13th-note 数学A

Ver4.00(2016-6-28)

目次

第1章　場合の数と確率

A 場合の数

場合の数 (number of cases) とは「何通りの場合が起こりうるか数える」ことである.

1A.1　場合の数の基礎

起こりうる場合の数を正しく数えるには次のことが必要条件になる.
「数えもらさない」　「同じものを繰り返して数えない」

1. 積の法則

A. 表を用いる

「数えもらさない」「同じものを繰り返して数えない」ための基本的な手段は，表を用いることである.

たとえば，大小 2 個のさいころを投げたときの出る目を表でまとめると，右のようになる．このとき，すべての場合の数は $6 \times 6 = 36$ 通りと分かる.

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
2	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
3	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
5	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
6	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全部で6通り

全部で6通り

【例題 1】 4 種類のカード $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ を用いて 2 枚並べる．ただし，同じカードを繰り返し並べてよいとする．右の表を完成させ，全部で何通りあるか答えなさい.

1 枚目＼2 枚目	A	B		
A	AA	AB		

【解答】

よって，$4 \times 4 =$ **16 通り** ある.

1 枚目＼2 枚目	A	B	C	D
A	**AA**	**AB**	**AC**	**AD**
B	**BA**	**BB**	**BC**	**BD**
C	**CA**	**CB**	**CC**	**CD**
D	**DA**	**DB**	**DC**	**DD**

3 枚以上選ぶ並べる場合には表で書き表すことが難しくなるので，樹形図を用いる.

B. 辞書順に並べる

場合の数の問題では，辞書と同じように，アルファベット順，あいうえお順，数字の小さい順などで，結果を並べるとよい．

(例 1) 5 枚のカード

$\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, $\boxed{E}$

のうち 3 枚を使った，A から始まる文字列は，右のように書き出すことができる．その結果，場合の数は $4 \times 3 = 12$ 通りと求められる．

悪いやり方（×）			辞書順並べ（○）			
ABC	AEB	ACD	ABC	ABD	ABE	(←ABで始まる文字列)
ACB	ABE	ADC	ACB	ACD	ACE	(←ACで始まる文字列)
ADE	ABD	AEC	ADB	ADC	ADE	(←ADで始まる文字列)
AED	ADB	ACE	AEB	AEC	AED	(←AEで始まる文字列)

(例 2) 大小 2 つのさいころを振ったとき，出た目を

(大きいさいころの目, 小さいさいころの目)

で表そう（このテキストでは以後，同じとする）．

出た目の和が 6 になる場合を辞書順並べで書き出すと，右図のようになって容易に，5 通りあると分かる．

悪いやり方（×）	辞書順並べ（○）
$(1, 5)$	$(1, 5)$
$(5, 1)$	$(2, 4)$
$(4, 2)$	$(3, 3)$
$(2, 4)$	$(4, 2)$
$(3, 3)$	$(5, 1)$

上から 1，2，3，4，5

【例題 2】

1. 上の (例 1) において，C から始まる文字列を辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．
2. 上の (例 2) において，目の和が 7 になる場合を，辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．
3. $a + b + c = 5$ となる自然数 (a, b, c) の組を辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．

【解答】

1. **CAB　CAD　CAE**
   CBA　CBD　CBE
   CDA　CDB　CDE
   CEA　CEB　CED

   1. は $4 \times 3 =$ **12 通り** ある．
   2. は **6 通り** ある．
   3. は **6 通り** ある．

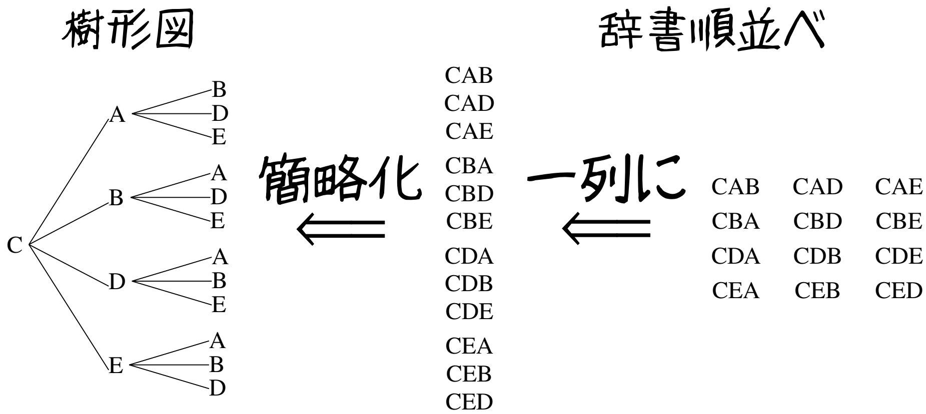
2. **(1, 6)**
   (2, 5)
   (3, 4)
   (4, 3)
   (5, 2)
   (6, 1)

3. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$
   =(1, 1, 3),
   (1, 2, 2),
   (1, 3, 1),
   (2, 1, 2),
   (2, 2, 1),
   (3, 1, 1)

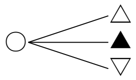
C.　樹形図

辞書順並べを少し簡略化した書き方が，**樹形図** (tree diagram) である．

たとえば，【例題2】の 1. を樹形図で書き出すと，右のようになる．



D.　積の法則

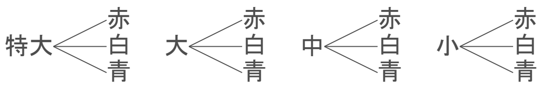
上の樹形図において，  という形が 4 回現われることが分かる．これは，「2 番目の文字は 4 種類あり，2 番目の文字がどんな場合でも，3 番目の文字は 3 種類ある」ことを意味しており，場合の数は $3\times4=12$ 通りとなる．

【例題 3】

1. A 社のかばんには，特大，大，中，小の 4 種類あり，いずれも，赤，白，青の 3 色から選べるという．樹形図を書いて，何種類のかばんがあるか答えなさい．
2. 1 から 4 の数字を用いた，2 桁の数字を樹形図で書き出し，何通りあるか答えなさい．

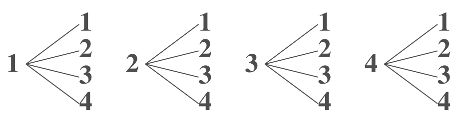
【解答】

1. (大きさ – 色) で樹形図を書けば，以下のようになる．



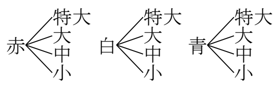
全部で $4\times3=$ **12 通り** ある．

2. (十の位 – 一の位) で樹形図を書けば，以下のようになる．



全部で $4\times4=$ **16 通り** ある．

◀ 樹形図によるまとめ方は複数ある．たとえば，(色，大きさ) の順で書けば，以下のような樹形図を書くことができる．



積の法則

2 つの事柄 A，B について，A の起こり方が a 通り，A がどんな場合でも，B の起こり方が b 通りあるとする．このとき

　　A と B がともに起こる場合は $a\times b$ 通り

ある．このことを**積の法則** (multiplication law) という．

【練習 4：積の法則〜その１〜】

(1) 男子が 5 人，女子が 4 人のクラスから，男女一人ずつを選ぶ方法は何通りあるか.

(2) 1 から 9 までの数字を用いた，2 桁の数は何通りあるか.

(3) B 社のかばんには，手提げとリュックの 2 種類があり，大きさは大中小の 3 種類から，色は赤，白，黒，青の 4 色から選べるという．何種類のかばんがあるか.

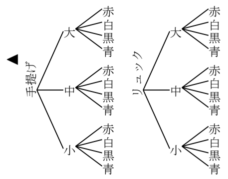
【解答】

(1) 5 人のうちどの男子を選んでも，女子の選び方は 4 通りあるので，$5 \times 4 =$ **20 通り** と求められる.

(2) 10 の位は 9 通り，10 の位がいくつであっても，1 の位は 9 通りある．つまり，$9 \times 9 =$ **81 通り** である.

(3) かばんは 2 種類あり，どちらの場合でも大きさは 3 種類あり，さらに，どの場合も色は 4 種類ずつある．つまり，$4 \times 3 \times 2 =$ **24 通り**ある.

◀



積の法則を用いるかどうかわからないときは，樹形図をイメージしよう.

E. 発展 正の約数の個数

積の法則 (p.3) の応用例として，12 の約数について考えよう．$12 = 2^2 \times 3$ であるので，12 の約数は[*1]

$2^0 \times 3^0$，$2^0 \times 3^1$，　$2^1 \times 3^0$，$2^1 \times 3^1$，　$2^2 \times 3^0$，$2^2 \times 3^1$

ですべてとなる．これを樹形図にすれば，次のようになり，$3 \times 2 = 6$ 個の約数があるとわかる.

$$2^0 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\end{matrix}\right. \quad 2^1 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\end{matrix}\right. \quad 2^2 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\end{matrix}\right.$$

また，12 の約数の和は，$(2^0 + 2^1 + 2^2) \times (3^0 + 3^1) = (1 + 2 + 4) \times (1 + 3) = 7 \times 4 = 28$ で計算できる．これは，次の等式から分かる.

$$\begin{aligned} & 2^0 \times 3^0 + 2^0 \times 3^1 + 2^1 \times 3^0 + 2^1 \times 3^1 + 2^2 \times 3^0 + 2^2 \times 3^1 \\ = \ & 2^0 \times (3^0 + 3^1) + 2^1 \times (3^0 + 3^1) + 2^2 \times (3^0 + 3^1) \\ = \ & (2^0 + 2^1 + 2^2) \times (3^0 + 3^1) \end{aligned}$$

← $(3^0 + 3^1)$ を共通因数と見て因数分解した

【発展 5：正の約数の個数】

上のやり方を参考に，288 の約数の個数を求めよ．また，約数の和を求めよ.

【解答】　$288 = 2^5 \times 3^2$ である．よって，288 の約数は

◀ 素因数分解した

$$2^0 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right. \quad 2^1 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right. \quad 2^2 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right. \quad 2^3 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right. \quad 2^4 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right. \quad 2^5 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right.$$

よって，約数の個数は $6 \times 3 =$ **18 個** ある．また，約数の和は

$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) \times (3^0 + 3^1 + 3^2)$

$= (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) \times (1 + 3 + 9) = 63 * 13 =$ **819**

◀ 慣れたら，素因数分解の指数部を見るだけで，$(5 + 1) \times (2 + 1) = 18$ と計算できる.

[*1] $2^0 = 1$, $3^0 = 1$．どんな数も 0 乗は 1 である.

2. 集合と場合の数

A. 操作の結果を集合で表す

たとえば，大きさの異なる立方体のさいころ 2 個を振って「目の和が 5 になる場合」について，次のように書くことができる．

「目の和が 5 になる場合」の集合 A は，$A = \{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$ であり，$n(A) = 4$ である．

【例題 6】 大小 2 個のさいころを投げるとき，以下の集合の要素を書き出し，(4) の問いに答えよ．

1. 出た目の和が 10 になる場合の集合 B
2. 出た目の差が 4 になる場合の集合 C
3. 出た目の積が 12 になる場合の集合 D
4. $n(B),\ n(C),\ n(D)$ はいくらか．

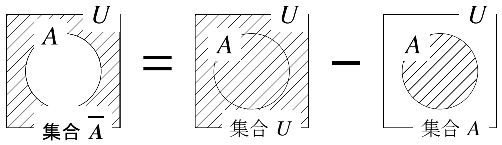
【解答】

1. $\boldsymbol{B = \{(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)\}}$
2. $\boldsymbol{C = \{(6,\ 2),\ (5,\ 1),\ (2,\ 6),\ (1,\ 5)\}}$
3. $\boldsymbol{D = \{(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)\}}$
4. $\boldsymbol{n(B) = 3,\ n(C) = 4,\ n(D) = 4}$

◀「差」とは「2 つの値の違い」なので，(5, 1), (1, 5) の差はいずれも 4.

B. 場合の数と集合の要素の個数

場合の数を集合を用いて考えれば，『集合の要素の個数』で学ぶ次の法則を用いることができる．

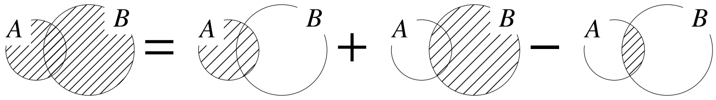


『補集合の要素の個数』

$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$

『包含と排除の原理』

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



$A \cap B = \emptyset$ のとき，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ となる．これは『和の法則』とも呼ばれる．

【例題 7】 大きさは大中小の 3 種類，赤，白，黒，青の 4 色がある D 社のかばんを買いにいったところ，大きいかばんと，黒のかばんは気に入らなかったが，他は気に入った．大きなかばんの集合を A，黒いかばんの集合を B とするとき，以下の問に答えよ．

1. $n(A),\ n(B),\ n(A \cap B)$ の値をそれぞれ求めよ．
2. 気に入らなかったかばんは何通りか．
3. 気に入ったかばんは何通りか．

【解答】

1. $\boldsymbol{n(A) = 4,\ n(B) = 3,\ n(A \cap B) = 1}$
2. 気に入らなかったかばんは $A \cup B$ に一致するので
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 3 - 1 = 6$ から **6 通り**．
3. D 社のかばんは全部で $4 \times 3 = 12$ 通りある．(2) 以外のかばんの種類なので，$12 - 6 =$ **6 通り** ある．

◀ $A \cap B$「大きくて黒いかばんの集合」，そのようなかばんは 1 つしかない

C. 場合分け

【例題 8】 大小 2 個のさいころを投げたとき，出た目の和が 5 の倍数となるのは次の場合がある．

- 「出た目の和が 5 になる場合」これは $\boxed{ア}$ 通りある
- 「出た目の和が $\boxed{イ}$ になる場合」これは $\boxed{ウ}$ 通りある

この場合分けから，出た目の和が 5 の倍数となる場合は $\boxed{エ}$ 通りあるとわかる．

【解答】 ア：(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) の **4** 通りある．　イ：**10**
ウ：(4, 6), (5, 5), (6, 4) の **3** 通りある．　エ：$4 + 3 = \mathbf{7}$

出た目の和が 5 となる場合を A，出た目の和が 10 となる場合を B とすれば，$A \cap B = \emptyset$ であるので，（出た目の和が 5 の倍数となる場合の数）$= n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ である．

【練習 9：場合の数における集合】

1 から 50 までが書かれたカード 50 枚の中から，無作為に 1 枚引く．引いたカードが

2 の倍数である場合の集合を Z_2，3 の倍数である場合の集合を Z_3

また，すべての場合の集合を U とする．つまり，$n(U) = 50$ である．

(1) $n(Z_2)$, $n(Z_3)$, $n(Z_2 \cap Z_3)$ の値を求めなさい．

(2) 「奇数である場合の集合」を A,「6 の倍数である場合の集合」を B,「2 または 3 で割り切れる場合の集合」を C とする．それぞれ一致するものを選びなさい．

① Z_2　② Z_3　③ $\overline{Z_2}$　④ $\overline{Z_3}$　⑤ $Z_2 \cap Z_3$　⑥ $Z_2 \cup Z_3$

(3) $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ をそれぞれ答えなさい．

【解答】

(1) たとえば「1 を引いた場合」を「1」と表せば

$$Z_2 = \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 50\ (= 2 \times 25)\}$$

$$Z_3 = \{3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 48\ (= 3 \times 16)\}$$

$$Z_2 \cap Z_3 = \{6,\ 12,\ 18,\ \cdots,\ 48\ (= 6 \times 8)\}$$

なので，$\mathbf{n(Z_2) = 25}$，$\mathbf{n(Z_3) = 16}$，$\mathbf{n(Z_2 \cap Z_3) = 8}$

(2) A は ③，B は ⑤，C は ⑥

(3) $n(A) = n(\overline{Z_2}) = \mathbf{25}$，$n(B) = n(Z_2 \cap Z_3) = \mathbf{8}$

$n(C) = n(Z_2 \cup Z_3) = 25 + 16 - 8 = \mathbf{33}$

【練習 10：場合分けと積の法則】

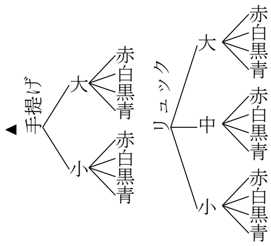
(1) 1 から 5 までの数字を用いてできる 2 桁以下の数は何通りあるか.

(2) C 社のかばんには，手提げは大中の 2 種類，リュックは大中小の 3 種類あり，どの種類も赤，白，黒，青の 4 色から選べるという．何種類のかばんがあるか.

【解答】

(1) 2 桁の数は $5 \times 5 = 25$ 通り，1 桁の数は 5 通りある.
つまり，全部で $25 + 5 =$ **30 通り** の数がある.

(2) 手提げは 2×4 通り，リュックは，3×4 通りある.
よって，全部で $4 \times 2 + 4 \times 3 =$ **20 種類**ある.

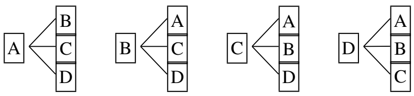


3. 「重複を許す」,「順列と組合せ」

A. 「重複を許す」とは

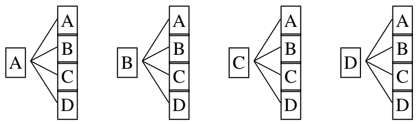
同じ操作を繰り返してもよいことを「重複を許す」という.
たとえば，4 種類のカード $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ を用いて 2 枚の列を作るとき

「重複を許さない」ならば



$4 \times 3 = 12$ 通りの並べ方がある.

「重複を許す」ならば



$4 \times 4 = 16$ 通りの並べ方がある.

【例題 11】

1. 1 から 5 までの数字を用いて，2 桁の数字を作ろうと思う.
   (a) 重複を許して作るなら，何通りできるか.　(b) 重複を許さないなら，何通りできるか.
2. 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ を並べてできる 2 桁の整数は何通りあるか.

【解答】

1. (a) 10 の位は 5 通り，そのいずれの場合も，1 の位は 5 通りあるので，$5 \times 5 =$ **25 通り**
   (b) 10 の位は 5 通り，そのいずれの場合も，1 の位は 4 通りあるので，$5 \times 4 =$ **20 通り**

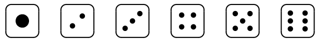
◀ 2. において，1 の位は，10 の位と同じ数を入れることができない

2. 10 の位は 6 通り，そのいずれの場合も，1 の位は 5 通りあるので，$6 \times 5 =$ **30 通り**

◀ 10 の位に置いたカードを，1 の位に置くことはできない

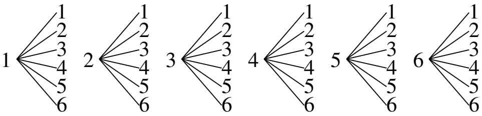
B. 「順列」とは，「組合せ」とは

たとえば，さいころを 2 回投げた場合の目の出方は，次の 2 通りの方法でまとめることができる．



a) 1 回目と 2 回目を区別する場合

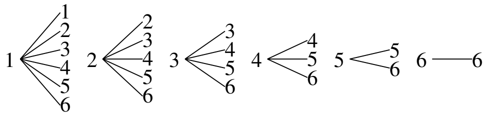
1 回目－2 回目の順に樹形図を書けば，次のようになる．



この場合は，投げた順に結果を列挙した**順列** (permutation) を考えている．

b) 1 回目と 2 回目を区別しない場合

小さい目－大きい目の順で樹形図を書けば，次のようになる．



この場合は，試行した結果の**組合せ** (combination) を考えている．

順列か組合せのいずれで考える問題なのか，注意して樹形図を書こう．

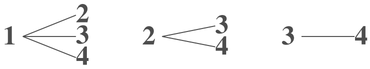
【例題 12】 1，2，3，4 の数字が書いてある 4 枚のカードがある．次の試行について，それぞれ樹形図を用いてすべて書き出し，何通りあるか答えよ．

1 2 3 4

1. 続けて 2 枚引く場合のカードの順列
2. 続けて 2 枚引いたときの，カードの組合せ

【解答】

1.  $4 \times 3 = \mathbf{12}$ **通り**

2.  $3 + 2 + 1 = \mathbf{6}$ **通り**

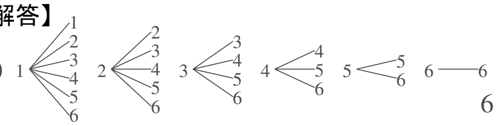
◀ (2) は，§1A.3『組合せ』において学ぶことを用い，${}_4C_2 = 6$ 通りとも求められる．

【練習 13：さいころの区別】

(1) 見た目がまったく同じ 2 個のさいころを同時に振るとき，目の出方は何通りあるか.

(2) 大きさが異なる 2 個のさいころを振るとき，目の出方は何通りあるか.

