**最小値は** $\boldsymbol{-\dfrac{3}{4}\ \left(x = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi\right)}$

② 右欄外のように $f(x) = a$ を書き込むと

$-\dfrac{3}{4} < a \leqq -\dfrac{1}{2}$ のときに $f(x) = a$ となる t は 2 個

他の場合は，$f(x) = a$ となる t は 1 個，または 0 個

である．一方，$t = \sin x$ であるから，

$-1 < t < 1$ のときは，t の解 1 つにつき x の解は 2 つ

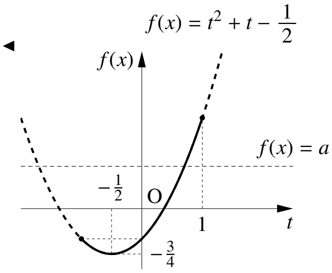
$t = -1,\ 1$ のときは，t の解 1 つにつき x の解は 1 つ

である．以上から，次のように分かる．

$f(x) = a$ となる x が 4 つあるのは $\boldsymbol{-\dfrac{3}{4} < a < -\dfrac{1}{2}}$ のとき

$f(x) = a$ となる x が 3 つあるのは $\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2}}$ のとき

◄



【発展：3 倍角の公式】(p.33)

①
$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta \\ &= (2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta \\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta \\ &= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta \\ &= \boldsymbol{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}\end{aligned}$$

◄『sin の加法定理』(p.27)

◄『倍角の公式』(p.29)

◄『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\ &= \boldsymbol{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}\end{aligned}$$

◄『cos の加法定理』(p.27)

◄『倍角の公式』(p.29)

◄『三角関数の相互関係 2.』(p.11)

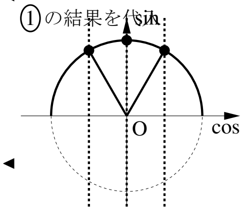
② $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であるので

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &\iff 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 2\cos\theta = 0 \\ &\iff (4\cos^2\theta - 1)\cos\theta = 0 \\ &\iff \cos\theta = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲でこれを解いて，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi}$

◄ ①の結果を代入

◄



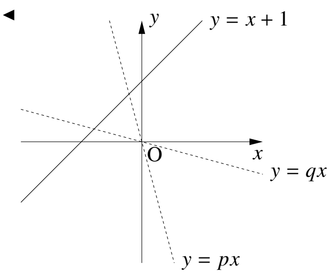
【発展：直線のなす角】(p.36)

右欄外の図から，$y = px$, $y = qx$ はいずれも，直線 $y = x + 1$ と $\dfrac{\pi}{3}$ の大きさで交わる．つまり，直線 $y = x + 1$ とのなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ である直線の傾きを m とすると p, q は m の 2 解である．

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{3} = \left|\frac{1 - m}{1 + 1\cdot m}\right| &\iff \sqrt{3} = \pm\frac{1 - m}{1 + m} \\ &\iff \sqrt{3}(1 + m) = 1 - m \quad \text{または} \quad \sqrt{3}(1 + m) = -(1 - m) \\ &\iff m = -\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \quad \text{または} \quad m = -\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &\iff m = -2 + \sqrt{3} \quad \text{または} \quad m = -2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

$p < q$ であるから，$\boldsymbol{p = -2 - \sqrt{3}}$，$\boldsymbol{q = -2 + \sqrt{3}}$.

◄



【発展：$t=\sin x+\cos x$ とおく】(p.41)

① $t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$ であるので

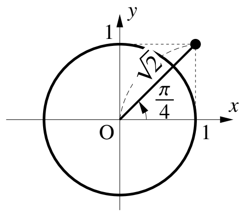
$$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

これを代入すれば

$$f(x)=\frac{t^2-1}{2}-(\sin x+\cos x)=\boldsymbol{\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2}}$$

② 右欄外の図を書いて考えれば

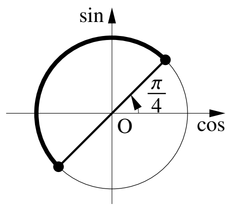
◀『三角関数の合成』(p.37)



$$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq x\leqq\pi$ より，$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるので，右欄外の図より $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ である．

◀



つまり，$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ のとりうる範囲は $\boldsymbol{-1\leqq t\leqq\sqrt{2}}$.