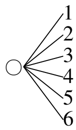
【解答】

(1) 

$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \mathbf{21}$ **通り**

(2) 大きいさいころは 6 通り．そのいずれの場合も，小さいさいころが 6 通りあるので，$6 \times 6 = \mathbf{36}$ **通り**

◀ 右のような樹形図が 6 つ書ける．（○には 1 から 6 が入る）



【練習 14：足して 5 になる数】

(1) 足して 5 になるような 2 つの自然数の組をすべて求めよ．

(2) $x + y = 5$ になるような，2 つの自然数 x, y の解をすべて求めよ．

【解答】

(1) **1 と 4**，**2 と 3** の 2 組

◀ 2 つの数字の組合せを考えている

(2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{1}, \mathbf{4}), (\mathbf{2}, \mathbf{3}), (\mathbf{3}, \mathbf{2}), (\mathbf{4}, \mathbf{1})$

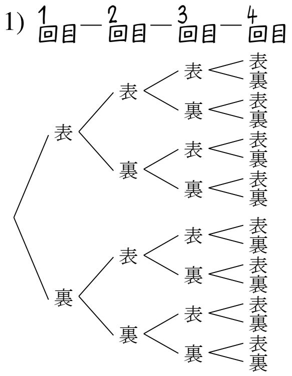
◀ 2 つの数字を x, y で区別した結果として順列を考えている

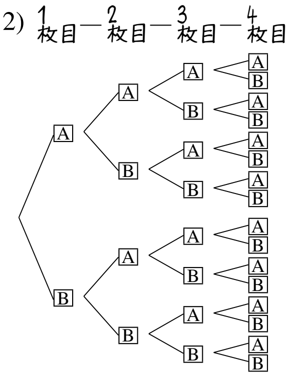
1. 重複順列

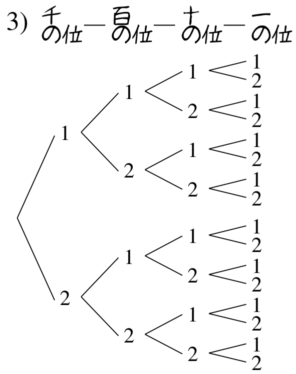
A. 重複順列とは

同じことを繰り返してできる順列のことを**重複**（ちょうふく）**順列** (permutation with repetitions) という．
次の問題について，それぞれ樹形図を書いて，何通りあるか考えてみよう．

1) 表と裏があるコインを 4 回振るときの，出た目の順列は何通りあるか．
2) $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ の 2 枚から 1 枚引いて記録し，元に戻す操作を 4 回行ったとき，引いたカードの順列
3) 1 か 2 のみで作ることのできる，4 桁の整数







⇓ 簡略化 ⇓ 簡略化 ⇓

1) 1回目 2回目 3回目 4回目
$\square$ $\square$ $\square$ $\square$
2通り それぞれ2通り それぞれ2通り それぞれ2通り

2) 1枚目 2枚目 3枚目 4枚目
$\square$ $\square$ $\square$ $\square$
2通り それぞれ2通り それぞれ2通り それぞれ2通り

3) 千の位 百の位 十の位 一の位
$\square$ $\square$ $\square$ $\square$
2通り それぞれ2通り それぞれ2通り それぞれ2通り

結果，いずれも $2\times2\times2\times2 = 16$ 通りと分かる．

【例題 15】 $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ の 3 枚のカードから 1 枚引いて記録し，元に戻す操作を 4 回行った．右の $\boxed{}$ にあてはまる数字を答えよ．

1枚目 2枚目 3枚目 4枚目
$\square$ $\square$ $\square$ $\square$
$\boxed{ア}$ 通り それぞれ $\boxed{イ}$ 通り それぞれ $\boxed{ウ}$ 通り それぞれ $\boxed{エ}$ 通り
並べ方は全部で $\boxed{オ}$ 通り

【解答】 ア : **3**，イ : **3**，ウ : **3**，エ : **3**，オ : $3\times3\times3\times3 =$ **81**

重複順列

n 通りの可能性のある操作を，r 回繰り返したときに得られる順列を重複順列といい，その場合の数は $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{ 回}} = n^r$ 通りである．

【練習 16：重複順列】

(1) 表と裏があるコインを 6 回振るときの，出た目の順列は何通りあるか.

(2) $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ の 4 枚のカードから，1 枚引いて元に戻す操作を 3 回行ったとき，引いたカードの順列は何通りあるか.

(3) 5 人 1 組のグループ 3 組から，リーダーを 1 人ずつ選ぶ方法は何通りあるか.

(4) 1, 2, 3 のみを用いた，4 桁以下の整数は何通りあるか.

【解答】

(1)

1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	6 回目
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り

よって，$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^6 =$ **64 通り**

(2)

1 枚目	2 枚目	3 枚目
$\square$	$\square$	$\square$
4 通り	それぞれ 4 通り	それぞれ 4 通り

よって，$4^3 =$ **64 通り**

(3)

1 組目	2 組目	3 組目
$\square$	$\square$	$\square$
5 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 5 通り

よって，$5^3 =$ **125 通り**

(4) 4 桁の数は $3^4 = 81$ 通り，3 桁の数は $3^3 = 27$ 通り，
2 桁の数は $3^2 = 9$ 通り，1 桁の数は $3^1 = 3$ 通り
あるので，全部で $81 + 27 + 9 + 3 =$ **120 通り** ある.

◀ $3^4 = 9 \times 9 = 81$ で計算するとよい.

B. 重複順列に置き換えられる問題

たとえば，集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ の部分集合は，何通りあるか考えてみよう.

A の部分集合には，$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\emptyset$, $\{1, 2, 3, 4\}$ などがあるが，これらを，右図の方法で順列に対応させることができる．結局

「A の部分集合を挙げる」
$\iff$「○か×を 4 回並べる」

ことは 1 対 1 に対応し,「A の部分集合の数」と「○か×を 4 回並べる重複順列の場合の数」は一致する．つまり，A の部分集合は $2^4 = 16$ 通りあると求められる.

		1の有無	2の有無	3の有無	4の有無
$\{1, 2\}$	$\iff$	○	○	×	×
$\{1, 3\}$	$\iff$	○	×	○	×
$\{2, 3, 4\}$	$\iff$	×	○	○	○
$\emptyset$	$\iff$	×	×	×	×
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\iff$	○	○	○	○
Aの部分集合	$\iff$	1の有無	2の有無	3の有無	4の有無

【例題 17】 集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ の部分集合は何通りあるか.

【解答】 X の部分集合を挙げることは，○か×を 5 回並べることに置き換えられるので，部分集合は $2^5 =$ **32 通り** ある.

2. 順列 ${}_n\mathrm{P}_r$

A. 繰り返しのない順列

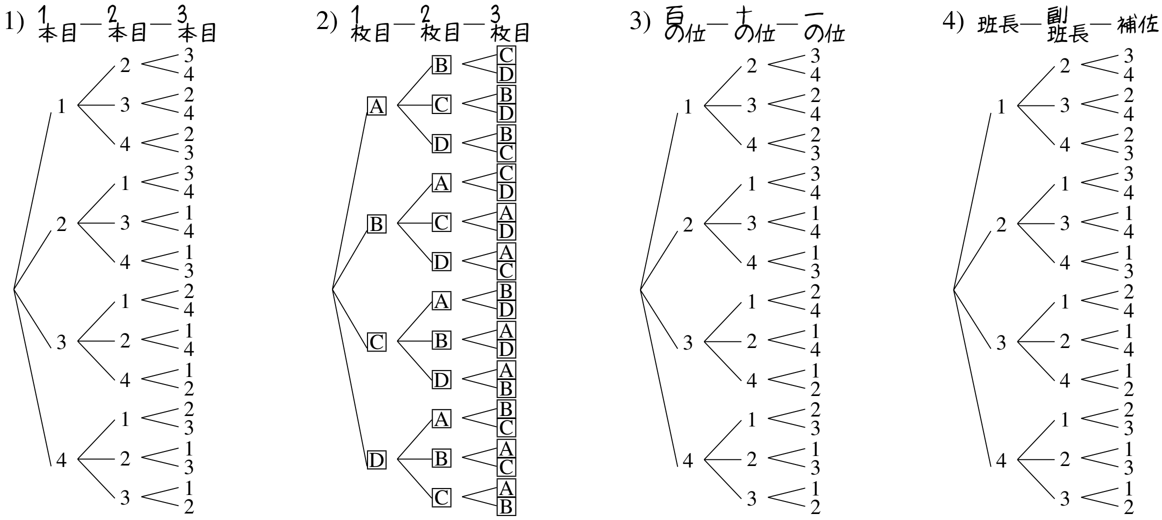
次の 2 つの問題について，樹形図を書いて，何通りあるか考えてみよう．

1) 1, 2, 3, 4 が書いてある 4 本の旗のうち，3 本を用いた旗の並べ方は何通りあるか．

2) $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$ の 4 枚のカードのうち，3 枚を用いてできる順列は何通りあるか．

3) 1 から 4 を重複なく使ってできる，3 桁の整数は何通りあるか．

4) 出席番号 1 から 4 の 4 人から，班長，副班長，補佐を決める方法は何通りあるか．



⇓ 簡略化 ⇓ 簡略化 ⇓ 簡略化 ⇓

1) 1本目 $\square$ 4通り，2本目 $\square$ それぞれ3通り，3本目 $\square$ それぞれ2通り

2) 1枚目 $\square$ 4通り，2枚目 $\square$ それぞれ3通り，3枚目 $\square$ それぞれ2通り

3) 百の位 $\square$ 4通り，十の位 $\square$ それぞれ3通り，一の位 $\square$ それぞれ2通り

4) 班長 $\square$ 4通り，副班長 $\square$ それぞれ3通り，補佐 $\square$ それぞれ2通り

結果，いずれも $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通りと分かる．

特に，1) から 3) の問題はいずれも「4 つの異なるものから，重複なしに 3 つを一列に並べる」操作によって得られる．

【例題 18】 $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$, $\boxed{\mathrm{E}}$ の 5 枚のカードから 1 枚ずつ引いて記録する操作を 3 回行った．右の $\boxed{}$ にあてはまる数字を答えよ．ただし，一度引いたカードは元に戻さないとする．

1枚目 $\square$ $\boxed{ア}$通り，2枚目 $\square$ それぞれ$\boxed{イ}$通り，3枚目 $\square$ それぞれ$\boxed{ウ}$通り

並べ方は全部で$\boxed{エ}$通り

【解答】 ア : **5**，イ : **4**，ウ : **3**，エ : $5 \times 4 \times 3 =$ **60**

【練習 19：順列〜その１〜】

1 から 6 までのカードが 1 枚ずつ，計 6 枚ある．次の順列は何通りあるか．

(1) 2 枚を用いた順列　(2) 3 枚を用いた順列　(3) 4 枚を用いた順列

【解答】

(1) 1つ目　2つ目

$\square$　$\square$

6 通り　それぞれ 5 通り

よって，$6 \times 5 =$ **30 通り**

(2) 1つ目　2つ目　3つ目

$\square$　$\square$　$\square$

6 通り　それぞれ 5 通り　それぞれ 4 通り

よって，$6 \times 5 \times 4 =$ **120 通り**

(3) 1つ目　2つ目　3つ目　4つ目

$\square$　$\square$　$\square$　$\square$

6 通り　それぞれ 5 通り　それぞれ 4 通り　それぞれ 3 通り

よって，$6 \times 5 \times 4 \times 3 =$ **360 通り**

B.　順列 ${}_n\mathrm{P}_r$

ここまで学んだ順列の場合の数は，記号 ${}_n\mathrm{P}_r$ を用いて表されることがある[*2]．

順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ の定義

「n 個の異なるものから r 個を用いて一列に並べる順列」の場合の数を，記号 ${}_n\mathrm{P}_r$（エヌピーアール）で表す（自然数 n と r は $n \geqq r$ とする）．

1 番目	2 番目	3 番目	……	$r-1$ 番目	r 番目
$\square$	$\square$	$\square$	……	$\square$	$\square$
n 通り	それぞれ $n-1$ 通り	それぞれ $n-2$ 通り	……	それぞれ $n-(r-2)$ 通り	それぞれ $n-(r-1)$ 通り

右上の図から，${}_n\mathrm{P}_r$（エヌピーアール）$= \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}_{n\text{ から始まる } r \text{ 個の数の積}}$ で計算できる．

たとえば，p.11 の 1) から 4) はすべて，${}_4\mathrm{P}_3$（よんピーさん）$= \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2}_{4\text{ から始まる } 3\text{ 個の数の積}} = 24$ である．

【例題 20】

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 個の数字を使ってできる 3 桁の整数は，${}_{\boxed{ア}}\mathrm{P}_{\boxed{イ}} = \boxed{ウ}$ 通りある．
2. 5 色の旗を 1 列に並べるときの場合の数は ${}_{\boxed{エ}}\mathrm{P}_{\boxed{オ}} = \boxed{カ}$ 通りある．

【解答】

1. ア：**6**，イ：**3**，ウ：${}_6\mathrm{P}_3 = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}_{6\text{ から始まる } 3\text{ 個の数の積}} =$ **120**
2. エ：**5**，オ：**5**，カ：${}_5\mathrm{P}_5 = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{1\text{ から } 5\text{ までの積}} =$ **120**

[*2] ただし，${}_n\mathrm{P}_r$ はあまり有用な記号ではない．応用範囲が狭く，後に学ぶ記号 ${}_n\mathrm{C}_r$ と混同しやすい．順列の問題は，これまで通り『積の法則』(p.3) で処理するのがよい．

C. 階乗 $n!$

階乗 $n!$ の定義

「異なる n 個すべてを一列に並べる順列」の場合の数を n の**階乗** (factorial) といい，$n!$ で表す．

下の図から，$n! = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{1\text{ から } n \text{ までの自然数の積}}$ となる．

1 番目　2 番目　3 番目　……　$n-1$ 番目　n 番目

$\square$　$\square$　$\square$　……　$\square$　$\square$

n 通り　それぞれ $n-1$ 通り　それぞれ $n-2$ 通り　……　それぞれ 2 通り　それぞれ 1 通り

（例）

$1! = 1$

$2! = 2\cdot 1 = 2$

$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

0 を含む順列，階乗は，${}_n\mathrm{P}_0 = 1$，$0! = 1$ と定義される[*3]．

【例題 21】 ${}_7\mathrm{P}_3$，${}_{10}\mathrm{P}_5$，$6!$，${}_{13}\mathrm{P}_0$ の値を計算せよ．

【解答】 ${}_7\mathrm{P}_3 = \underbrace{7\cdot 6\cdot 5}_{\substack{7\text{ から始まる}\\3\text{ 個の数の積}}} = \mathbf{210}$，　${}_{10}\mathrm{P}_5 = \underbrace{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}_{\substack{10\text{ から始まる}\\5\text{ 個の数の積}}} = \mathbf{30240}$

$6! = \underbrace{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{1\text{ から } 6 \text{ までの積}} = \mathbf{720}$，　${}_{13}\mathrm{P}_0 = 1$

掛け算の順番に気をつけて，順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ の値を計算しよう．たとえば

$${}_8\mathrm{P}_4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 56\cdot 6\cdot 5 = 336\cdot 5 = 1680$$
$${}_8\mathrm{P}_4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 56\cdot 30 = 1680$$

のように，5 と偶数を利用して計算すると，手間が大きく変わる．

D. 順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ と重複順列

同じものを繰り返し用いるときは重複順列になるため，順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ を用いることはできない．

【例題 22】 7 色の絵の具で 3 つの場所を塗る．次の 2 つの場合について $\boxed{}$ に数字を入れよ．

1. 同じ色を使わず塗る場合は

1つ目　2つ目　3つ目

$\square$　$\square$　$\square$

$\boxed{\text{ア}}$ 通り　それぞれ $\boxed{\text{イ}}$ 通り　それぞれ $\boxed{\text{ウ}}$ 通り

であるから，全部で $\boxed{\text{エ}}$ 通りある．

2. 同じ色を使って塗る場合は

1つ目　2つ目　3つ目

$\square$　$\square$　$\square$

$\boxed{\text{オ}}$ 通り　それぞれ $\boxed{\text{カ}}$ 通り　それぞれ $\boxed{\text{キ}}$ 通り

であるから，全部で $\boxed{\text{ク}}$ 通りある．

【解答】

1. ア : **7**，イ : **6**，ウ : **5**，エ : $7\times 6\times 5 = \mathbf{210}$
2. オ : **7**，カ : **7**，キ : **7**，ク : $7\times 7\times 7 = \mathbf{343}$

[*3] 直感的には，次の関係からも簡単に確認できる．

$4! \xrightarrow{\div 4} 3! \xrightarrow{\div 3} 2! \xrightarrow{\div 2} 1! \xrightarrow{\div 1} 0!$　　${}_n\mathrm{P}_3 \xrightarrow{\div(n-2)} {}_n\mathrm{P}_2 \xrightarrow{\div(n-1)} {}_n\mathrm{P}_1 \xrightarrow{\div n} {}_n\mathrm{P}_0$

また，「n 個のものから 0 個を用いて並べる」順列も，「異なる 0 個すべてを一列に並べる」順列も，「何も並べない」という 1 通りしか存在しないことから理解することもできる．

E. 順列と和の法則・積の法則

【練習 23：条件を満たす整数の個数〜その１〜】

(1) 1 から 7 までの数字を重複なく用い，4 桁の数字を作る．

1) 千の位が 5 である整数は何通りか.　　2) 5000 以上の整数は何通りか.

3) 一の位が 2 である整数は何通りか.　　4) 偶数は何通りか.　　5) 奇数は何通りか.

(2) 1 から 7 までの数字を用いて，4 桁の数字を作る．**ただし，同じ数字を繰り返し用いてよい**.

1) 偶数は何通り作れるか.　　2) 5 の倍数は何通り作れるか.

3) 6666 より大きな数は何通り作れるか.

【解答】

(1) 1)

千の位	百の位	十の位	一の位
$\boxed{5}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
1 通り	6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り

$1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 =$ **120 通り**

2)

千の位	百の位	十の位	一の位
$\boxed{5以上}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
3 通り	それぞれ 6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り

$3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 =$ **360 通り**

◀ 千の位が 5, 6, 7 のいずれかであればよい

3)

千の位	百の位	十の位	一の位
$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{2}$
6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り	1 通り

$1 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) =$ **120 通り**

4)

千	百	十	一
$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{2,4,6}$
それぞれ 6 通り			3 通り

$\Rightarrow$

千	百	十	一
$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{2,4,6}$
それぞれ 6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り	3 通り

$3 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) =$ **360 通り**

◀ 一の位が偶数であればよい

◀ 一の位がいくつでも，千の位は 6 通りある

◀ 順列を用いれば $3 \times {}_6\mathrm{P}_3$ となる

5) 偶数でなければよいので，$840 - 360 =$ **480 通り**.

◀ 【別解】一の位が奇数であればよいので，5) と同様に考えて $4 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) =$ **480 通り**.

(2) 1)

千の位	百の位	十の位	一の位
$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{2,4,6}$
それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	3 通り

$3 \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) =$ **1029 通り**

2)

千の位	百の位	十の位	一の位
$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{5}$
それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	1 通り

$1 \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) =$ **343 通り**

◀ 一の位が 5 であればよい

3) 6666 より大きい数は，

千の位	百の位	十の位	一の位	
$\boxed{7}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\leftarrow 7 \times 7 \times 7 = 7^3$ 通り
$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\leftarrow 7 \times 7 = 7^2$ 通り
$\boxed{6}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{}$	$\leftarrow 7$ 通り
$\boxed{6}$	$\boxed{6}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\leftarrow 1$ 通り

◀ 7000 番台

◀ 6700 番台

◀ 6670 番台

◀ 6667

で全てなので，$7^3 + 7^2 + 7 + 1 =$ **400 通り**

【練習 24：条件を満たす整数の個数～その２～】

0 から 5 までの数字を重複なしに使って，3 桁の数字を作る．

(1) 一の位が 0 のとき，何通りの数字作れるか．

(2) 一の位が 2 のとき，何通りの数字作れるか．

(3) 偶数は何通り作れるか．

(4) 5 の倍数は何通り作れるか．

【解答】

(1)

百の位	十の位	一の位
$\square$	$\square$	$\boxed{0}$
5 通り	それぞれ 4 通り	1 通り

$1\cdot(5\cdot 4)=$ **20 通り**

(2)

百の位	十の位	一の位
$\square$	$\square$	$\boxed{2}$
0以外の 4 通り	それぞれ 4 通り	1 通り

$1\cdot(4\cdot 4)=$ **16 通り**

◀ たとえば，百の位が 3 ならば，十の位には 0, 1, 4, 5 の 4 通りを入れることができる．

(3) 1 の位が 0, 2, 4 のいずれかであればよい．
1 の位が 0 のとき，(1) より 20 通り
1 の位が 2 のとき，(2) より 16 通り
1 の位が 4 のとき，(2) と同様にして 16 通り
以上より，$20+16\times 2=$ **52 通り**．

(4) 1 の位が 0, 5 のいずれかであればよい．
1 の位が 0 のとき，(1) より 20 通り
1 の位が 5 のとき，(2) と同様にして 16 通り
以上より，$20+16=$ **36 通り**．

【練習 25：色塗りの方法の個数】

右の A，B，C，D，E に，辺の隣り合う 2 ヶ所は色が異なるよう，色を塗る．

(1) 4 色をすべて使い，A，E が同じ色になるよう塗るならば，塗り方は何通りか．

(2) 4 色をすべて使う塗り方は何通りか．

<table>
<tr><td>B</td><td>D</td><td>E</td></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="2">C</td></tr>
</table>

【解答】

(1) A，E には 4 通り，B にそれぞれ 3 通り，C にそれぞれ 2 通り，D にそれぞれ 1 通りとなり，$4!=$ **24 通り**

(2) A，E が同じ色の時，(1) より 24 通り．A，D が同じ色の時も同様に 24 通り．B，C が同じ色の時，B，E が同じ色の時も 24 通りずつ．よって，$24\times 4=$ **96 通り**

◀ たとえば A と C が同じ色では，辺の隣り合う 2 ヶ所が同じ色になるなど，問題の条件に適さない．

【練習 26：並べ方に条件のある順列〜その１〜】

1 から 7 までの 7 つの数を一列に並べる．

(1) 6 と 7 が隣り合うものは何通りあるか． (2) 5 と 6 と 7 が隣り合うものは何通りあるか．

(3) 両端が 1 と 2 になるものは何通りあるか．

【解答】

(1) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6,\ 7の組}$ の順列で 6! 通り．それぞれについて，6, 7 の並び方は 2! 通りあるので，$6! \times 2 =$ **1440 通り**．