③ ①, ②より

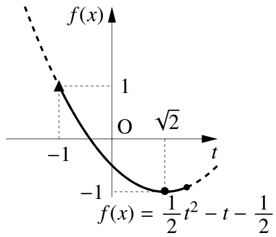
$$f(x)=\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t-1)^2-1\quad\left(-1\leqq t\leqq\sqrt{2}\right)$$

である．右欄外の図より，$f(x)$ は

$t=-1$ のとき 1 で最大，$t=1$ のとき -1 で最小

となる．それぞれのときの x の値を求めると

◀関数の最大・最小を求めるため，t について平方完成してグラフを描いた．



$$t=-1\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$
$$\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi\quad\therefore\ x=\pi$$
$$t=1\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$
$$\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\quad\therefore\ x=0,\ \frac{\pi}{2}$$

以上をまとめて，$f(x)$ は

$x=\pi$ のとき 1 で最大，$x=0,\ \frac{\pi}{2}$ のとき -1 で最小

【発展：三角関数を含む方程式・不等式〜その４〜】(p.45)

① (与式) $\Leftrightarrow(\sin 4x+\sin 2x)+(\sin 3x+\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2}+2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=0$$

◀ $4x-2x=3x-x$ に着目して，『三角関数の和を積に変換する公式』(p.43) を用いる．
$4x+x=3x+2x$ や $4x-3x=2x-x$ に着目しても共通因数を作れるが，分数が出てきて煩雑である．

$$\Leftrightarrow 2(\sin 3x\cos x+\sin 2x\cos x)=0$$
$$\Leftrightarrow(\sin 3x+\sin 2x)\cos x=0$$

◀共通因数 $\cos x$ でまとめた

$$\Leftrightarrow\left(2\sin\frac{3x+2x}{2}\cos\frac{3x-2x}{2}\right)\cos x=0$$

◀『三角関数の和を積に変換する公式』(p.43)

$$\Leftrightarrow\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow\sin\frac{5}{2}x=0,\ \cos\frac{x}{2}=0,\ \cos x=0$$

それぞれの方程式を解くと

$$0 \leqq \frac{5}{2}x < 5\pi \text{ より}, \sin\frac{5}{2}x = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 0,\ \frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi$$

$$0 \leqq \frac{x}{2} < \pi \text{ より}, \cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \pi$$

$$0 \leqq x < 2\pi \text{ より}, \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

よって，$\boldsymbol{x = 0,\ \frac{2}{5}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{8}{5}\pi}$.

② （与式）$\Leftrightarrow \cos 3x + \cos x < \cos 4x + \cos 2x$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2} < \cos\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\cos x < \cos 3x\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\cos 3x - \cos 2x)\cos x > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-2\sin\frac{3x+2x}{2}\sin\frac{3x-2x}{2}\right)\cos x > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{5}{2}x\sin\frac{x}{2}\cos x < 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

◀ $3x-x = 4x-2x$ に着目して，『三角関数の和を積に変換する公式』(p.43) を用いる．$4x+x = 3x+2x$ や $4x-3x = 2x-x$ に着目しても共通因数を作れるが，分数が出てきて煩雑である．

◀ 共通因数 $\cos x$ でまとめた

◀『三角関数の和を積に変換する公式』(p.43)

ここで，$0 \leqq \frac{x}{2} < \pi$ より $\sin\frac{x}{2} \geqq 0$ である．

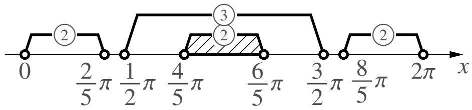
i. $\sin\frac{x}{2} = 0$，つまり，$x = 0,\ 2\pi$ のとき①は不適．

ii. $\sin\frac{x}{2} > 0$ より，①は $\sin\frac{5}{2}x\cos x < 0$ となる．

- $\sin\frac{5}{2}x > 0$，$\cos x < 0$ のとき

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi < x < \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi < x < 2\pi & \cdots\cdots ② \\ \frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

◀ $\sin\frac{5}{2}x > 0$ を解くと
$0 < \frac{5}{2}x < \pi,\ 2\pi < \frac{5}{2}x < 3\pi,$
$4\pi < \frac{5}{2}x < 5\pi$

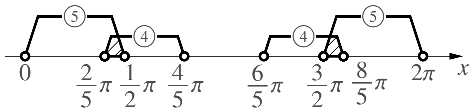


であるので，$\frac{4}{5}\pi < x < \frac{6}{5}\pi$.

- $\sin\frac{5}{2}x < 0$，$\cos x > 0$ のとき

$$\begin{cases} \frac{2}{5}\pi < \theta < \frac{4}{5}\pi,\ \frac{6}{5}\pi < \theta < \frac{8}{5}\pi & \cdots\cdots ④ \\ 0 < \theta < \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

◀ $\sin\frac{5}{2}x < 0$ を解くと
$\pi < \frac{5}{2}x < 2\pi,\ 3\pi < \frac{5}{2}x < 4\pi$



であるので，$\frac{2}{5}\pi < x < \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < x < \frac{8}{5}\pi$.

以上をまとめて，$\boldsymbol{\frac{2}{5}\pi < x < \frac{1}{2}\pi,\ \frac{4}{5}\pi < x < \frac{6}{5}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < x < \frac{8}{5}\pi}$.

【発展：三角形の角】(p.45)

$A+B+C=\pi$ であるので，

$$\text{（左辺）} = (\sin A+\sin B)+\sin\left(2\cdot\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

◀『三角関数の和を積に変換する公式』(p.43)，『倍角の公式』(p.29)

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$

◀ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right)$$

◀『三角関数の和を積に変換する公式』(p.43)

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)=\text{（右辺）}\quad ■$$

【別解その 1：『三角関数の積を和に変換する公式』の利用】

$$\text{（右辺）} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)$$

◀ $C=\pi-(A+B)$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)$$

◀ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

◀『cos の加法定理』(p.27)

$$= \left(2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\right)2\cos^2\frac{B}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}\left(2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$= \sin A(1+\cos B)+(1+\cos A)\sin B$$

◀『倍角の公式』(p.29),『半角の公式』(p.31)

$$= \sin A+\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$= \sin A+\sin B+\sin(A+B)$$

◀『sin の加法定理』(p.27)

$$= \sin A+\sin B+\sin(\pi-C)=\text{（左辺）}\quad ■$$

◀ $A+B=\pi-C,\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

【別解その 2】

$$\text{（右辺）} = 4\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$

$$= 4\left\{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)\right\}\cos\frac{C}{2}$$

◀『三角関数の積を和に変換する公式』(p.43)

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{C}{2}+2\cos\frac{A-B}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)$$

◀ $A+B=\pi-C,\ C=\pi-(A+B)$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}+2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$

◀ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$$= \sin C+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

◀『倍角の公式』(p.29)

$$= \sin C+\left\{\sin\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)+\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)\right\}$$