◀ 具体的には，$\boxed{67}$ か $\boxed{76}$

(2) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5,\ 6,\ 7の組}$ の順列で 5! 通り．それぞれについて，5, 6, 7 の並び方は，3! 通りあるので，$5! \times 3! =$ **720 通り**．

(3) 両端には 1 と 2 の順列を考え 2 通り．それぞれについて，両端でない文字は 5! 通りの並び方があるので，$5! \times 2 =$ **240 通り**

◀ 1〇〇〇〇〇2
2〇〇〇〇〇1

【発展 27：並べ方に条件のある順列〜その２〜】

男子 5 人と女子 4 人を一列に並べる．

① 男子は男子で，女子は女子で固まる並べ方は何通りあるか．

② 男子のみ固まる並べ方は何通りあるか．

③ 両端が女子になる並べ方は何通りあるか．

④ どの女子どうしも隣り合わないような並べ方は何通りあるか．

【解答】

① $\boxed{男子5人}$, $\boxed{女子4人}$ の順列で 2! 通り．
どちらの場合も，$\boxed{男子5人}$ の並び方は 5! 通り，
どちらの場合も，$\boxed{女子4人}$ の並び方は 4! 通り，
よって，$2! \times 5! \times 4! =$ **5760 通り**．

◀ 具体的には，$\boxed{男子5人}$ と $\boxed{女子4人}$ のどちらが左か

② $\boxed{女}$, $\boxed{女}$, $\boxed{女}$, $\boxed{女}$, $\boxed{男子の組}$ の並び方で 5! 通り．
それぞれについて，$\boxed{男子の組}$ の並び方は 5! 通り，
よって，$5! \times 5! =$ **14400 通り**．

③ 左端には 4 通りの女子，右端には 3 通りの女子，
それ以外の 7 人が真ん中に並ぶ順列は 7! 通り．
よって，$4 \times 3 \times 7! =$ **60480 通り**．

◀ 順列を用いれば，${}_4P_2 \times 7!$

④ まず男子だけを並べる．この並べ方は 5! 通り．
1 人目の女子が入れる場所は 6 ヶ所ある．
いずれの場合も 2 人目の女子が入れる場所は 5 ヶ所，
3 人目の女子は 4 ヶ所，4 人目の女子は 3 ヶ所あるので，
$5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 =$ **43200 通り**．

◀ ↑のある場所に女子は入れる．
$\boxed{男}$ $\boxed{男}$ $\boxed{男}$ $\boxed{男}$ $\boxed{男}$
↑　↑　↑　↑　↑　↑

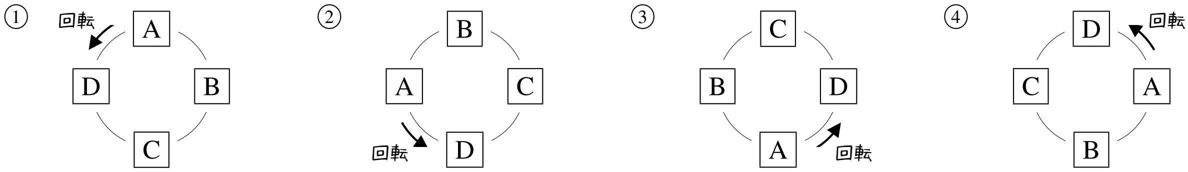
◀ 順列を用いれば，${}_6P_4$ 通り

ものを並べる問題で，“隣り合う”ものを考える場合には，その隣り合うものをひとまとめにして考えるとよい．
一方，ものを並べる問題で，3 つ以上のものが“隣り合わない”ものを考える問題では，隣り合ってもよいものを先に並べるとよい場合が多い．

3. 円順列と商の法則

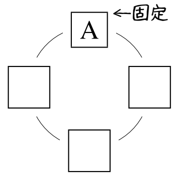
A. 円順列とは

円順列 (circular permutation) とは，複数のものを円形に並べることを意味する．ただし，下の①から④のように，回転させて同じになる場合はすべて同じ並べ方とみなす．



円順列を考えるときは，どれか 1 つを固定して，他を並べればよい．

たとえば，$\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$を円形に並べ方法を考えるとき，どんな円形の並べ方も，回転させて$\boxed{A}$を一番上の位置にできる．



そこで，$\boxed{A}$を固定し，他の$\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$を並べればよい．結局，$\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$の 3 つを 3 ヶ所に並べる順列となり，3! で求められる．

以上の結果は，次のようにしてまとめられる．

円順列

「n 個のものを円形に並べた列」のことを，n 個の**円順列** (circular permutation) といい，n 個のものがすべて区別できる場合，$(n-1)!$ 通りの並べ方がある．

…… 円順列の問題では「誰か 1 人を固定」して考えるようにしよう．

【例題 28】

1. 5 人が円形に並ぶ方法は何通りあるか．
2. 6 個の区別できる石を円形に並べるとき，その円順列は何通りあるか．

【解答】

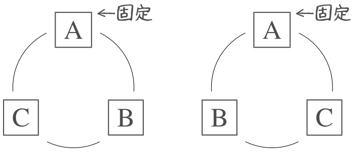
1. 1 人の場所を固定して，他の 4 人を並べればよいので，$4! =$ **24 通り**．
2. 1 個の場所を固定して，他の 5 個を並べればよいので，$5! =$ **120 通り**．

【例題 29】 円形のテーブルがある．ここに，男子 3 人と女子 3 人が男女交互に座る場合の数を考える．男子のうち 1 人を固定すると，残り 2 人の座り方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある．男子がどのように座っても，女子 3 人の座り方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．よって，求める場合の数は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りと分かる．

【解答】 ア : **2**，イ : $3! =$ **6**，ウ : $2 \times 6 =$ **12**

【例題 30】 $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ の 3 枚による円順列を考える．$\boxed{\text{A}}$ の位置を固定して，作ることのできる円順列をすべて図示しなさい．

【解答】 $\boxed{\text{A}}$ を固定して考えれば，次のようになる．



【練習 31：円順列〜その３〜】

両親と 4 人の子供，計 6 人が円形のテーブルに座る．ただし，回転して一致する座り方は同じとする．

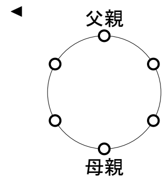
(1) 座り方は全部で何通りか． (2) 両親が真正面に向かい合う座り方は何通りか．

(3) 両親が隣り合う座り方は何通りか．

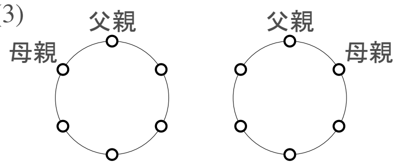
【解答】

(1) 6 人のうち 1 人を固定して考えて，$(6-1)! = 5! =$ **120 通り**

(2) 父親の場所を固定すると，母親の場所は右欄外のように 1 通りに決まる．残りの 4 ヶ所に，4 人の子供が入るので，$4! =$ **24 通り** になる．



(3)

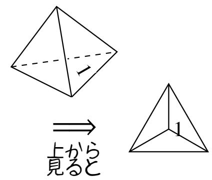


父親の場所を固定する．母親の位置は次の 2 通りがある．いずれの場合も，子供の並び方は 4! 通りあるので，全部で $2 \cdot 4! =$ **48 通り** になる．

【発展 32：正四面体の順列】

正四面体の 4 つの面に番号を 1 から 4 までつけるとき，番号のつけ方は何通りか．ただし，回転して一致する場合は，同じ番号のつけ方とする．

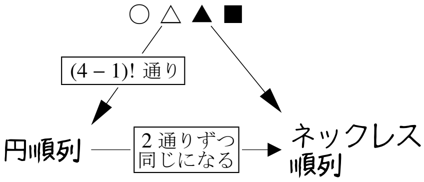
【解答】 底面の番号を 1 に固定する．これを上から見ると，3 つの場所に 2, 3, 4 の数字を入れる円順列になるので，$(3-1)! = 2! =$ **2 通り** ある．

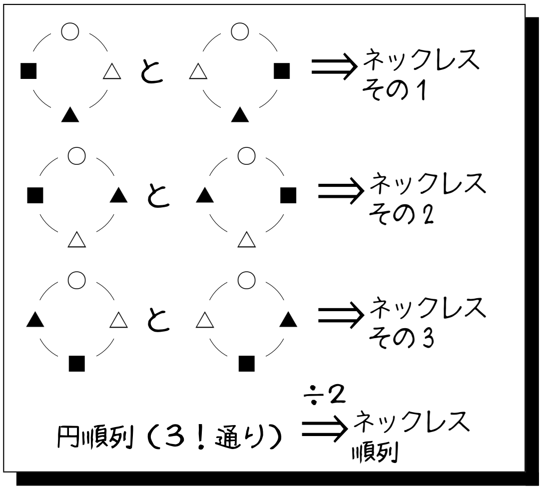


B.　ネックレス順列（数珠順列）

○，△，▲，■の 4 つの石を使ってネックレスを作る方法が何通りあるか考えよう．

- まず，4 つの石○，△，▲，■を円順列に並べる．これは，$(4-1)!$ 通りである．
- 表裏の関係にある円順列は，同じネックレスになるので，円順列 2 つずつが同じになる．

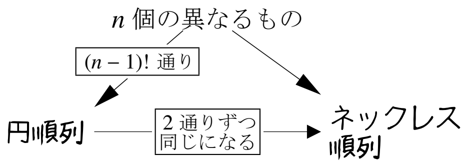




こうして，$(4-1)! \div 2 = 3$ 通りのネックレスを作ることができると分かる．

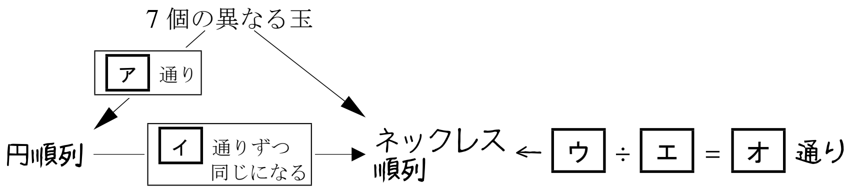
ネックレス順列（数珠順列）

「裏返すことが可能な，n 個のものを円形に並べた列」のことを，n 個の**ネックレス順列** (nacklace permutation) または**数珠順列**（じゅず） (beads permutation) といい，n 個（$2 \leqq n$）のものがすべて区別できる場合，$\dfrac{(n-1)!}{2}$ 通りある．



【暗記 33：ネックレス順列と商の法則】

7 個の異なる玉から作る順列について，以下の $\boxed{}$ に適当な値・式を入れなさい．



【解答】　ア : $(7-1)! =$ **6!**（または **720**），イ : **2**，
ウ : **6!**（または **720**），エ : **2**，オ : **360**

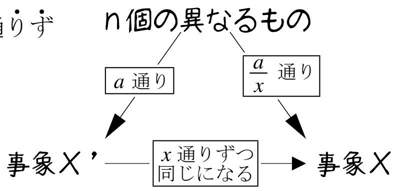
C.　商の法則 〜 同じ結果になるものをまとめる

商の法則

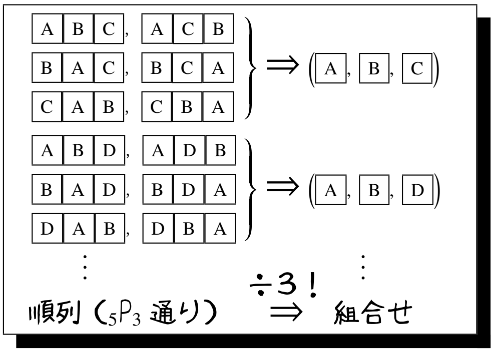
2 つの事象 X'，X について，X' の起こり方が a 通り，事象 X' の x 通りずつをまとめて事象 X になるならば

事象 X が起こる場合は $\dfrac{a}{x}$ 通り

ある．このことを**商の法則** (division law) という．



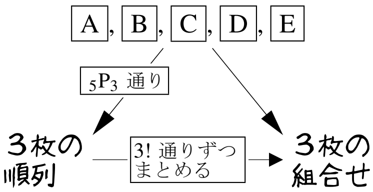
1. 組合せ $_nC_r$



A. 順列と組合せ

「5 枚のカード $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$ のうち 3 枚を使った組合せは何通りか」という問題は次の 2 段階に分けて考えることができる.

- $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$ の 5 枚のうち 3 枚を使った順列を考えると，$_5P_3 = 5\cdot4\cdot3$ 通りある.
- 順列としては異なるが，組合せとしては同じになるものが，3! 通りずつある.

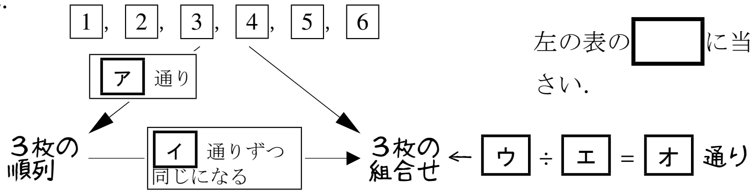


つまり，商の法則から次のように求めることができる.

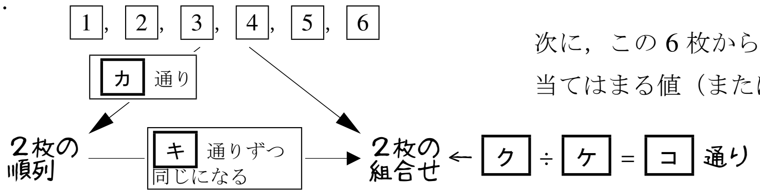
$$\frac{_5P_3}{3!} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = \frac{5\cdot\cancel{4}^2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} = 10 \text{ 通り}$$

【例題 34】 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ のカードが 1 枚ずつ，計 6 枚ある.

1. $\boxed{1\,|\,2\,|\,3}$ という順列は，組合せとしては $\boxed{1\,|\,3\,|\,2}$ と同じである.
   他に，$\boxed{1\,|\,2\,|\,3}$ と同じ組合せになる順列を，辞書順ですべて挙げよ.
2. 左の表の $\boxed{}$ に当てはまる値（または，式）を答えなさい.



3. 次に，この 6 枚から 2 枚選ぶとき，左の表の $\boxed{}$ に当てはまる値（または，式）を答えなさい.



【解答】

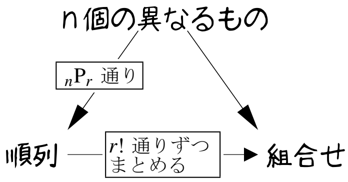
1. $\boxed{2\,|\,1\,|\,3}$, $\boxed{2\,|\,3\,|\,1}$, $\boxed{3\,|\,1\,|\,2}$, $\boxed{3\,|\,2\,|\,1}$
2. ア : **120**（または $_6P_3$），イ : **6**（または **3!**）
   ウ : **120**（または $_6P_3$），エ : **6**（または **3!**），オ : **20**
3. カ : **30**（または $_6P_2$），キ : **2**（または **2!**）
   ク : **30**（または $_6P_2$），ケ : **2**（または **2!**），コ : **15**

B.　組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$

組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ の定義

「n 個の異なるものから r 個を選ぶ**組合せ**（combination）」の場合の数を，記号 $\overset{\text{エヌシーアール}}{{}_n\mathrm{C}_r}$ で表し，次で計算できる[*4]（n と r は $n \geqq r$ である正の整数とする）.

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{n\text{ から始まる } r \text{ 個の数の積}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から } 1 \text{ までの積}}} $$



たとえば，「12 人の班から 3 人を選ぶ組合せ」の場合の数は ${}_{12}\mathrm{C}_3$ であり，これは

$$ {}_{12}\mathrm{C}_3 = \frac{\overbrace{12\cdot 11\cdot 10}^{12\text{ から始まる } 3\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{3\text{ から } 1\text{ までの積}}} = \frac{\cancel{12}\,\cancel{4}^{2}\cdot 11\cdot 10}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 2\cdot 11\cdot 10 = 220 $$ と計算できるので，220 通りである.

【例題 35】 ${}_5\mathrm{C}_2$，${}_{10}\mathrm{C}_3$ の値をそれぞれ求めよ.

【解答】 $ {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{\overbrace{5\cdot 4}^{5\text{ から始まる } 2\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{2\text{ から } 1\text{ まで}}} = \mathbf{10}$，${}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{\overbrace{10\cdot 9\cdot 8}^{10\text{ から始まる } 3\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{3\text{ から } 1\text{ まで}}} = \mathbf{120}$

【例題 36】 次の $\boxed{}$ に当てはまる数字を答えなさい.

1. 15 人のクラスから 2 人の委員を選ぶ組合せの場合の数は，${}_{\boxed{ア}}\mathrm{C}_{\boxed{イ}} = \boxed{ウ}$ 通りある.
2. 8 個の異なる石から 4 個の石を選ぶ組合せの場合の数は，${}_{\boxed{エ}}\mathrm{C}_{\boxed{オ}} = \boxed{カ}$ 通りある.
3. 異なるボールが 20 個入った袋から 3 個を選ぶ組合せの場合の数は，${}_{\boxed{キ}}\mathrm{C}_{\boxed{ク}} = \boxed{ケ}$ 通りある.

【解答】

1. ア : **15**，イ : **2**，ウ : ${}_{15}\mathrm{C}_2 = \frac{15\cdot\cancel{14}^{7}}{\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{105}$ **通り**
2. エ : **8**，オ : **4**，カ : ${}_8\mathrm{C}_4 = \frac{\cancel{8}^{2}\cdot 7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{70}$ **通り**
3. キ : **20**，ク : **3**，ケ : ${}_{20}\mathrm{C}_3 = \frac{20\cdot 19\cdot\cancel{18}\,\cancel{6}^{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{1140}$ **通り**

${}_n\mathrm{C}_r$ を計算するときは，約分の方法を工夫するようにしよう.

[*4] 次の等式も成り立つ．ただし，${}_n\mathrm{C}_r$ の値を計算するときには必要がない.

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{n\text{ から始まる } r\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{r(r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から } 1\text{ までの積}}} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}^{n\text{ から } 1\text{ までの積}}}{\underbrace{r(r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から } 1\text{ までの積}}\ \underbrace{(n-r)(n-r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{n-r\text{ から } 1\text{ までの積}}} = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

【練習 37：${}_nC_r$ の計算練習】

(1) ${}_5C_2$，${}_{10}C_3$，${}_{20}C_2$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 30 人のクラスの中から，3 人の委員を選ぶ方法は何通りあるか．

(3) 10 個の点から 4 点を選ぶ方法は何通りあるか．

【解答】

(1) ${}_5C_2 = \dfrac{\overbrace{5\cdot 4}^{\text{5 から始まる 2 個の数の積}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{\text{2 から 1 まで}}} = \mathbf{10}$，${}_{10}C_3 = \dfrac{\overbrace{10\cdot 9\cdot 8}^{\text{10 から始まる 3 個の数の積}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{\text{3 から 1 まで}}} = \mathbf{120}$，${}_{20}C_2 = \dfrac{\overbrace{20\cdot 19}^{\text{20 から始まる 2 個の数の積}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{\text{2 から 1 まで}}} = \mathbf{190}$

(2) ${}_{30}C_3 = \dfrac{\cancel{30}^{10}\cdot 29\cdot \cancel{28}^{14}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{4060}$ **通り**

(3) ${}_{10}C_4 = \dfrac{10\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}^{2}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{210}$ **通り**

C.　${}_nC_0$，${}_nC_n$ の値

${}_nC_0$ の値も[*5]，${}_nC_n$ の値も[*6]，必ず 1 になる．たとえば，${}_{10}C_0 = 1$，${}_{10}C_{10} = 1$ である．

D.　等式 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

たとえば，10 人の集まりから 7 人を選ぶとき，次のどちらを行ってもよい．

- 選ばれる 7 人を決める，これは ${}_{10}C_7$ 通りある．
- 選ばれない 3 人を決める，これは ${}_{10}C_3$ 通りある．

$${}_{10}C_7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}}{\cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = {}_{10}C_3$$

結局，${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3$ である．これは，右の計算式からも分かり，一般には，${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ が成り立つ[*7]．

r が n の半分より大きい値の場合は，${}_nC_r$ でなく ${}_nC_{n-r}$ を計算するとよい．

【例題 38】

1. ${}_3C_0$，${}_4C_4$ の値をそれぞれ求めよ．
2. ${}_{100}C_{98} = {}_{100}C_{\boxed{ア}} = \boxed{イ}$
3. ${}_{12}C_{10}$，${}_{20}C_{17}$ の値をそれぞれ求めよ．
4. 13 人の中から 9 人を選ぶ方法は何通りか．

【解答】

1. ${}_3C_0 = \mathbf{1}$，${}_4C_4 = \mathbf{1}$

◀または，${}_4C_4 = \dfrac{\overbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}^{\text{4 から始まる 4 個の数の積}}}{\underbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{\text{4 から 1 まで}}} = \mathbf{1}$

2. ア :**2**，イ :${}_{100}C_2 = \dfrac{100\cdot 99}{2} = \mathbf{4950}$
3. ${}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \dfrac{\cancel{12}^{6}\cdot 11}{\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{66}$，${}_{20}C_{17} = {}_{20}C_3 = \dfrac{\cancel{20}^{10}\cdot 19\cdot\cancel{18}^{6}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{1140}$
4. ${}_{13}C_9 = {}_{13}C_4 = \dfrac{13\cdot\cancel{12}\cdot 11\cdot\cancel{10}^{5}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{715}$ **通り**

◀13 人から 9 人を選ぶことは，13 人から選ばない 4 人を決めることと同じである．

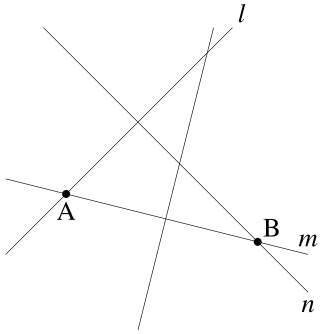
[*5] ${}_nC_0 = \dfrac{{}_nP_0}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1$ である．これは，「n 個のものから 0 個を選ぶ」方法は「何も選ばない」という 1 通りしか存在しないことからも理解することができる．

[*6] ${}_nC_n = \dfrac{{}_nP_n}{n!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$ である．これは，「n 個のものから n 個を選ぶ」方法は「すべてを選ぶ」という 1 通りしか存在しないことから理解することができる．

[*7] n 個の異なるものから r 個を選ぶとき，「選ばれる r 個を決める」ことと「選ばれない $n-r$ 個を決めること」は 1 対 1 に対応することからも理解できる．

E. 組合せに置き換えられる問題

右図には直線が 4 本，平面上に引かれている．この 4 本の直線が作る交点の数は，組合せを用いて求めることができる．



まず，2 本の直線を選ぶと，交点が 1 つ決まる．たとえば

交点 A を選ぶ $\Leftarrow$ 直線 l, m を選ぶ

逆に，交点を 1 つ選ぶと，交点を作る 2 直線が決まる．

交点 B を選ぶ $\Rightarrow$ 直線 m, n を選ぶ

こうして，「直線の交点の数」=「直線 2 本の選び方」と分かる．「直線 2 本の選び方」は ${}_4C_2$ 通り なので，「直線の交点の数」は 6 点あると求められる．

【例題 39】 平面上に，どの 2 本を選んでも互いに平行でない，8 本の直線が引かれている．ただし，どの 3 本も 1 点で交わらないものとする．

1. この平面上で直線の交点を 1 つ選ぶことは，$\boxed{\text{ア}}$本の直線を選ぶことと一致する．よって，この平面上に，直線の交点は$\boxed{\text{イ}}$個ある．
2. この平面上で三角形を 1 つ選ぶことは，$\boxed{\text{ウ}}$本の直線を選ぶことと一致する．よって，この平面上に，三角形は$\boxed{\text{エ}}$個ある．

【解答】

1. ア: **2**，イ: ${}_8C_2 = \dfrac{\cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{2}} = \mathbf{28}$
2. ウ: **3**，エ: ${}_8C_3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \mathbf{56}$

◀ 8 本の直線から，交点を決める 2 本を選ぶ組合せ

◀ 8 本の直線から，三角形を決める 3 本を選ぶ組合せ

F. 組合せと和の法則・積の法則

【例題 40】 男子が 5 人，女子が 5 人いる中で，4 人を選ぶ場合の数について以下の問に答えよ．

1. 男子から 2 人，女子から 2 人選ぶときの場合の数は何通りか．
2. 男子から 2 人以上選ぶ場合の数は何通りか．

【解答】

1. 男子 2 人の組合せは ${}_5C_2$ 通り，そのどの場合も女子 2 人の組合せが ${}_5C_2$ 通りあるので，${}_5C_2 \cdot {}_5C_2 = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = $ **100 通り**．
2. 男子が 2 人のときは，1. より 100 通り．
   男子を 3 人選ぶときは，女子を 1 人選ぶので
   ${}_5C_3 \cdot {}_5C_1 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \dfrac{5}{1} = 50$ 通り．
   4 人とも男子を選ぶときは ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$ 通り．
   よって，$100 + 50 + 5 =$ **155 通り**．

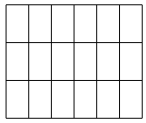
◀『積の法則』(p.3)

◀『積の法則』(p.3)

◀ 和の法則

【練習 41：四角形・対角線】

(1) 右図のように，横に 4 本，縦に 7 本の直行する平行線が引かれている．この中に長方形はいくつあるか求めよ．



(2) 正十角形の対角線の本数を求めよ．

【解答】

(1) 横 4 本のうちから 2 本，縦 7 本のうちから 2 本をそれぞれ選べば，1 個の長方形が定まる．よって

$${}_4C_2 \cdot {}_7C_2 = \mathbf{126}\ \textbf{個}$$

(2) 10 個の頂点のうち 2 個を選べば，1 本の対角線か辺が定まる．辺の数は 10 本あるので，これを除いて

$${}_{10}C_2 - 10 = 45 - 10 = \mathbf{35}\ \textbf{本}$$

◀ 正十角形を実際に書いて考えてみよう

G. 組分けの問題 〜 組合せと商の法則

【例題 42】 10 人を次のように分ける方法は何通りあるか．

1. 7 人，3 人に分ける．
2. 5 人，3 人，2 人に分ける．

【解答】

1. 10 人から 3 人を選びグループとするのが ${}_{10}C_3$ 通り，残った 7 人から 7 人を選んで ${}_7C_7$ 通り，よって

$${}_{10}C_3 \cdot {}_7C_7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = \mathbf{120}\ \textbf{通り}$$

2. 10 人から 2 人を選びグループとするのが ${}_{10}C_2$ 通り，残った 8 人から 3 人を選んで ${}_8C_3$ 通り，さらに残った 5 人を 5 人でまとめて ${}_5C_5$ 通り，よって

$${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_3 \cdot {}_5C_5 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = \mathbf{2520}\ \textbf{通り}$$

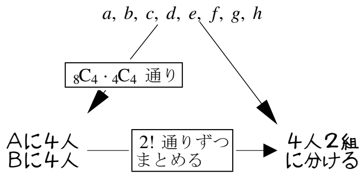
◀ まず 5 人を選び，次に 3 人を選ぶ，という順序で計算しても，同じ結果になるが，計算は複雑になる

組分けの問題においては，人数の少ない組から ${}_nC_r$ を計算するとよい．

たとえば，8 人を組分ける方法として，次の 2 通りを考えてみよう．

1) グループ A に 4 人，グループ B に 4 人に分ける．
　8 人から，グループ A の 4 人を選ぶ方法は ${}_8C_4$，残りはそのままグループ B になるので，${}_8C_4 = 70$ 通り．

2) 4 人 2 組に分ける．
　8 人を a, b, c, d, e, f, g, h とする．ここで，次の組分け i.，ii. を考えよう．
　i. 初めの 4 人において (a, b, c, d) を選ぶ
　　$\to$ (a, b, c, d) と (e, f, g, h) の 2 組
　ii. 初めの 4 人において (e, f, g, h) を選ぶ
　　$\to$ (e, f, g, h) と (a, b, c, d) の 2 組



上の i.，ii. の組分けは 1) においては異なる．
しかし 2) においては，i.，ii. の組分けは同じになる．結局，右上の表を書くことができ，商の法則によって ${}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \div 2! = 35$ 通りと求められる．

組分けの問題は，「各グループが区別できる場合」を基本に考えるとよい．この場合が，もっとも簡単に計算できるからである．

【練習 43：組分け】

10 人を次のように分ける方法は何通りあるか．

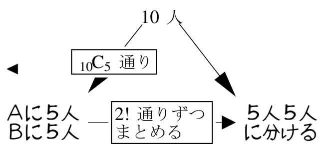
(1) 5 人，5 人に分ける．　　(2) 4 人，3 人，3 人に分ける．

(3) 2 人，2 人，2 人，2 人，2 人に分ける．

【解答】

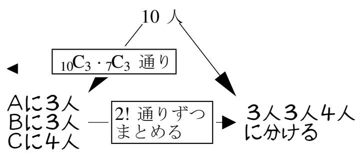
(1) 10 人から，A 組として 5 人を選ぶのが ${}_{10}C_5$ 通り，残りは B 組．
　A と B の区別をなくすために 2! で割ればよいので

$$\frac{{}_{10}C_5}{2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = \textbf{126 通り}$$



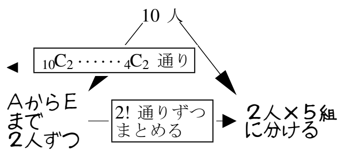
(2) 10 人から，A 組として 3 人を選ぶのが ${}_{10}C_3$ 通り，
　残りの 7 人から B 組 3 人を選ぶのが ${}_7C_3$ 通り，残りは C 組．
　A と B の区別をなくすために 2! で割ればよいので

$$\frac{{}_{10}C_4 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = \textbf{2100 通り}$$



(3) A 組から E 組まで 2 人ずつを選ぶのが ${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2$ 通り，
　A から E までの区別をなくすために 5! で割って

$$\frac{{}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2}{5!}$$
$$= \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \textbf{945 通り}$$



2. 同じものを含むときの順列

A. 同じものを含むときの順列

$\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{C}}$ の 7 枚を 1 列に並べる順列が何通りあるのか考えてみよう.

これを，通常の順列のように考えることはできない．7 枚のカードがあるが，カードは 7 種類ではないからである.

1枚目	2枚目	3枚目	4枚目	5枚目	6枚目	7枚目
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
↑ 3通り??						

B. 組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いて考える

カード置き場を 7 ヶ所用意しておく.

まず，2 枚の $\boxed{\text{C}}$ の置き場を選ぶ（${}_7\mathrm{C}_2$ 通り）.

いずれの場合も，残りの置き場は 5 ヶ所ある.

ここから，2 枚の $\boxed{\text{B}}$ の置き場を選ぶ（${}_5\mathrm{C}_2$ 通り）.

どの場合でも，残りの置き場は 3 ヶ所あるから，

3 枚の $\boxed{\text{A}}$ を入れる（${}_3\mathrm{C}_3$ 通り）.

以上から，7 枚のカード $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{C}}$ を 1 列に並べる順列は『積の法則』(p.3) によって，次で計算できる.

$$
\begin{aligned}
&{}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_3 \\
=&\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}\times\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\times\frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 210 \ \text{通り}
\end{aligned}
$$

7 つのカード置き場をまず用意しておく

$\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$

↓ 7 つの置き場から 2 つ選び C を配置する（${}_7\mathrm{C}_2$ 通り）

$\square\ \square\ \boxed{\text{C}}\ \square\ \square\ \square\ \boxed{\text{C}}$

↓ 残り 5 つの置き場から 2 つ選び B を配置する（${}_5\mathrm{C}_2$ 通り）

$\boxed{\text{B}}\ \square\ \boxed{\text{C}}\ \square\ \square\ \boxed{\text{B}}\ \boxed{\text{C}}$

↓ 残り 3 つの置き場へは A を配置する（${}_3\mathrm{C}_3$ 通り）

$\boxed{\text{B}}\ \boxed{\text{A}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{A}}\ \boxed{\text{A}}\ \boxed{\text{B}}\ \boxed{\text{C}}$

A の置き場，B の置き場，C の置き場の順で決めてもよいが，${}_7\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2$ は計算量が多くなる.
一般に，数の少ないものから場所を決めるとよい.

【例題 44】 次の場合の数を，上の方法で求めなさい.

1. 8 つの数字 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 を一列に並べる方法が何通りあるか.
2. 7 つのアルファベット S，C，I，E，N，C，E を一列に並べる方法が何通りあるか.

【解答】

1. 数字を置く場所を 8 つ用意する.
   1 を置く 2 ヶ所は ${}_8\mathrm{C}_2$ 通り，2 を置く 3 ヶ所は ${}_6\mathrm{C}_3$ 通り，
   残り 3 ヶ所に 3 を置くので，『積の法則』(p.3) より
   $${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3 = \mathbf{560} \ \textbf{通り}$$
2. S，I，N が 1 つずつ，C と E が 2 つずつなので
   $${}_7\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 7\times 6\times 5\times\frac{\cancel{4}^{2}\cdot 3}{\cancel{2}} = \mathbf{1260} \ \textbf{通り}$$

C. 商の法則を用いて考える

まず，$\boxed{A_1}$, $\boxed{A_2}$, $\boxed{A_3}$, $\boxed{B_1}$, $\boxed{B_2}$, $\boxed{C_1}$, $\boxed{C_2}$ の 7 枚を並べる順列を考える．これは，7! 通りある．

次に，$\boxed{A_1}$, $\boxed{A_2}$, $\boxed{A_3}$ の 3 枚をすべて $\boxed{A}$ に戻す．これによって，3! 通りずつまとめられる．

さらに，$\boxed{B_1}$, $\boxed{B_2}$ の 2 枚をすべて $\boxed{B}$ に戻す．これによって，2! 通りずつまとめられる．

最後に，$\boxed{C_1}$, $\boxed{C_2}$ の 2 枚をすべて $\boxed{C}$ に戻す．これによって，2! 通りずつまとめられる．

以上から，商の法則によって次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
7! \div 3! \div 2! \div 2! &= \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} \\
&= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 210 \text{ 通り}
\end{aligned}
$$

まず $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2$ の 7 枚を並べる

（並べ方は 7! 通りある）

$\boxed{B_2}$ $\boxed{A_2}$ $\boxed{C_1}$ $\boxed{A_3}$ $\boxed{A_1}$ $\boxed{B_1}$ $\boxed{C_2}$

$\div 3!$ ↓ A_1, A_2, A_3 の区別をなくす（3! 通りずつまとめる）

$\boxed{B_2}$ $\boxed{A}$ $\boxed{C_1}$ $\boxed{A}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B_1}$ $\boxed{C_2}$

$\div 2!$ ↓ B_1, B_2 の区別をなくす（2! 通りずつまとめる）

$\boxed{B}$ $\boxed{A}$ $\boxed{C_1}$ $\boxed{A}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C_2}$

$\div 2!$ ↓ C_1, C_2 の区別をなくす（2! 通りずつまとめる）

$\boxed{B}$ $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{A}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$

【例題 45】 次の場合の数を，上の方法で求めなさい．

1. 8 つの数字 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 を一列に並べる方法が何通りあるか．
2. 7 つのアルファベット S，C，I，E，N，C，E を一列に並べる方法が何通りあるか．

【解答】

1. 1_a，1_b，2_a，2_b，2_c，3_a，3_b，3_c の順列は 8! 通り，
   1_a，1_b の区別をなくすには 2! ずつまとめ，
   2_a，2_b，2_c の区別をなくすには 3! ずつまとめ，
   3_a，3_b，3_c の区別をなくすには 3! ずつまとめることになる．よって，商の法則より $\dfrac{8!}{2!3!3!}$ = **560 通り** になる．
2. 全部で 7 文字あり，C と E が 2 つずつ，S，I，N が 1 つずつなので
   $\dfrac{7!}{2!2!1!1!1!}$ = **1260 通り**

同じものを含む順列の計算

「k 個の同じもの，l 個の同じもの，m 個の同じもの」による順列の総数は

- 「組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いて」${}_{k+l+m}\mathrm{C}_k \times {}_{l+m}\mathrm{C}_l \times {}_m\mathrm{C}_m$ 通りと求められる．
- 「商の法則を用いて」$\dfrac{(k+l+m)!}{k!l!m!}$ 通りと求められる．

これら 2 つの結果は，次のようにして等しいことが分かる．

$$
{}_{k+l+m}\mathrm{C}_k \times {}_{l+m}\mathrm{C}_l \times {}_m\mathrm{C}_m = \frac{(k+l+m)!}{\cancel{(l+m)!}k!} \times \frac{\cancel{(l+m)!}}{\cancel{m!}l!} \times \frac{\cancel{m!}}{0!m!} = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}
$$

どちらのやり方も，4 種類以上のものを含む順列にも応用できる．

上の計算は「なぜそうなるのか」を理解していないと，やり方を忘れてしまいやすい．

【例題 46】 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$ を 1 列に並べる方法を，次の 2 通りで求めたい.

1. 「組合せを用いて求める」

8 つのカード置き場をまず用意しておく

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

↓ 2 ヶ所選んで $\boxed{3}$ を配置（$_{\boxed{ア}}\mathrm{C}_{\boxed{イ}}$ 通り）

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{3}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{3}$

↓ 3 ヶ所選んで $\boxed{2}$ を配置（$_{\boxed{ウ}}\mathrm{C}_{\boxed{エ}}$ 通り）

$\boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

↓ 残りの置き場へは $\boxed{1}$ を配置（$_{\boxed{オ}}\mathrm{C}_{\boxed{カ}}$ 通り）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

以上より，計算式 $\boxed{キ}$ によって $\boxed{ク}$ 通りと求められる.

2. 「商の法則を用いて求める」

まず $1_A, 1_B, 1_C, 2_A, 2_B, 2_C, 3_A, 3_B$ の 8 枚を並べる（並べ方は $\boxed{ケ}$ 通りある）

$\boxed{2_B}\ \boxed{1_B}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2_C}\ \boxed{1_C}\ \boxed{1_A}\ \boxed{2_A}\ \boxed{3_B}$

↓ $1_A, 1_B, 1_C$ の区別をなくす（$\boxed{コ}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2_B}\ \boxed{1}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2_C}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2_A}\ \boxed{3_B}$

↓ $2_A, 2_B, 2_C$ の区別をなくす（$\boxed{サ}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3_B}$

↓ $3_A, 3_B$ の区別をなくす（$\boxed{シ}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

以上より，計算式 $\boxed{ス}$ によって $\boxed{セ}$ 通りと求められる.

【解答】

1. ア, イ : $_8\mathrm{C}_2$　　ウ, エ : $_6\mathrm{C}_3$　　オ, カ : $_3\mathrm{C}_3$

キ, ク : $_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3 = \mathbf{560}$ **通り**

2. ケ : **8!**　　コ : **3!**　　サ : **3!**　　シ : **2!**

ス, セ : $\dfrac{\mathbf{8!}}{\mathbf{3!\cdot 3!\cdot 2!}} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)} = \mathbf{560}$ **通り**

「組合せ $_n\mathrm{C}_r$ を用いて」解く方が仕組みを理解しやすいが，「商の法則を用いて」解く方が計算しやすい．今後このテキストでは，主に「商の法則を用いて」解いて話を進める.

【練習 47：同じものを含む順列〜その１〜】

(1) a, a, a, b, b を並び替えるとき，何通りの並べ方があるか.

(2) 1, 2, 3 を 2 個ずつ用いてできる 6 桁の整数は何通りあるか.

(3) S，U，U，G，A，K，U，A を並び替えるとき，何通りの並べ方があるか.

【解答】

(1) a を 3 つ，b を 2 つ含む順列であるので $\dfrac{5!}{3!2!} = \mathbf{10}$ **通り**

◀ または，$_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り

(2) 1, 2, 3 を 2 つずつ含む順列であるので

$$\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1}{(\cancel{2}\cdot 1)\cdot(\cancel{2}\cdot 1)\cdot(\cancel{2}\cdot 1)} = \mathbf{90}\ \textbf{通り}$$

◀ または，$_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 = 90$ 通り

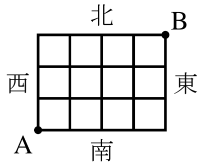
(3) U を 3 つ，A を 2 つ，S，G，K を 1 つずつ含むから

$$\frac{8!}{3!2!1!1!1!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = \mathbf{3360}\ \textbf{通り}$$

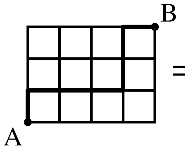
◀ または，$_8\mathrm{C}_1 \cdot {}_7\mathrm{C}_1 \cdot {}_6\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 =$ 3360 通り

D. 同じものを含む順列の応用 〜 最短経路の数

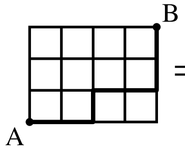
右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路があるとき，A 地点から B 地点への最短経路について考えよう．



ここで，北に 1 区画進むことを↑，東に 1 区画進むことを→で表すとすれば，すべての最短経路を↑と→で表すことができる．



⇒ 「↑→→→↑↑→」

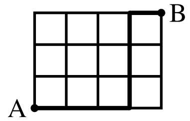


⇒ 「→→↑→→↑↑」

逆に，右の例のように，「↑ 3 つと→ 4 つが作る順列」を 1 つ決めれば，最短経路はただ 1 つに決まる．こうして，「A から B までの最短経路」は，「↑ 3 つと→ 4 つの順列」と 1 対 1 に対応し

「→→→↑↑↑→」

⇓

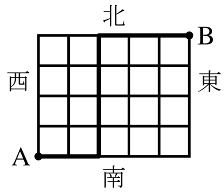


$\dfrac{7!}{3!4!} = 21$ 通り（または ${}_7C_3 = 21$ 通り） ←『同じものを含む順列の計算』を用いた

と求めることができる．

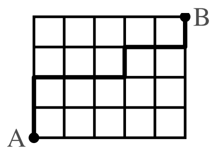
【例題 48】 右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．A 地点から B 地点への最短経路について以下の問に答えよ．

1. A 地点から「↑↑→→→↑→→↑」と進んだときの経路を図示しなさい．
2. 右図の太線のように進んだときの経路を「↑」「→」を用いて表しなさい．
3. A 地点から B 地点まで進むには「↑」へ $\boxed{\text{ア}}$ 回，「→」へ $\boxed{\text{イ}}$ 回進めばよいので，最短経路の場合の数は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りであると分かる．



【解答】

1.



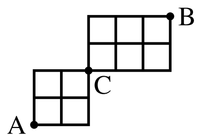
2. →→↑↑↑↑→→→
3. ア : **4**，イ : **5**

   ウ : $\dfrac{9!}{4!5!} = \mathbf{126}$ **通り**

◀ または ${}_9C_4 = \mathbf{126}$ **通り**

【例題 49】 右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．

1. A から C への最短経路は全部で何通りあるか求めよ．
2. C から B への最短経路は全部で何通りあるか求めよ．
3. A から C を通って B へ進む最短経路は全部で何通りあるか求めよ．



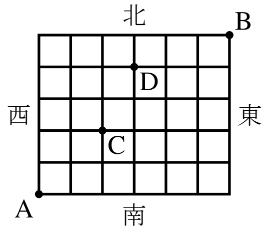
【解答】

1. $\dfrac{4!}{2!2!} = \mathbf{6}$ **通り**
2. $\dfrac{5!}{2!3!} = \mathbf{10}$ **通り**
3. $6 \times 10 = \mathbf{60}$ **通り**

◀ A から C へどのように進んでも（6 通り），それぞれ，C から B へ 10 通り行き方がある．

【練習 50：最短経路】

右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．A 地点から B 地点への最短経路について以下の問に答えよ．



(1) 最短経路は全部で何通りあるか求めよ．

(2) C 地点を通る最短経路は何通りあるか．また，D 地点を通る最短経路は何通りあるか，それぞれ求めよ．

(3) C 地点または D 地点を通る最短経路は何通りあるか求めよ．

【解答】

(1) 最短経路の数は，↑ 5 つと→ 6 つの順列の場合の数と一致するので

$\dfrac{11!}{5!6!} = \mathbf{462}$ **通り**　　または　${}_{11}C_5 = \mathbf{462}$ **通り**

◀『同じものを含む順列』(p.26)

(2) （C 地点を通る最短経路）

A〜C の最短経路の数は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り，

◀ ↑ 2 つ，→ 2 つの順列に一致

それぞれに対し，

◀「それぞれに」あるので積の法則

C〜B の最短経路の数は $\dfrac{7!}{3!4!}$ 通り あるので

◀ ↑ 3 つ，→ 4 つの順列に一致

$\dfrac{4!}{2!2!} \times \dfrac{7!}{3!4!} = 6 \times 35 = \mathbf{210}$ **通り**

◀ または，${}_4C_2 \cdot {}_7C_3 = 210$

（D 地点を通る最短経路）

同様にして $\dfrac{7!}{4!3!} \times \dfrac{4!}{1!3!} = 35 \times 4 = \mathbf{140}$ **通り**

◀ A から D までは↑ 4 つ，→ 3 つ
D から B までは↑ 1 つ，→ 3 つ
の順列に一致する

(3) 集合 C，D をそれぞれ

C : C 地点を通る最短経路，D : D 地点を通る最短経路

とおくと，求める値は $n(C \cup D)$ である．ここで，$n(C \cap D)$ は，C，D 両地点を通る最短経路の数であり

$$n(C \cap D) = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{2!1!} \times \frac{4!}{1!3!} = 6 \times 3 \times 4 = 72$$

◀ A から C までは↑ 2 つ，→ 2 つ
C から D までは↑ 2 つ，→ 1 つ
D から B までは↑ 1 つ，→ 3 つ
の順列に一致

であるから，$n(C \cup D)$，つまり求める最短経路の数は

$$\begin{aligned} n(C \cup D) &= n(C) + n(D) - n(C \cap D) \\ &= 210 + 140 - 72 = \mathbf{278}\ \textbf{通り} \end{aligned}$$

E. 発展　重複順列の応用問題

【発展 51：同じものを含む円順列】

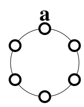
① a を 1 つ，b を 2 つ，c を 3 つ，計 6 つの文字を円形に並べるとき，何通りの並べ方があるか．

② a，b，c をそれぞれ 2 つずつ，計 6 つの文字を円形に並べるとき，何通りの並べ方があるか．

【解答】

① 1 つの a を固定すれば，残りは 2 つの b と 3 つの c の順列になるので

◀

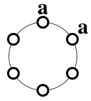


$\dfrac{5!}{2!3!} = \mathbf{10}$ **通り**

② 2 つの a の並べ方は次の 3 つの場合に分けられる．

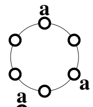
i) 隣り合うタイプ

残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り



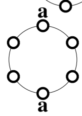
ii) 1 つ間をおくタイプ

残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り

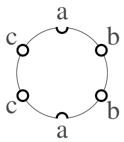


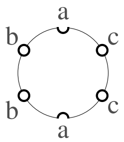
iii) 2 つ間をおくタイプ

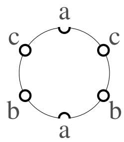
残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り

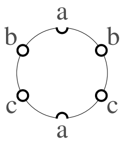


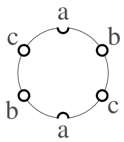
しかし，この 6 通りのうち

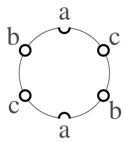
①


②


③


④


⑤


⑥


①と②，③と④も同じものである．よって，4 通りとなる．

以上 i)，ii)，iii) より，$6+6+4=$ **16 通り**

【発展 52：同じものを含む順列〜その２〜】

7 つの数字 1，1，1，2，2，3，3 を用いてできる 4 桁の数字を考える．

① 1213 や 2311 のように，3 種類の数字をすべて使ってできる数字は何通りあるか．

② 4 桁の数字は全部で何通りできるか．

【解答】

① 3 種類とも用いた 4 桁の数字は

$$\underbrace{{}_3C_1}_{\text{1，2，3 のうち何を 2つ使うか}} \times \underbrace{\frac{4!}{2!1!1!}}_{\text{2つ1つ1つ の順列}} = 3\times 12 = \textbf{36 通り}$$

② 1 種類だけ用いた 4 桁の数字はない．

◀ 1 も 2 も 3 も，3 個以下しかない

数字を 2 種類だけ用いた数字は，次の 1)，2) がある．

1) 2 種類の数字を 2 つずつ用いた数

◀ 1122，1331 など

2 つずつの順列は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通りあり，2 種類の数字の選び方は ${}_3C_2$ 通りあるので

$$\frac{4!}{2!2!}\times {}_3C_2 = 6\times 3 = 18 \text{ 通り}$$

2) 1 を 3 つ，2 か 3 を 1 つ用いた数

◀ 2111，1131 など

1 を 3 つ，2 を 1 つ用いた順列は $\dfrac{4!}{3!1!}$ 通り，

1 を 3 つ，3 を 1 つ用いた順列も同様なので

$$\frac{4!}{3!1!}\times 2 = 4\times 2 = 8 \text{ 通り}$$

よって，数字を 2 種類だけ用いた数は $18+8=26$ 個ある．1) と合わせて，全部で $26+36=$ **62 通り** ある．

3. 重複組合せ

A. ○と｜のモデル

次の問題を考えてみよう．

3 種類の果物，りんご，かき，なしを使って，7 個入りの果物かごを作る．
1 つも入らない種類があってもよいとすると，何通りの果物かごができるか．

この問題は，「○と｜のモデル」への置き換えによって解くことができる．7 つの○を 2 つの｜で区切り

一番左の○の数をりんごの数
真ん中の○の数をかきの数
一番右の○の数をなしの数

りんご 2 個，かき 3 個，なし 2 個
$\Longleftrightarrow$ ○○｜○○○｜○○
りんご 4 個，かき 0 個，なし 3 個
$\Longleftrightarrow$ ○○○○｜｜○○○

とすれば，「果物かごの種類の数」と「○ 7 つと｜ 2 つの順列」は一致する．よって，「果物かごの種類の数」は，『同じものを含む順列』(p.26) によって $\dfrac{9!}{7!2!} = 36$ 通りあると分かる（または，${}_9C_2 = 36$ 通り）．

【例題 53】 8 個の区別しないアメを 3 人に分ける．1 個もアメをもらえない人がいてもよいとする．

1. 上の○と｜のモデルにおいて「○○｜○○｜○○○○」と対応する分け方は，
   A が $\boxed{\text{ア}}$ 個，B が $\boxed{\text{イ}}$ 個，C が $\boxed{\text{ウ}}$ 個である．
2. 上の○と｜のモデルにおいて「｜○○○○｜○○○○」と対応する分け方は，
   A が $\boxed{\text{エ}}$ 個，B が $\boxed{\text{オ}}$ 個，C が $\boxed{\text{カ}}$ 個である．
3. A が 3 個，B が 5 個，C が 0 個のときを，○と｜のモデルで表せ．
4. アメの分け方は何通りあるか．

【解答】

1. ア : **2**，イ : **2**，ウ : **4**
2. エ : **0**，オ : **4**，カ : **4**
3. ○○○｜○○○○○｜
4. ○ 8 つと｜ 2 つの順列に一致するので，$\dfrac{10!}{8!2!} = \mathbf{45}$ **通り**

重複組合せ

n 種類のものを，重複を許して組み合わせて，r 個にすることを，**重複組合せ**（ちょうふく）(combination with repetitions) という．組合せに選ばれない種類があってもよいならば，r 個の○と，$n-1$ 個の｜を用いた「○と｜のモデル」を用いて，場合の数を求められる．

B. すべての種類を含む重複組合せ（資源配分）

重複組合せにおいて，すべての種類が 1 つは選ばれないといけない場合を考えよう．

3 種類の果物，りんご，かき，なしを使って，7 個入りの果物かごを作る．
どの種類も最低 1 個含めるとすると，何通りの果物かごができるか．

この問題は，次のように考えればよい.

(A) はじめに，りんご，かき，なしを 1 個ずつ入れる.
(B) 次に，りんご，かき，なしを，合わせて 4 個入れる．このときは，1 つも入らない種類があってもよい.

(A) の入れ方は 1 通りしかないので，(B) の入れ方が何通りであるか求めればよい.
(B) の入れ方は，○ 4 つと｜ 2 つの順列を考えればよいので

$\dfrac{6!}{4!2!} = 15$ 通り　　または　${}_6C_2 = 15$ 通り

(B) が ○○｜○｜○ のとき
りんご 2 個，かき 1 個，なし 1 個
(A) と合わせて
りんご 3 個，かき 2 個，なし 2 個

(B) が ｜○○○｜○ のとき
りんご 0 個，かき 3 個，なし 1 個
(A) と合わせて
りんご 1 個，かき 4 個，なし 2 個

【例題 54】 8 個の区別しないアメを 3 人に分ける．どの人も最低 1 個はアメをもらう場合，分け方は何通りあるか.

【解答】 まず，3 人に 1 個ずつアメを配る．残りの 5 個のアメを 3 人に配る方法は，「○ 5 つ，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{7!}{5!2!} = \mathbf{21}$ **通り**

C. 整数問題への応用

○と｜のモデルを用いて，「$x+y+z=7$ となる 0 以上の整数の組 (x, y, z) の個数」を求めることができる．○ 7 個と｜ 2 つを横一列に並べ

一番左の○の数を x の値
真ん中の○の数を y の値
一番右の○の数を z の値

$x=2,\ y=3,\ z=2$
$\iff$ ○○｜○○○｜○○
$x=4,\ y=0,\ z=3$
$\iff$ ○○○○｜｜○○○

とすれば，「(x, y, z) の組」と「○ 7 個と｜ 2 つの順列」は 1 対 1 に対応する．つまり，$\dfrac{9!}{2!7!} = 36$ 通り.

【例題 55】
1. $x+y+z=12$ を満たす 0 以上の整数の解 (x, y, z) の個数を求めよ.
2. $a+b+c+d=10$ を満たす 0 以上の整数の解 (a, b, c, d) の個数を求めよ.

【解答】
1. 「(x, y, z) の組」と「○ 12 個と｜ 2 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{14!}{12!2!} = \frac{\cancel{14}^{7}\cdot 13}{\cancel{2}} = \mathbf{91}\ \textbf{通り}$$

2. 「(a, b, c, d) の組」と「○ 10 個と｜ 3 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{13!}{10!3!} = \frac{13\cdot\cancel{12}^{\cancel{4}^{2}}\cdot 11}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \mathbf{286}\ \textbf{通り}$$

◀ $x=2,\ y=2,\ z=8$
$\Leftrightarrow$ ○○｜○○｜○○○○○○○○
$x=5,\ y=0,\ z=7$
$\Leftrightarrow$ ○○○○○｜｜○○○○○○○

◀ $a=4,\ b=2,\ c=3,\ d=1$
$\Leftrightarrow$ ○○○○｜○○｜○○○｜○
$p=3,\ q=1,\ r=4,\ s=2$
$\Leftrightarrow$ ○○○｜○｜○○○○｜○○

【練習 56：重複組合せと不定方程式[8]】

(1) 10 個のボールを 3 つの箱に配分する．

1) すべての箱に少なくとも 1 個のボールを入れる方法は何通りあるか．

2) 1 個も入っていない箱があってもよいとすると，配分の方法は何通りあるか．

(2) $p+q+r+s=15$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ の数を求めよ．

【解答】

(1) 1) はじめに 1 個ずつのボールを箱に入れ，残りの 7 つを 3 箱に分ければよい．これは「○ 7 つ，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{9!}{7!2!}=$ **36 通り**

2) 「○ 10 個，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{12!}{10!2!}=$ **66 通り**

(2) 「$(p,\ q,\ r,\ s)$ の組」と「○ 15 個と｜ 3 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{18!}{15!3!}=\frac{\cancel{18}^{3}\cdot 17\cdot 16}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=$$ **816 通り**

◀ $p=2,\ q=2,\ r=3,\ s=8$
⇔ ○○｜○○｜○○○｜○○○○○○○○
$p=5,\ q=0,\ r=4,\ s=6$
⇔ ○○○○○｜｜○○○○｜○○○○○○

D. 発展　○と｜のモデルの応用

【発展 57：整数問題～その 1～】

$p+q+r+s=15$ を満たす自然数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ の数を求めよ．

【解答】　$P+Q+R+S=11$ を満たす 0 以上の整数の組 $(P,\ Q,\ R,\ S)$ の個数に等しい．

その個数は「○ 11 個と｜ 3 つの順列」の場合の数と一致するので

$$\frac{14!}{11!3!}=\frac{14\cdot 13\cdot \cancel{12}^{2}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=$$ **364 通り**

◀ $p=P+1,\ q=Q+1,\ r=R+1,\ s=S+1$ とすればよい．

◀ $P=1,\ Q=1,\ R=2,\ S=7$
⇔ ○｜○｜○○｜○○○○○○○
このとき，$(p,\ q,\ r,\ s)=(2,\ 2,\ 3,\ 8)$
$P=4,\ Q=0,\ R=3,\ S=4$
⇔ ○○○○｜｜○○○｜○○○○
このとき，$(p,\ q,\ r,\ s)=(5,\ 1,\ 4,\ 5)$

【発展 58：整数問題～その 2～】

$p+q+r\leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r)$ の数を求めよ．

【解答】　$p+q+r\leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r)$ は，次のようにして，$p+q+r+s=10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ に一致する．

$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 0)\ \leftrightarrow\ (p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 0,\ 10)$
$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 1)\ \leftrightarrow\ (p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 1,\ 9)$
$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 2)\ \leftrightarrow\ (p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 2,\ 8)$
$(p.\ q,\ r)=(2,\ 2,\ 4)\ \leftrightarrow\ (p.\ q,\ r,\ s)=(2,\ 2,\ 4,\ 2)$

よって，○ 10 個と｜ 3 個の順列に等しいので，$\dfrac{13!}{10!3!}=$ **286 通り**

◀ これに気づかなければ，次のように地道に解くことになる．
$p+q+r=10$ を満たす組の個数は，○ 10 個と｜ 2 個の順列に等しいので，$\dfrac{12!}{10!2!}$ 通り，
$p+q+r=9$ を満たす組の個数は・・・と順に考えれば
$$\frac{12!}{10!2!}+\frac{11!}{9!2!}+\frac{10!}{8!2!}+\cdots+\frac{3!}{1!2!}+\frac{2!}{0!2!}=$$ **286 通り**

[8] 一般に，整数係数の多項式を 0 とおいた（連立）方程式のうち，整数解のみを求めることを不定方程式を解くという．

B 確率

1B.1 確率の基礎

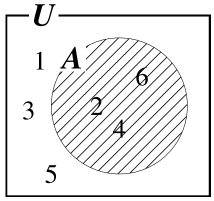
1. 確率とは何か

中学で学んだように，「さいころを 1 個振って偶数の目が出る確率」は $\dfrac{1}{2}$ であった．このことを詳しく考えてみよう．

A. 確率 ― 1 回あたり何回起こるのか

「さいころを 1 個振った」結果，⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ のいずれかが起こる．
これを集合のように書き出し，U で表すと

$$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\quad n(U) = 6$$



となる．このうち，「偶数の目が出る」場合を A で表わすと

$$A = \{2,\ 4,\ 6\},\qquad n(A) = 3$$

となる．**大数の法則** (law of large numbers) [*9]によって

「6 回のうち平均 3 回が，A のどれかになる」

$\Longleftrightarrow$「1 回あたり $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ 回が，A のどれかになる」

と考えることができ，この $\dfrac{1}{2}$ が確率を表わしている．

【例題 59】 上の例において，「出た目が 3 の倍数である」場合を B とする．

- 上のように，B を集合で表わすと，$B =$ ア となり，$n(B) =$ イ である．
- 大数の法則によって，6 回のうち平均 ウ 回，B が起こる．
  言いかえると，1 回あたり エ 回，B は起こる．この エ が，B の確率である．

【解答】 ア : $\{\mathbf{3},\ \mathbf{6}\}$，イ : **2**，ウ : **2**，エ : $\dfrac{2}{6} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

[*9] 起こり得る可能性が等しい N 通りの内の，x 通りの起こることを X とすると「N 回のうち平均 x 回が，X のどれかになる」ことが大数の法則である．これはチェビシェフの不等式を利用して証明されるが，高校数学の範囲を超えるので，ここでは省略する．

B.　試行・事象・同様に確からしい

「さいころを 1 個振る」のように，同じ条件で繰り返すことができる操作などを**試行** (trial) といい，試行して起こる事柄を**事象** (event) という．前ページの例では，「$\boxed{\bullet}$が出る」「偶数の目が出る」などが事象になる．また，すべての事象をまとめて**全事象** (whole event) という．前の例では，U が全事象である[*10]．

前ページの例ではさいころにいかさまがないので，全事象 U はすべて等しい可能性で起こる．このことを，U は**同様に確からしい** (equally likely) という．

【例題 60】「コイン 1 枚を投げる」試行 X において，表が出る可能性と裏が出る可能性は等しいとする．次の$\boxed{}$に適する数字・言葉を入れなさい．

- 試行 X の全事象は$\boxed{\text{ア}}$通りあり，どの事象も同様に$\boxed{\text{イ}}$．
- $\boxed{\text{ウ}}$の法則から，表が出る事象は，平均して$\boxed{\text{ア}}$回の X につき$\boxed{\text{エ}}$回起こる．つまり，1 回あたり$\boxed{\text{オ}}$回起こる．

【解答】 ア : 2，イ : 確からしい，ウ : 大数，エ : 1，オ : $\dfrac{1}{2}$

C.　確率の定義

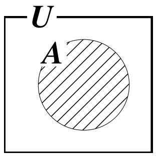
「事象 A の**確率** (probability) 」はしばしば $P(A)$ で表わされ[*11]，次で定義される．

集合と確率

全事象 U が同様に確からしいとき

$$(\text{事象 } A \text{ の確率}) = \frac{\text{事象 } A \text{ の場合の数}}{\text{全事象 } U \text{ の場合の数}} \qquad \left(\text{記号で表わすと，} P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}\right)$$

と定義する．$0 \leqq P(A) \leqq 1$ であり，大数の法則を認めると，事象 A の確率は「試行 1 回あたり A は何回起こるか」の値を表す．



D.　試行を無作為に行う

選び方にいっさい意図を加えずランダムに選ぶことを「**無作為に** (randamly, at randam) 選ぶ」ともいう．無作為に選んで起こる結果はすべて同じ可能性で起こり，同様に確からしいと考えてよい．

【例題 61】「7 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ から無作為に 1 枚選ぶ」試行を X とする．

- 試行 X の全事象は$\boxed{\text{ア}}$通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「奇数を選ぶ」事象は$\boxed{\text{ア}}$通りのうち$\boxed{\text{イ}}$通りあるから，$\boxed{\text{ウ}}$の確率で起こる．
- 「3 の倍数を選ぶ」事象は$\boxed{\text{ア}}$通りのうち$\boxed{\text{エ}}$通りあるから，$\boxed{\text{オ}}$の確率で起こる．

【解答】 ア：7，イ：4，ウ：$\dfrac{4}{7}$，エ：2，オ：$\dfrac{2}{7}$

[*10] ここで，「全事象」と「全事象の集合」がどちらも U で書かれている．このように，事象と，それを表わす集合には同じ文字を用い，特に区別しない．

[*11] P は，"probability"の頭文字を表わす．

高校で学ぶ確率の問題において，断りがない限りは以下のことが仮定されている．

- さいころにいかさまやいびつはなく，どの目も出る可能性は等しい．
- ものを並べる，選ぶ，くじを引くなどは，無作為に行っているとする．
- コインの表と裏の出る確率は等しく，「コインが立つ」などの可能性は考えない．
- 「大数の法則」は正しいと考える．

E. 「場合の数」と確率

確率の計算のために，順列 ${}_nP_r$，階乗 $n!$，組合せ ${}_nC_r$ などを用いることがある．

約分を上手に使おう．たとえば，全事象が 5! 通り，事象 A が 4! 通りならば

（うまいやり方）

A の確率は $\dfrac{4!}{5!}=\dfrac{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{5\cdot\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\dfrac{1}{5}$

（計算が大変な例）$5!=120$，$4!=24$

なので，確率は $\dfrac{24}{120}=\dfrac{1}{5}$

【練習 62：「場合の数」と確率〜その１〜】

(1) 「無作為に 6 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ を横一列に並べる」試行を X とする．

- X の全事象は「$\boxed{\text{ア}}$ の階乗」通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「$\boxed{6}$ が右端になる」事象は「$\boxed{\text{イ}}$ の階乗」通りあるから，確率は $\boxed{\text{ウ}}$ になる．
- 「$\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ が隣り合う」事象は「$\boxed{\text{エ}}!\times 2!$」通りあるから，確率は $\boxed{\text{オ}}$ になる．

(2) 試行 X：「出席番号 1 番から 13 番までの 13 人から 3 人を選ぶ」について

- 試行 X の全事象は ${}_{\boxed{\text{カ}}}C_{\boxed{\text{キ}}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「1 番が選ばれる」事象は ${}_{\boxed{\text{ク}}}C_{\boxed{\text{ケ}}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{コ}}$ である．
- 「2 が選ばれない」事象は ${}_{\boxed{\text{サ}}}C_{\boxed{\text{シ}}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ス}}$ である．

【解答】

(1)
- 全事象は $_{(ア)}\underline{\mathbf{6}}$ の階乗．
- $\boxed{6}$ 以外を 1 列に並べ $_{(イ)}\underline{\mathbf{5}}!$ 通り，$\dfrac{5!}{6!}=\dfrac{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{6\cdot\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}}_{(ウ)}$
- $\boxed{1,2\text{ の組}}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ の順列で $_{(エ)}\underline{\mathbf{5}}!$ 通り，1,2 の並べ方は 2! 通りあるので $\dfrac{5!\times 2!}{6!}=\dfrac{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times\cancel{2}}{\cancel{6}^{3}\cdot\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}_{(オ)}$

(2)
- 全事象は $_{(カ)}\underline{\mathbf{13}}C\underline{\mathbf{3}}_{(キ)}=\dfrac{13\cdot\cancel{12}^{2}\cdot 11}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}}=13\cdot 22$
- 1 番以外の 12 人から 2 人を選ぶことになり

◀1 番の他に，あと 2 人選ぶ

$_{(ク)}\underline{\mathbf{12}}C\underline{\mathbf{2}}_{(ケ)}=\dfrac{\cancel{12}^{6}\cdot 11}{\cancel{2}}=66$ 通りあり，$\dfrac{\cancel{66}^{3}}{13\cdot\cancel{22}}=\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{13}}}_{(コ)}$

- 2 番以外の 12 人から 3 人を選べばよいので

$_{(サ)}\underline{\mathbf{12}}C\underline{\mathbf{3}}_{(シ)}=\dfrac{\cancel{12}^{2}\cdot 11\cdot 10}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}}=22\cdot 10$ 通りあり，$\dfrac{\cancel{22}\cdot 10}{13\cdot\cancel{22}}=\underline{\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{13}}}_{(ス)}$

上のように，${}_{13}C_3=13\cdot 22$ のようにしておくと，約分などが簡単にできる．

【練習 63：「場合の数」と確率〜その２〜】

両親と子供 4 人が円形のテーブルに座る．

(1) 両親が向かい合う確率を求めよ．　　(2) 両親が隣り合う確率を求めよ．

【解答】　全事象は，6 人の円順列なので 5! 通りである．

(1) 父親を固定すると，母親の場所は決まり，子供の並び方は 4! 通りある．
よって $\dfrac{4!}{5!}=\dfrac{\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

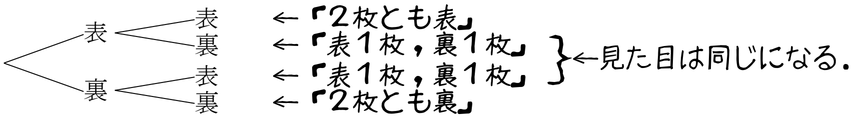
(2) 父親を固定すると，母親の場所は両隣の 2 通り，子供の並び方は 4! 通りある．よって $\dfrac{2\times4!}{5!}=\dfrac{2\times\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

2. 同様に確からしい

全事象として含まれる事象一つ一つを，**根元事象** (fundamental event) と言う．根元事象はすべて，同様に確からしいように選ばれないといけない．

A. 「同様に確からしい」全事象

同じ大きさ・形のコイン 2 枚を振ったときの全事象は，次の 4 通りである．



全事象を 3 通り（「表 2 枚」「表 1 枚，裏 1 枚」「裏 2 枚」）としてはいけない．「表 1 枚，裏 1 枚」は，「表 2 枚」や「裏 2 枚」と可能性が違う．

【例題 64】

1. 3 枚のコインを振る試行を考える．
   - 全事象は $\boxed{ア}$ 通りあり，同様に確からしく起こる．
   - 3 枚とも表になる事象は $\boxed{ア}$ 通りのうち $\boxed{イ}$ 通りあるから，確率は $\boxed{ウ}$ である．
   - 表が 2 枚となる事象は $\boxed{ア}$ 通りのうち $\boxed{エ}$ 通りあるから，確率は $\boxed{オ}$ である．
2. 試行 X :「同じ大きさの赤 4 個，青 3 個，白 2 個の玉を含む袋から，無作為に 1 個選ぶ」，
   事象 R :「赤い玉を選ぶ」，B :「青い玉を選ぶ」とする．
   - 試行 X の全事象は $\boxed{カ}$ 通りあり，同様に確からしく起こる．
   - 事象 R は $\boxed{カ}$ 通りのうち $\boxed{キ}$ 通りあるから，確率は $\boxed{ク}$ である．
   - 事象 B は $\boxed{カ}$ 通りのうち $\boxed{ケ}$ 通りあるから，確率は $\boxed{コ}$ である．

【解答】

1. ア：$2^3=\mathbf{8}$，イ：**1**，ウ：$\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$，エ：**3**，オ：$\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$
2. カ：**9**，キ：**4**，ク：$\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$，ケ：**3**，コ：$\dfrac{3}{9}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

◀ 全事象を「赤を選ぶ」「青を選ぶ」「白を選ぶ」の 3 通りとしてはいけない．これでは，全事象が同様に確からしくない．

B. さいころ 2 個を振るときの「同様に確からしい」全事象

さいころ 2 個を振るときの全事象は，36 通りとして考えないといけない．つまり，⚃⚂と⚂⚃は区別して考える．下に見るように，区別しないと全事象が同様に確からしくならない．

⚀から⚅まであるさいころ 2 個を振るとき，⚂，⚃が出る確率

・1 回目と 2 回目を区別した場合

1回目 \ 2回目	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
⚁	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
⚂	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
⚃	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
⚄	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
⚅	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全事象は $6^2 = 36$ 通り．⚂，⚃が一つずつになるのは 2 通りだから，確率は $\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

・1 回目と 2 回目を区別しない場合

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1, 1					
⚁	1, 2	2, 2				
⚂	1, 3	2, 3	3, 3			
⚃	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
⚄	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
⚅	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

根元事象が同様に確からしく**ない**．

（例えば，⚂⚃の可能性と⚀⚀の可能性は異なる）

【例題 65】

1. 2 個の大きさの違うさいころを振って，和が 5 になる確率を求めよ．
2. 2 個の同じさいころを振って，積が 12 になる確率を求めよ．

【解答】

1. 目の和は次のようになる．

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

よって，$\dfrac{4}{36} = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

2. 目の積は次のようになる．

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	4	6	8	10	12
⚂	3	6	9	12	15	18
⚃	4	8	12	16	20	24
⚄	5	10	15	20	25	30
⚅	6	12	18	24	30	36

よって，$\dfrac{4}{36} = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

さいころ 2 個の確率については，必ず，上のような 6×6 の表を書いて考えよう．

【練習 66：3 個のさいころを振る】

同じ大きさの 3 個のさいころを振るとき，次の確率に答えよ．

(1) 3 個の目の和が 18 になる確率　　(2) 3 個とも同じ目になる確率

【解答】　全事象は $6^3 = 216$ 通りある．

1. 和が 18 になるのは，(6 , 6 , 6) の 1 通りであるから，$\boldsymbol{\dfrac{1}{216}}$
2. (1, 1, 1) から (6 , 6 , 6) までの 6 通りがあるので，$\dfrac{6}{216} = \boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$

C. 順列・組合せと「同様に確からしい」全事象

(I) 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から **1 枚選び元に戻す**．この操作を **2 回繰り返した**とき，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ を選ぶ 1 枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

1枚目＼2枚目	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
$\boxed{2}$	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全事象は $6^2 = 36$ 通り．$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が 1 枚ずつになるのは 2 通りだから，確率は $\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$	1, 1					
$\boxed{2}$	1, 2	2, 2				
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3	3, 3			
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

根元事象が同様に確からしくない．

（例えば，$\boxed{1}\boxed{2}$ の可能性と $\boxed{1}\boxed{1}$ の可能性は異なる）

(II) 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から **2 枚を選ぶ**とき，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ を選ぶ 1 枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

1枚目＼2枚目	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$		2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
$\boxed{2}$	1, 2		3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3		4, 3	5, 3	6, 3
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4		5, 4	6, 4
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5		6, 5
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	

全事象は $6 \times 5 = 30$ 通り（$= {}_6\mathrm{P}_2$）

$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が 1 枚ずつになるのは 2 通り（$= {}_2\mathrm{P}_2$）

だから，確率は $\dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$						
$\boxed{2}$	1, 2					
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3				
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4			
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5		
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	

全事象は ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通り

$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が 1 枚ずつになるのは 1 通り（$= {}_2\mathrm{C}_2$）

だから，確率は $\dfrac{1}{15}$

【例題 67】 箱の中に 9 個のボールがあり，ボールにはそれぞれ，1 から 9 まで書かれている．

1. ボール 1 個を選んで番号を記録し，ボールを元に戻すとき，次の確率を求めよ．
   (a) 3 と 4 を 1 回ずつ記録した　　(b) 2 回とも 3 を記録した
2. ボールを 2 個選ぶとき，次の確率を求めよ．
   (a) 3 と 4 を 1 個ずつ選んだ　　(b) 2 個とも 3 を選んだ

【解答】

1. 全事象は $9 \times 9 = 81$ 通りある．
   (a) 3, 4 の場合と，4, 3 の場合があるので，$\boldsymbol{\dfrac{2}{81}}$
   (b) 3, 3 の 1 通りしかないので $\boldsymbol{\dfrac{1}{81}}$
2. (a) （順列で全事象を考えた場合）全事象は $9 \times 8 = 72$ 通りある．
   3, 4 の場合と，4, 3 の場合があるので，$\dfrac{2}{72} = \boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$
   （組合せで全事象を考えた場合）全事象は ${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ 通りある．3, 4 の 1 通りであるので，$\boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$
   (b) 3, 3 になることはないので，確率は **0**

◀1 個目に選ぶボールは 9 通り，2 個目に選ぶボールは 8 通りある，のように考えるとよい．

全事象についての注意

全事象をつくる根元事象は，一つの決め方に定まるとは限らないが，次に注意する必要がある．

- 根元事象がすべて同様に確からしくなるよう，考えなければならない．
- 根元事象を「順列」で考えたならば以後も「順列」で考え，根元事象を「組合せ」で考えたならば以後も「組合せ」で考えないといけない．

【練習 68：同様に確からしい】

a, a, a, b, b, c, c の 7 つの文字を一列に並べる．以下の確率を求めなさい．

(1) b が両端になる確率　　(2) 2 つの c が隣り合う確率

【解答】　すべての並び方は $\dfrac{7!}{3!2!2!} = \dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}^{\cancel{2}}\cdot\cancel{3\cdot2}}{\cancel{3\cdot2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 210$ 通り．

(1) 両端以外に a, a, a, c, c を並べる $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$ 通りなので $\dfrac{10}{210} = \boldsymbol{\dfrac{1}{21}}$.

(2) a, a, a, b, b, cc の 6 つを並べて $\dfrac{6!}{3!2!} = 60$ 通りなので $\dfrac{60}{210} = \boldsymbol{\dfrac{2}{7}}$.

（**別解**）$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ の異なる 7 つを並べて 7! 通り

(1) 両端は b_1, b_2 の並び替えで 2! 通り，他は 5! 通りなので $\dfrac{5!2!}{7!} = \boldsymbol{\dfrac{1}{21}}$.

(2) c を 1 つにまとめて 6! 通り，c の順序で 2! 通りなので $\dfrac{6!2!}{7!} = \boldsymbol{\dfrac{2}{7}}$.

【発展 69：確率の発展問題〜その１〜】

赤，青，黄のカードが 5 枚ずつあり，それぞれ，1 から 5 の数字が 1 つずつ書かれている．この 15 枚の中から 3 枚を任意に選ぶとき，以下の確率を求めよ．

① 3 枚とも同じ色になる　　② 3 枚の色がすべて異なる

③ 3 枚の数字がすべて異なる　　④ 3 枚の数字も色もすべて異なる

【解答】　すべての選び方は ${}_{15}C_3 = 5\cdot7\cdot13$ 通りある．

① どの色を選ぶかで 3 通り，どの数字を選ぶかで ${}_5C_3 = 10$ 通りあるので，
$\dfrac{3\cdot\cancel{10}^2}{\cancel{5}\cdot7\cdot13} = \boldsymbol{\dfrac{6}{91}}$.

② 色の選び方は 1 通り，数字はそれぞれ 5 通りずつあるので，
$\dfrac{\cancel{5}\cdot5\cdot5}{\cancel{5}\cdot7\cdot13} = \boldsymbol{\dfrac{25}{91}}$.

③ 数字の選び方は ${}_5C_3 = 10$ 通り，それぞれの数字がどの色であったかで 3 通りずつあるので，$\dfrac{\cancel{10}^2\cdot3^3}{\cancel{5}\cdot7\cdot13} = \boldsymbol{\dfrac{54}{91}}$.

④ 色の選び方は 1 通り，赤の数字が 5 通り，青の数字が 4 通り，黄の数字が 3 通りあるので，$\dfrac{\cancel{5}\cdot4\cdot3}{\cancel{5}\cdot7\cdot13} = \boldsymbol{\dfrac{12}{91}}$.

◀ **（別解）**カードの順列で考えると全事象は $15\cdot14\cdot13$ 通りあり

① $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{4}^2\cdot3}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^7\cdot13} = \boldsymbol{\dfrac{6}{91}}$
(2 枚目は 1 枚目と同じ色
以下，3 枚目の条件は省略)

② $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{10}^5\cdot5}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^7\cdot13} = \boldsymbol{\dfrac{25}{91}}$
(2 枚目は 1 枚目と違う色)

③ $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{12}^6\cdot9}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^7\cdot13} = \boldsymbol{\dfrac{54}{91}}$
(2 枚目は 1 枚目と違う数)

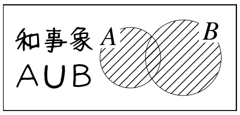
④ $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{8}^4\cdot3}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^7\cdot13} = \boldsymbol{\dfrac{12}{91}}$
(2 枚目は 1 枚目と数も色も違う)

1B.2 確率とベン図

1. 和事象・積事象・排反

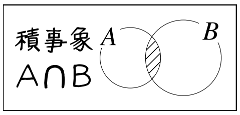
A. 和事象とは

事象 A, B があるとき，「A または B が起きる」という事象を**和事象** (sum event) といい，$A \overset{\text{または}}{\cup} B$ で表す．$\cup$ は集合における「または」と同じ記号である．



B. 積事象とは

また，「A も B も起こる」という事象を**積事象** (product event) といい[*12]，$A \overset{\text{かつ}}{\cap} B$ で表す．$\cap$ は集合における「かつ」と同じ記号である．



【例題 70】 ジョーカーを除いた 52 枚のトランプから 1 枚を選ぶ．選んだカードが赤（ハートかダイヤ）である事象を R，絵札である事象を P，ハートの 1 桁である事象を H_1 とする．また，すべての場合の集合を U とする．つまり，$n(U) = 52$ である．

1. A :「R と P の積事象」，B :「R と H_1 の和事象」，C :「P と H_1 の和事象」に一致するものを
   ① $R \cap P$　② $R \cup P$　③ $R \cap H_1$　④ $R \cup H_1$　⑤ $P \cap H_1$　⑥ $P \cup H_1$　から選びなさい．
2. 場合の数 $n(R)$, $n(P)$, $n(H_1)$ をそれぞれ答えなさい．
3. 確率 $P(R)$, $P(P)$, $P(H_1)$ をそれぞれ答えなさい．

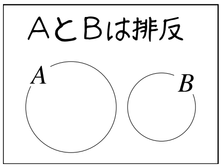
【解答】

1. 積事象は $\cap$ だから A は①，和事象は $\cup$ だから B は④，C は⑥
2. ハート・ダイヤは合計 26 枚あるので $\boldsymbol{n(R) = 26}$,
   絵札は $3 \times 4 = 12$ 枚あるので $\boldsymbol{n(P) = 12}$,
   ハートの 1 桁は 9 枚あるので $\boldsymbol{n(H_1) = 9}$.
3. $n(U) = 52$ より，$P(R) = \dfrac{26}{52} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$P(P) = \dfrac{12}{52} = \boldsymbol{\dfrac{3}{13}}$，$P(H_1) = \boldsymbol{\dfrac{9}{52}}$.

◀ たとえば，$P(R) = \dfrac{n(R)}{n(U)}$ である．

C. 排反とは

2 つの事象 A, B が同時に起こらないとき，A, B は（互いに）**排反**（はいはん） (exclusive) であるという．A, B が排反であることは，積事象 $A \cap B$ が空集合であることと一致し，ベン図は右図のようになる．その結果，和事象 $A \cup B$ は次で計算できる．



確率の加法定理

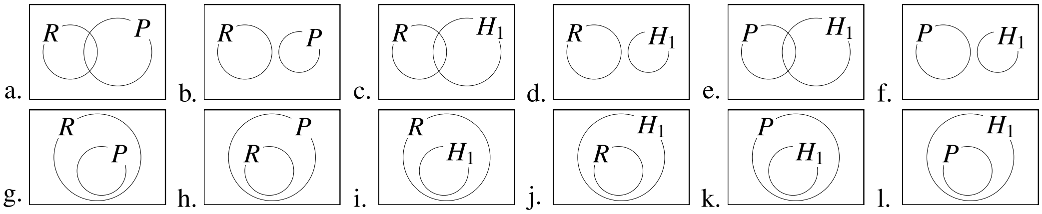
2 つの事象 A, B が排反であれば，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ なので，次の**確率の加法定理**が成り立つ．

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

[*12] なぜ「積事象」と呼ぶのかは，次節で学ぶ．

【例題 71】　前ページの【例題 70】の試行について考える.

1. 以下の中から，正しいベン図を **3 つ**答えなさい.



2. R, P, H_1 の中から，互いに排反な 2 つの事象を答えなさい.
3. 確率 $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ をそれぞれ答えなさい.

【解答】

1. R, P については a. が正しく，$R \supset H_1$ から i. が正しく，$P \cap H_1 = \emptyset$ から f. が正しい．よって，答えは **a, f, i.**
2. 共通部分がない，**P と H_1 が排反**である.
3. A は「絵札のハート・ダイヤ」の 6 枚なので，$P(A) = \dfrac{6}{52} = \boldsymbol{\dfrac{3}{26}}$,

   ベン図 i. から $B = R$ と分かるので，$P(B) = P(R) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$,

   $P(C) = P(P) + P(H_1) = \dfrac{3}{13} + \dfrac{9}{52} = \boldsymbol{\dfrac{21}{52}}$.

◀ 一般に，$R \supset N$ ならば，$R \cup N = R$, $R \cap N = N$ である.

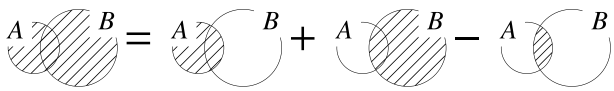
D.　排反でない和事象の確率

排反でない和事象の確率

A と B が排反でないとき，和事象 $A \cup B$ の確率は

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

で計算できる.



【例題 72】　A，B，C，$\cdots$，I の 9 人から，3 人を選ぶ.

1. A が選ばれる確率を求めよ.
2. B が選ばれる確率を求めよ.
3. A も B も選ばれる確率を求めよ.
4. A または B が選ばれる確率を求めよ.

【解答】　全事象は，${}_9C_3 = \dfrac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 12 \cdot 7$ 通りある.

1. A 以外の 8 人から 2 人選ぶことができ，$\dfrac{{}_8C_2}{12 \cdot 7} = \dfrac{\cancel{4} \cdot \cancel{7}}{\cancel{12}^3 \cdot \cancel{7}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$
2. 1. と同様にして，$\dfrac{{}_8C_2}{12 \cdot 7} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$.
3. A，B 以外の 7 人から 1 人選ぶことができ，$\dfrac{{}_7C_1}{12 \cdot 7} = \dfrac{\cancel{7}}{12 \cdot \cancel{7}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$
4. 1.，2.，3. から，$\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{4 + 4 - 1}{12} = \boldsymbol{\dfrac{7}{12}}$

2. 余事象

A. 余事象とは何か

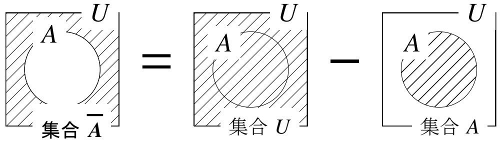
事象 A に対して，A が起こらない事象を A の**余事象** (complementary event) といい，$\overline{A}$ で表す．

余事象の確率

A の余事象 $\overline{A}$ について，$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$ から

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

が成り立つと分かる．



【例題 73】 2 個のさいころを振るとき

- 2 個の出た目が同じになる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．
- 2 個の出た目が異なる目になる事象は，同じになる事象の $\boxed{\text{イ}}$ なので，出た目が異なる確率は $1 - \boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{ウ}}$ である．

【解答】 ア : 全事象は 6^2 通り，同じ目が出るのは 6 通りなので，$\dfrac{6}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

イ : 余事象，　ウ : $1 - \dfrac{1}{6} = \mathbf{\dfrac{5}{6}}$

B. 「少なくとも 1 つ」の確率

たとえば，10 本の中に 3 本の当りが入っているくじがある．ここから 3 本を引いて，「少なくとも 1 本当たる確率」を考えよう．この試行では，次のいずれかが起こる．

- 3 本とも当たる
- 2 本だけ当たる
- 1 本だけ当たる
- 1 本も当たらない

これらすべてが『少なくとも 1 本当たる確率』

「少なくとも 1 本当たる」とは，「1 本も当たらない」の余事象と分かる．

「1 本も当たらない」確率は $\dfrac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \dfrac{7}{12}$ であるから，求める確率は $1 - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5}{12}$ と分かる[*13]．

【例題 74】 3 枚のコインを振るとき，「少なくとも 1 枚表になる」事象は，「$\boxed{\text{ア}}$」の余事象になる．「$\boxed{\text{ア}}$」の確率は $\boxed{\text{イ}}$ であるから，「少なくとも 1 枚表になる」確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

【解答】 ア :全てが裏になる（表が **0** 枚である）

イ : 全事象は $2^3 = 8$ 通りなので，$\mathbf{\dfrac{1}{8}}$，　ウ : $1 - \dfrac{1}{8} = \mathbf{\dfrac{7}{8}}$

[*13] 別解として，「3 本とも当たる」「2 本だけ当たる」「1 本だけ当たる」確率をすべて足し合わせても求められるが，答えを出すまでの計算がとても多くなる．

【練習 75：余事象】

(1) 5 個の赤，4 個の白が入った袋から 3 個を選ぶとき，少なくとも 1 個赤が含まれる確率を求めよ．

(2) 5 人の子供がいる家族に，男の子も女の子もいる確率はいくらか．ただし，男の子も女の子も同じ確率で生まれるものとする*14．

【解答】

(1) 「すべて白になる」の余事象なので

$$1-\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=1-\frac{4}{\frac{\cancel{9}^3\cdot\cancel{8}^4\cdot 7}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}}=1-\frac{\cancel{4}}{3\cdot\cancel{4}\cdot 7}=1-\frac{1}{21}=\mathbf{\frac{20}{21}}$$

(2) 全事象は $2^5=32$ 通り，すべて男の子である確率は $\frac{1}{32}$，すべて女の子である確率は $\frac{1}{32}$，余事象を考えて，$1-2\times\frac{1}{32}=\mathbf{\frac{15}{16}}$.

【発展 76：余事象・加法定理】

1 枚の 100 円玉が 1 枚，4 枚の 10 円玉，5 枚の 1 円玉，合計 10 枚の中から無作為に 3 枚を選ぶ．
「100 円玉が 1 枚含まれる」事象を A，「10 円玉が 2 枚以上含まれる」事象を B とする．

1. 事象 C「合計金額が 100 円以下」，事象 D「合計金額が 20 円以上」に一致するものを
   ① $\overline{A}$　② $\overline{B}$　③ $A\cap B$　④ $A\cup B$　からそれぞれ選びなさい．
2. 確率 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$，$P(D)$ を求めなさい．

【解答】

1. 事象 C は①，事象 D は④
2. 全事象は ${}_{10}C_3=120$ 通り．

$P(A)$ 100 円玉 1 枚と，100 円玉以外の 9 枚から 2 枚を選んだ場合になるから

$$P(A)=\frac{{}_9C_2}{120}=\frac{\cancel{9}^3\cdot\cancel{4}}{\cancel{120}^{10}}=\mathbf{\frac{3}{10}}$$

$P(B)$ 「10 円玉が 2 枚」の確率は $\frac{{}_4C_2\cdot{}_6C_1}{120}=\frac{\cancel{6}\cdot\cancel{6}^3}{\cancel{120}\,\cancel{20}^{10}}=\frac{3}{10}$，「10 円玉が 3 枚」の確率は $\frac{{}_4C_3}{120}=\frac{1}{30}$ である．

10 円玉「2 枚」「3 枚」は排反なので $\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{10}{30}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

$P(C)=P(\overline{A})=1-\frac{3}{10}=\mathbf{\frac{7}{10}}$

$P(D)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ であり，$A\cap B$ は「100 円玉 1 枚と 10 円玉 2 枚」の確率 $\frac{{}_1C_1\cdot{}_4C_2}{120}=\frac{1}{20}$ であるから

$$P(D)=\frac{3}{10}+\frac{1}{3}-\frac{1}{20}=\frac{18+20-3}{60}=\frac{35}{60}=\mathbf{\frac{7}{12}}$$

*14 数学の問題では，このように書いていなくても，同じ確率で生まれると仮定することが多い．しかし，実際にそうであるかどうかは，諸説ある．

C. 確率についての「ド・モルガンの法則」

『ド・モルガンの法則』(p.??)$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ は，確率においても用いられることがある．

ド・モルガンの法則（確率版）

どんな事象 A，B に関しても，次の**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) が成り立つ．

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right), \qquad P\left(\overline{A \cap B}\right) = P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$$

【例題 77】 ある試行において，$P(A) = 0.4$，$P(B) = 0.5$，$P(A \cap B) = 0.2$ のとき，次の値を求めよ．

1. $P\left(\overline{A \cap B}\right)$　　2. $P(A \cup B)$　　3. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

【解答】

1. $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = \mathbf{0.8}$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.2 = \mathbf{0.7}$
3. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = \mathbf{0.3}$

1B.3 確率の木と独立・従属

複数の試行を行う場合には，樹形図に似た「確率の木」が有効である．

1. 乗法定理と確率の木

A. 確率の乗法定理

コイン 1 枚を振った後，赤い玉 4 個と白い玉 3 個の入った袋から 1 個を玉を取り出す．

コイン1枚を振る　$\Longrightarrow$　赤4個，白3個から1個取り出す
表は $\frac{1}{2}$，裏は $\frac{1}{2}$　　赤は $\frac{4}{7}$，白は $\frac{3}{7}$

このとき「表が出て，白い玉を選ぶ確率」を考えると

表が出るのは，1回につき $\frac{1}{2}$ 回 $\Longrightarrow$ そのうち白が出るのは，1回につき $\frac{3}{7}$ 回

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}$ 回につき $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$ 回

であるから，「表が出て，白い玉を選ぶ確率」は $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$ となる．

【例題 78】 上の例において，「裏が出て，赤い玉を選ぶ確率」を求めなさい．

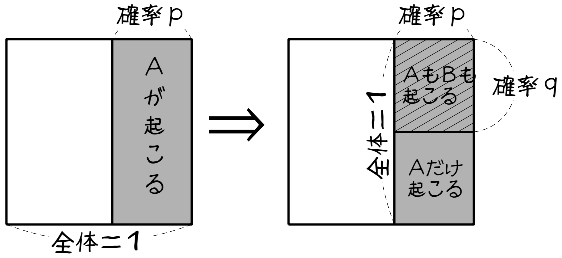
【解答】 裏は $\frac{1}{2}$，赤い玉は $\frac{4}{7}$ の確率なので，$\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \mathbf{\frac{2}{7}}$.

確率の乗法定理

2 つの試行 X, Y を行い

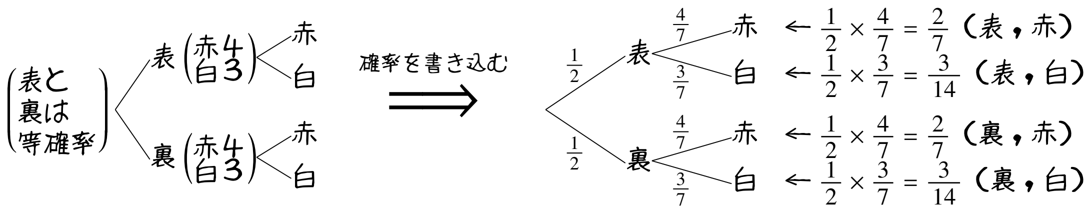
- X の結果，事象 A が起こる確率を p
- （事象 A が起きた後に）
  Y の結果，事象 B が起こる確率を q

とするとき，事象 A, B がともに起こる確率は pq で与えられる．これを**確率の乗法定理**という．



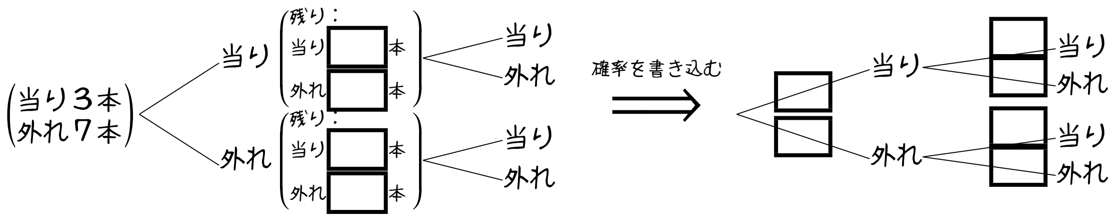
B. 確率の木とは

上で考えた試行は，次のようにまとめられる．



右上のような，樹形図に確率を書き込んだまとめ方を，**確率の木** (probability tree) という．

【例題 79】 当たりが 3 本，外れが 7 本入った箱から，2 回くじを引く．ただし，一度引いたくじは元に戻さない．以下の $\boxed{}$ に，適当な数値を答え，問いに答えよ．

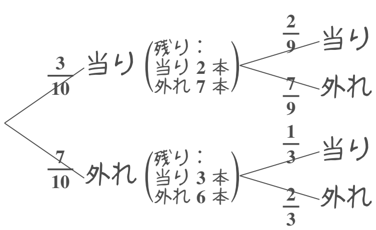


1. 2 回とも当たる確率を求めよ．
2. 2 回とも外れる確率を求めよ．

【解答】

確率の木は右のようになる．

1. $\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{10}\,5} \times \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{9}\,3} = \dfrac{1}{15}$
2. $\dfrac{7}{\cancel{10}\,5} \times \dfrac{\cancel{2}}{3} = \dfrac{7}{15}$



◀2 回とも赤，白，青はそれぞれ排反なので，足すだけでよい．

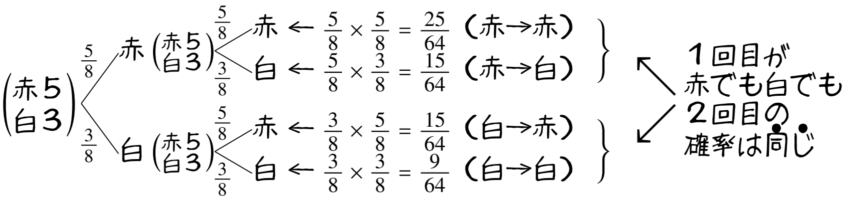
2. 独立試行・従属試行

A. 独立試行とは

試行 X の結果が試行 Y の結果に影響しないとき，X, Y は**独立** (independent) であるという．

たとえば,「赤が 5 個，白が 3 個」入った袋から，1 個を選んで元に戻す試行を，2 回繰り返したとき，右のような確率の木にまとめられ，1 回目の試行の結果が 2 回目に影響しない．

つまり，この例の 1 回目と 2 回目の試行は独立である．

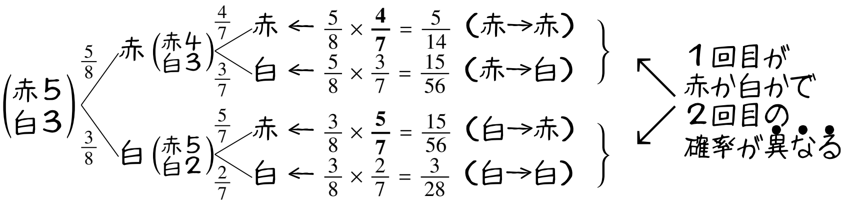


B. 従属試行とは

試行 X の結果が試行 Y の結果に影響するとき，X, Y は**従属** (dependent) であるという．

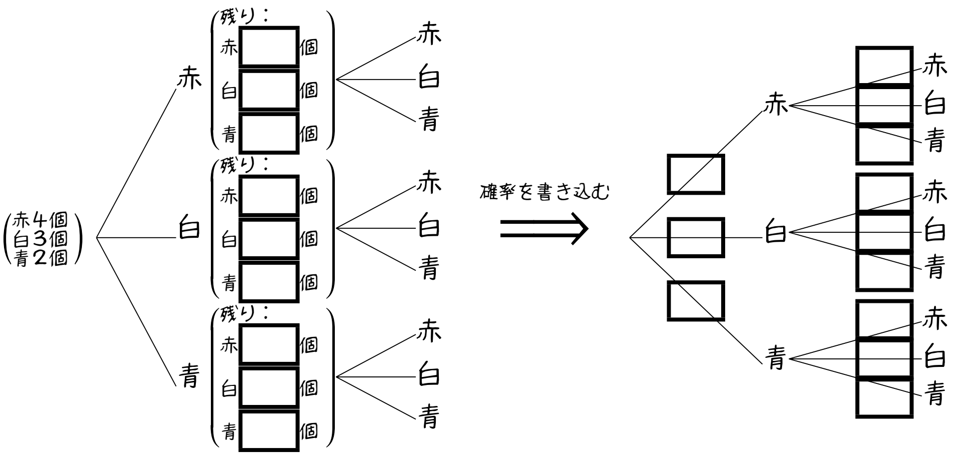
たとえば,「赤球が 5 個，白球が 3 個」入った袋から，1 個を選んで元に戻さない試行を，2 回繰り返したとき，右の確率の木のようにまとめられ，1 回目の試行の結果が 2 回目に影響する．

一例として，2 回目が赤である確率は，1 回目が赤の場合は $\frac{4}{7}$，白の場合は $\frac{5}{7}$，と異なっている．つまり，この例の 1 回目と 2 回目の試行は従属である．



【練習 80：確率の木と独立・従属】

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個，青い玉が 2 個入った袋がある．取り出した玉は元に戻さないで，2 回玉を取り出すことをまとめるとき，以下の $\boxed{}$ に，適当な数値を答え，問いに答えよ．



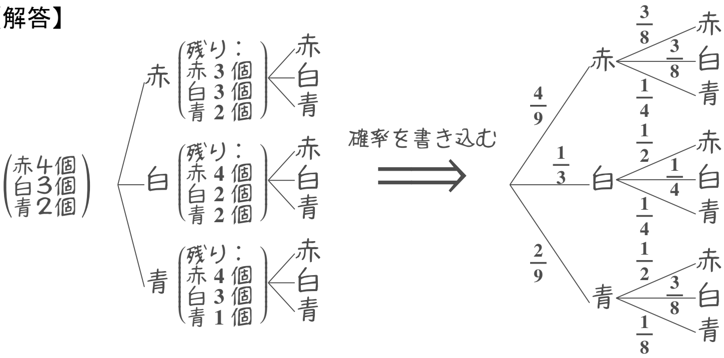
(1) 玉を取り出す 1 回目と 2 回目は，独立か，従属か．

(2) 1 回目が白であった後の「2 回目が青」である確率，1 回目が青であった後の「2 回目が青」である確率をそれぞれ求めよ．

(3) 2 回とも赤である確率を求めよ．

(4) 2 回とも同じ色である確率を求めよ．

【解答】



(1) 1 回目の色によって 2 回目の確率が異なるので，**従属**である．

(2) 「白→青」で 2 回目が青である確率は $\mathbf{\frac{1}{4}}$，同様に「青→青」から $\mathbf{\frac{1}{8}}$.

(3) $\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}^3}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}^2}=\mathbf{\frac{1}{6}}$

(4) 2 回とも白である確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

2 回とも青である確率は $\frac{\cancel{2}}{9}\times\frac{1}{\cancel{8}^4}=\frac{1}{36}$

(3) と合わせて $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}=\frac{6+3+1}{36}=\mathbf{\frac{5}{18}}$

【練習 81：独立・従属】

(1) A 工場では部品 P，Q，R を使って品物を作る．各部品には色違いがあり，P は 2 個に 1 個が白，Q は 3 個に 1 個が白，R は 4 個に 1 個が白であり，他はすべて黒である．

(a) 真っ白な品物ができる確率を求めよ．

(b) 部品が 1 つだけ白い品物ができる確率を求めよ．

(2) B 工場では，100 個に 1 個不良品が作られてしまう．さらに，不良品を機械がチェックするとき，不良品は必ず見つけ出せるものの，100 回に 1 回，良品を不良品と誤って判断することがある．

(a) 機械が「良品」とチェックする確率を求めよ．

(b) 「良品」が「不良品」と判断されてしまう確率を求めよ．

【解答】

(1) 確率の木にまとめると，右のようになる．

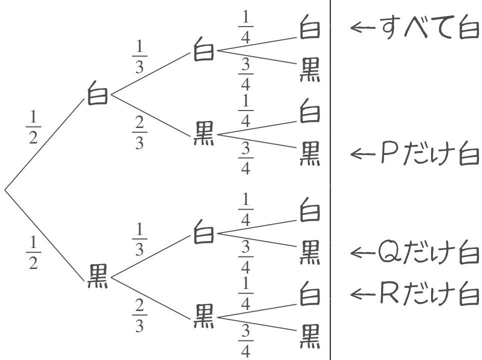
(a) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{24}}$

(b) P だけ白は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{24}$

Q だけ白は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{24}$

R だけ白は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{24}$

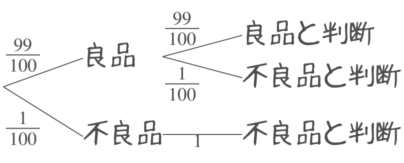
であるから，$\frac{6+3+2}{24}=\mathbf{\frac{11}{24}}$.



(2) 確率の木にまとめると，右のようになる．

(a) $\frac{99}{100}\times\frac{99}{100}=\mathbf{\frac{9801}{10000}}$

(b) $\frac{99}{100}\times\frac{1}{100}=\mathbf{\frac{99}{10000}}$



C. 「全事象による解き方」と「乗法定理による解き方」

たとえば，「赤 4 個，白 3 個を含む袋から 2 個取り出すとき，赤が 2 個になる確率」は，次の 2 通りの求め方がある．

(I) 全事象による解き方

- 全事象は「赤 4 個，白 3 個の合計 7 個から 2 個選ぶ」を考えて，${}_7C_2 = 21$ 通り
- 赤 2 個になる場合は「赤 4 個から取り出す 2 個を選ぶ」を考えて，${}_4C_2 = 6$ 通り

つまり，$\dfrac{6}{21} = \dfrac{2}{7}$ になる．

(II) 乗法定理による解き方

- 1 個ずつ 2 回，順に取り出すと考える．
- 1 回目が赤である確率は $\dfrac{4}{7}$
- 2 回目も赤である確率は，「赤 3 個，白 3 個」が残りなので $\dfrac{1}{2}$

つまり，$\dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{7}$ になる．

自分のやりやすいやり方で解けばよいが，どちらの解き方も理解しているのが最も良い．

【例題 82】 10 本のうち 3 本が当たりであるくじ A と，20 本のうち 3 本が当たりであるくじ B がある．

1. すべてのくじを区別すれば，全事象は $\boxed{ア}$ 通り，どちらも当たる事象は $\boxed{イ}$ 通りある．よって，どちらも当たる確率は $\boxed{ウ}$ と求められる．
2. 一方，くじ A が当たる確率は $\boxed{エ}$，くじ B が当たる確率は $\boxed{オ}$ であるから，どちらも当たる確率は $\boxed{カ}$ という式から，やはり $\boxed{ウ}$ と求められる．

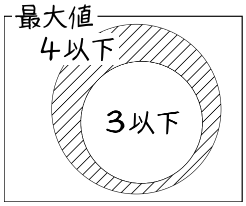
【解答】

1. 全事象は $10 \times 20 = \underline{\mathbf{200}}_{(ア)}$ 通り，両方当たる引き方は $3 \times 3 = \underline{\mathbf{9}}_{(イ)}$ 通りあるから，$\dfrac{3 \times 3}{10 \times 20} = \underline{\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{200}}}_{(ウ)}$
2. 1 つめの当たる確率は $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}}_{(エ)}$，2 つめの当たる確率は $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}}_{(オ)}$，2 つの事象は独立であるから $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} \times \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}}_{(カ)} = \dfrac{9}{200}$

D. 発展 さいころの出た目の最大値

例として，さいころ 3 つを振って，出た目の最大値が 4 である確率を考えよう．このとき

- 「3 つのさいころの最大値が 4 である確率」を求めることは難しい．
- 「3 つのさいころの最大値が 4 以下である確率」は簡単に計算できる．
  なぜなら，3 つとも 1,2,3,4 のどれかであればよいので，$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$ である．



「最大値が 4」の確率は，「最大値が 4 以下であるが，3 以下ではない」確率になる．結局，「最大値が 4」の確率は $\left(\dfrac{4}{6}\right)^3 - \left(\dfrac{3}{6}\right)^3 = \dfrac{4^3 - 3^3}{6^3} = \dfrac{64-27}{216} = \dfrac{37}{216}$ と分かる．

【発展 83：さいころの出た目の最大・最小】

3 個のさいころを投げる試行について，以下の問いに答えよ．

① 「出た目の最大値が 3 になる」確率を求めよ．

② 「出た目の最小値が 3 になる」確率を求めよ．

【解答】

① 「最大値が 3 以下」の確率 $\left(\frac{3}{6}\right)^3$ から「最大値が 2 以下」の確率 $\left(\frac{2}{6}\right)^3$ を引けばよいので $\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{3^3-2^3}{6^3}=\frac{27-8}{216}=\mathbf{\frac{19}{216}}$．

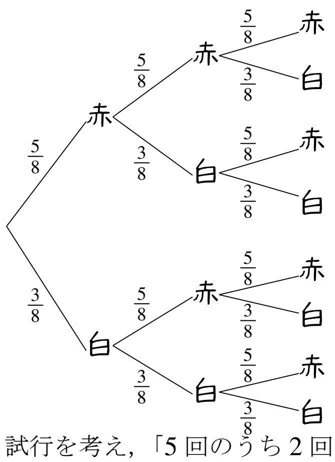
② 「最小値が 3 以上」の確率 $\left(\frac{4}{6}\right)^3$ から「最小値が 4 以上」の確率 $\left(\frac{3}{6}\right)^3$ を引けばよいので $\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{4^3-3^3}{6^3}=\frac{64-27}{216}=\mathbf{\frac{37}{216}}$．

3. 反復試行 〜 独立な試行の繰り返し

A. 反復試行とは

互いに独立な同じ試行を複数回行うことを，**反復試行**（はんぷく） (repeated trials) という．

赤い玉が 5 個，白い玉が 3 個入った袋がある．取り出した玉は元に戻し，3 回玉を取り出すことは，右のようにまとめられる．



←確率は $\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\left(\frac{5}{8}\right)^3$

←確率は $\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}=\left(\frac{5}{8}\right)^2\times\left(\frac{3}{8}\right)$

←確率は $\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=\left(\frac{5}{8}\right)^2\times\left(\frac{3}{8}\right)$

⋮

B. 反復試行の確率

例として，「さいころを 5 回振る」試行を考え，「5 回のうち 2 回だけ 1 が出る」確率を求めよう．

1 が出た場合を○，出なかった場合を×で表すと，たとえば次のようになればよい．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
○	×	○	×	×	←○は $\frac{1}{6}$ の確率で，×は $\frac{5}{6}$ の確率で起こる．

この確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ で計算できる．また，次のような場合でもよい．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
×	○	○	×	×	←確率は $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$
×	×	○	○	×	←確率は $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$
		⋮			↑ ↑ ↑ すべて同じ確率

5ヶ所から ○ を2つ選べばよい
そのような選び方は ${}_5C_2$ 通り

こうして，$\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ が ${}_5C_2$ 通りあると分かるので，求める確率は次のようになる．

$${}_5C_2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\cancel{10}^{5}\times\frac{1}{36}\times\frac{125}{\cancel{216}^{108}}=\frac{625}{3888}$$

【例題 84】 さいころを 5 回振って「5 回のうちちょうど 4 回だけ 1 が出る」確率を求めなさい.

【解答】 上と同じように○×で表わすと，次のようになる.

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
×	○	○	○	○	←確率は$\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)^1$
○	×	○	○	○	←確率は$\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)^1$
		⋮			

5ヶ所から ○ を4つ選べばよい
そのような選び方は ${}_5\mathrm{C}_4$ 通り

よって，${}_5\mathrm{C}_4\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^4\times\left(\dfrac{5}{6}\right)=5\times\dfrac{1}{1296}\times\dfrac{5}{6}=\mathbf{\dfrac{25}{7776}}$

反復試行

試行 X を n 回繰り返し，確率 p の事象 A がちょうど k 回成り立つ確率は

$${}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}$$

で求められる（A が起きない確率は $1-p$，A が起きない回数は $n-k$ であることに注意）.

【練習 85：反復試行】

(1) 当たる確率が $\dfrac{1}{10}$ のくじを 5 回引く．そのうちちょうど 3 回当たる確率を求めよ.

(2) さいころ 1 個を 6 回振って，5 以上がちょうど 3 回出る確率を求めよ.

(3) 赤 3 個，白 2 個の合計 5 個のボールが入った袋から，玉を 1 個取り出し，色を記録してから元に戻す. これを 5 回繰り返すとき，以下の確率を求めよ.

(a) 赤がちょうど 3 回出る　(b) 赤がちょうど 2 回出る　(c) 白が 4 回以上出る

【解答】

(1) ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{10}\right)^3\left(\dfrac{9}{10}\right)^2=\cancel{10}\times\dfrac{9^2}{\cancel{10^5}\,10^4}=\mathbf{\dfrac{81}{10000}}$

◀ 当たらない確率は $1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$ である

(2) 5 以上が出る確率は $\dfrac{1}{3}$，出ない確率は $\dfrac{2}{3}$ であるから

${}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{\cancel{6}\cdot5\cdot4}{\cancel{3\cdot2}\cdot1}\times\dfrac{2^3}{3^6}=20\times\dfrac{8}{729}=\mathbf{\dfrac{160}{729}}$

◀ 3^6 は $9\times9\times9$ と考えて計算するとよい.

(3) 5 回とも，赤が出る確率は $\dfrac{3}{5}$，出ない確率は $\dfrac{2}{5}$ である.

(a) ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}^2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\dfrac{3^3\cdot2^2}{\cancel{5^5}\,5^4}=\dfrac{2\cdot27\cdot4}{625}=\mathbf{\dfrac{216}{625}}$

(b) ${}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}^2}{\cancel{2}}\dfrac{3^2\cdot2^3}{\cancel{5^5}\,5^4}=\dfrac{2\cdot9\cdot8}{625}=\mathbf{\dfrac{144}{625}}$

(c) 白が 4 回，または 5 回出れば良い.

白が 5 回出るのは $\left(\dfrac{2}{5}\right)^5=\dfrac{32}{5^5}$

白が 4 回出るのは ${}_5\mathrm{C}_1\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)^4=\dfrac{240}{5^5}$

◀ 白が 5 回でる場合の分母が 5^5 のため，約分しない.

求める確率は $\dfrac{240}{5^5}+\dfrac{32}{5^5}=\mathbf{\dfrac{272}{3125}}$

C.　反復試行の応用

【例題 86】 コイン 1 枚を振って表か裏か記録していき，表が出た回数が 4 回になるまで振り続ける．

1. コインを 4 回振って終わる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．
2. 5 回で終わるのは，4 回目までに表がちょうど $\boxed{\text{イ}}$ 回出て，5 回目が表になる場合である．よって，その確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．
3. 6 回で終わるのは，5 回目までに表がちょうど $\boxed{\text{エ}}$ 回出て，6 回目が表になる場合である．よって，確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．
4. 7 回で終わる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

【解答】

1. ア：$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \mathbf{\frac{1}{16}}$
2. イ：**3**，　ウ：4 回目までに表が 3 回出る確率は ${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)$，
   さらに 5 回目で表が出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから
   $${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2} = \cancel{4}\times\frac{1}{\cancel{2^5}\,2^3} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$
3. エ：**3**，　オ：5 回目までに表が 3 回出る確率は ${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$，
   さらに 6 回目で表が出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから
   $${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2} = \cancel{10}\,5\times\frac{1}{\cancel{2^6}\,2^5} = \mathbf{\frac{5}{32}}$$
4. カ：${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}\times\frac{1}{\cancel{2^7}\,2^5} = \mathbf{\frac{5}{32}}$

【練習 87：反復試行の応用】

さいころ 1 つを振り，1 か 2 が出たら +3 点，他が出たら −2 点になるゲームを考える．

(1) このゲームを 3 回繰り返し，4 点である確率を求めよ．

(2) このゲームを 5 回繰り返し，0 点である確率を求めよ．

【解答】 +3 になる確率は $\frac{1}{3}$，−2 になる確率は $\frac{2}{3}$ である．

(1) +3 が 2 回，−2 が 1 回出ればよいので

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3^3}\,3^2} = \mathbf{\frac{2}{9}}.$$

◀ 結局，何回+3 になるかで，最終得点が決まる．

(2) +3 が 2 回，−2 が 3 回出ればよいので

$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10\cdot\frac{2^3}{3^5} = \mathbf{\frac{80}{243}}.$$

◀ +3 が 2 回出ればよいことは，次の式からも計算できる．
+3 が x 回とすると，得点は $3x + (-2)(5-x) = 5x - 10$ 点，
$5x - 10 = 0$ を解いて $x = 2$.

D. ㊫㊮ 反復試行で複数の事象を考える

さいころを 6 回振って，そのうち 1 がちょうど 2 回，5 以上がちょうど 2 回出る確率を考えてみよう．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	
1	1	5か6	5か6	他	他	←確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
1	1	5か6	他	5か6	他	←確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
		⋮				↑ ↑ ↑ すべて同じ確率

6ヶ所に「1」を2つ，
「5か6」を2つ，「他」を2つ並べる
そのような並べ方は $\frac{6!}{2!2!2!}$ 通り

この結果，次の式で計算できる．

$$\frac{6!}{2!2!2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{3}}{\cancel{6}^{\cancel{2}\,6}\cdot2^2\cdot\cancel{3}^{\cancel{2}\,3}}=\frac{5}{72}$$

【㊫㊮ 88：3 つ以上の事象がある反復試行】

① さいころを 4 回振って，1 がちょうど 1 回，2 がちょうど 1 回出る確率を求めよ．

② さいころを 6 回振って，1 も 2 も 3 も 2 回ずつ出る確率を求めよ．

【解答】

① 1 が 1 回$\left(確率\ \frac{1}{6}\right)$，2 が 1 回$\left(確率\ \frac{1}{6}\right)$，他が 2 回$\left(確率\ \frac{2}{3}\right)$出ればよいので

$$\frac{4!}{1!1!2!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{\cancel{4}^{\,2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{2^2}{\cancel{6}\cdot\cancel{6}^{\,3}\cdot3^2}=\mathbf{\frac{4}{27}}$$

② $$\frac{6!}{2!2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3\cdot2}}{\cancel{2\cdot2}\cdot2\cdot\cancel{6}^{\cancel{6}\,6^4}}=\mathbf{\frac{5}{2592}}$$

4. 条件付き確率 〜 従属な試行どうしの関係

A. 条件付き確率とは

事象 A, B があり,「A が起こった条件の下, B が起こる確率」を記号 $P_A(B)$ で表し, **条件付き確率** (conditional probability) という.

たとえば，右の表のようにまとめられるクラス内の 40 人から，1 人を無作為に選ぶとき，事象 A, B を以下とする.

A : 選ばれた人に兄弟がいる

B : 選ばれた人に姉妹がいる

		兄弟 いる (A)	兄弟 いない	計
姉妹	いる (B)	4	7	11
姉妹	いない	11	18	29
計		15	25	40

このとき，$P_A(B)$ とは「選ばれた人に兄弟がいたとき，その人に姉妹がいる確率」である.「兄弟がいる」のは 15 人，そのうち姉妹もいるのは 4 人であるから，$P_A(B) = \dfrac{4}{15}$ と分かる.

また，$P_{\overline{A}}(B)$ は,「選ばれた人に兄弟がいないとき，その人に姉妹がいる確率」である.「兄弟がいない」のは 25 人，そのうち姉妹がいるのは 7 人であるから，$P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{7}{25}$ と分かる.

【例題 89】 上の例において，次の条件付き確率を求めなさい.

1. $P_A(\overline{B})$　2. $P_{\overline{A}}(\overline{B})$　3. $P_B(A)$　4. $P_B(\overline{A})$　5. $P_{\overline{B}}(\overline{A})$

【解答】

1. A は 15 人，そのうち $\overline{B}$ は 11 人であるから $\boldsymbol{P_A(\overline{B}) = \dfrac{11}{15}}$
2. $\overline{A}$ は 25 人，そのうち $\overline{B}$ は 18 人であるから $\boldsymbol{P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{18}{25}}$
3. B は 11 人，そのうち A は 4 人であるから $\boldsymbol{P_B(A) = \dfrac{4}{11}}$
4. B は 11 人，そのうち $\overline{A}$ は 7 人であるから $\boldsymbol{P_B(\overline{A}) = \dfrac{7}{11}}$
5. $\overline{B}$ は 29 人，そのうち $\overline{A}$ は 18 人であるから $\boldsymbol{P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \dfrac{18}{29}}$

条件付き確率の定義

全事象 U が同様に確からしいとき,「A が起こった条件の下，B が起こる条件付き確率」$P_A(B)$ を

$$P_A(B) = \frac{\text{事象 } A \text{ も } B \text{ も起こる場合の数}}{\text{事象 } A \text{ が起こる場合の数}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

で定義する．ここで，$n(A)$ は事象 A の場合の数を表す．また，A が起こる確率 $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}$ であるから

$$P_A(B) = \frac{\frac{n(A\cap B)}{n(U)}}{\frac{n(A)}{n(U)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ とも定義できる.

		A 起こる	A 起こらない	計
B	起こる	$n(A \cap B)$	$n(\overline{A} \cap B)$	$n(B)$
B	起こらない	$n(A \cap \overline{B})$	$n(\overline{A} \cap \overline{B})$	$n(\overline{B})$
計		$n(A)$	$n(\overline{A})$	$n(U)$

↓↓↓すべての値を $n(U)$ で割る↓↓↓

		A 起こる	A 起こらない	計
B	起こる	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
B	起こらない	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
計		$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

【例題 90】 ある試験は，受験生のうち 60% が男子であった．また，合格した男子は受験生全体の 40% 合格した女子は受験生全体の 30% になった．

1. 右の表の空欄を，全体に対する割合ですべて埋めなさい．
2. 受験生から 1 人を無作為に選び，男子である事象を A，合格者である事象を B とするとき，次の条件付き確率を求めよ．

（a） $P_A(B)$ （b） $P_B(A)$ （c） $P_{\overline{A}}(B)$ （d） $P_{\overline{B}}(\overline{A})$

	合格	不合格	計
男子			0.6
女子			
計			1

【解答】

1. 問題文から左下になり，残りの空欄を埋めて右下のようになる．

	合格	不合格	計
男子	0.4		0.6
女子	0.3		
計			1

⇒

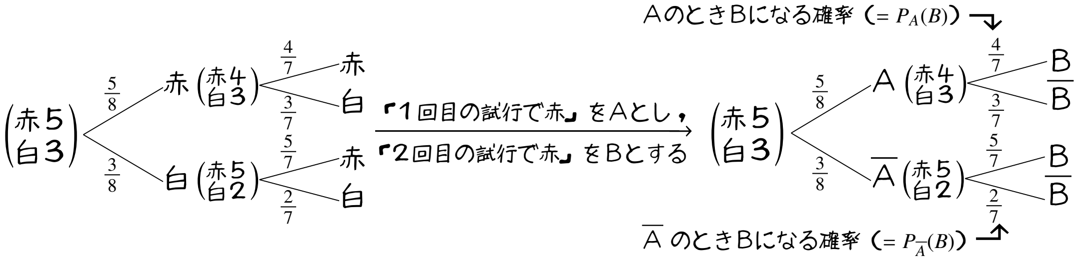
	合格	不合格	計
男子	**0.4**	**0.2**	0.6
女子	**0.3**	**0.1**	**0.4**
計	**0.7**	**0.3**	1

2. (a) $P_A(B) = \dfrac{0.4}{0.6} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ （b） $P_B(A) = \dfrac{0.4}{0.7} = \boldsymbol{\dfrac{4}{7}}$

（c） $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{0.3}{0.4} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$ （d） $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \dfrac{0.1}{0.3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

B. 確率の木と条件付き確率

p.48 で学んだように，「赤球が 5 個，白球が 3 個」入った袋から 1 個を選んで元に戻さない試行を，2 回繰り返したとき，確率の木にまとめると左下のようになる．さらに，「1 回目の試行で赤が出る」事象を A，「2 回目の試行で赤が出る」事象を B とすると，左下のように確率の木を書き換えられる．



たとえば，$P_A(B)$ は「1 回目は赤であった（A）ときに，2 回目は赤（B）である」であり $\dfrac{4}{7}$ である．

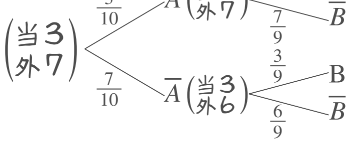
また，$P_{\overline{A}}(B)$ は「1 回目は赤でない（$\overline{A}$）ときに，2 回目は赤（B）である」であり $\dfrac{5}{7}$ である．

【例題 91】 当たりが 3 本，外れが 7 本入ったくじがあり，2 人が順にくじを引く．
1 人目が当たりである事象を A，2 人目が当たりである事象を B とするとき，以下の条件付き確率を求めなさい．ただし，一度引いたくじは元に戻さない．

1. $P_A(B)$ 2. $P_A(\overline{B})$ 3. $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

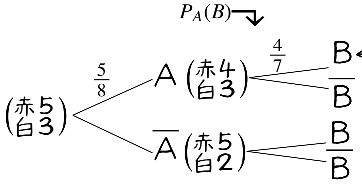
【解答】 確率の木は右のようになる．

1. $\boldsymbol{P_A(B) = \dfrac{2}{9}}$ 2. $\boldsymbol{P_A(\overline{B}) = \dfrac{7}{9}}$
3. $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{6}{9} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$



C. 乗法定理と条件付き確率

p.56 の例において，事象 $A \cap B$, つまり「1 回目も 2 回目も赤」となる確率 $P(A \cap B)$ は乗法定理から $\dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7}$ と求められるが，これは $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ を意味する．さらに，この式は条件付き確率の定義と同値である．



←1回目も2回目も赤の確率 $= \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7}$

$P(A \cap B)$　　$P(A)$　$P_A(B)$

つまり，$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

（条件付き確率の定義の式と同値な式）

乗法定理と条件付き確率

条件付き確率の定義 $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $\Leftrightarrow$ 乗法定理 $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

特に，事象 A と B が独立ならば，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ となる（$P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B)$ であるため）.

【例題 92】 事象 A, B について，$P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.1$ であるとき，条件付き確率 $P_A(B)$, $P_B(A)$ を求めなさい.

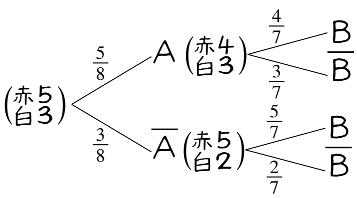
【解答】 $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.1}{0.4} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

$P_B(A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)} = \dfrac{0.1}{0.3} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

◀ $P(B \cap A) = P(A \cap B)$

D. いろいろな条件付き確率

p.56 の例において，確率 $P_B(A)$，つまり「2 回目が赤のとき，1 回目が赤であった確率」を求めてみよう．これは，$\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ で計算できる.



2 人とも当たる確率 $P(B)$ は「赤→赤」「白→赤」と引く確率の和であり，前者は $\dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7}$，後者は $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{7}$ である.

一方，「赤→赤」と引く確率 $P(A \cap B) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7}$ である.

以上から $P_B(A) = \dfrac{\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}}{\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}} = \dfrac{5 \times 4}{5 \times 4 + 3 \times 5} = \dfrac{4}{7}$ となる.

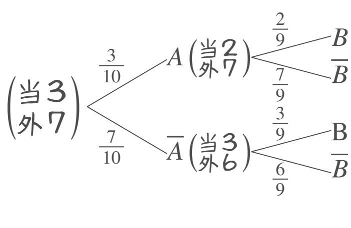
分母分子に56を掛けて複分数を無くした

【練習 93：条件付き確率】

当たりが 3 本，外れが 7 本入ったくじがあり，2 人が順にくじを引く．選んでくじは元に戻さない．2 人目が当たったとき，1 人目も当たっていた確率を求めよ.

【解答】 2 人とも当たる場合のうち 1 人目も当たる確率は $\dfrac{3}{10} \times \dfrac{2}{9}$, 1 人目は外れた確率は $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{3}{9}$ である．よって，求める確率は

$$\frac{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}}{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9}} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 2 + 7 \cdot 3} = \mathbf{\frac{2}{9}}$$



◀ 結局，$\dfrac{(2\text{ 人とも当たった})}{(2\text{ 人目が当たった})}$ の確率を求めればよい.

【練習 94：原因の確率】

(1) A 工場では部品 P，Q，R を使って品物を作る．各部品には色違いがあり，P は 2 個に 1 個が白，Q は 3 個に 1 個が白，R は 4 個に 1 個が白であり，他はすべて黒である．

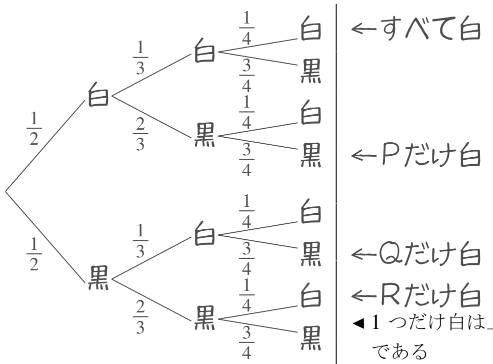
(a) 部品が 1 つだけ白い品物があるとき，白い原因が部品 P である確率を求めよ．

(b) 部品が 1 つだけ黒い品物があるとき，黒い原因が部品 R である確率を求めよ．

(2) B 工場では，100 個に 1 個不良品が作られてしまう．さらに，不良品を機械がチェックするとき，不良品は必ず見つけ出せるものの，100 回に 1 回，良品を不良品と誤って判断することがある．機械が「不良品」と判断した中に，「良品」が含まれている確率を求めよ．

【解答】

(1) 確率の木にまとめると，右のようになる．



(a) P だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{24}$

Q だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{24}$

R だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{24}$

であるから $\dfrac{\frac{6}{24}}{\frac{6}{24} + \frac{3}{24} + \frac{2}{24}} = \mathbf{\dfrac{6}{11}}$.

◀ 1 つだけ白は上の 3 パターンの和である

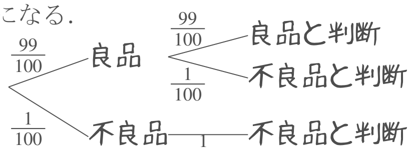
(b) P だけ黒は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

Q だけ黒は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{24}$

R だけ黒は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{24}$

であるから，$\dfrac{\frac{3}{24}}{\frac{1}{24} + \frac{2}{24} + \frac{3}{24}} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(2) 確率の木にまとめると，右のようになる．



機械が「不良品」と判断するのは

実際は良品だった場合が

$\frac{99}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{99}{10000}$

もともと不良品だった場合が $\frac{1}{100}$ である．

つまり，$\dfrac{\frac{99}{10000}}{\frac{1}{100} + \frac{99}{10000}} = \mathbf{\dfrac{99}{199}}$

◀ 良品を良品と判断する場合の余事象と考え，$1 - \frac{99}{100} \times \frac{99}{100} = \frac{199}{10000}$ でもよい．