◀『三角関数の積を和に変換する公式』(p.43)

$$= \sin C+(\sin A+\sin B)=\text{（左辺）}\quad ■$$

4.7 三角関数の値

0°	1.0000	0.0000	0.0000	**角**	**cos**	**sin**	**tan**
1°	0.9998	0.0175	0.0175	46°	0.6947	0.7193	1.0355
2°	0.9994	0.0349	0.0349	47°	0.6820	0.7314	1.0724
3°	0.9986	0.0523	0.0524	48°	0.6691	0.7431	1.1106
4°	0.9976	0.0698	0.0699	49°	0.6561	0.7547	1.1504
5°	0.9962	0.0872	0.0875	50°	0.6428	0.7660	1.1918
6°	0.9945	0.1045	0.1051	51°	0.6293	0.7771	1.2349
7°	0.9925	0.1219	0.1228	52°	0.6157	0.7880	1.2799
8°	0.9903	0.1392	0.1405	53°	0.6018	0.7986	1.3270
9°	0.9877	0.1564	0.1584	54°	0.5878	0.8090	1.3764
10°	0.9848	0.1736	0.1763	55°	0.5736	0.8192	1.4281
11°	0.9816	0.1908	0.1944	56°	0.5592	0.8290	1.4826
12°	0.9781	0.2079	0.2126	57°	0.5446	0.8387	1.5399
13°	0.9744	0.2250	0.2309	58°	0.5299	0.8480	1.6003
14°	0.9703	0.2419	0.2493	59°	0.5150	0.8572	1.6643
15°	0.9659	0.2588	0.2679	60°	0.5000	0.8660	1.7321
16°	0.9613	0.2756	0.2867	61°	0.4848	0.8746	1.8040
17°	0.9563	0.2924	0.3057	62°	0.4695	0.8829	1.8807
18°	0.9511	0.3090	0.3249	63°	0.4540	0.8910	1.9626
19°	0.9455	0.3256	0.3443	64°	0.4384	0.8988	2.0503
20°	0.9397	0.3420	0.3640	65°	0.4226	0.9063	2.1445
21°	0.9336	0.3584	0.3839	66°	0.4067	0.9135	2.2460
22°	0.9272	0.3746	0.4040	67°	0.3907	0.9205	2.3559
23°	0.9205	0.3907	0.4245	68°	0.3746	0.9272	2.4751
24°	0.9135	0.4067	0.4452	69°	0.3584	0.9336	2.6051
25°	0.9063	0.4226	0.4663	70°	0.3420	0.9397	2.7475
26°	0.8988	0.4384	0.4877	71°	0.3256	0.9455	2.9042
27°	0.8910	0.4540	0.5095	72°	0.3090	0.9511	3.0777
28°	0.8829	0.4695	0.5317	73°	0.2924	0.9563	3.2709
29°	0.8746	0.4848	0.5543	74°	0.2756	0.9613	3.4874
30°	0.8660	0.5000	0.5774	75°	0.2588	0.9659	3.7321
31°	0.8572	0.5150	0.6009	76°	0.2419	0.9703	4.0108
32°	0.8480	0.5299	0.6249	77°	0.2250	0.9744	4.3315
33°	0.8387	0.5446	0.6494	78°	0.2079	0.9781	4.7046
34°	0.8290	0.5592	0.6745	79°	0.1908	0.9816	5.1446
35°	0.8192	0.5736	0.7002	80°	0.1736	0.9848	5.6713
36°	0.8090	0.5878	0.7265	81°	0.1564	0.9877	6.3138
37°	0.7986	0.6018	0.7536	82°	0.1392	0.9903	7.1154
38°	0.7880	0.6157	0.7813	83°	0.1219	0.9925	8.1443
39°	0.7771	0.6293	0.8098	84°	0.1045	0.9945	9.5144
40°	0.7660	0.6428	0.8391	85°	0.0872	0.9962	11.4301
41°	0.7547	0.6561	0.8693	86°	0.0698	0.9976	14.3007
42°	0.7431	0.6691	0.9004	87°	0.0523	0.9986	19.0811
43°	0.7314	0.6820	0.9325	88°	0.0349	0.9994	28.6363
44°	0.7193	0.6947	0.9657	89°	0.0175	0.9998	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	0.0000	1.0000	な　し
角	**cos**	**sin**	**tan**	**角**	**cos**	**sin**	**tan**

これらの値を計算するには，大学で学習することになるテイラー展開（または，マクローリン展開）が必要となる．

索引

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 I で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π, ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ, ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω