

高校数学 A

この教材を使う際は

- 表示：原著者のクレジット「13th-note」を表示してください。
- 非営利：この教材を営利目的で利用してはいけません。ただし、学校・塾・家庭教師の授業で利用するための無償配布は可能です。
- 継承：この教材を改変した結果生じた教材には、必ず、原著者のクレジット「13th-note」を表示してください。
- クレジットを外して使用したいという方はご一報 (kutomi@collegium.or.jp) ください。



Ver4.00 (2016-8-13)

第1章 Ver4.00, 第2章 Ver4.00, 第3章 Ver4.00

はじめに

13th-note「高校数学A」は、文部科学省の指導要領（平成24年度以降実施）に沿った内容を含む検定外の「高校の教科書」として作られ、ホームページ (<http://www.collegium.or.jp/~kutomi/>) にて無償公開されています。学ぶ意欲さえあれば、誰でも学ぶことができるように、との意図からです。

また、執筆者と閲覧者がインターネットを介して繋がり、互いの意見を交わすことが出来る関係にあります。こういった「教科書」の形態は、日本ではあまり見られないことでしょう。

しかし、13th-note「高校数学A」が既存の教科書と最も異なる点は、その中身でしょう。というのも、以下の方針を採用しているからです。

- 全ての問題に、詳細な解答・解説を付ける。
- 新しい数学の概念に関して、通常、教師用にしか載っていない詳細な解説も付ける。

これらは、以下の考えに基づいています。

- 自学自習がしやすい教科書にしたかった。
(学校等とは関係なく自分で勉強したい人のためでもあり、試験前に教科書を開きながら自学自習する高校生のためでもある)
- 隅々まで読めば読むほど、何か得るものがある教科書にしたかった。
- 大学受験の数学を意識してはいるが、あくまで数学の知識・感覚（新しい数学の概念を吸収するための土壌、とでも言えるでしょうか）を中心に解説している教科書にしたかった。
- 既存の教科書・指導要領に沿わせることより、数学の理解に必要などうかに基づいて内容の選定・配列することを重視した。

詳細な解説を増やしたことは、一方で、悩みの種にもなりました。というのも、その詳細な解説が、読者の創造力・発想力を妨げないか、と感じたからです。

この点について、私は「詳細な解説を最初に読むか、後で読むか、そもそも読まないか、それは読者が決めればよい。ただ我々は、読者の視点が偏らないよう、最大限の配慮をするのみ」という結論を出し、上記の方針としました。

この教科書の執筆者として、数学の学習について2点アドバイスを書いておきます。

- (1) 公式そのものよりも、「いつ公式が使えるか」を真っ先に覚えましょう。公式そのものは忘れても調べられます。また、思い出そうとしたり、作ろうとする努力はよい勉強になります。しかし、「いつ使うか」を忘れると、答えを見ない限り何もできません。
- (2) 問題を解いて答えが合わないときは、まず、計算ミスを疑いましょう。とはいえ、ごく稀に間違いがあるかもしれません。すみませんが、その場合はご連絡頂けると嬉しいです。

この「高校数学A」を作成する際には、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ という組版ソフトが使われています。 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ のシステムを作られた Donald E. Knuth 氏、それを日本語に委嘱した ASCII Corporation、さらに、(日本の) 高校数学に適した記号・強力な描画環境を実現した「 $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 初等数学プリント作成マクロ emath」作者の大熊一弘氏に、感謝いたします。

また、「高校数学A」では数学的な整合性は意識すると同時に、高校数学における慣習と、現代数学における差異には注意を払いました。その際、現代数学の情報として「数学事典」(第4版、岩波書店、2007) を採

用し、必要に応じて「岩波 数学入門辞典」を参考にしました。

最後に、13th-note「高校数学A」の雰囲気や和らげられているみかちゃんフォントの作者にも感謝いたします。

この教科書を手にとった人、一人一人に、「数学も、悪くないな」と思っただけであれば、幸いです。

久富 望

凡例

1. 【解答】について

【解答】には、問題の解答だけでなく、さらに理解を深めるためのヒントも書かれていることがあります。問題を解いて解答が一致した後、一応【解答】をチェックすることをお勧めします。

2. 問題の種類

【例題 2】 【例題】は、主に、直前の定義や内容の確認を兼ねた例題です。はじめて学ぶ人、復習だが理解が足りないと思う人は、解くのが良いでしょう。逆に、既に理解がある程度できていると思う人は、飛ばしても良いでしょう。

【練習 3：主要になる「練習」問題】

【練習】は、13th-note 教科書の軸と成る問題群です。基本的に解くようにしましょう。解いていて疑問など見つければ、直線の説明、【例題】を参照したり、答えをよく理解するようにしましょう。


【暗記 4：ただ解けるだけではいけません】

定義・定理を「知っている」と「使える」は違います。特に、「反射的にやり方を思い出す」べき内容があります。それが、この暗記問題です。この暗記問題については「解ける」だけでなく、その解き方・考え方をすぐに頭の中で思い浮かべられるようにする必要があります。

【発展 5：さらなる次へのステップ】

発展 は、ただ定義や定理が分かるだけでは解けない問題です。さらに理解を深めたい人、大学入試の数学を意識する人は挑戦し、理解するようにしましょう。

3. 補足

本文中、ところどころに  マーク付きの文章があります。このマークのついた文章は、主に、本文とは少し異なる視点から書かれています。理解を深めることに役立つことがあるでしょう。

目次

| | |
|----------------------------|-----------|
| はじめに | ii |
| 凡例 | iii |
| 第 1 章 場合の数と確率 | 1 |
| A 場合の数 | 1 |
| §1A.1 場合の数の基礎 | 1 |
| §1. 積の法則 | 1 |
| §2. 集合と場合の数 | 5 |
| §3. 「重複を許す」, 「順列と組合せ」 | 7 |
| §1A.2 異なるものが作る順列 | 9 |
| §1. 重複順列 | 9 |
| §2. 順列 ${}_n P_r$ | 11 |
| §3. 円順列と商の法則 | 17 |
| §1A.3 組合せ ${}_n C_r$ とその応用 | 20 |
| §1. 組合せ ${}_n C_r$ | 20 |
| §2. 同じものを含むときの順列 | 26 |
| §3. 重複組合せ | 32 |
| B 確率 | 35 |
| §1B.1 確率の基礎 | 35 |
| §1. 確率とは何か | 35 |
| §2. 同様に確からしい | 38 |
| §1B.2 確率とベン図 | 42 |
| §1. 和事象・積事象・排反 | 42 |
| §2. 余事象 | 44 |
| §1B.3 確率の木と独立・従属 | 46 |
| §1. 乗法定理と確率の木 | 46 |
| §2. 独立試行・従属試行 | 48 |
| §3. 反復試行 ~ 独立な試行の繰り返し | 51 |
| §4. 条件付き確率 ~ 従属な試行どうしの関係 | 55 |
| 第 2 章 整数の性質と不定方程式 | 59 |
| §2.1 約数と倍数 | 59 |
| §1. 約数と倍数 | 59 |
| §2. いくつかの倍数の判定法 | 61 |
| §3. 約数の性質 ~ 素因数分解・約数の個数 | 64 |
| §4. 最大公約数と最小公倍数 | 67 |
| §5. 約数と倍数に関する種々の問題 | 70 |
| §2.2 商と余り | 74 |

| | | | |
|--------------|-----|---|------------|
| | §1. | 余り | 74 |
| | §2. | 余りと文字式 | 76 |
| | §3. | 合同式 | 80 |
| §2.3 | | ユークリッドの互除法と不定方程式 | 85 |
| | §1. | ユークリッドの互除法 | 85 |
| | §2. | 不定方程式の解の 1 つを求める | 87 |
| | §3. | 1 次不定方程式の一般解 | 91 |
| | §4. | 種々の 1 次不定方程式 | 98 |
| §2.4 | | 数の数え方・表し方 | 100 |
| | §1. | n 進法とは何か | 100 |
| | §2. | n 進数を 10 進数に | 101 |
| | §3. | 10 進数を n 進数に | 103 |
| | §4. | n 進数の四則計算 | 104 |
| §2.5 | | 第 2 章の補足 | 108 |
| | §1. | 余りの判定法の証明 | 108 |
| | §2. | 1 次方程式 $ax + by = c$ の整数解を 1 つ求める別の方法 | 108 |
| | §3. | ⑨⑩ $ax + by = c$ が整数解をもつ条件 | 109 |
| | §4. | ⑨⑩ 一次不定方程式の一般解について | 110 |
| | §5. | ⑨⑩ 『10 進数から n 進数への変換』の証明 | 111 |
| 第 3 章 | | 平面図形 | 113 |
| §3.1 | | 三角形の性質 (1) | 113 |
| | §1. | 三角形の成立条件 | 113 |
| | §2. | 三角形の辺と角の大小関係 | 114 |
| | §3. | 辺の内分・外分 | 115 |
| §3.2 | | 円の性質 (1) ～円の弦・接線 | 119 |
| §3.3 | | 三角形の性質 (2) ～三角形の五心 | 121 |
| | §1. | 三角形の内心 | 121 |
| | §2. | 三角形の外心 | 123 |
| | §3. | 三角形の重心 | 126 |
| | §4. | 三角形の三心と五心 | 128 |
| §3.4 | | 円の性質 (2) | 130 |
| | §1. | 円に内接している四角形 | 130 |
| | §2. | 四角形が円に内接する条件 | 132 |
| | §3. | 接弦定理 | 135 |
| | §4. | 方べきの定理 | 137 |
| | §5. | 2 円の性質 | 140 |
| §3.5 | | 三角形の性質 (3) | 143 |
| | §1. | メネラウスの定理 | 143 |
| | §2. | チェバの定理 | 145 |
| §3.6 | | 平面図形の発展問題 | 146 |
| §3.7 | | 第 3 章の補足 | 149 |

索引

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち、背景が灰色である文字は、数学 I で用いられることがある.

| 英語 | 読み方 | 大文字 | 小文字 | 英語 | 読み方 | 大文字 | 小文字 |
|---------|-------|-----------|-------------------------|---------|----------|------------|---------------------|
| alpha | アルファ | A | α | nu | ニュー | N | ν |
| beta | ベータ | B | β | xi | クシー, グサイ | Ξ | ξ |
| gamma | ガンマ | Γ | γ | omicron | オミクロン | O | o |
| delta | デルタ | Δ | δ | pi | パイ | Π | π, ϖ |
| epsilon | イプシロン | E | ϵ, ε | rho | ロー | P | ρ, ϱ |
| zeta | ゼータ | Z | ζ | sigma | シグマ | Σ | σ, ς |
| eta | イータ | H | η | tau | タウ | T | τ |
| theta | シータ | Θ | θ, ϑ | upsilon | ユプシロン | Υ | υ |
| iota | イオタ | I | ι | phi | ファイ | Φ | ϕ, φ |
| kappa | カッパ | K | κ | chi | カイ | X | χ |
| lambda | ラムダ | Λ | λ | psi | プシー, プサイ | Ψ | ψ |
| mu | ミュー | M | μ | omega | オメガ | Ω | ω |

第1章 場合の数と確率



A 場合の数

場合の数 (number of cases) とは「何通りの場合が起こりうるか数える」ことである。



1A.1 場合の数の基礎



起こりうる場合の数を正しく数えるには次のことが必要条件になる。

「数えもらさない」 「同じものを繰り返して数えない」

1. 積の法則

A. 表を用いる

「数えもらさない」「同じものを繰り返して数えない」ための基本的な手段は、表を用いることである。

たとえば、大小2個のさいころを投げたときの出る目を表でまとめると、右のようになる。このとき、すべての場合の数は $6 \times 6 = 36$ 通りと分かる。

| 大小 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1,1 | 2,1 | 3,1 | 4,1 | 5,1 | 6,1 |
| 2 | 1,2 | 2,2 | 3,2 | 4,2 | 5,2 | 6,2 |
| 3 | 1,3 | 2,3 | 3,3 | 4,3 | 5,3 | 6,3 |
| 4 | 1,4 | 2,4 | 3,4 | 4,4 | 5,4 | 6,4 |
| 5 | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 6,5 |
| 6 | 1,6 | 2,6 | 3,6 | 4,6 | 5,6 | 6,6 |

} 全部で6通り

} 全部で6通り

【例題1】4種類のカード **A** **B** **C** **D** を用いて2枚並べる。ただし、同じカードを繰り返し並べてよいとする。右の表を完成させ、全部で何通りあるか答えなさい。

| 1枚目 \ 2枚目 | A | B | | |
|-----------|----|----|--|--|
| A | AA | AB | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

【解答】

よって、 $4 \times 4 = 16$ 通りある。

| 1枚目 \ 2枚目 | A | B | C | D |
|-----------|----|----|----|----|
| A | AA | AB | AC | AD |
| B | BA | BB | BC | BD |
| C | CA | CB | CC | CD |
| D | DA | DB | DC | DD |



3枚以上選ぶ並べる場合には表で書き表すことが難しくなるので、樹形図を用いる。

B. 辞書順に並べる

場合の数の問題では、辞書と同じように、アルファベット順、あいうえお順、数字の小さい順などで、結果を並べるとよい。

(例 1) 5 枚のカード

A, **B**, **C**, **D**, **E**

のうち 3 枚を使った、A から始まる文字列は、右のように書き出すことができる。その結果、場合の数は $4 \times 3 = 12$ 通りと求められる。

悪いやり方 (×)

ABC AEB ACD
ACB ABE ADC
ADE ABD AEC
AED ADB ACE

辞書順並べ (○)

ABC ABD ABE (←ABで始まる文字列)
ACB ACD ACE (←ACで始まる文字列)
ADB ADC ADE (←ADで始まる文字列)
AEB AEC AED (←AEで始まる文字列)

(例 2) 大小 2 つのさいころを振ったとき、出た目を

(大きいさいころの目, 小さいさいころの目)

で表そう (このテキストでは以後、同じとする)。

出た目の和が 6 になる場合を辞書順並べで書き出すと、右図のようになって容易に、5 通りあると分かる。

| 悪いやり方 (×) | 辞書順並べ (○) |
|-----------|-----------|
| (1, 5) | (1, 5) |
| (5, 1) | (2, 4) |
| (4, 2) | (3, 3) |
| (2, 4) | (4, 2) |
| (3, 3) | (5, 1) |

↑
上から 1, 2, 3, 4, 5

【例題 2】

1. 上の (例 1) において、C から始まる文字列を辞書順で全て書き出し、何通りあるか答えなさい。
2. 上の (例 2) において、目の和が 7 になる場合を、辞書順で全て書き出し、何通りあるか答えなさい。
3. $a + b + c = 5$ となる自然数 (a, b, c) の組を辞書順で全て書き出し、何通りあるか答えなさい。

【解答】

- | | |
|---|---|
| <p>1. CAB CAD CAE CBA CBD CBE CDA CDB CDE CEA CEB CED</p> | <p>2. (1, 6) (2, 5) (3, 4) (4, 3) (5, 2) (6, 1)</p> |
|---|---|

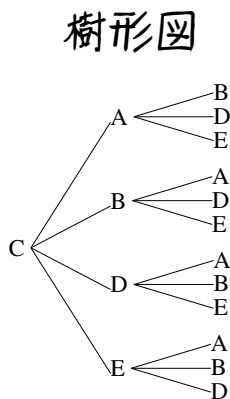
1. は $4 \times 3 = 12$ 通り あり.
2. は **6** 通り あり.
3. は **6** 通り あり.

3. (a, b, c)
 $= (1, 1, 3),$
 $(1, 2, 2),$
 $(1, 3, 1),$
 $(2, 1, 2),$
 $(2, 2, 1),$
 $(3, 1, 1)$

C. 樹形図

辞書順並べを少し簡略化した書き方が、**樹形図** (tree diagram) である。

たとえば、【例題2】の1.を樹形図で書き出すと、右のようになる。



簡略化
←

- CAB
- CAD
- CAE
- CBA
- CBD
- CBE
- CDA
- CDB
- CDE
- CEA
- CEB
- CED

辞書順並べ

一列に
←

- | | | |
|-----|-----|-----|
| CAB | CAD | CAE |
| CBA | CBD | CBE |
| CDA | CDB | CDE |
| CEA | CEB | CED |

D. 積の法則

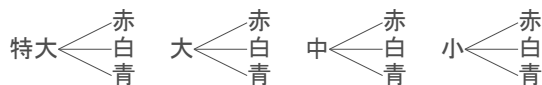
上の樹形図において、 $\bigcirc \begin{matrix} \triangle \\ \blacktriangle \\ \nabla \end{matrix}$ という形が4回現われることが分かる。これは、「2番目の文字は4種類あり、2番目の文字がどんな場合でも、3番目の文字は3種類ある」ことを意味しており、場合の数は $3 \times 4 = 12$ 通りとなる。

【例題3】

- A社のかばんには、特大、大、中、小の4種類あり、いずれも、赤、白、青の3色から選べるという。樹形図を書いて、何種類のかばんがあるか答えなさい。
- 1から4の数字を用いた、2桁の数字を樹形図で書き出し、何通りあるか答えなさい。

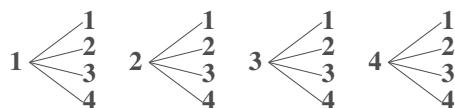
【解答】

1. (大きさ - 色) で樹形図を書けば、以下のようになる。



全部で $4 \times 3 = 12$ 通りある。

2. (十の位 - 一の位) で樹形図を書けば、以下のようになる。



全部で $4 \times 4 = 16$ 通りある。

◀ 樹形図によるまとめ方は複数ある。たとえば、(色, 大きさ) の順で書けば、以下のような樹形図を書くことができる。



積の法則

2つの事柄 A, B について、A の起こり方が a 通り、A がどんな場合でも、B の起こり方が b 通りあるとする。このとき

A と B がともに起こる場合は $a \times b$ 通り

ある。このことを**積の法則** (multiplication law) という。

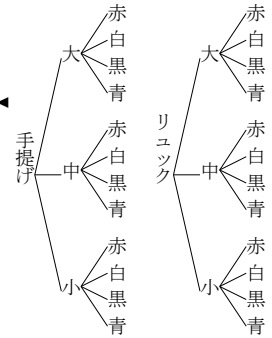
【練習 4：積の法則～その 1～】

- (1) 男子が 5 人、女子が 4 人のクラスから、男女一人ずつを選ぶ方法は何通りあるか。
 (2) 1 から 9 までの数字を用いた、2 桁の数は何通りあるか。
 (3) B 社のかばんには、手提げとリュックの 2 種類があり、大きさは大中小の 3 種類から、色は赤、白、黒、青の 4 色から選べるという。何種類のかばんがあるか。

【解答】

- (1) 5 人のうちどの男子を選んでも、女子の選び方は 4 通りあるので、 $5 \times 4 = 20$ 通りと求められる。
 (2) 10 の位は 9 通り、10 の位がいくつであっても、1 の位は 9 通りある。つまり、 $9 \times 9 = 81$ 通りである。
 (3) かばんは 2 種類あり、どちらの場合でも大きさは 3 種類あり、さらに、どの場合も色は 4 種類ずつある。つまり、 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通りある。

積の法則を用いるかどうかわからないときは、樹形図をイメージしよう。

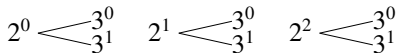


E. ⑨⑩ 正の約数の個数

積の法則 (p.3) の応用例として、12 の約数について考えよう。12 = $2^2 \times 3$ であるので、12 の約数は^{*1}

$$2^0 \times 3^0, 2^0 \times 3^1, 2^1 \times 3^0, 2^1 \times 3^1, 2^2 \times 3^0, 2^2 \times 3^1$$

ですべてとなる。これを樹形図にすれば、次のようになり、 $3 \times 2 = 6$ 個の約数があるとわかる。



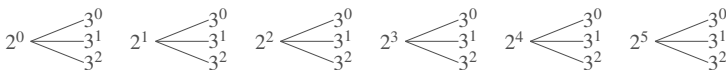
また、12 の約数の和は、 $(2^0 + 2^1 + 2^2) \times (3^0 + 3^1) = (1 + 2 + 4) \times (1 + 3) = 7 \times 4 = 28$ で計算できる。これは、次の等式から分かる。

$$\begin{aligned} & 2^0 \times 3^0 + 2^0 \times 3^1 + 2^1 \times 3^0 + 2^1 \times 3^1 + 2^2 \times 3^0 + 2^2 \times 3^1 \\ &= 2^0 \times (3^0 + 3^1) + 2^1 \times (3^0 + 3^1) + 2^2 \times (3^0 + 3^1) \\ &= (2^0 + 2^1 + 2^2) \times (3^0 + 3^1) \quad \leftarrow (3^0 + 3^1) \text{ を共通因数と見て因数分解した} \end{aligned}$$

【⑨⑩ 5：正の約数の個数】

上のやり方を参考に、288 の約数の個数を求めよ。また、約数の和を求めよ。

【解答】 288 = $2^5 \times 3^2$ である。よって、288 の約数は



よって、約数の個数は $6 \times 3 = 18$ 個ある。また、約数の和は

$$\begin{aligned} & (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) \times (3^0 + 3^1 + 3^2) \\ &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) \times (1 + 3 + 9) = 63 \times 13 = 819 \end{aligned}$$

◀ 素因数分解した

◀ 慣れたら、素因数分解の指数部を見るだけで、 $(5+1) \times (2+1) = 18$ と計算できる。

*1 $2^0 = 1, 3^0 = 1$. どんな数も 0 乗は 1 である。

2. 集合と場合の数

A. 操作の結果を集合で表す

たとえば、大きさの異なる立方体のさいころ2個を振って「目の和が5になる場合」について、次のように書くことができる。

「目の和が5になる場合」の集合 A は、 $A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ であり、 $n(A) = 4$ である。

【例題 6】 大小2個のさいころを投げるとき、以下の集合の要素を書き出し、(4)の問いに答えよ。

1. 出た目の和が10になる場合の集合 B
2. 出た目の差が4になる場合の集合 C
3. 出た目の積が12になる場合の集合 D
4. $n(B)$, $n(C)$, $n(D)$ はいくらか。

【解答】

1. $B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$
2. $C = \{(6, 2), (5, 1), (2, 6), (1, 5)\}$
3. $D = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$
4. $n(B) = 3$, $n(C) = 4$, $n(D) = 4$

◀「差」とは「2つの値の違い」なので、 $(5, 1)$, $(1, 5)$ の差はいずれも4。

B. 場合の数と集合の要素の個数

場合の数を集合を用いて考えれば、『集合の要素の個数』で学ぶ次の法則を用いることができる。

『補集合の要素の個数』

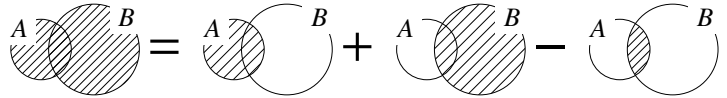
$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

『包含と排除の原理』

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



$A \cap B = \emptyset$ のとき、 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ となる。これは『和の法則』とも呼ばれる。



【例題 7】 大きさは大中小の3種類、赤、白、黒、青の4色があるD社のかばんを買いにいったところ、大きいかばんと、黒のかばんは気に入らなかったが、他は気に入った。大きなかばんの集合を A 、黒いかばんの集合を B とするとき、以下の問いに答えよ。

1. $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$ の値をそれぞれ求めよ。
2. 気に入らなかったかばんは何通りか。
3. 気に入ったかばんは何通りか。

【解答】

1. $n(A) = 4$, $n(B) = 3$, $n(A \cap B) = 1$
2. 気に入らなかったかばんは $A \cup B$ に一致するので
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 3 - 1 = 6$ から **6通り**。
3. D社のかばんは全部で $4 \times 3 = 12$ 通りある。(2)以外のかばんの種類なので、 $12 - 6 = 6$ 通りある。

◀ $A \cap B$ 「大きくて黒いかばんの集合」、そのようなかばんは1つしかない

C. 場合分け

【例題 8】 大小 2 個のさいころを投げたとき、出た目の和が 5 の倍数となるのは次の場合がある.

- 「出た目の和が 5 になる場合」これは **ア** 通りある
- 「出た目の和が **イ** になる場合」これは **ウ** 通りある

この場合分けから、出た目の和が 5 の倍数となる場合は **エ** 通りあるとわかる.

【解答】 ア：(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) の 4 通りある. イ：10

ウ：(4, 6), (5, 5), (6, 4) の 3 通りある. エ：4 + 3 = 7



出た目の和が 5 となる場合を A ，出た目の和が 10 となる場合を B とすれば、 $A \cap B = \emptyset$ であるので、(出た目の和が 5 の倍数となる場合の数) = $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ である.

【練習 9：場合の数における集合】

1 から 50 までが書かれたカード 50 枚の中から、無作為に 1 枚引く. 引いたカードが

2 の倍数である場合の集合を Z_2 ，3 の倍数である場合の集合を Z_3

また、すべての場合の集合を U とする. つまり、 $n(U) = 50$ である.

(1) $n(Z_2)$ ， $n(Z_3)$ ， $n(Z_2 \cap Z_3)$ の値を求めなさい.

(2) 「奇数である場合の集合」を A ，「6 の倍数である場合の集合」を B ，「2 または 3 で割り切れる場合の集合」を C とする. それぞれ一致するものを選びなさい.

- ① Z_2 ② Z_3 ③ $\overline{Z_2}$ ④ $\overline{Z_3}$ ⑤ $Z_2 \cap Z_3$ ⑥ $Z_2 \cup Z_3$

(3) $n(A)$ ， $n(B)$ ， $n(C)$ をそれぞれ答えなさい.

【解答】

(1) たとえば「1 を引いた場合」を「1」と表せば

$$Z_2 = \{2, 4, 6, \dots, 50 (= 2 \times 25)\}$$

$$Z_3 = \{3, 6, 9, \dots, 48 (= 3 \times 16)\}$$

$$Z_2 \cap Z_3 = \{6, 12, 18, \dots, 48 (= 6 \times 8)\}$$

なので、 $n(Z_2) = 25$ ， $n(Z_3) = 16$ ， $n(Z_2 \cap Z_3) = 8$

(2) A は ③， B は ⑤， C は ⑥

(3) $n(A) = n(\overline{Z_2}) = 25$ ， $n(B) = n(Z_2 \cap Z_3) = 8$

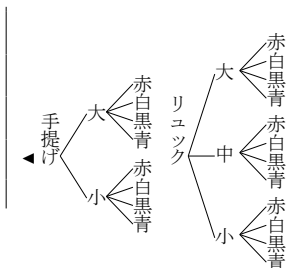
$$n(C) = n(Z_2 \cup Z_3) = 25 + 16 - 8 = 33$$

【練習 10：場合分けと積の法則】

- (1) 1 から 5 までの数字を用いてできる 2 桁以下の数は何通りあるか。
 (2) C 社のかばんには、手提げは大中の 2 種類、リュックは大中小の 3 種類あり、どの種類も赤、白、黒、青の 4 色から選べるという。何種類のかばんがあるか。

【解答】

- (1) 2 桁の数は $5 \times 5 = 25$ 通り、1 桁の数は 5 通りある。
 つまり、全部で $25 + 5 = 30$ 通りの数がある。
 (2) 手提げは 2×4 通り、リュックは、 3×4 通りある。
 よって、全部で $4 \times 2 + 4 \times 3 = 20$ 種類ある。



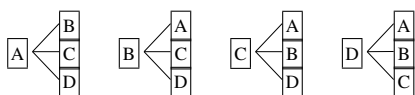
3. 「重複を許す」, 「順列と組合せ」

A. 「重複を許す」とは

同じ操作を繰り返してもよいことを「重複を許す」という。

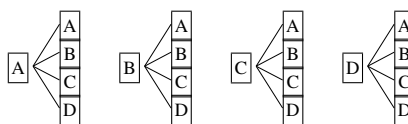
たとえば、4 種類のカード **A** **B** **C** **D** を用いて 2 枚の列を作るとき

「重複を許さない」ならば



$4 \times 3 = 12$ 通りの並べ方がある。

「重複を許す」ならば



$4 \times 4 = 16$ 通りの並べ方がある。

【例題 11】

1. 1 から 5 までの数字を用いて、2 桁の数字を作ろうと思う。
 (a) 重複を許して作るなら、何通りできるか。 (b) 重複を許さないなら、何通りできるか。
 2. 6 枚のカード **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** を並べてできる 2 桁の整数は何通りあるか。

【解答】

1. (a) 10 の位は 5 通り、そのいずれの場合も、1 の位は 5 通りあるので、 $5 \times 5 = 25$ 通り
 (b) 10 の位は 5 通り、そのいずれの場合も、1 の位は 4 通りあるので、 $5 \times 4 = 20$ 通り
 2. 10 の位は 6 通り、そのいずれの場合も、1 の位は 5 通りあるので、 $6 \times 5 = 30$ 通り

◀ 2. において、1 の位は、10 の位と同じ数を入れることができない

◀ 10 の位に置いたカードを、1 の位に置くことはできない

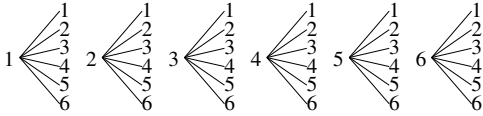
B. 「順列」とは、「組合せ」とは

たとえば、さいころを2回投げた場合の目の出方は、次の2通りの方法でまとめることができる。



a) 1回目と2回目を区別する場合

1回目－2回目の順に樹形図を書けば、次のようになる。

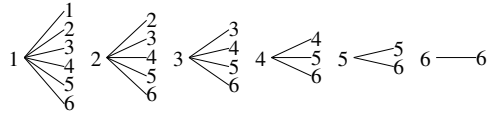


この場合は、投げた順に結果を列挙した順列 (permutation) を考えている。

順列か組合せのいずれで考える問題なのか、注意して樹形図を書こう。

b) 1回目と2回目を区別しない場合

小さい目－大きい目の順で樹形図を書けば、次のようになる。



この場合は、試行した結果の組合せ (combination) を考えている。

【例題 12】 1, 2, 3, 4 の数字が書いてある 4 枚のカードがある。次の試行について、それぞれ樹形図を用いてすべて書き出し、何通りあるか答えよ。



1. 続けて2枚引く場合のカードの順列

2. 続けて2枚引いたときの、カードの組合せ

【解答】

1. $1 \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \quad 2 \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \quad 3 \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \end{cases} \quad 4 \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \quad 4 \times 3 = 12 \text{ 通り}$

2. $1 \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \quad 2 \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases} \quad 3 \text{ --- } 4 \quad 3 + 2 + 1 = 6 \text{ 通り}$

◀ (2) は、§1A.3『組合せ』において学ぶことを用い、 ${}_4C_2 = 6$ 通りとも求められる。

【練習 13：さいころの区別】

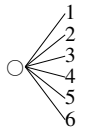
- (1) 見た目がまったく同じ2個のさいころを同時に振るとき、目の出方は何通りあるか。
- (2) 大きさが異なる2個のさいころを振るとき、目の出方は何通りあるか。

【解答】

(1) $1 \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{cases} \quad 2 \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{cases} \quad 3 \begin{cases} 4 \\ 5 \\ 6 \end{cases} \quad 4 \begin{cases} 5 \\ 6 \end{cases} \quad 5 \begin{cases} 6 \end{cases} \quad 6 \text{ --- } 6$
 $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 \text{ 通り}$

(2) 大きいさいころは6通り。そのいずれの場合も、小さいさいころが6通りあるので、 $6 \times 6 = 36$ 通り

◀ 右のような樹形図が6つ書ける。(○には1から6が入る)



【練習 14：足して5になる数】

- (1) 足して5になるような2つの自然数の組をすべて求めよ。
- (2) $x + y = 5$ になるような、2つの自然数 x, y の解をすべて求めよ。

【解答】

- (1) 1と4, 2と3の2組
- (2) $(x, y) = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$

◀ 2つの数字の組合せを考えている
 ◀ 2つの数字を x, y で区別した結果として順列を考えている



1A.2 異なるものが作る順列

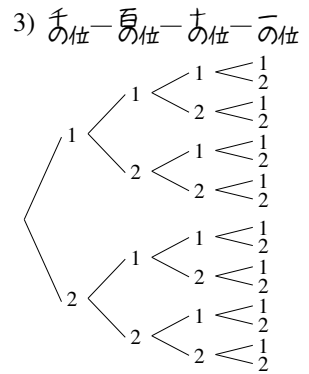
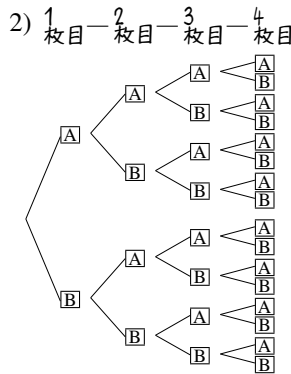
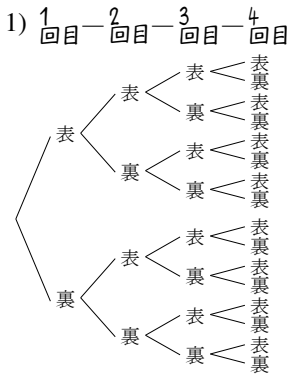


1. 重複順列

A. 重複順列とは

同じことを繰り返してできる順列のことを^{ちようふく}重複順列 (permutation with repetitions) という。
次の問題について、それぞれ樹形図を書いて、何通りあるか考えてみよう。

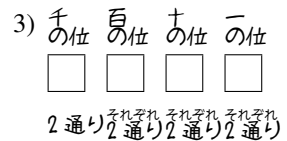
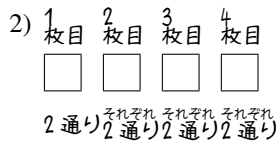
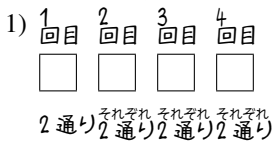
- 1) 表と裏があるコインを4回振るときの、出た目の順列は何通りあるか。
- 2) **A**, **B** の2枚から1枚引いて記録し、元に戻す操作を4回行ったとき、引いたカードの順列
- 3) 1か2のみで作ることのできる、4桁の整数



簡略化

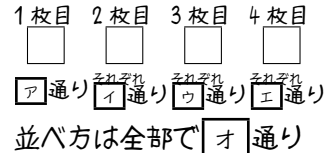


簡略化



結果、いずれも $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 通りと分かる。

【例題 15】 **A**, **B**, **C** の3枚のカードから1枚引いて記録し、元に戻す操作を4回行った。右の にあてはまる数字を答えよ。



【解答】 ア:3, イ:3, ウ:3, エ:3, オ: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

重複順列

n 通りの可能性のある操作を、 r 回繰り返したときに得られる順列を重複順列といい、その場合の数は $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{r \text{ 回}} = n^r$ 通りである。

【練習 16：重複順列】

- (1) 表と裏があるコインを 6 回振るときの、出た目の順列は何通りあるか。
 (2) **A**, **B**, **C**, **D** の 4 枚のカードから、1 枚引いて元に戻す操作を 3 回行ったとき、引いたカードの順列は何通りあるか。
 (3) 5 人 1 組のグループ 3 組から、リーダーを 1 人ずつ選ぶ方法は何通りあるか。
 (4) 1, 2, 3 のみを用いた、4 桁以下の整数は何通りあるか。

【解答】

(1) $\begin{matrix} 1 \text{ 回目} & 2 \text{ 回目} & 3 \text{ 回目} & 4 \text{ 回目} & 5 \text{ 回目} & 6 \text{ 回目} \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{matrix}$ よって、 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
 $\begin{matrix} 2 \text{ 通り} & \text{それぞれ} & \text{それぞれ} & \text{それぞれ} & \text{それぞれ} & \text{それぞれ} \\ & 2 \text{ 通り} & 2 \text{ 通り} & 2 \text{ 通り} & 2 \text{ 通り} & 2 \text{ 通り} \end{matrix}$ $= 2^6 = 64 \text{ 通り}$

(2) $\begin{matrix} 1 \text{ 枚目} & 2 \text{ 枚目} & 3 \text{ 枚目} \\ \square & \square & \square \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 \text{ 組目} & 2 \text{ 組目} & 3 \text{ 組目} \\ \square & \square & \square \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 4 \text{ 通り} & \text{それぞれ} & \text{それぞれ} & 5 \text{ 通り} & \text{それぞれ} & \text{それぞれ} \\ & 4 \text{ 通り} & 4 \text{ 通り} & 5 \text{ 通り} & 5 \text{ 通り} & 5 \text{ 通り} \end{matrix}$
 よって、 $4^3 = 64 \text{ 通り}$ よって、 $5^3 = 125 \text{ 通り}$

(4) 4 桁の数は $3^4 = 81$ 通り、3 桁の数は $3^3 = 27$ 通り、
 2 桁の数は $3^2 = 9$ 通り、1 桁の数は $3^1 = 3$ 通り
 あるので、全部で $81 + 27 + 9 + 3 = 120$ 通りある。

◀ $3^4 = 9 \times 9 = 81$ で計算するとよい。

B. 重複順列に置き換えられる問題

たとえば、集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ の部分集合は、何通りあるか考えてみよう。

A の部分集合には、 $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, \emptyset , $\{1, 2, 3, 4\}$ などがあるが、これらを、右図の方法で順列に対応させることができる。結局

「A の部分集合を挙げる」

⇔ 「○か×を 4 回並べる」

ことは 1 対 1 に対応し、「A の部分集合の数」と「○か×を 4 回並べる重複順列の場合の数」は一致する。つまり、A の部分集合は $2^4 = 16$ 通りあると求められる。

$\{1, 2\} \iff \text{○ ○ × ×}$

$\{1, 3\} \iff \text{○ × ○ ×}$

$\{2, 3, 4\} \iff \text{× ○ ○ ○}$

$\emptyset \iff \text{× × × ×}$

$\{1, 2, 3, 4\} \iff \text{○ ○ ○ ○}$

A の部分集合 ⇔ $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{有} & \text{無} & \text{有} & \text{無} \\ \text{有} & \text{無} & \text{有} & \text{無} \end{matrix}$

【例題 17】 集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ の部分集合は何通りあるか。

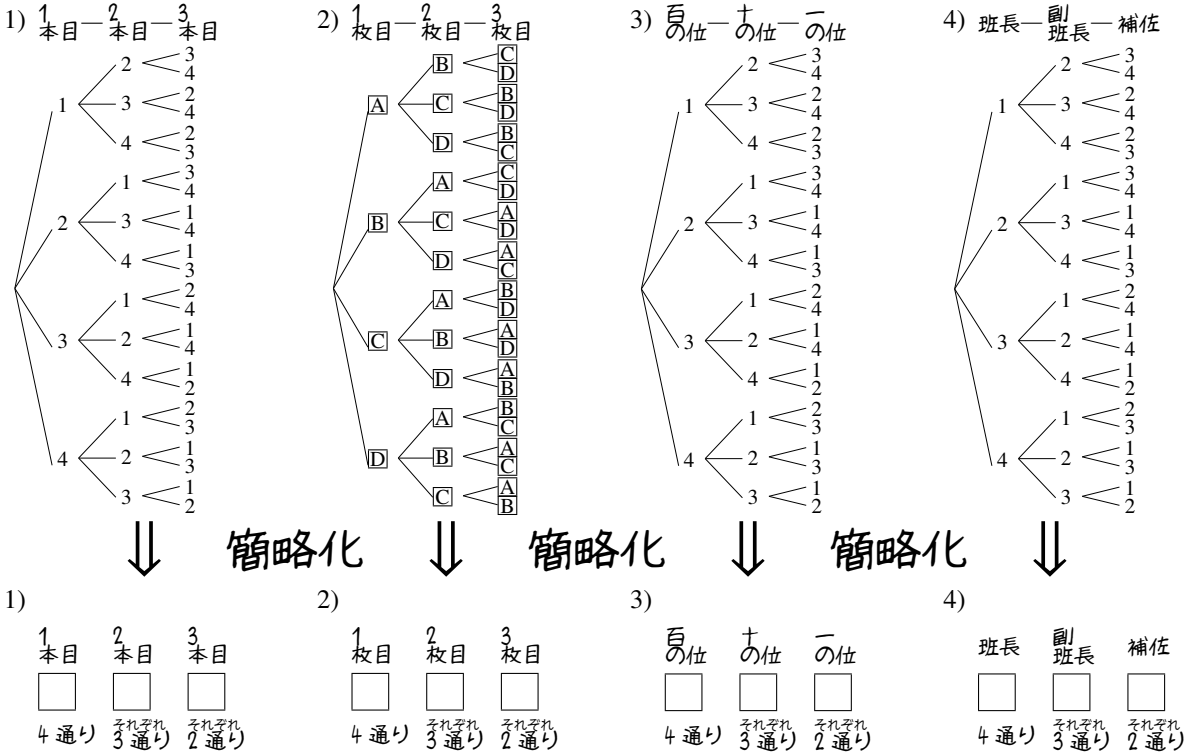
【解答】 X の部分集合を挙げることは、○か×を 5 回並べることに置き換えられるので、部分集合は $2^5 = 32$ 通りある。

2. 順列 nPr

A. 繰り返しのない順列

次の2つの問題について、樹形図を書いて、何通りあるか考えてみよう。

- 1, 2, 3, 4 が書いてある4本の旗のうち、3本を用いた旗の並べ方は何通りあるか。
- A**, **B**, **C**, **D** の4枚のカードのうち、3枚を用いてできる順列は何通りあるか。
- 1 から4 を重複なく使ってできる、3桁の整数は何通りあるか。
- 出席番号1 から4 の4人から、班長、副班長、補佐を決める方法は何通りあるか。



結果、いずれも $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通りと分かる。

特に、1) から3) の問題はいずれも「4つの異なるものから、重複なしに3つを一行に並べる」操作によって得られる。

【例題 18】 **A**, **B**, **C**, **D**, **E** の5枚のカードから1枚ずつ引いて記録する操作を3回行った。右の□にあてはまる数字を答えよ。ただし、一度引いたカードは元に戻さないとする。

1枚目 □ □ □
2枚目 □ □ □
3枚目 □ □ □
□ア通り □イ通り □ウ通り
並べ方は全部で □エ通り

【解答】 ア: 5, イ: 4, ウ: 3, エ: $5 \times 4 \times 3 = 60$

【練習 19：順列～その 1～】

1 から 6 までのカードが 1 枚ずつ、計 6 枚ある。次の順列は何通りあるか。

- (1) 2 枚を用いた順列 (2) 3 枚を用いた順列 (3) 4 枚を用いた順列

【解答】

- (1) 1つ目 2つ目 (2) 1つ目 2つ目 3つ目

 6通り それぞれ5通り 6通り それぞれ5通り それぞれ4通り
 よって、 $6 \times 5 = 30$ 通り よって、 $6 \times 5 \times 4 = 120$ 通り
- (3) 1つ目 2つ目 3つ目 4つ目

 6通り それぞれ5通り それぞれ4通り それぞれ3通り よって、 $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ 通り

B. 順列 ${}_n P_r$

ここまで学んだ順列の場合の数は、記号 ${}_n P_r$ を用いて表されることがある*2。

順列 ${}_n P_r$ の定義

「 n 個の異なるものから r 個を用いて一列に並べる順列」の場合の数を、記号 ${}_n P_r$ で表す（自然数 n と r は $n \geq r$ とする）。

| | | | | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----|--------------------------|--------------------------|
| | 1 番目 | 2 番目 | 3 番目 | …… | $r-1$ 番目 | r 番目 |
| | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | …… | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | n 通り | それぞれ $n-1$ 通り | それぞれ $n-2$ 通り | …… | それぞれ $n-(r-2)$ 通り | それぞれ $n-(r-1)$ 通り |

右上の図から、 ${}_n P_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}_{n \text{ から始まる } r \text{ 個の数の積}}$ で計算できる。

たとえば、p.11 の 1) から 4) はすべて、 ${}_4 P_3 = \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2}_{4 \text{ から始まる } 3 \text{ 個の数の積}} = 24$ である。

【例題 20】

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 個の数字を使ってできる 3 桁の整数は、 ${}_6 P_3 = \square$ 通りある。
2. 5 色の旗を 1 列に並べるときの場合の数は ${}_5 P_5 = \square$ 通りある。

【解答】

1. ア: 6, イ: 3, ウ: ${}_6 P_3 = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}_{6 \text{ から始まる } 3 \text{ 個の数の積}} = 120$
2. エ: 5, オ: 5, カ: ${}_5 P_5 = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{1 \text{ から } 5 \text{ までの積}} = 120$

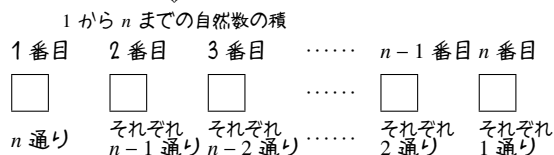
*2 ただし、 ${}_n P_r$ はあまり有用な記号ではない。応用範囲が狭く、後に学ぶ記号 ${}_n C_r$ と混同しやすい。順列の問題は、これまで通り『積の法則』(p.3) で処理するのがよい。

C. 階乗 $n!$

階乗 $n!$ の定義

「異なる n 個すべてを一列に並べる順列」の場合の数を n の階乗 (factorial) といい、 $n!$ で表す。

下の図から、 $n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}_{1 \text{ から } n \text{ までの自然数の積}}$ となる。



(例)

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \cdot 1 = 2 \\ 3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \\ 4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \end{aligned}$$

0 を含む順列、階乗は、 ${}_n P_0 = 1$, $0! = 1$ と定義される*3。

【例題 21】 ${}_7 P_3$, ${}_{10} P_5$, $6!$, ${}_{13} P_0$ の値を計算せよ。

【解答】 ${}_7 P_3 = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}_{\substack{7 \text{ から始まる} \\ 3 \text{ 個の数の積}}} = 210$, ${}_{10} P_5 = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}_{\substack{10 \text{ から始まる} \\ 5 \text{ 個の数の積}}} = 30240$

$6! = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{1 \text{ から } 6 \text{ までの積}} = 720$, ${}_{13} P_0 = 1$



掛け算の順番に気をつけて、順列 ${}_n P_r$ の値を計算しよう。たとえば

$${}_8 P_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 6 \cdot 5 = 336 \cdot 5 = 1680$$

$${}_8 P_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680$$

のように、5 と偶数を利用して計算すると、手間が大きく変わる。

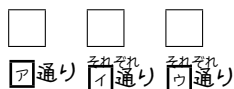
D. 順列 ${}_n P_r$ と重複順列

同じものを繰り返し用いるときは重複順列になるため、順列 ${}_n P_r$ を用いることはできない。

【例題 22】 7 色の絵の具で 3 つの場所を塗る。次の 2 つの場合について に数字を入れよ。

1. 同じ色を使わず塗る場合は

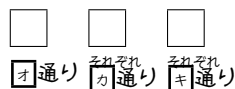
1 つ目 2 つ目 3 つ目



であるから、全部で 通りある。

2. 同じ色を使って塗る場合は

1 つ目 2 つ目 3 つ目



であるから、全部で 通りある。

【解答】

1. ア : 7, イ : 6, ウ : 5, エ : $7 \times 6 \times 5 = 210$

2. オ : 7, カ : 7, キ : 7, ク : $7 \times 7 \times 7 = 343$

*3 直感的には、次の関係からも簡単に確認できる。

$$\begin{array}{ccccccc} 4! & 3! & 2! & 1! & 0! & {}_n P_3 & {}_n P_2 & {}_n P_1 & {}_n P_0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \div 4 & \div 3 & \div 2 & \div 1 & & \div (n-2) & \div (n-1) & \div n & \end{array}$$

また、「 n 個のものから 0 個を用いて並べる」順列も、「異なる 0 個すべてを一列に並べる」順列も、「何も並べない」という 1 通りしか存在しないことから理解することもできる。

E. 順列と和の法則・積の法則

【練習 23：条件を満たす整数の個数～その 1～】

- (1) 1 から 7 までの数字を重複なく使い、4 桁の数字を作る。
 1) 千の位が 5 である整数は何通りか。 2) 5000 以上の整数は何通りか。
 3) 一の位が 2 である整数は何通りか。 4) 偶数は何通りか。 5) 奇数は何通りか。
- (2) 1 から 7 までの数字を用いて、4 桁の数字を作る。ただし、同じ数字を繰り返し使ってよい。
 1) 偶数は何通り作れるか。 2) 5 の倍数は何通り作れるか。
 3) 6666 より大きな数は何通り作れるか。

【解答】

(1) 1) 千の位 百の位 十の位 一の位

| | | | |
|------|------|--------------|--------------|
| 5 | □ | □ | □ |
| 1 通り | 6 通り | それぞれ 5 通り | それぞれ 4 通り |

$$1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \text{ 通り}$$

2) 千の位 百の位 十の位 一の位

| | | | |
|------|--------------|--------------|--------------|
| 5以上 | □ | □ | □ |
| 3 通り | それぞれ 6 通り | それぞれ 5 通り | それぞれ 4 通り |

$$3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360 \text{ 通り}$$

◀ 千の位が 5, 6, 7 のいずれかであればよい

3) 千の位 百の位 十の位 一の位

| | | | |
|------|--------------|--------------|------|
| □ | □ | □ | 2 |
| 6 通り | それぞれ 5 通り | それぞれ 4 通り | 1 通り |

$$1 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) = 120 \text{ 通り}$$

4) 千 百 十 一

| | | | |
|--------------|--------------|--------------|---------|
| □ | □ | □ | 2, 4, 6 |
| それぞれ 6 通り | それぞれ 5 通り | それぞれ 4 通り | 3 通り |

⇒

| | | | |
|--------------|--------------|--------------|---------|
| □ | □ | □ | 2, 4, 6 |
| それぞれ 6 通り | それぞれ 5 通り | それぞれ 4 通り | 3 通り |

$$3 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) = 360 \text{ 通り}$$

◀ 一の位が偶数であればよい
 ▶ 一の位がいくつでも、千の位は 6 通りある
 ▶ 順列を用いれば $3 \times {}_6P_3$ となる

5) 偶数でなければよいので、 $840 - 360 = 480$ 通り。

(2) 1) 千の位 百の位 十の位 一の位

| | | | |
|--------------|--------------|--------------|---------|
| □ | □ | □ | 2, 4, 6 |
| それぞれ 7 通り | それぞれ 7 通り | それぞれ 7 通り | 3 通り |

$$3 \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 1029 \text{ 通り}$$

2) 千の位 百の位 十の位 一の位

| | | | |
|--------------|--------------|--------------|------|
| □ | □ | □ | 5 |
| それぞれ 7 通り | それぞれ 7 通り | それぞれ 7 通り | 1 通り |

$$1 \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 343 \text{ 通り}$$

◀ 【別解】 一の位が奇数であればよいので、5) と同様に考えて $4 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) = 480$ 通り。
 ▶ 一の位が 5 であればよい

3) 6666 より大きい数は、

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|----------------------------------|
| 千の位 | 百の位 | 十の位 | 一の位 | |
| 7 | □ | □ | □ | ← $7 \times 7 \times 7 = 7^3$ 通り |
| 6 | 7 | □ | □ | ← $7 \times 7 = 7^2$ 通り |
| 6 | 6 | 7 | □ | ← 7 通り |
| 6 | 6 | 6 | 7 | ← 1 通り |

で全てなので、 $7^3 + 7^2 + 7 + 1 = 400$ 通り

◀ 7000 番台
 ▶ 6700 番台
 ▶ 6670 番台
 ▶ 6667

【練習 24 : 条件を満たす整数の個数～その 2～】

0 から 5 までの数字を重複なしに使用して、3桁の数字を作る。

- (1) 一の位が 0 のとき、何通りの数字作れるか。 (2) 一の位が 2 のとき、何通りの数字作れるか。
 (3) 偶数は何通り作れるか。 (4) 5 の倍数は何通り作れるか。

【解答】

(1) 百の位 十の位 一の位



$1 \cdot (5 \cdot 4) = 20$ 通り

(2) 百の位 十の位 一の位



$1 \cdot (4 \cdot 4) = 16$ 通り

◀たとえば、百の位が 3 ならば、十の位には 0, 1, 4, 5 の 4 通りを入れることができる。

(3) 1 の位が 0, 2, 4 のいずれかであればよい。

1 の位が 0 のとき、(1) より 20 通り

1 の位が 2 のとき、(2) より 16 通り

1 の位が 4 のとき、(2) と同様にして 16 通り

以上より、 $20 + 16 \times 2 = 52$ 通り。

(4) 1 の位が 0, 5 のいずれかであればよい。

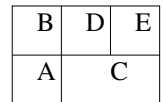
1 の位が 0 のとき、(1) より 20 通り

1 の位が 5 のとき、(2) と同様にして 16 通り

以上より、 $20 + 16 = 36$ 通り。

【練習 25 : 色塗りの方法の個数】

右の A, B, C, D, E に、辺の隣り合う 2ヶ所は色が異なるよう、色を塗る。



(1) 4 色をすべて使い、A, E が同じ色になるよう塗るならば、塗り方は何通りか。

(2) 4 色をすべて使う塗り方は何通りか。

【解答】

(1) A, E には 4 通り、B にそれぞれ 3 通り、C にそれぞれ 2 通り、D にそれぞれ 1 通りとなり、 $4! = 24$ 通り

(2) A, E が同じ色の時、(1) より 24 通り。A, D が同じ色の時も同様に 24 通り。B, C が同じ色の時、B, E が同じ色の時も 24 通りずつ。よって、 $24 \times 4 = 96$ 通り

◀たとえば A と C が同じ色では、辺の隣り合う 2ヶ所が同じ色になるなど、問題の条件に適さない。

【練習 26：並べ方に条件のある順列～その 1～】

1 から 7 までの 7 つの数を一列に並べる。

- (1) 6 と 7 が隣り合うものは何通りあるか。 (2) 5 と 6 と 7 が隣り合うものは何通りあるか。
 (3) 両端が 1 と 2 になるものは何通りあるか。

【解答】

- (1) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6, 7 \text{ の組}}$ の順列で 6! 通り。それぞれについて、6, 7 の並び方は 2! 通りあるので、 $6! \times 2 = 1440$ 通り。
 (2) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5, 6, 7 \text{ の組}}$ の順列で 5! 通り。それぞれについて、5, 6, 7 の並び方は、3! 通りあるので、 $5! \times 3! = 720$ 通り。
 (3) 両端には 1 と 2 の順列を考え 2 通り。それぞれについて、両端でない文字は 5! 通りの並び方があるので、 $5! \times 2 = 240$ 通り

◀ 具体的には、 $\boxed{67}$ か $\boxed{76}$

◀ 1○○○○○2
2○○○○○1

【(差)展 27：並べ方に条件のある順列～その 2～】

男子 5 人と女子 4 人を一列に並べる。

- ① 男子は男子で、女子は女子で固まる並べ方は何通りあるか。
 ② 男子のみ固まる並べ方は何通りあるか。
 ③ 両端が女子になる並べ方は何通りあるか。
 ④ どの女子どうしても隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

【解答】

- ① $\boxed{\text{男子 5 人}}$, $\boxed{\text{女子 4 人}}$ の順列で 2! 通り。
 どちらの場合も、 $\boxed{\text{男子 5 人}}$ の並び方は 5! 通り、
 どちらの場合も、 $\boxed{\text{女子 4 人}}$ の並び方は 4! 通り、
 よって、 $2! \times 5! \times 4! = 5760$ 通り。
 ② $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{男子の組}}$ の並び方で 5! 通り。
 それぞれについて、 $\boxed{\text{男子の組}}$ の並び方は 5! 通り、
 よって、 $5! \times 5! = 14400$ 通り。
 ③ 左端には 4 通りの女子、右端には 3 通りの女子、
 それ以外の 7 人が真ん中に並ぶ順列は 7! 通り。
 よって、 $4 \times 3 \times 7! = 60480$ 通り。
 ④ まず男子だけを並べる。この並べ方は 5! 通り。
 1 人目の女子が入れる場所は 6 ヶ所ある。
 いずれの場合も 2 人目の女子が入れる場所は 5 ヶ所、
 3 人目の女子は 4 ヶ所、4 人目の女子は 3 ヶ所あるので、
 $5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 43200$ 通り。

◀ 具体的には、 $\boxed{\text{男子 5 人}}$ と
 $\boxed{\text{女子 4 人}}$ のどちらが左か

◀ 順列を用いれば、 $4P_2 \times 7!$

◀ ↑のある場所に女子は入れる。

$\boxed{\text{男}} \boxed{\text{男}} \boxed{\text{男}} \boxed{\text{男}} \boxed{\text{男}}$
 ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

◀ 順列を用いれば、 $6P_4$ 通り



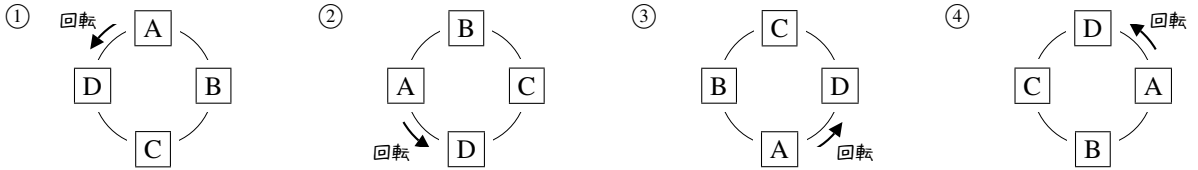
ものを並べる問題で、“隣り合う”ものを考える場合には、その隣り合うものをひとまとめにして考えるとよい。

一方、ものを並べる問題で、3 つ以上のものが“隣り合わない”ものを考える問題では、隣り合ってもよいものを先に並べるとよい場合が多い。

3. 円順列と商の法則

A. 円順列とは

円順列 (circular permutation) とは、複数のものを円形に並べることを意味する。ただし、下の①から④のように、回転させて同じになる場合はすべて同じ並べ方とみなす。

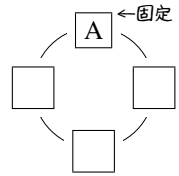


円順列を考えると、どれか1つを固定して、他を並べればよい。

たとえば、**A**, **B**, **C**, **D** を円形に並べ方法を考えるとき、どんな円形の並べ方も、回転させて**A**を一番上の位置にできる。

そこで、**A**を固定し、他の**B**, **C**, **D**を並べればよい。結局、**B**, **C**, **D**の3つを3ヶ所に並べる順列となり、 $3!$ で求められる。

以上の結果は、次のようにしてまとめられる。



円順列

「 n 個のものを円形に並べた列」のことを、 n 個の円順列 (circular permutation) といい、 n 個のものがすべて区別できる場合、 $(n-1)!$ 通りの並べ方がある。

☞ 円順列の問題では「誰か1人を固定」して考えるようにしよう。

【例題 28】

- 5人が円形に並ぶ方法は何通りあるか。
- 6個の区別できる石を円形に並べるとき、その円順列は何通りあるか。

【解答】

- 1人の場所を固定して、他の4人を並べればよいので、 $4! = 24$ 通り。
- 1個の場所を固定して、他の5個を並べればよいので、 $5! = 120$ 通り。

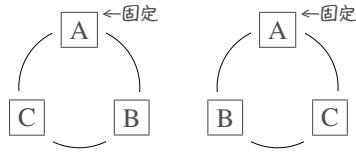
【例題 29】 円形のテーブルがある。ここに、男子3人と女子3人が男女交互に座る場合の数を考える。

男子のうち1人を固定すると、残り2人の座り方は **ア** 通りある。男子がどのように座っても、女子3人の座り方は **イ** 通りある。よって、求める場合の数は **ウ** 通りと分かる。

【解答】 ア : 2, イ : $3! = 6$, ウ : $2 \times 6 = 12$

【例題 30】 **A**, **B**, **C** の 3 枚による円順列を考える。 **A** の位置を固定して、作ることのできる円順列をすべて図示しなさい。

【解答】 **A** を固定して考えれば、次のようになる。



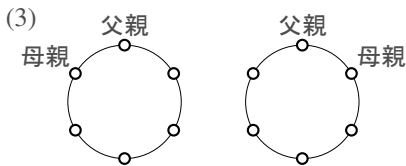
【練習 31 : 円順列～その 3～】

両親と 4 人の子供、計 6 人が円形のテーブルに座る。ただし、回転して一致する座り方は同じとする。

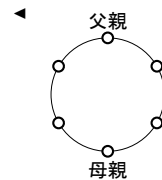
- (1) 座り方は全部で何通りか。 (2) 両親が真正面に向かい合う座り方は何通りか。
 (3) 両親が隣り合う座り方は何通りか。

【解答】

- (1) 6 人のうち 1 人を固定して考えて、 $(6 - 1)! = 5! = 120$ 通り
 (2) 父親の場所を固定すると、母親の場所は右欄外のように 1 通りに決まる。
 残りの 4 ヶ所に、4 人の子供が入るので、 $4! = 24$ 通りになる。



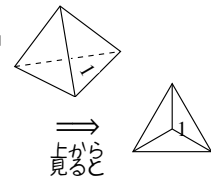
父親の場所を固定する。母親の位置は次の 2 通りがある。いずれの場合も、子供の並び方は $4!$ 通りあるので、全部で $2 \cdot 4! = 48$ 通りになる。



【発展 32 : 正四面体の順列】

正四面体の 4 つの面に番号を 1 から 4 までつけるとき、番号のつけ方は何通りか。ただし、回転して一致する場合は、同じ番号のつけ方とする。

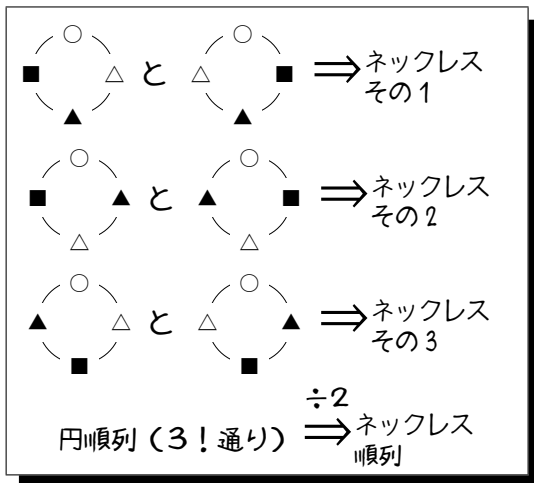
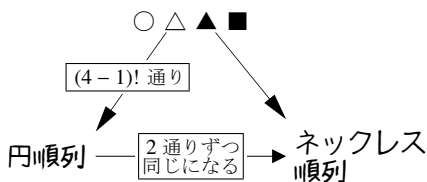
【解答】 底面の番号を 1 に固定する。これを上から見ると、3 つの場所に 2, 3, 4 の数字を入れる円順列になるので、 $(3 - 1)! = 2! = 2$ 通りある。



B. ネックレス順列 (数珠順列)

○, △, ▲, ■の4つの石を使ってネックレスを作る方法が何通りあるか考えよう。

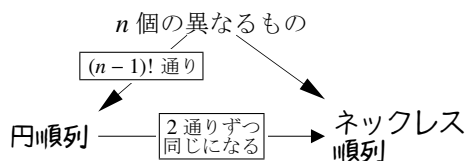
- まず、4つの石○, △, ▲, ■を円順列に並べる。これは、 $(4-1)!$ 通りである。
- 表裏の関係にある円順列は、同じネックレスになるので、円順列2つずつが同じになる。



こうして、 $(4-1)! \div 2 = 3$ 通りのネックレスを作ることができると分かる。

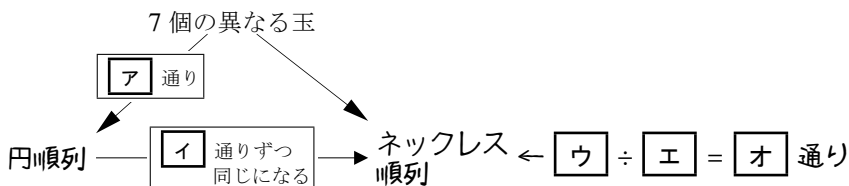
ネックレス順列 (数珠順列)

「裏返すことが可能な、 n 個のものを円形に並べた列」のことを、 n 個のネックレス順列 (necklace permutation) または数珠順列 (beads permutation) といい、 n 個 ($2 \leq n$)のものがすべて区別できる場合、 $\frac{(n-1)!}{2}$ 通りある。



【暗記 33: ネックレス順列と商の法則】

7個の異なる玉から作る順列について、以下の□に適当な値・式を入れなさい。



【解答】 ア: $(7-1)! = 6!$ (または 720), イ: 2,

ウ: $6!$ (または 720), エ: 2, オ: 360

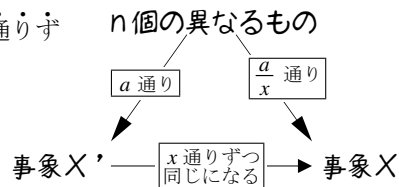
C. 商の法則 ~ 同じ結果になるものをまとめる

商の法則

2つの事象 X' , X について、 X' の起こり方が a 通り、事象 X の x 通りずつをまとめて事象 X になるならば

事象 X が起こる場合は $\frac{a}{x}$ 通り

ある。このことを商の法則 (division law) という。



1. 組合せ ${}_nC_r$

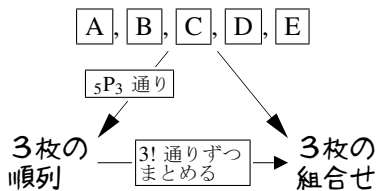
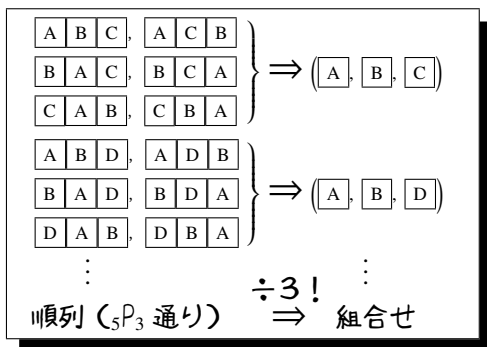
A. 順列と組合せ

「5枚のカード A, B, C, D, E のうち3枚を使った組合せは何通りか」という問題は次の2段階に分けて考えることができる。

- A, B, C, D, E の5枚のうち3枚を使った順列を考えると、 ${}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$ 通りある。
- 順列としては異なるが、組合せとしては同じになるものが、 $3!$ 通りずつある。

つまり、商の法則から次のように求めることができる。

$$\frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ 通り}$$



【例題 34】 1, 2, 3, 4, 5, 6 のカードが1枚ずつ、計6枚ある。

1. 1 2 3 という順列は、組合せとしては 1 3 2 と同じである。

他に、1 2 3 と同じ組合せになる順列を、辞書順ですべて挙げよ。

2. 左の表の に当てはまる値 (または、式) を答えなさい。

3. 次に、この6枚から2枚選ぶとき、左の表の に当てはまる値 (または、式) を答えなさい。

【解答】

1. 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1

2. ア: 120 (または ${}_6P_3$), イ: 6 (または $3!$)

ウ: 120 (または ${}_6P_3$), エ: 6 (または $3!$), オ: 20

3. カ: 30 (または ${}_6P_2$), キ: 2 (または $2!$)

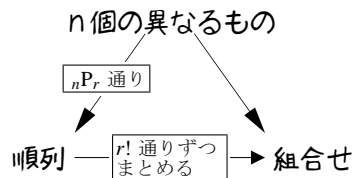
ク: 30 (または ${}_6P_2$), ケ: 2 (または $2!$), コ: 15

B. 組合せ ${}_n\text{C}_r$

組合せ ${}_n\text{C}_r$ の定義

「 n 個の異なるものから r 個を選ぶ組合せ (combination)」の場合の数を、記号 ${}_n\text{C}_r$ ^{エヌシーアール} で表し、次で計算できる*4 (n と r は $n \geq r$ である正の整数とする)。

$${}_n\text{C}_r = \frac{{}_n\text{P}_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{n \text{ から始まる } r \text{ 個の数の積}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdots 2 \cdot 1}_{r \text{ から } 1 \text{ までの積}}}$$



たとえば、「12 人の班から 3 人を選ぶ組合せ」の場合の数は ${}_{12}\text{C}_3$ であり、これは

$${}_{12}\text{C}_3 = \frac{\overbrace{12 \cdot 11 \cdot 10}^{12 \text{ から始まる } 3 \text{ 個の数の積}}}{\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3 \text{ から } 1 \text{ までの積}}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 220 \text{ と計算できるので、} 220 \text{ 通りである。}$$

【例題 35】 ${}_5\text{C}_2$, ${}_{10}\text{C}_3$ の値をそれぞれ求めよ。

$$\text{【解答】 } {}_5\text{C}_2 = \frac{\overbrace{5 \cdot 4}^{5 \text{ から始まる } 2 \text{ 個の数の積}}}{\underbrace{2 \cdot 1}_{2 \text{ から } 1 \text{ まで}}} = 10, \quad {}_{10}\text{C}_3 = \frac{\overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}^{10 \text{ から始まる } 3 \text{ 個の数の積}}}{\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3 \text{ から } 1 \text{ まで}}} = 120$$

【例題 36】 次の に当てはまる数字を答えなさい。

- 15 人のクラスから 2 人の委員を選ぶ組合せの場合の数は、 C = 通りある。
- 8 個の異なる石から 4 個の石を選ぶ組合せの場合の数は、 C = 通りある。
- 異なるボールが 20 個入った袋から 3 個を選ぶ組合せの場合の数は、 C = 通りある。

【解答】

1. ア : 15, イ : 2, ウ : ${}_{15}\text{C}_2 = \frac{15 \cdot 14^7}{2 \cdot 1} = 105$ 通り
2. エ : 8, オ : 4, カ : ${}_8\text{C}_4 = \frac{8^2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ 通り
3. キ : 20, ク : 3, ケ : ${}_{20}\text{C}_3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18^6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$ 通り

${}_n\text{C}_r$ を計算するときは、約分の方法を工夫するようにしよう。

*4 次の等式も成り立つ。ただし、 ${}_n\text{C}_r$ の値を計算するときには必要がない。

$${}_n\text{C}_r = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{n \text{ から始まる } r \text{ 個の数の積}}}{\underbrace{r(r-1)\cdots 2 \cdot 1}_{r \text{ から } 1 \text{ までの積}}} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 2 \cdot 1}^{n \text{ から } 1 \text{ までの積}}}{\underbrace{r(r-1)\cdots 2 \cdot 1}_{r \text{ から } 1 \text{ までの積}} \underbrace{(n-r)(n-r-1)\cdots 2 \cdot 1}_{n-r \text{ から } 1 \text{ までの積}}} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

【練習 37 : ${}_nC_r$ の計算練習】

- (1) ${}_5C_2$, ${}_{10}C_3$, ${}_{20}C_2$ の値をそれぞれ求めよ。
 (2) 30 人のクラスの中から、3 人の委員を選ぶ方法は何通りあるか。
 (3) 10 個の点から 4 点を選ぶ方法は何通りあるか。

【解答】

$$(1) {}_5C_2 = \frac{\overset{5 \text{ から始まる}}{\underbrace{5 \cdot 4}_{2 \text{ 個の数の積}}}}{\underset{2 \text{ から 1 まで}}{2 \cdot 1}} = 10, \quad {}_{10}C_3 = \frac{\overset{10 \text{ から始まる}}{\underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}_{3 \text{ 個の数の積}}}}{\underset{3 \text{ から 1 まで}}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 120, \quad {}_{20}C_2 = \frac{\overset{20 \text{ から始まる}}{\underbrace{20 \cdot 19}_{2 \text{ 個の数の積}}}}{\underset{2 \text{ から 1 まで}}{2 \cdot 1}} = 190$$

$$(2) {}_{30}C_3 = \frac{30^{10} \cdot 29 \cdot 28^{14}}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060 \text{ 通り}$$

$$(3) {}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9^3 \cdot 8^2 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ 通り}$$

C. ${}_nC_0$, ${}_nC_n$ の値

${}_nC_0$ の値も*5, ${}_nC_n$ の値も*6, 必ず 1 になる. たとえば, ${}_{10}C_0 = 1$, ${}_{10}C_{10} = 1$ である.

D. 等式 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

たとえば, 10 人の集まりから 7 人を選ぶとき, 次のどちらを行ってもよい.

- 選ばれる 7 人を決める, これは ${}_{10}C_7$ 通りある.
- 選ばれない 3 人を決める, これは ${}_{10}C_3$ 通りある.

$${}_{10}C_7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot 4}{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = {}_{10}C_3$$

結局, ${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3$ である. これは, 右の計算式からも分かり, 一般には, ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ が成り立つ*7.

☞ r が n の半分より大きい値の場合は, ${}_nC_r$ でなく ${}_nC_{n-r}$ を計算するとよい.

【例題 38】

1. ${}_3C_0$, ${}_4C_4$ の値をそれぞれ求めよ. 2. ${}_{100}C_{98} = {}_{100}C_{\boxed{ア}} = \boxed{イ}$
 3. ${}_{12}C_{10}$, ${}_{20}C_{17}$ の値をそれぞれ求めよ. 4. 13 人の中から 9 人を選ぶ方法は何通りか.

【解答】

1. ${}_3C_0 = 1$, ${}_4C_4 = 1$
 2. ア : 2, イ : ${}_{100}C_2 = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$
 3. ${}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12^6 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$, ${}_{20}C_{17} = {}_{20}C_3 = \frac{20^{10} \cdot 19 \cdot 18^6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$
 4. ${}_{13}C_9 = {}_{13}C_4 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10^5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 715$ 通り

◀ または, ${}_4C_4 = \frac{\overset{4 \text{ から始まる}}{\underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4 \text{ 個の数の積}}}}{\underset{4 \text{ から 1 まで}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 1$

◀ 13 人から 9 人を選ぶことは, 13 人から選ばない 4 人を決めることと同じである.

*5 ${}_nC_0 = \frac{n!}{0!} = \frac{1}{1} = 1$ である. これは, 「 n 個のものから 0 個を選ぶ」方法は「何も選ばない」という 1 通りしか存在しないことから理解することができる.

*6 ${}_nC_n = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$ である. これは, 「 n 個のものから n 個を選ぶ」方法は「すべてを選ぶ」という 1 通りしか存在しないことから理解することができる.

*7 n 個の異なるものから r 人を選ぶとき, 「選ばれる r 人を決める」と「選ばれない $n-r$ 人を決める」は 1 対 1 に対応することからも理解できる.

E. 組合せに置き換えられる問題

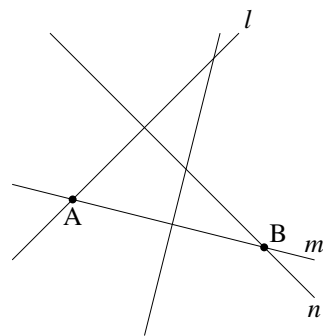
右図には直線が4本、平面上に引かれている。この4本の直線が作る交点の数は、組合せを用いて求めることができる。

まず、2本の直線を選ぶと、交点が1つ決まる。たとえば

交点 A を選ぶ \Leftarrow 直線 l, m を選ぶ

逆に、交点を1つ選ぶと、交点を作る2直線が決まる。

交点 B を選ぶ \Rightarrow 直線 m, n を選ぶ



こうして、「直線の交点の数」=「直線2本の選び方」と分かる。「直線2本の選び方」は ${}_4C_2$ 通りなので、「直線の交点の数」は6点あると求められる。

【例題 39】 平面上に、どの2本を選んでも互いに平行でない、8本の直線が引かれている。ただし、どの3本も1点で交わらないものとする。

- この平面上で直線の交点を1つ選ぶことは、**ア**本の直線を選ぶことと一致する。よって、この平面上に、直線の交点は**イ**個ある。
- この平面上で三角形を1つ選ぶことは、**ウ**本の直線を選ぶことと一致する。よって、この平面上に、三角形は**エ**個ある。

【解答】

- ア: 2, イ: ${}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$
- ウ: 3, エ: ${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$

- ◀ 8本の直線から、交点を決める2本を選ぶ組合せ
- ◀ 8本の直線から、三角形を決める3本を選ぶ組合せ

F. 組合せと和の法則・積の法則

【例題 40】 男子が5人、女子が5人いる中で、4人を選ぶ場合の数について以下の問に答えよ。

- 男子から2人、女子から2人選ぶときの場合の数は何通りか。
- 男子から2人以上選ぶ場合の数は何通りか。

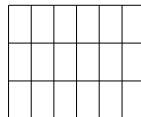
【解答】

- 男子2人の組合せは ${}_5C_2$ 通り、そのどの場合も女子2人の組合せが ${}_5C_2$ 通りあるので、 ${}_5C_2 \cdot {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 100$ 通り。
- 男子が2人のときは、1.より100通り。
男子を3人選ぶときは、女子を1人選ぶので
 ${}_5C_3 \cdot {}_5C_1 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5}{1} = 50$ 通り。
4人とも男子を選ぶときは ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$ 通り。
よって、 $100 + 50 + 5 = 155$ 通り。

- ◀ 『積の法則』(p.3)
- ◀ 『積の法則』(p.3)

【練習 41：四角形・対角線】

- (1) 右図のように、横に 4 本、縦に 7 本の直行する平行線が引かれている。
この中に長方形はいくつあるか求めよ。
- (2) 正十角形の対角線の本数を求めよ。



【解答】

- (1) 横 4 本のうちから 2 本、縦 7 本のうちから 2 本をそれぞれ選べば、1 個の長方形が定まる。よって

$${}_4C_2 \cdot {}_7C_2 = 126 \text{ 個}$$

- (2) 10 個の頂点のうち 2 個を選べば、1 本の対角線か辺が定まる。辺の数は 10 本あるので、これを除いて

$${}_{10}C_2 - 10 = 45 - 10 = 35 \text{ 本}$$

◀ 正十角形を実際に書いて考えてみよう

G. 組分けの問題 ~ 組合せと商の法則

【例題 42】 10 人を次のように分ける方法は何通りあるか。

1. 7 人、3 人に分ける。

2. 5 人、3 人、2 人に分ける。

【解答】

1. 10 人から 3 人を選びグループとするのが ${}_{10}C_3$ 通り、残った 7 人から 3 人を選んで ${}_7C_3$ 通り、よって

$${}_{10}C_3 \cdot {}_7C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = 120 \text{ 通り}$$

2. 10 人から 2 人を選びグループとするのが ${}_{10}C_2$ 通り、残った 8 人から 3 人を選んで ${}_8C_3$ 通り、

さらに残った 5 人を 5 人でまとめて ${}_5C_5$ 通り、よって

$${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_3 \cdot {}_5C_5 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = 2520 \text{ 通り}$$

◀ まず 5 人を選び、次に 3 人を選ぶ、という順序で計算しても、同じ結果になるが、計算は複雑になる



組分けの問題においては、人数の少ない組から ${}_n C_r$ を計算するとよい。

たとえば、8人を組分ける方法として、次の2通りを考えてみよう。

1) グループAに4人、グループBに4人に分ける。

8人から、グループAの4人を選ぶ方法は ${}_8C_4$ 、残りはそのままグループBになるので、 ${}_8C_4 = 70$ 通り。

2) 4人2組に分ける。

8人を a, b, c, d, e, f, g, h とする。ここで、次の組分けi., ii.を考えよう。

i. 初めの4人において (a, b, c, d) を選ぶ

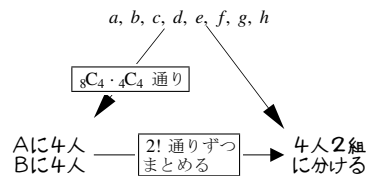
→ (a, b, c, d) と (e, f, g, h) の2組

ii. 初めの4人において (e, f, g, h) を選ぶ

→ (e, f, g, h) と (a, b, c, d) の2組

上のi., ii.の組分けは1)においては異なる。

しかし2)においては、i., ii.の組分けは同じになる。結局、右上の表を書くことができ、商の法則によって ${}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \div 2! = 35$ 通りと求められる。



組分けの問題は、「各グループが区別できる場合」を基本に考えるとよい。この場合が、もっとも簡単に計算できるからである。

【練習 43 : 組分け】

10人を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1) 5人、5人に分ける。

(2) 4人、3人、3人に分ける。

(3) 2人、2人、2人、2人、2人に分ける。

【解答】

(1) 10人から、A組として5人を選ぶのが ${}_{10}C_5$ 通り、残りはB組。

AとBの区別をなくすために $2!$ で割ればよいので

$$\frac{{}_{10}C_5}{2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = 126 \text{ 通り}$$

(2) 10人から、A組として3人を選ぶのが ${}_{10}C_3$ 通り、

残りの7人からB組3人を選ぶのが ${}_7C_3$ 通り、残りはC組。

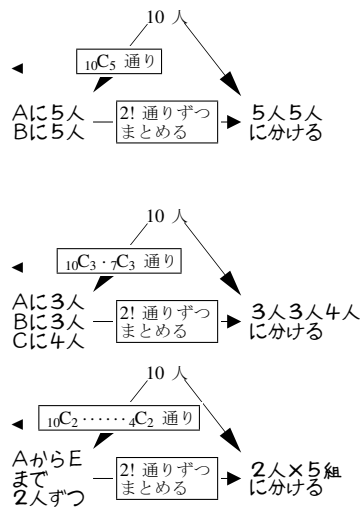
AとBの区別をなくすために $2!$ で割ればよいので

$$\frac{{}_{10}C_3 \cdot {}_7C_3 \cdot {}_3C_3}{2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = 2100 \text{ 通り}$$

(3) A組からE組まで2人ずつを選ぶのが ${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2$ 通り、

AからEまでの区別をなくすために $5!$ で割って

$$\frac{{}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2}{5!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 945 \text{ 通り}$$

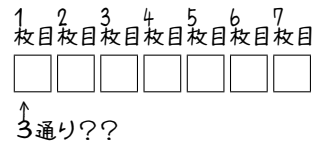


2. 同じものを含むときの順列

A. 同じものを含むときの順列

$\boxed{A}, \boxed{A}, \boxed{A}, \boxed{B}, \boxed{B}, \boxed{C}, \boxed{C}$ の 7 枚を 1 列に並べる順列が何通りあるのか考えてみよう。

これを、通常の順列のように考えることはできない。7 枚のカードがあるが、カードは 7 種類ではないからである。



B. 組合せ ${}_nC_r$ を用いて考える

カード置き場を 7 ヶ所用意しておく。

まず、2 枚の \boxed{C} の置き場を選ぶ (${}_7C_2$ 通り)。

いずれの場合も、残りの置き場は 5 ヶ所ある。

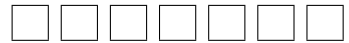
ここから、2 枚の \boxed{B} の置き場を選ぶ (${}_5C_2$ 通り)。

どの場合でも、残りの置き場は 3 ヶ所あるから、

3 枚の \boxed{A} を入れる (${}_3C_3$ 通り)。

以上から、7 枚のカード $\boxed{A}, \boxed{A}, \boxed{A}, \boxed{B}, \boxed{B}, \boxed{C}, \boxed{C}$ を 1 列に並べる順列は『積の法則』(p.3) によって、次で計算できる。

7 つのカード置き場をまず用意しておく



↓ 7 つの置き場から 2 つ選び C を配置する (${}_7C_2$ 通り)



↓ 残り 5 つの置き場から 2 つ選び B を配置する (${}_5C_2$ 通り)



↓ 残り 3 つの置き場へは A を配置する (${}_3C_3$ 通り)



$$\begin{aligned} & {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \\ &= \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ 通り} \end{aligned}$$

⋮ A の置き場、B の置き場、C の置き場の順で決めてもよいが、 ${}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$ は計算量が多くなる。一般に、数の少ないものから場所を決めるとよい。

【例題 44】 次の場合の数を、上の方法で求めなさい。

1. 8 つの数字 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 を一列に並べる方法が何通りあるか。
2. 7 つのアルファベット S, C, I, E, N, C, E を一列に並べる方法が何通りあるか。

【解答】

1. 数字を置く場所を 8 つ用意する。

1 を置く 2 ヶ所は ${}_8C_2$ 通り、2 を置く 3 ヶ所は ${}_6C_3$ 通り、

残り 3 ヶ所に 3 を置くので、『積の法則』(p.3) より

$${}_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = 560 \text{ 通り}$$

2. S, I, N が 1 つずつ、C と E が 2 つずつなので

$${}_7C_1 \times {}_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 7 \times 6 \times 5 \times \frac{4^2 \cdot 3}{2} = 1260 \text{ 通り}$$

C. 商の法則を用いて考える

まず, $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2$ の 7 枚を並べる順列を考える. これは, $7!$ 通りある.

次に, A_1, A_2, A_3 の 3 枚をすべて A に戻す. これによって, $3!$ 通りずつまとめられる.

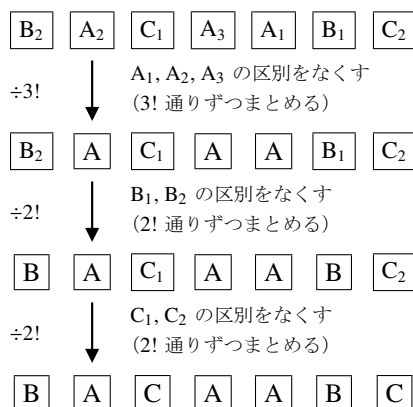
さらに, B_1, B_2 の 2 枚をすべて B に戻す. これによって, $2!$ 通りずつまとめられる.

最後に, C_1, C_2 の 2 枚をすべて C に戻す. これによって, $2!$ 通りずつまとめられる.

以上から, 商の法則によって次のように求められる.

$$\begin{aligned} 7! \div 3! \div 2! \div 2! &= \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 210 \text{ 通り} \end{aligned}$$

まず $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2$ の 7 枚を並べる (並べ方は $7!$ 通りある)



【例題 45】 次の場合の数を, 上の方法で求めなさい.

1. 8 つの数字 $1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3$ を一列に並べる方法が何通りあるか.
2. 7 つのアルファベット S, C, I, E, N, C, E を一列に並べる方法が何通りあるか.

【解答】

1. $1_a, 1_b, 2_a, 2_b, 2_c, 3_a, 3_b, 3_c$ の順列は $8!$ 通り,
 $1_a, 1_b$ の区別をなくすには $2!$ ずつまとめ,
 $2_a, 2_b, 2_c$ の区別をなくすには $3!$ ずつまとめ,
 $3_a, 3_b, 3_c$ の区別をなくすには $3!$ ずつまとめることになる. よって, 商の法則より $\frac{8!}{2!3!3!} = 560$ 通りになる.
2. 全部で 7 文字あり, C と E が 2 つずつ, S, I, N が 1 つずつなので

$$\frac{7!}{2!2!1!1!1!} = 1260 \text{ 通り}$$

— 同じものを含む順列の計算 —

「 k 個の同じもの, l 個の同じもの, m 個の同じもの」による順列の総数は

- 「組合せ ${}_n C_r$ を用いて」 ${}_{k+l+m} C_k \times {}_{l+m} C_l \times {}_m C_m$ 通りと求められる.
- 「商の法則を用いて」 $\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}$ 通りと求められる.

これら 2 つの結果は, 次のようにして等しいことが分かる.

$${}_{k+l+m} C_k \times {}_{l+m} C_l \times {}_m C_m = \frac{(k+l+m)!}{(l+m)!k!} \times \frac{(l+m)!}{m!l!} \times \frac{m!}{0!m!} = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}$$

どちらのやり方も, 4 種類以上のものを含む順列にも応用できる.



上の計算は「なぜそうなるのか」を理解していないと, やり方を忘れてしまいやすい.

【例題 46】 $\boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{3}$ を 1 列に並べる方法を、次の 2 通りで求めたい。

1. 「組合せを用いて求める」

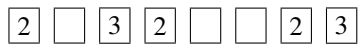
8 つのカード置き場をまず用意しておく



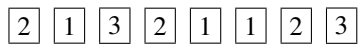
↓
2ヶ所選んで $\boxed{3}$ を配置
($\overset{C}{\text{ア}} \overset{C}{\text{イ}}$ 通り)



↓
3ヶ所選んで $\boxed{2}$ を配置
($\overset{C}{\text{ウ}} \overset{C}{\text{エ}}$ 通り)



↓
残りの置き場へは $\boxed{1}$ を配置
($\overset{C}{\text{オ}} \overset{C}{\text{カ}}$ 通り)



以上より、計算式 $\boxed{\text{キ}}$ によって $\boxed{\text{ク}}$ 通りと求められる。

2. 「商の法則を用いて求める」

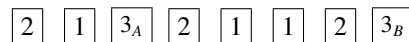
まず $1_A, 1_B, 1_C, 2_A, 2_B, 2_C, 3_A, 3_B$ の 8 枚を並べる
(並べ方は $\boxed{\text{ケ}}$ 通りある)



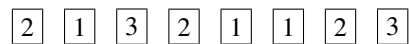
↓
 $1_A, 1_B, 1_C$ の区別をなくす
($\boxed{\text{コ}}$ 通りずつまとめる)



↓
 $2_A, 2_B, 2_C$ の区別をなくす
($\boxed{\text{サ}}$ 通りずつまとめる)



↓
 $3_A, 3_B$ の区別をなくす
($\boxed{\text{シ}}$ 通りずつまとめる)



以上より、計算式 $\boxed{\text{ス}}$ によって $\boxed{\text{セ}}$ 通りと求められる。

【解答】

1. ア, イ : ${}_8C_2$ ウ, エ : ${}_6C_3$ オ, カ : ${}_3C_3$

キ, ク : ${}_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = 560$ 通り

2. ケ : $8!$ コ : $3!$ サ : $3!$ シ : $2!$

ス, セ : $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 560$ 通り



「組合せ ${}_nC_r$ を用いて」解く方が仕組みを理解しやすいが、「商の法則を用いて」解く方が計算しやすい。今後このテキストでは、主に「商の法則を用いて」解いて話を進める。

【練習 47 : 同じものを含む順列～その 1～】

- (1) a, a, a, b, b を並び替えるとき、何通りの並べ方があるか。
- (2) 1, 2, 3 を 2 個ずつ用いてできる 6 桁の整数は何通りあるか。
- (3) S, U, U, G, A, K, U, A を並び替えるとき、何通りの並べ方があるか。

【解答】

(1) a を 3 つ、 b を 2 つ含む順列であるので $\frac{5!}{3!2!} = 10$ 通り

(2) 1, 2, 3 を 2 つずつ含む順列であるので

$$\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 90 \text{ 通り}$$

(3) U を 3 つ、A を 2 つ、S, G, K を 1 つずつ含むから

$$\frac{8!}{3!2!1!1!1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 3360 \text{ 通り}$$

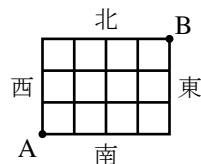
◀ または、 ${}_5C_2 = 10$ 通り

◀ または、 ${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = 90$ 通り

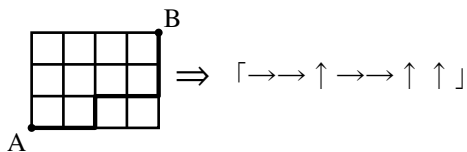
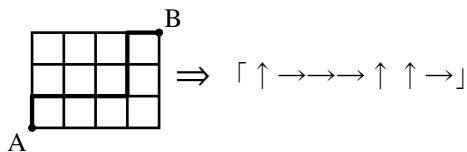
◀ または、 ${}_8C_1 \cdot {}_7C_1 \cdot {}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 3360$ 通り

D. 同じものを含む順列の応用 ~ 最短経路の数

右図のように、東西に走る道路と南北に走る道路があるとき、A 地点から B 地点への最短経路について考えよう。

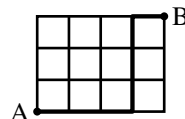


ここで、北に1区画進むことを↑、東に1区画進むことを→で表すとすれば、すべての最短経路を↑と→で表すことができる。



逆に、右の例のように、「↑3つと→4つが作る順列」を1つ決めれば、最短経路はただ1つに決まる。こうして、「A から B までの最短経路」は、「↑3つと→4つの順列」と1対1に対応し

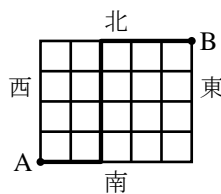
「→→→↑↑↑→」



$$\frac{7!}{3!4!} = 21 \text{ 通り (または } {}_7C_3 = 21 \text{ 通り)} \leftarrow \text{『同じものを含む順列の計算』を用いた}$$

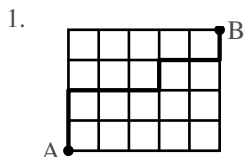
と求めることができる。

【例題 48】 右図のように、東西に走る道路と南北に走る道路がある。A 地点から B 地点への最短経路について以下の問に答えよ。



- A 地点から「↑↑→→↑→→↑」と進んだときの経路を図示しなさい。
- 右図の太線のように進んだときの経路を「↑」「→」を用いて表しなさい。
- A 地点から B 地点まで進むには「↑」へ **ア** 回、「→」へ **イ** 回進めばよいので、最短経路の場合の数は **ウ** 通りであると分かる。

【解答】



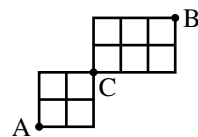
2. →→↑↑↑↑→→→

3. ア: 4, イ: 5

$$\text{ウ: } \frac{9!}{4!5!} = 126 \text{ 通り}$$

◀ または ${}_9C_4 = 126$ 通り

【例題 49】 右図のように、東西に走る道路と南北に走る道路がある。



- A から C への最短経路は全部で何通りあるか求めよ。
- C から B への最短経路は全部で何通りあるか求めよ。
- A から C を通って B へ進む最短経路は全部で何通りあるか求めよ。

【解答】

1. $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 通り

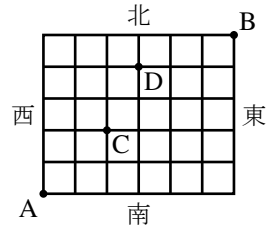
2. $\frac{5!}{2!3!} = 10$ 通り

3. $6 \times 10 = 60$ 通り

◀ A から C へどのように進んでも (6 通り), それぞれ, C から B へ 10 通り行き方がある。

【練習 50 : 最短経路】

右図のように、東西に走る道路と南北に走る道路がある。A 地点から B 地点への最短経路について以下の間に答えよ。



- (1) 最短経路は全部で何通りあるか求めよ。
- (2) C 地点を通る最短経路は何通りあるか。また、D 地点を通る最短経路は何通りあるか、それぞれ求めよ。
- (3) C 地点または D 地点を通る最短経路は何通りあるか求めよ。

【解答】

(1) 最短経路の数は、 $\uparrow 5$ つと $\rightarrow 6$ つの順列の場合の数と一致するので

$$\frac{11!}{5!6!} = 462 \text{ 通り} \quad \text{または} \quad {}_{11}C_5 = 462 \text{ 通り}$$

(2) (C 地点を通る最短経路)

A~C の最短経路の数は $\frac{4!}{2!2!}$ 通り、

それぞれに対し、

C~B の最短経路の数は $\frac{7!}{3!4!}$ 通り あるので

$$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{7!}{3!4!} = 6 \times 35 = 210 \text{ 通り}$$

(D 地点を通る最短経路)

同様に $\frac{7!}{4!3!} \times \frac{4!}{1!3!} = 35 \times 4 = 140$ 通り

(3) 集合 C, D をそれぞれ

C : C 地点を通る最短経路, D : D 地点を通る最短経路

とおくと、求める値は $n(C \cup D)$ である。ここで、 $n(C \cap D)$ は、C, D 両地点を通る最短経路の数であり

$$n(C \cap D) = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{2!1!} \times \frac{4!}{1!3!} = 6 \times 3 \times 4 = 72$$

であるから、 $n(C \cup D)$ 、つまり求める最短経路の数は

$$\begin{aligned} n(C \cup D) &= n(C) + n(D) - n(C \cap D) \\ &= 210 + 140 - 72 = 278 \text{ 通り} \end{aligned}$$

◀ 『同じものを含む順列』(p.26)

◀ $\uparrow 2$ つ, $\rightarrow 2$ つの順列に一致

◀ 「それぞれに」あるので積の法則

◀ $\uparrow 3$ つ, $\rightarrow 4$ つの順列に一致

◀ または、 ${}_4C_2 \cdot {}_7C_3 = 210$

◀ A から D までは $\uparrow 4$ つ, $\rightarrow 3$ つ
D から B までは $\uparrow 1$ つ, $\rightarrow 3$ つの順列に一致する

◀ A から C までは $\uparrow 2$ つ, $\rightarrow 2$ つ
C から D までは $\uparrow 2$ つ, $\rightarrow 1$ つ
D から B までは $\uparrow 1$ つ, $\rightarrow 3$ つの順列に一致

E. (発) (展) 重複順列の応用問題

【(発) (展) 51 : 同じものを含む円順列】

- ① a を 1 つ, b を 2 つ, c を 3 つ, 計 6 つの文字を円形に並べるとき、何通りの並べ方があるか。
- ② a, b, c をそれぞれ 2 つずつ, 計 6 つの文字を円形に並べるとき、何通りの並べ方があるか。

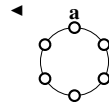
【解答】

① 1 つの a を固定すれば、残りは 2 つの b と 3 つの c の順列になるので

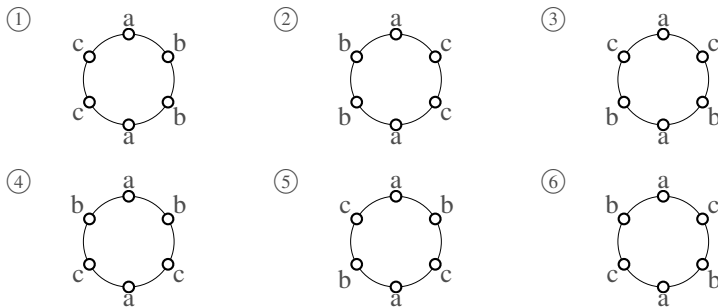
$$\frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ 通り}$$

② 2 つの a の並べ方は次の 3 つの場合に分けられる。

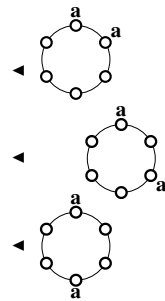
i) 隣り合うタイプ



- 残りの4つの場所に b, b, c, c を並べて $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 通り
- ii) 1つ間をおくタイプ
残りの4つの場所に b, b, c, c を並べて $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 通り
- iii) 2つ間をおくタイプ
残りの4つの場所に b, b, c, c を並べて $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 通り
- しかし、この6通りのうち



①と②, ③と④も同じものである. よって, 4通りとなる.
以上 i), ii), iii) より, $6+6+4=16$ 通り



⑤や⑥のような場合は「向かい合う2つの a の左側に b, c を1つずつ並べ (2通り), 全体が点対称となるよう残りを右側へ入れる (唯一に決まる)」と考えて2通りと分かる。その結果, iii) の場合は $(6-2) \div 2 + 2 = 4$ 通りと求められる。
このような解き方は、並べる物が多く書き出せないときに必要となる。

【**発展** 52 : 同じものを含む順列～その2～】

7つの数字 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 を用いてできる4桁の数字を考える。

- ① 1213 や 2311 のように, 3種類の数字をすべて使ってできる数字は何通りあるか。
② 4桁の数字は全部で何通りできるか。

【解答】

- ① 3種類とも用いた4桁の数字は

$$\underbrace{{}_3C_1}_{\substack{1, 2, 3 \\ \text{のうちの} \\ \text{2つを} \\ \text{残った}}} \times \underbrace{\frac{4!}{2!1!1!}}_{\substack{2つ1つ1つ \\ \text{の順列}}} = 3 \times 12 = 36 \text{ 通り}$$

- ② 1種類だけ用いた4桁の数字はない。

数字を2種類だけ用いた数字は, 次の 1), 2) がある。

- 1) 2種類の数字を2つずつ用いた数

2つずつの順列は $\frac{4!}{2!2!}$ 通りあり, 2種類の数字の選び方は ${}_3C_2$ 通りあるので

$$\frac{4!}{2!2!} \times {}_3C_2 = 6 \times 3 = 18 \text{ 通り}$$

- 2) 1を3つ, 2か3を1つ用いた数

1を3つ, 2を1つ用いた順列は $\frac{4!}{3!1!}$ 通り,

1を3つ, 3を1つ用いた順列も同様なので

$$\frac{4!}{3!1!} \times 2 = 4 \times 2 = 8 \text{ 通り}$$

よって, 数字を2種類だけ用いた数は $18+8=26$ 個ある. 1) と合わせて, 全部で $26+36=62$ 通り がある。

◀ 1も2も3も, 3個以下しかない

◀ 1122, 1331 など

◀ 2111, 1131 など

3. 重複組合せ

A. ○と|のモデル

次の問題を考えてみよう。

3種類の果物、りんご、かき、なしを使って、7個入りの果物かごを作る。
1つも入らない種類があってもよいとすると、何通りの果物かごができるか。

この問題は、「○と|のモデル」への置き換えによって解くことができる。7つの○を2つの|で区切り

一番左の○の数をりんごの数
真ん中の○の数をかきの数
一番右の○の数をなしの数

りんご2個、かき3個、なし2個

⇔ ○○|○○○|○○

りんご4個、かき0個、なし3個

⇔ ○○○○| |○○○

とすれば、「果物かごの種類の数」と「○7つと|2つの順列」

は一致する。よって、「果物かごの種類の数」は、『同じものを含む順列』(p.26)によって $\frac{9!}{7!2!} = 36$ 通りであると分かる (または、 ${}_9C_2 = 36$ 通り)。

【例題 53】 8個の区別しないアメを3人に分ける。1個もアメをもらえない人がいてもよいとする。

1. 上の○と|のモデルにおいて「○○|○○|○○○○」と対応する分け方は、

Aが **ア** 個、Bが **イ** 個、Cが **ウ** 個である。

2. 上の○と|のモデルにおいて「|○○○○|○○○○」と対応する分け方は、

Aが **エ** 個、Bが **オ** 個、Cが **カ** 個である。

3. Aが3個、Bが5個、Cが0個のときを、○と|のモデルで表せ。

4. アメの分け方は何通りあるか。

【解答】

1. ア:2, イ:2, ウ:4

2. エ:0, オ:4, カ:4

3. ○○○|○○○○○|

4. ○8つと|2つの順列に一致するので、 $\frac{10!}{8!2!} = 45$ 通り

重複組合せ

n 種類のを、重複を許して組み合わせ、 r 個にすることを、**重複組合せ** (combination with repetitions) という。組合せに選ばれない種類があってもよいならば、 r 個の○と、 $n-1$ 個の|を用いた「○と|のモデル」を用いて、場合の数を求められる。

B. すべての種類を含む重複組合せ (資源配分)

重複組合せにおいて、すべての種類が1つは選ばれないといけない場合を考えよう。

3種類の果物、りんご、かき、なしを使って、7個入りの果物かごを作る。

どの種類も最低1個含めるとすると、何通りの果物かごができるか。

この問題は、次のように考えればよい。

- (A) はじめに、りんご、かき、なしを1個ずつ入れる。
 (B) 次に、りんご、かき、なしを、合わせて4個入れる。このときは、1つも入らない種類があってもよい。
 (A) の入れ方は1通りしかないのに、(B) の入れ方が何通りであるか求めればよい。
 (B) の入れ方は、○4つと|2つの順列を考えればよいので

$$\frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ 通り} \quad \text{または} \quad {}_6C_2 = 15 \text{ 通り}$$

(B) が ○○|○|○ のとき
 りんご2個, かき1個, なし1個
 (A) と合わせて
 りんご3個, かき2個, なし2個

(B) が |○○○|○ のとき
 りんご0個, かき3個, なし1個
 (A) と合わせて
 りんご1個, かき4個, なし2個

【例題 54】 8個の区別しないアメを3人に分ける。どの人も最低1個はアメをもらう場合、分け方は何通りあるか。

【解答】 まず、3人に1個ずつアメを配る。残りの5個のアメを3人に配る方法は、「○5つ、|2つの順列」に一致するので、 $\frac{7!}{5!2!} = 21$ 通り

C. 整数問題への応用

○と|のモデルを用いて、「 $x+y+z=7$ となる0以上の整数の組 (x, y, z) の個数」を求めることができる。
 ○7個と|2つを横一列に並べ

- 一番左の○の数を x の値
- 真ん中の○の数を y の値
- 一番右の○の数を z の値

$$x=2, y=3, z=2 \iff \circ\circ| \circ\circ\circ| \circ\circ$$

$$x=4, y=0, z=3 \iff \circ\circ\circ\circ| | \circ\circ\circ$$

とすれば、「 (x, y, z) の組」と「○7個と|2つの順列」は1対1に対応する。つまり、 $\frac{9!}{2!7!} = 36$ 通り。

【例題 55】

1. $x+y+z=12$ を満たす0以上の整数の解 (x, y, z) の個数を求めよ。
2. $a+b+c+d=10$ を満たす0以上の整数の解 (a, b, c, d) の個数を求めよ。

【解答】

1. 「 (x, y, z) の組」と「○12個と|2つの順列」は1対1に対応する。よって、

$$\frac{14!}{12!2!} = \frac{14^7 \cdot 13}{2} = 91 \text{ 通り}$$
2. 「 (a, b, c, d) の組」と「○10個と|3つの順列」は1対1に対応する。よって、

$$\frac{13!}{10!3!} = \frac{13 \cdot 12^4 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286 \text{ 通り}$$

$$\leftarrow x=2, y=2, z=8 \iff \circ\circ| \circ\circ| \circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$$

$$x=5, y=0, z=7 \iff \circ\circ\circ\circ\circ| | \circ\circ\circ\circ\circ\circ$$

$$\leftarrow a=4, b=2, c=3, d=1 \iff \circ\circ\circ\circ| \circ\circ| \circ\circ\circ| \circ$$

$$p=3, q=1, r=4, s=2 \iff \circ\circ\circ| \circ| \circ\circ\circ\circ| \circ\circ$$

【練習 56：重複組合せと不定方程式*8】

(1) 10 個のボールを 3 つの箱に配分する.

- 1) すべての箱に少なくとも 1 個のボールを入れる方法は何通りあるか.
- 2) 1 個も入っていない箱があってもよいとすると, 配分の方法は何通りあるか.

(2) $p + q + r + s = 15$ を満たす 0 以上の整数の組 (p, q, r, s) の数を求めよ.

【解答】

(1) 1) はじめに 1 個ずつのボールを箱に入れ, 残りの 7 つを 3 箱に分ければよい. これは「○ 7 つ, | 2 つの順列」に一致するので,

$$\frac{7!}{7!2!} = 36 \text{ 通り}$$

2) 「○ 10 個, | 2 つの順列」に一致するので, $\frac{10!}{10!2!} = 66$ 通り

(2) 「 (p, q, r, s) の組」と「○ 15 個と | 3 つの順列」は 1 対 1 に対応する. よって,

$$\frac{18!}{15!3!} = \frac{18^3 \cdot 17 \cdot 16}{3 \cdot 2} = 816 \text{ 通り}$$

◀ $p = 2, q = 2, r = 3, s = 8$
 $\Leftrightarrow \circ\circ | \circ\circ | \circ\circ\circ | \circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$
 $p = 5, q = 0, r = 4, s = 6$
 $\Leftrightarrow \circ\circ\circ\circ\circ | | \circ\circ\circ\circ | \circ\circ\circ\circ\circ\circ$

D. (発) (展) ○と | のモデルの応用

【(発) (展) 57：整数問題～その 1～】

$p + q + r + s = 15$ を満たす自然数の組 (p, q, r, s) の数を求めよ.

【解答】 $P + Q + R + S = 11$ を満たす 0 以上の整数の組 (P, Q, R, S) の個数に等しい.

その個数は「○ 11 個と | 3 つの順列」の場合の数と一致するので

$$\frac{14!}{11!3!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12^2}{3 \cdot 2} = 364 \text{ 通り}$$

◀ $p = P + 1, q = Q + 1, r = R + 1, s = S + 1$
 とすればよい.
 ◀ $P = 1, Q = 1, R = 2, S = 7$
 $\Leftrightarrow \circ | \circ | \circ\circ | \circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$
 このとき, $(p, q, r, s) = (2, 2, 3, 8)$
 $P = 4, Q = 0, R = 3, S = 4$
 $\Leftrightarrow \circ\circ\circ\circ | | \circ\circ\circ | \circ\circ\circ\circ$
 このとき, $(p, q, r, s) = (5, 1, 4, 5)$

【(発) (展) 58：整数問題～その 2～】

$p + q + r \leq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 (p, q, r) の数を求めよ.

【解答】 $p + q + r \leq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 (p, q, r) は, 次のようにして, $p + q + r + s = 10$ を満たす 0 以上の整数の組 (p, q, r, s) に一致する.

$$(p, q, r) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (p, q, r, s) = (0, 0, 0, 10)$$

$$(p, q, r) = (0, 0, 1) \Leftrightarrow (p, q, r, s) = (0, 0, 1, 9)$$

$$(p, q, r) = (0, 0, 2) \Leftrightarrow (p, q, r, s) = (0, 0, 2, 8)$$

$$(p, q, r) = (2, 2, 4) \Leftrightarrow (p, q, r, s) = (2, 2, 4, 2)$$

よって, ○ 10 個と | 3 個の順列に等しいので, $\frac{13!}{10!3!} = 286$ 通り

◀ これに気づかなければ, 次のように地道に解くことになる.

$p + q + r = 10$ を満たす組の個数は, ○ 10 個と | 2 個の順列に等しいので,

$$\frac{12!}{10!2!} \text{ 通り,}$$

$p + q + r = 9$ を満たす組の個数は \dots と順に考えれば

$$\frac{12!}{10!2!} + \frac{11!}{9!2!} + \frac{10!}{8!2!} + \dots + \frac{3!}{1!2!} + \frac{2!}{0!2!} = 286 \text{ 通り}$$

*8 一般に, 整数係数の多項式を 0 とおいた (連立) 方程式のうち, 整数解のみを求めることを不定方程式を解くという.



1. 確率とは何か

中学で学んだように、「さいころを1個振って偶数の目が出る確率」は $\frac{1}{2}$ であった。このことを詳しく考えてみよう。

A. 確率 - 1回あたり何回起こるのか

「さいころを1個振った」結果、 \bullet \circ \circ \circ \circ \circ のいずれかが起こる。これを集合のように書き出し、 U で表すと

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad n(U) = 6$$

となる。このうち、「偶数の目が出る」場合を A で表わすと

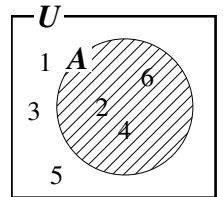
$$A = \{2, 4, 6\}, \quad n(A) = 3$$

となる。大数の法則 (law of large numbers) ^{※9} によって

「6回のうち平均3回が、 A のどれかになる」

$$\iff \text{「1回あたり } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ 回が、} A \text{ のどれかになる」}$$

と考えることができ、この $\frac{1}{2}$ が確率を表わしている。



【例題 59】上の例において、「出た目が3の倍数である」場合を B とする。

- 上のように、 B を集合で表わすと、 $B = \boxed{\text{ア}}$ となり、 $n(B) = \boxed{\text{イ}}$ である。
- 大数の法則によって、6回のうち平均 $\boxed{\text{ウ}}$ 回、 B が起こる。

言いかえると、1回あたり $\boxed{\text{エ}}$ 回、 B は起こる。この $\boxed{\text{エ}}$ が、 B の確率である。

【解答】 $\text{ア} : \{3, 6\}$, $\text{イ} : 2$, $\text{ウ} : 2$, $\text{エ} : \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

^{※9} 起こり得る可能性が等しい N 通りの内の、 x 通りの起こることを X とすると「 N 回のうち平均 x 回が、 X のどれかになる」ことが大数の法則である。これはチェビシェフの不等式を利用して証明されるが、高校数学の範囲を超えるので、ここでは省略する。

B. 試行・事象・同様に確からしい

「さいころを1個振る」のように、同じ条件で繰り返すことができる操作などを**試行** (trial) といい、試行して起こる事柄を**事象** (event) という。前ページの例では、「●が出る」「偶数の目が出る」などが事象になる。また、すべての事象をまとめて**全事象** (whole event) という。前の例では、 U が全事象である*10。

前ページの例ではさいころにいかさまがないので、全事象 U はすべて等しい可能性で起こる。このことを、 U は**同様に確からしい** (equally likely) という。

【例題 60】 「コイン1枚を投げる」試行 X において、表が出る可能性と裏が出る可能性は等しいとする。次の□に適する数字・言葉を入れなさい。

- 試行 X の全事象は **ア** 通りあり、どの事象も同様に **イ** 。
- ウ** の法則から、表が出る事象は、平均して **ア** 回の X につき **エ** 回起こる。つまり、1回あたり **オ** 回起こる。

【解答】 ア: 2, イ: 確からしい, ウ: 大数, エ: 1, オ: $\frac{1}{2}$

C. 確率の定義

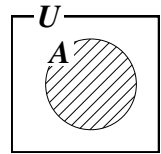
「事象 A の**確率** (probability)」はしばしば $P(A)$ で表わされ*11、次で定義される。

全事象 U が同様に確からしいとき

$$(\text{事象 } A \text{ の確率}) = \frac{\text{事象 } A \text{ の場合の数}}{\text{全事象 } U \text{ の場合の数}} \quad \left(\text{記号で表わすと, } P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \right)$$

と定義する。 $0 \leq P(A) \leq 1$ であり、大数の法則を認めると、事象 A の確率は「試行1回あたり A は何回起こるか」の値を表す。

集合と確率



D. 試行を無作為に行う

選び方にいっさい意図を加えずランダムに選ぶことを「**無作為に** (randomly, at random) 選ぶ」ともいう。無作為に選んで起こる結果はすべて同じ可能性で起こり、同様に確からしいと考えてよい。

【例題 61】 「7枚のカード [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] から無作為に1枚選ぶ」試行を X とする。

- 試行 X の全事象は **ア** 通りあり、同様に確からしく起こる。
- 「奇数を選ぶ」事象は **ア** 通りのうち **イ** 通りあるから、**ウ** の確率で起こる。
- 「3の倍数を選ぶ」事象は **ア** 通りのうち **エ** 通りあるから、**オ** の確率で起こる。

【解答】 ア: 7, イ: 4, ウ: $\frac{4}{7}$, エ: 2, オ: $\frac{2}{7}$

*10 ここで、「全事象」と「全事象の集合」がどちらも U で書かれている。このように、事象と、それを表わす集合には同じ文字を用い、特に区別しない。

*11 P は、"probability"の頭文字を表わす。



高校で学ぶ確率の問題において、断りがない限りは以下のことが仮定されている。

- さいころにいかさまやいびつはなく、どの目も出る可能性は等しい。
- ものを並べる、選ぶ、くじを引くなどは、無作為に行っているとする。
- コインの表と裏の出る確率は等しく、「コインが立つ」などの可能性は考えない。
- 「大数の法則」は正しいと考える。

E. 「場合の数」と確率

確率の計算のために、順列 ${}_n P_r$ 、階乗 $n!$ 、組合せ ${}_n C_r$ などを用いることがある。



約分を上手に使おう。たとえば、全事象が $5!$ 通り、事象 A が $4!$ 通りならば

(うまいやり方)

$$A \text{ の確率は } \frac{4!}{5!} = \frac{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{1}{5}$$

(計算が大変な例) $5! = 120$, $4! = 24$

なので、確率は $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

【練習 62 : 「場合の数」と確率～その 1～】

(1) 「無作為に 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ を横一列に並べる」試行を X とする。

- X の全事象は「 $\boxed{ア}$ 」の階乗」通りあり、同様に確からしく起こる。
- 「 $\boxed{6}$ が右端になる」事象は「 $\boxed{イ}$ 」の階乗」通りあるから、確率は $\boxed{ウ}$ になる。
- 「 $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ が隣り合う」事象は「 $\boxed{エ}$ 」 $\times 2!$ 」通りあるから、確率は $\boxed{オ}$ になる。

(2) 試行 X : 「出席番号 1 番から 13 番までの 13 人から 3 人を選ぶ」について

- 試行 X の全事象は $\boxed{カ}$ ${}_3 C_{13}$ 通りあり、同様に確からしく起こる。
- 「1 番が選ばれる」事象は $\boxed{ク}$ ${}_2 C_{12}$ 通りあるから、確率は $\boxed{コ}$ である。
- 「2 が選ばれない」事象は $\boxed{サ}$ ${}_3 C_{12}$ 通りあるから、確率は $\boxed{ス}$ である。

【解答】

(1) • 全事象は $(\text{ア}) \underline{6}$ の階乗。

• $\boxed{6}$ 以外を 1 列に並べ $(\text{イ}) \underline{5!}$ 通り, $\frac{5!}{6!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{\underline{6}}$ (ウ)

• $\boxed{1, 2}$ の組, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ の順列で $(\text{エ}) \underline{5!}$ 通り, $1, 2$ の並べ方は $2!$ 通りあるので $\frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{\underline{3}}$ (オ)

(2) • 全事象は $(\text{カ}) \underline{13} C_{\underline{3}} = \frac{13 \cdot 12^2 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 22$

• 1 番以外の 12 人から 2 人を選ぶことになり

$(\text{ク}) \underline{12} C_{\underline{2}} = \frac{12^2 \cdot 11}{2} = 66$ 通りあり, $\frac{66}{13 \cdot 22} = \frac{3}{\underline{13}}$ (コ)

• 2 番以外の 12 人から 3 人を選ばばよいので

$(\text{サ}) \underline{12} C_{\underline{3}} = \frac{12^2 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 22 \cdot 10$ 通りあり, $\frac{22 \cdot 10}{13 \cdot 22} = \frac{10}{\underline{13}}$ (ス)

◀ 1 番の他に、あと 2 人選ぶ



上のように、 ${}_{13} C_3 = 13 \cdot 22$ のようにしておくと、約分などが簡単にできる。

【練習 63：「場合の数」と確率～その 2～】

両親と子供 4 人が円形のテーブルに座る。

(1) 両親が向かい合う確率を求めよ。

(2) 両親が隣り合う確率を求めよ。

【解答】 全事象は、6 人の円順列なので 5! 通りである。

(1) 父親を固定すると、母親の場所は決まり、子供の並び方は 4! 通りある。

$$\text{よって } \frac{4!}{5!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{5}$$

(2) 父親を固定すると、母親の場所は両隣の 2 通り、子供の並び方は 4! 通り

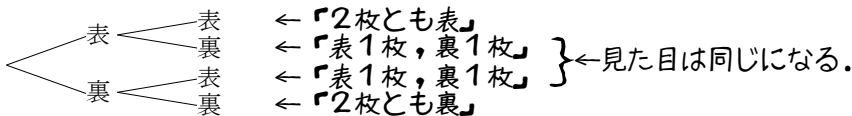
$$\text{ある。よって } \frac{2 \times 4!}{5!} = \frac{2 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2}{5}$$

2. 同様に確からしい

全事象として含まれる事象一つ一つを、**根元事象** (fundamental event) と言う。根元事象はすべて、同様に確からしいように選ばれないといけない。

A. 「同様に確からしい」全事象

同じ大きさ・形のコイン 2 枚を振ったときの全事象は、次の 4 通りである。



全事象を 3 通り (「表 2 枚」「表 1 枚, 裏 1 枚」「裏 2 枚」としてはいけない。「表 1 枚, 裏 1 枚」は、「表 2 枚」や「裏 2 枚」と可能性が違う。

【例題 64】

1. 3 枚のコインを振る試行を考える。

- 全事象は **ア** 通りあり、同様に確からしく起こる。
- 3 枚とも表になる事象は **ア** 通りのうち **イ** 通りあるから、確率は **ウ** である。
- 表が 2 枚となる事象は **ア** 通りのうち **エ** 通りあるから、確率は **オ** である。

2. 試行 X：「同じ大きさの赤 4 個、青 3 個、白 2 個の玉を含む袋から、無作為に 1 個選ぶ」、

事象 R：「赤い玉を選ぶ」、B：「青い玉を選ぶ」とする。

- 試行 X の全事象は **カ** 通りあり、同様に確からしく起こる。
- 事象 R は **カ** 通りのうち **キ** 通りあるから、確率は **ク** である。
- 事象 B は **カ** 通りのうち **ケ** 通りあるから、確率は **コ** である。

【解答】

1. ア： $2^3 = 8$ 、イ：1、ウ： $\frac{1}{8}$ 、エ：3、オ： $\frac{3}{8}$

2. カ：9、キ：4、ク： $\frac{4}{9}$ 、ケ：3、コ： $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

◀ 全事象を「赤を選ぶ」「青を選ぶ」「白を選ぶ」の 3 通りとしてはいけない。これでは、全事象が同様に確からしくない。

B. さいころ 2 個を振るときの「同様に確からしい」全事象

さいころ 2 個を振るときの全事象は、36 通りとして考えないといけない。つまり、 $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ と $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ は区別して考える。下に見るように、区別しないと全事象が同様に確からしくならない。

$\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}$ から $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ まであるさいころ 2 個を振るとき、 $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ 、 $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ が出る確率

・1 回目と 2 回目を区別した場合

| 1回目 \ 2回目 | \bullet | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ |
|------------------|-----------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| \bullet | 1,1 | 2,1 | 3,1 | 4,1 | 5,1 | 6,1 |
| $\bullet\bullet$ | 1,2 | 2,2 | 3,2 | 4,2 | 5,2 | 6,2 |
| $\bullet\bullet$ | 1,3 | 2,3 | 3,3 | 4,3 | 5,3 | 6,3 |
| $\bullet\bullet$ | 1,4 | 2,4 | 3,4 | 4,4 | 5,4 | 6,4 |
| $\bullet\bullet$ | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 6,5 |
| $\bullet\bullet$ | 1,6 | 2,6 | 3,6 | 4,6 | 5,6 | 6,6 |

全事象は $6^2 = 36$ 通り。 $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ 、 $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ が一つずつになるのは 2 通りだから、確率は $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

・1 回目と 2 回目を区別しない場合

| | \bullet | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ |
|------------------|--|--|--|--|--|--|
| \bullet | $\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ |
| $\bullet\bullet$ | $\begin{matrix} \bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ |
| $\bullet\bullet$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ |
| $\bullet\bullet$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ |
| $\bullet\bullet$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ |
| $\bullet\bullet$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ |

根元事象が同様に確からしくない。

(例えば、 $\begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{matrix}$ の可能性と $\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}$ の可能性は異なる)

【例題 65】

- 2 個の大きさの違うさいころを振って、和が 5 になる確率を求めよ。
- 2 個の同じさいころを振って、積が 12 になる確率を求めよ。

【解答】

1. 目の和は次のようになる。

| | \bullet | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ |
|------------------|-----------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| \bullet | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $\bullet\bullet$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $\bullet\bullet$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $\bullet\bullet$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $\bullet\bullet$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $\bullet\bullet$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

よって、 $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

2. 目の積は次のようになる。

| | \bullet | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ | $\bullet\bullet$ |
|------------------|-----------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| \bullet | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\bullet\bullet$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| $\bullet\bullet$ | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| $\bullet\bullet$ | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| $\bullet\bullet$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| $\bullet\bullet$ | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

よって、 $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$



さいころ 2 個の確率については、必ず、上のような 6×6 の表を書いて考えよう。

【練習 66 : 3 個のさいころを振る】

同じ大きさの 3 個のさいころを振るとき、次の確率に答えよ。

(1) 3 個の目の和が 18 になる確率

(2) 3 個とも同じ目になる確率

【解答】 全事象は $6^3 = 216$ 通りある。

1. 和が 18 になるのは、 $(6, 6, 6)$ の 1 通りであるから、 $\frac{1}{216}$

2. $(1, 1, 1)$ から $(6, 6, 6)$ までの 6 通りがあるので、 $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

C. 順列・組合せと「同様に確からしい」全事象

(I) 6枚のカード ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥ から 1枚選び元に戻す. この操作を 2回繰り返したとき, ③,

④ を選ぶ 1枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

| 1枚目 \ 2枚目 | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ① | 1,1 | 2,1 | 3,1 | 4,1 | 5,1 | 6,1 |
| ② | 1,2 | 2,2 | 3,2 | 4,2 | 5,2 | 6,2 |
| ③ | 1,3 | 2,3 | 3,3 | 4,3 | 5,3 | 6,3 |
| ④ | 1,4 | 2,4 | 3,4 | 4,4 | 5,4 | 6,4 |
| ⑤ | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 6,5 |
| ⑥ | 1,6 | 2,6 | 3,6 | 4,6 | 5,6 | 6,6 |

全事象は $6^2 = 36$ 通り. ③, ④ が 1枚ずつに

なるのは 2通りだから, 確率は $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

| | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| ① | | | | | | |
| ② | 1,2 | | | | | |
| ③ | 1,3 | 2,3 | | | | |
| ④ | 1,4 | 2,4 | 3,4 | | | |
| ⑤ | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | | |
| ⑥ | 1,6 | 2,6 | 3,6 | 4,6 | 5,6 | |

根元事象が同様に確からしくない.

(例えば, ①②の可能性と①①の可能性は異なる)

(II) 6枚のカード ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥ から 2枚を選ぶとき, ③, ④ を選ぶ 1枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

| 1枚目 \ 2枚目 | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ① | | 2,1 | 3,1 | 4,1 | 5,1 | 6,1 |
| ② | 1,2 | | 3,2 | 4,2 | 5,2 | 6,2 |
| ③ | 1,3 | 2,3 | | 4,3 | 5,3 | 6,3 |
| ④ | 1,4 | 2,4 | 3,4 | | 5,4 | 6,4 |
| ⑤ | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | | 6,5 |
| ⑥ | 1,6 | 2,6 | 3,6 | 4,6 | 5,6 | |

全事象は $6 \times 5 = 30$ 通り (= ${}_6P_2$)

③, ④ が 1枚ずつになるのは 2通り (= ${}_2P_2$)

だから, 確率は $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

| | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| ① | | | | | | |
| ② | 1,2 | | | | | |
| ③ | 1,3 | 2,3 | | | | |
| ④ | 1,4 | 2,4 | 3,4 | | | |
| ⑤ | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | | |
| ⑥ | 1,6 | 2,6 | 3,6 | 4,6 | 5,6 | |

全事象は ${}_6C_2 = 15$ 通り

③, ④ が 1枚ずつになるのは 1通り (= ${}_2C_2$)

だから, 確率は $\frac{1}{15}$

【例題 67】 箱の中に 9個のボールがあり, ボールにはそれぞれ, 1 から 9まで書かれている.

- ボール 1個を選んで番号を記録し, ボールを元に戻すとき, 次の確率を求めよ.
 - 3 と 4 を 1回ずつ記録した
 - 2回とも 3 を記録した
- ボールを 2個選ぶとき, 次の確率を求めよ.
 - 3 と 4 を 1個ずつ選んだ
 - 2個とも 3 を選んだ

【解答】

1. 全事象は $9 \times 9 = 81$ 通りある.

(a) 3, 4 の場合と, 4, 3 の場合があるので, $\frac{2}{81}$

(b) 3, 3 の 1通りしかないので $\frac{1}{81}$

2. (a) (順列で全事象を考えた場合) 全事象は $9 \times 8 = 72$ 通りある.

3, 4 の場合と, 4, 3 の場合があるので, $\frac{2}{72} = \frac{1}{36}$

(組合せで全事象を考えた場合) 全事象は ${}_9C_2 = 36$ 通りある. 3, 4 の

1通りであるので, $\frac{1}{36}$

(b) 3, 3 になることはないので, 確率は 0

◀ 1個目を選ぶボールは 9通り, 2個目を選ぶボールは 8通りある, ように考えるとよい.

全事象をつくる根元事象は、一つの決め方に定まるとは限らないが、次に注意する必要がある。

- 根元事象がすべて同様に確からしくなるよう、考えなければならない。
- 根元事象を「順列」で考えたならば以後も「順列」で考え、根元事象を「組合せ」で考えたならば以後も「組合せ」で考えないといけない。

【練習 68：同様に確からしい】

a, a, a, b, b, c, c の 7 つの文字を一行に並べる。以下の確率を求めなさい。

(1) b が両端になる確率

(2) 2 つの c が隣り合う確率

【解答】 すべての並び方は $\frac{7!}{3!2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 210$ 通り。

(1) 両端以外に a, a, a, c, c を並べる $\frac{5!}{3!2!} = 10$ 通りなので $\frac{10}{210} = \frac{1}{21}$ 。

(2) a, a, a, b, b, cc の 6 つを並べて $\frac{6!}{3!2!} = 60$ 通りなので $\frac{60}{210} = \frac{2}{7}$ 。

(別解) $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ の異なる 7 つを並べて 7! 通り

(1) 両端は b_1, b_2 の並び替えて 2! 通り、他は 5! 通りなので $\frac{5!2!}{7!} = \frac{1}{21}$ 。

(2) c を 1 つにまとめて 6! 通り、c の順序で 2! 通りなので $\frac{6!2!}{7!} = \frac{2}{7}$ 。

【発展 69：確率の発展問題～その 1～】

赤、青、黄のカードが 5 枚ずつあり、それぞれ、1 から 5 の数字が 1 つずつ書かれている。この 15 枚の中から 3 枚を任意に選ぶとき、以下の確率を求めよ。

- ① 3 枚とも同じ色になる
- ② 3 枚の色がすべて異なる
- ③ 3 枚の数字がすべて異なる
- ④ 3 枚の数字も色もすべて異なる

【解答】 すべての選び方は ${}_{15}C_3 = 5 \cdot 7 \cdot 13$ 通りある。

① どの色を選ぶかで 3 通り、どの数字を選ぶかで ${}_5C_3 = 10$ 通りあるので、

$$\frac{3 \cdot 10^2}{5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{6}{91}.$$

② 色の選び方は 1 通り、数字はそれぞれ 5 通りずつあるので、

$$\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{25}{91}.$$

③ 数字の選び方は ${}_5C_3 = 10$ 通り、それぞれの数字がどの色であったかで 3

$$\text{通りずつあるので、} \frac{10^2 \cdot 3^3}{5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{54}{91}.$$

④ 色の選び方は 1 通り、赤の数字が 5 通り、青の数字が 4 通り、黄の数字

$$\text{が 3 通りあるので、} \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{12}{91}.$$

◀ (別解) カードの順列で考えると全事象は $15 \cdot 14 \cdot 13$ 通りあり

$$\textcircled{1} \frac{15 \cdot 4^2 \cdot 3}{15 \cdot 14^7 \cdot 13} = \frac{6}{91}$$

(2 枚目は 1 枚目と同じ色
以下、3 枚目の条件は省略)

$$\textcircled{2} \frac{15 \cdot 10^5 \cdot 5}{15 \cdot 14^7 \cdot 13} = \frac{25}{91}$$

(2 枚目は 1 枚目と違う色)

$$\textcircled{3} \frac{15 \cdot 12^6 \cdot 9}{15 \cdot 14^7 \cdot 13} = \frac{54}{91}$$

(2 枚目は 1 枚目と違う数)

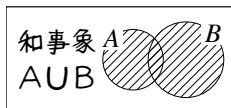
$$\textcircled{4} \frac{15 \cdot 8^4 \cdot 3}{15 \cdot 14^7 \cdot 13} = \frac{12}{91}$$

(2 枚目は 1 枚目と数も色も違う)

1. 和事象・積事象・排反

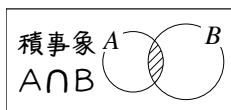
A. 和事象とは

事象 A, B があるとき、「 A または B が起きる」という事象を**和事象** (sum event) といい、 $A \cup B$ で表す。 \cup は集合における「または」と同じ記号である。



B. 積事象とは

また、「 A も B も起こる」という事象を**積事象** (product event) といい*12, $A \cap B$ で表す。 \cap は集合における「かつ」と同じ記号である。



【例題 70】 ジョーカーを除いた 52 枚のトランプから 1 枚を選ぶ。選んだカードが

赤 (ハートかダイヤ) である事象を R , 絵札である事象を P , ハートの 1 桁である事象を H_1 とする。また、すべての場合の集合を U とする。つまり、 $n(U) = 52$ である。

1. A : 「 R と P の積事象」, B : 「 R と H_1 の和事象」, C : 「 P と H_1 の和事象」 に一致するものを
 ① $R \cap P$ ② $R \cup P$ ③ $R \cap H_1$ ④ $R \cup H_1$ ⑤ $P \cap H_1$ ⑥ $P \cup H_1$ から選びなさい。
2. 場合の数 $n(R)$, $n(P)$, $n(H_1)$ をそれぞれ答えなさい。
3. 確率 $P(R)$, $P(P)$, $P(H_1)$ をそれぞれ答えなさい。

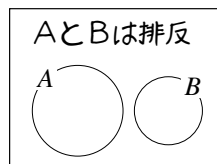
【解答】

1. 積事象は \cap だから A は①, 和事象は \cup だから B は④, C は⑥
2. ハート・ダイヤは合計 26 枚あるので $n(R) = 26$,
 絵札は $3 \times 4 = 12$ 枚あるので $n(P) = 12$,
 ハートの 1 桁は 9 枚あるので $n(H_1) = 9$.
3. $n(U) = 52$ より, $P(R) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$, $P(P) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$, $P(H_1) = \frac{9}{52}$.

◀たとえば, $P(R) = \frac{n(R)}{n(U)}$ である。

C. 排反とは

2つの事象 A, B が同時に起こらないとき, A, B は (互いに) **排反** (exclusive) であるという。 A, B が排反であることは, 積事象 $A \cap B$ が空集合であることと一致し, ベン図は右図のようになる。その結果, 和事象 $A \cup B$ は次で計算できる。



確率の加法定理

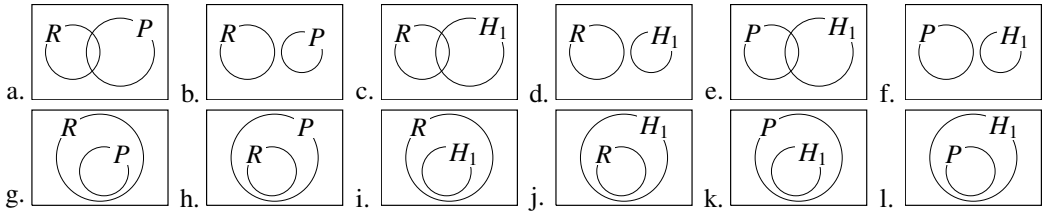
2つの事象 A, B が排反であれば, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ なので, 次の**確率の加法定理**が成り立つ。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

*12 なぜ「積事象」と呼ぶのかは, 次節で学ぶ。

【例題 71】 前ページの【例題 70】の試行について考える。

1. 以下の中から、正しいベン図を 3 つ答えなさい。



2. R, P, H_1 の中から、互いに排反な 2 つの事象を答えなさい。

3. 確率 $P(A), P(B), P(C)$ をそれぞれ答えなさい。

【解答】

1. R, P については a. が正しく、 $R \supset H_1$ から i. が正しく、

$P \cap H_1 = \emptyset$ から f. が正しい。よって、答えは a, f, i.

2. 共通部分がない、 P と H_1 が排反である。

3. A は「絵札のハート・ダイヤ」の 6 枚なので、 $P(A) = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$,

ベン図 i. から $B = R$ と分かるので、 $P(B) = P(R) = \frac{1}{2}$,

$P(C) = P(P) + P(H_1) = \frac{3}{13} + \frac{9}{52} = \frac{21}{52}$.

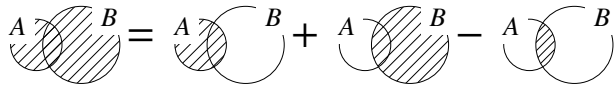
← 一般に、 $R \supset N$ ならば、 $R \cup N = R, R \cap N = N$ である。

D. 排反でない和事象の確率

排反でない和事象の確率

A と B が排反でないとき、和事象 $A \cup B$ の確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



で計算できる。

【例題 72】 A, B, C, \dots, I の 9 人から、3 人を選ぶ。

1. A が選ばれる確率を求めよ。

2. B が選ばれる確率を求めよ。

3. A も B も選ばれる確率を求めよ。

4. A または B が選ばれる確率を求めよ。

【解答】 全事象は、 ${}^9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 12 \cdot 7$ 通りある。

1. A 以外の 8 人から 2 人選ぶことができ、 $\frac{{}^8C_2}{12 \cdot 7} = \frac{4 \cdot 7}{12 \cdot 7} = \frac{1}{3}$

2. 1. と同様にして、 $\frac{{}^8C_2}{12 \cdot 7} = \frac{1}{3}$.

3. A, B 以外の 7 人から 1 人選ぶことができ、 $\frac{{}^7C_1}{12 \cdot 7} = \frac{7}{12 \cdot 7} = \frac{1}{12}$

4. 1., 2., 3. から、 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{4+4-1}{12} = \frac{7}{12}$

2. 余事象

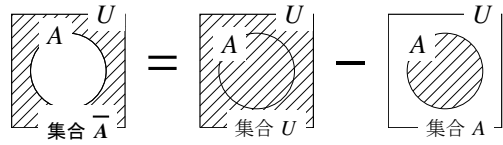
A. 余事象とは何か

事象 A に対して、 A が起こらない事象を A の余事象 (complementary event) といい、 \bar{A} で表す。

A の余事象 \bar{A} について、 $n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$ から

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

が成り立つと分かる。



【例題 73】 2 個のさいころを振るとき

- 2 個の出た目が同じになる確率は **ア** である。
- 2 個の出た目が異なる目になる事象は、同じになる事象の **イ** なので、出た目が異なる確率は $1 - \text{ア} = \text{ウ}$ である。

【解答】 ア: 全事象は 6^2 通り、同じ目が出るのは 6 通りなので、 $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$

イ: 余事象, ウ: $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

B. 「少なくとも 1 つ」の確率

たとえば、10 本の中に 3 本の当りが入っているくじがある。ここから 3 本を引いて、「少なくとも 1 本当たる確率」を考えよう。この試行では、次のいずれかが起こる。

- 3 本とも当たる
 - 2 本だけ当たる
 - 1 本だけ当たる
 - 1 本も当たらない
- } これらすべてが「少なくとも 1 本当たる確率」

「少なくとも 1 本当たる」とは、「1 本も当たらない」の余事象と分かる。

「1 本も当たらない」確率は $\frac{{}^7C_3}{{}^{10}C_3} = \frac{7}{12}$ であるから、求める確率は $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ と分かる*13。

【例題 74】 3 枚のコインを振るとき、「少なくとも 1 枚表になる」事象は、「**ア**」の余事象になる。「**ア**」の確率は **イ** であるから、「少なくとも 1 枚表になる」確率は **ウ** である。

【解答】 ア: 全てが裏になる (表が 0 枚である)

イ: 全事象は $2^3 = 8$ 通りなので、 $\frac{1}{8}$, ウ: $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

*13 別解として、「3 本とも当たる」「2 本だけ当たる」「1 本だけ当たる」確率をすべて足し合わせても求められるが、答えを出すまでの計算がとて多くなる。

【練習 75 : 余事象】

- (1) 5 個の赤, 4 個の白が入った袋から 3 個を選ぶとき, 少なくとも 1 個赤が含まれる確率を求めよ.
 (2) 5 人の子供がいる家族に, 男の子も女の子もいる確率はいくらか. ただし, 男の子も女の子も同じ確率で生まれるものとする*14.

【解答】

(1) 「すべて白になる」の余事象なので

$$1 - \frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = 1 - \frac{4}{\frac{9^3 \cdot 8^4 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 1 - \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 7} = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

(2) 全事象は $2^5 = 32$ 通り, すべて男の子である確率は $\frac{1}{32}$, すべて女の子である確率は $\frac{1}{32}$, 余事象を考えて, $1 - 2 \times \frac{1}{32} = \frac{15}{16}$.

【発展 76 : 余事象・加法定理】

1 枚の 100 円玉が 1 枚, 4 枚の 10 円玉, 5 枚の 1 円玉, 合計 10 枚の中から無作為に 3 枚を選ぶ.

「100 円玉が 1 枚含まれる」事象を A , 「10 円玉が 2 枚以上含まれる」事象を B とする.

① 事象 C 「合計金額が 100 円以下」, 事象 D 「合計金額が 20 円以上」に一致するものを

① \bar{A} ② \bar{B} ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ からそれぞれ選びなさい.

② 確率 $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$ を求めなさい.

【解答】

① 事象 C は①, 事象 D は④

② 全事象は ${}_{10}C_3 = 120$ 通り.

$P(A)$ 100 円玉 1 枚と, 100 円玉以外の 9 枚から 2 枚を選んだ場合になるから

$$P(A) = \frac{{}_9C_2}{{}_{120}C_3} = \frac{9^3 \cdot 4}{{}_{120}C_3} = \frac{3}{10}$$

$P(B)$ 「10 円玉が 2 枚」の確率は $\frac{{}_4C_2 \cdot {}_6C_1}{{}_{120}C_3} = \frac{6 \cdot 6^3}{{}_{120}C_3} = \frac{3}{10}$, 「10 円玉が 3

枚」の確率は $\frac{{}_4C_3}{{}_{120}C_3} = \frac{1}{30}$ である.

10 円玉「2 枚」「3 枚」は排反なので $\frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

$$P(C) = P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ であり, $A \cap B$ は「100 円玉 1 枚と 10 円玉 2 枚」の確率 $\frac{{}_1C_1 \cdot {}_4C_2}{{}_{120}C_3} = \frac{1}{20}$ であるから

$$P(D) = \frac{3}{10} + \frac{1}{3} - \frac{1}{20} = \frac{18 + 20 - 3}{60} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$$

*14 数学の問題では, このように書いていなくても, 同じ確率で生まれると仮定することが多い. しかし, 実際にそうであるかどうかは, 諸説ある.

C. 確率についての「ド・モルガンの法則」

『ド・モルガンの法則』(数I, p.??) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ は、確率においても用いられることがある。

ド・モルガンの法則 (確率版)

どんな事象 A, B に関しても、次のド・モルガンの法則 (law of de Morgan) が成り立つ。

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}), \quad P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

【例題 77】 ある試行において、 $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.2$ のとき、次の値を求めよ。

1. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

2. $P(A \cup B)$

3. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

【解答】

1. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.2 = 0.7$

3. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3$

1B.3 確率の木と独立・従属

複数の試行を行う場合には、樹形図に似た「確率の木」が有効である。

1. 乗法定理と確率の木

A. 確率の乗法定理

コイン1枚を振った後、赤い玉4個と白い玉3個の入った袋から1個を玉を取り出す。

コイン1枚を振る
表は $\frac{1}{2}$, 裏は $\frac{1}{2}$ \Rightarrow 赤4個, 白3個から1個取り出す
赤は $\frac{4}{7}$, 白は $\frac{3}{7}$

このとき「表が出て、白い玉を選ぶ確率」を考えると

表が出るのは、1回につき $\frac{1}{2}$ 回 \Rightarrow そのうち白が出るのは、1回につき $\frac{3}{7}$ 回

であるから、「表が出て、白い玉を選ぶ確率」は $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$ となる。 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}$ 回につき $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$ 回

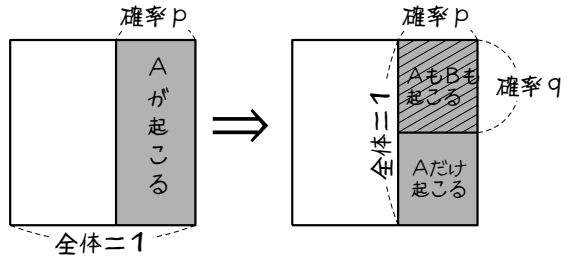
【例題 78】 上の例において、「裏が出て、赤い玉を選ぶ確率」を求めなさい。

【解答】 裏は $\frac{1}{2}$, 赤い玉は $\frac{4}{7}$ の確率なので、 $\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$ 。

2つの試行 X, Y を行い

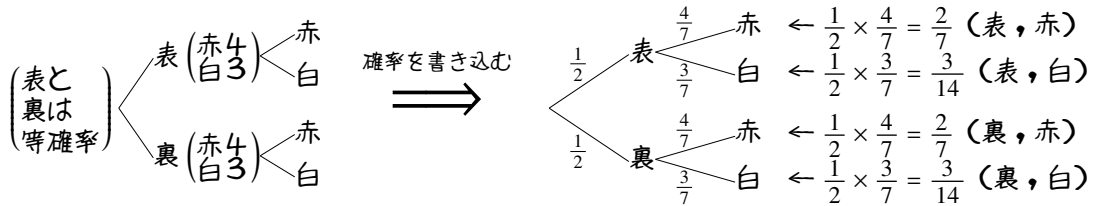
- X の結果, 事象 A が起こる確率を p
- (事象 A が起きた後に)
Y の結果, 事象 B が起こる確率を q

とすると, 事象 A, B がともに起こる確率は pq で与えられる. これを **確率の乗法定理** という.



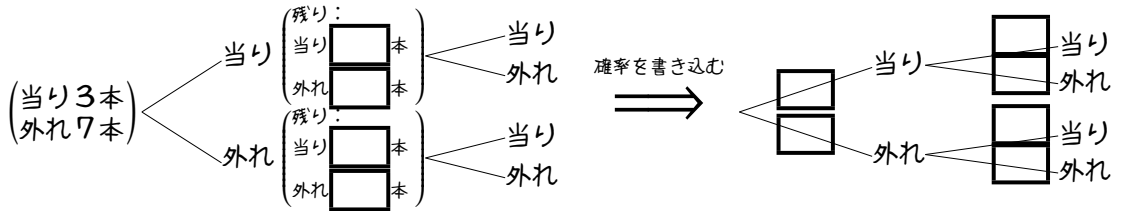
B. 確率の木とは

上で考えた試行は, 次のようにまとめられる.



右上のような, 樹形図に確率を書き込んだまとめ方を, **確率の木** (probability tree) という.

【例題 79】 当たりが 3 本, 外れが 7 本入った箱から, 2 回くじを引く. ただし, 一度引いたくじは元に戻さない. 以下の に, 適当な数値を答え, 問いに答えよ.



1. 2 回とも当たる確率を求めよ.

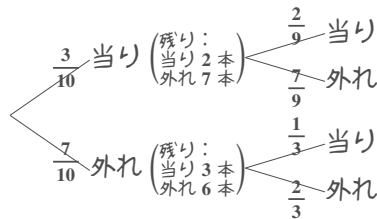
2. 2 回とも外れる確率を求めよ.

【解答】

確率の木は右のようになる.

$$1. \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

$$2. \frac{7}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$$



◀ 2 回とも赤, 白, 青はそれぞれ排反なので, 足すだけでよい.

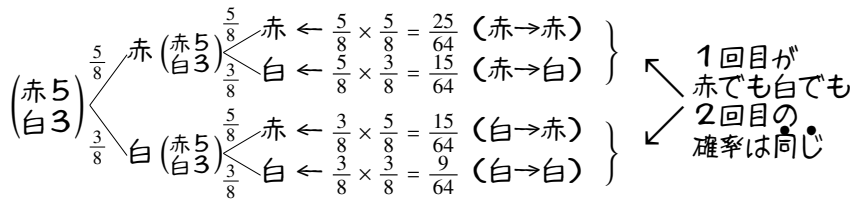
2. 独立試行・従属試行

A. 独立試行とは

試行 X の結果が試行 Y の結果に影響しないとき、 X, Y は**独立** (independent) であるという。

たとえば、「赤が5個、白が3個」入った袋から、1個を選んで元に戻す試行を、2回繰り返したとき、右のような確率の木にまとめられ、1回目の試行の結果が2回目に影響しない。

つまり、この例の1回目と2回目の試行は独立である。

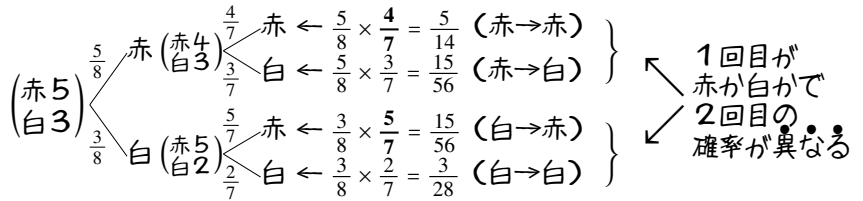


B. 従属試行とは

試行 X の結果が試行 Y の結果に影響するとき、 X, Y は**従属** (dependent) であるという。

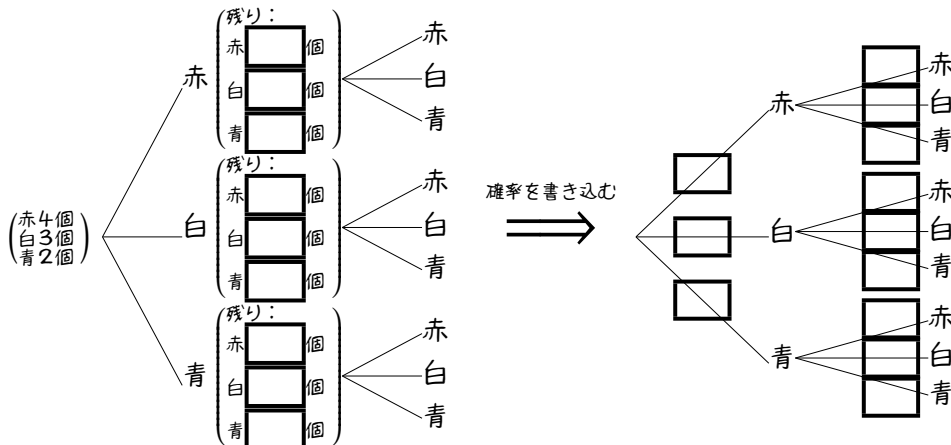
たとえば、「赤球が5個、白球が3個」入った袋から、1個を選んで元に戻さない試行を、2回繰り返したとき、右の確率の木のようにまとめられ、1回目の試行の結果が2回目に影響する。

一例として、2回目が赤である確率は、1回目赤の場合は $\frac{4}{7}$ 、白の場合は $\frac{5}{7}$ 、と異なっている。つまり、この例の1回目と2回目の試行は従属である。



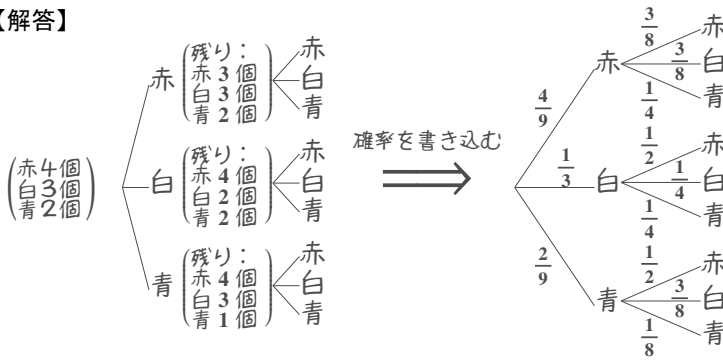
【練習 80：確率の木と独立・従属】

赤い玉が4個、白い玉が3個、青い玉が2個入った袋がある。取り出した玉は元に戻さないで、2回玉を取り出すことをまとめるとき、以下の に、適当な数値を答え、問いに答えよ。



- (1) 玉を取り出す1回目と2回目は、独立か、従属か。
- (2) 1回目白であった後の2回目が青である確率、1回目青であった後の2回目が青である確率をそれぞれ求めよ。
- (3) 2回とも赤である確率を求めよ。
- (4) 2回とも同じ色である確率を求めよ。

【解答】



- (1) 1回目の色によって2回目の確率が異なるので、**従属**である。
- (2) 「白→青」で2回目が青である確率は $\frac{1}{4}$ ，同様に「青→青」から $\frac{1}{8}$ 。
- (3) $\frac{4}{9^3} \times \frac{3}{8^2} = \frac{1}{6}$
- (4) 2回とも白である確率は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
 2回とも青である確率は $\frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{36}$
- (3) と合わせて $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{6+3+1}{36} = \frac{5}{18}$

【練習 81：独立・従属】

- (1) A 工場では部品 P, Q, R を使って品物を作る．各部品には色違いがあり，P は 2 個に 1 個が白，Q は 3 個に 1 個が白，R は 4 個に 1 個が白であり，他はすべて黒である。
- (a) 真っ白な品物ができる確率を求めよ。
- (b) 部品が 1 つだけ白い品物ができる確率を求めよ。
- (2) B 工場では，100 個に 1 個不良品が作られてしまう．さらに，不良品を機械がチェックするとき，不良品は必ず見つけ出せるものの，100 回に 1 回，良品を不良品と誤って判断することがある。
- (a) 機械が「良品」とチェックする確率を求めよ。
- (b) 「良品」が「不良品」と判断されてしまう確率を求めよ。

【解答】

(1) 確率の木にまとめると，右のようになる。

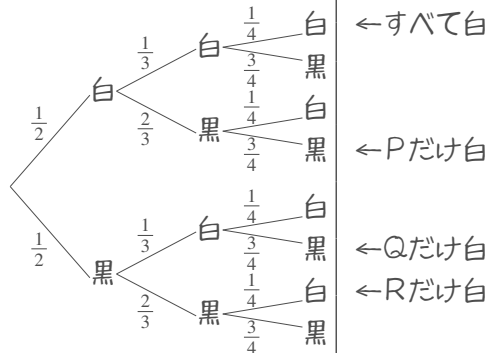
(a) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

(b) P だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{24}$

Q だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{24}$

R だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{24}$

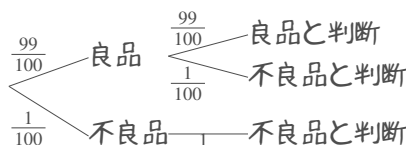
であるから， $\frac{6+3+2}{24} = \frac{11}{24}$ 。



(2) 確率の木にまとめると，右のようになる。

(a) $\frac{99}{100} \times \frac{99}{100} = \frac{9801}{10000}$

(b) $\frac{99}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{99}{10000}$



C. 「全事象による解き方」と「乗法定理による解き方」

たとえば、「赤4個、白3個を含む袋から2個取り出すとき、赤が2個になる確率」は、次の2通りの求め方がある。

(I) 全事象による解き方

- 全事象は「赤4個、白3個の合計7個から2個選ぶ」を考えて、 ${}_{7}C_2 = 21$ 通り
 - 赤2個になる場合は「赤4個から取り出す2個を選ぶ」を考えて、 ${}_{4}C_2 = 6$ 通り
- つまり、 $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ になる。



自分のやりやすいやり方で解けばよいが、どちらの解き方も理解しているのが最も良い。

(II) 乗法定理による解き方

- 1個ずつ2回、順に取り出すと考える。
 - 1回目が赤である確率は $\frac{4}{7}$
 - 2回目も赤である確率は、「赤3個、白3個」が残りなので $\frac{1}{2}$
- つまり、 $\frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$ になる。

【例題 82】 10本のうち3本が当たりであるくじAと、20本のうち3本が当たりであるくじBがある。

1. すべてのくじを区別すれば、全事象は **ア** 通り、どちらも当たる事象は **イ** 通りある。よって、どちらも当たる確率は **ウ** と求められる。
2. 一方、くじAが当たる確率は **エ**、くじBが当たる確率は **オ** であるから、どちらも当たる確率は **カ** という式から、やはり **ウ** と求められる。

【解答】

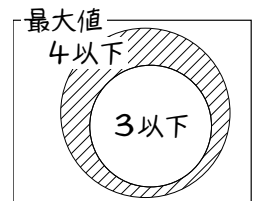
1. 全事象は $10 \times 20 = \underline{200}$ (ア) 通り、両方当たる引き方は $3 \times 3 = \underline{9}$ (イ) 通りあるから、 $\frac{3 \times 3}{10 \times 20} = \frac{\underline{9}}{\underline{200}}$ (ウ)
2. 1つめの当たる確率は $\frac{3}{10}$ (エ)、2つめの当たる確率は $\frac{3}{20}$ (オ)、2つの事象は独立であるから $\frac{3}{10} \times \frac{3}{20} = \frac{9}{200}$ (カ)

D. ⑨⑩ さいころの出た目の最大値

例として、さいころ3つを振って、出た目の最大値が4である確率を考えよう。このとき

- 「3つのさいころの最大値が4である確率」を求めることは難しい。
 - 「3つのさいころの最大値が4以下である確率」は簡単に計算できる。
- なぜなら、3つとも1,2,3,4のどれかであればよいので、 $\left(\frac{4}{6}\right)^3$ である。

「最大値が4」の確率は、「最大値が4以下であるが、3以下ではない」確率になる。結局、「最大値が4」の確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{4^3 - 3^3}{6^3} = \frac{64 - 27}{216} = \frac{37}{216}$ と分かる。



【発展 83 : さいころの出た目の最大・最小】

3 個のさいころを投げる試行について、以下の問に答えよ。

- ① 「出た目の最大値が 3 になる」確率を求めよ。
- ② 「出た目の最小値が 3 になる」確率を求めよ。

【解答】

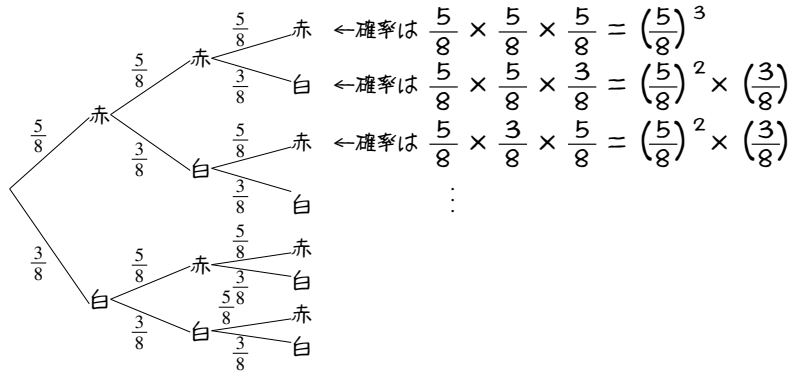
- ① 「最大値が 3 以下」の確率 $\left(\frac{3}{6}\right)^3$ から「最大値が 2 以下」の確率 $\left(\frac{2}{6}\right)^3$ を引けばよいので $\left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{3^3 - 2^3}{6^3} = \frac{27 - 8}{216} = \frac{19}{216}$ 。
- ② 「最小値が 3 以上」の確率 $\left(\frac{4}{6}\right)^3$ から「最小値が 4 以上」の確率 $\left(\frac{3}{6}\right)^3$ を引けばよいので $\left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{4^3 - 3^3}{6^3} = \frac{64 - 27}{216} = \frac{37}{216}$ 。

3. 反復試行 ~ 独立な試行の繰り返し

A. 反復試行とは

互いに独立な同じ試行を複数回行うことを、**反復試行** (repeated trials) という*15。

たとえば、赤い玉が 5 個、白い玉が 3 個入った袋から玉を 1 個取り出し元に戻す試行を、3 回繰り返すと、右のようになる。



B. 反復試行の確率

例として、「さいころを 5 回振る」試行を考え、「5 回のうち 2 回だけ 1 が出る」確率を求めよう。

1 が出た場合を○, 出なかった場合を×で表すと、たとえば次のようになればよい。

1回目 2回目 3回目 4回目 5回目
○ × ○ × × ←○は $\frac{1}{6}$ の確率で、×は $\frac{5}{6}$ の確率で起こる。

この確率は、 $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$ で計算できる。また、次のような場合でもよい。

1回目 2回目 3回目 4回目 5回目 ←確率は $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$
× ○ ○ × × ←確率は $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$

↑ ↑ ↑
すべて同じ確率

5ヶ所から○を2つ選ばばよい。そのような選び方は ${}_5C_2$ 通り

こうして、 $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$ が ${}_5C_2$ 通りあると分かるので、求める確率は次のようになる。

$${}_5C_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10^5 \times \frac{1}{36} \times \frac{125}{216^{108}} = \frac{625}{3888}$$

*15 重複試行と呼ばれる事もある。同じ試行の反復も、重複も、扱えるからである。

【例題 84】 さいころを 5 回振って「5 回のうちちょうど 4 回だけ 1 が出る」確率を求めなさい。

【解答】 上と同じように○×で表わすと、次のようになる。

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| 1回目 | 2回目 | 3回目 | 4回目 | 5回目 | |
| × | ○ | ○ | ○ | ○ | ← 確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1$ |
| ○ | × | ○ | ○ | ○ | ← 確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1$ |

⋮

5ヶ所から○を4つ選ぶばよい
そのような選び方は ${}_5C_4$ 通り

$$\text{よって、} {}_5C_4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right) = 5 \times \frac{1}{1296} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{7776}$$

反復試行

試行 X を n 回繰り返す、確率 p の事象 A がちょうど k 回成り立つ確率は

$${}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}$$

で求められる (A が起きない確率は $1-p$, A が起きない回数は $n-k$ であることに注意)。

【練習 85 : 反復試行】

- (1) 当たる確率が $\frac{1}{10}$ のくじを 5 回引く。そのうちちょうど 3 回当たる確率を求めよ。
- (2) さいころ 1 個を 6 回振って、5 以上がちょうど 3 回出る確率を求めよ。
- (3) 赤 3 個、白 2 個の合計 5 個のボールが入った袋から、玉を 1 個取り出し、色を記録してから元に戻す。これを 5 回繰り返すとき、以下の確率を求めよ。

| | | |
|------------------|------------------|----------------|
| (a) 赤がちょうど 3 回出る | (b) 赤がちょうど 2 回出る | (c) 白が 4 回以上出る |
|------------------|------------------|----------------|

【解答】

$$(1) {}_5C_3 \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 10 \times \frac{9^2}{10^5 \cdot 10^4} = \frac{81}{10000}$$

(2) 5 以上が出る確率は $\frac{1}{3}$, 出ない確率は $\frac{2}{3}$ であるから

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{2^3}{3^6} = 20 \times \frac{8}{729} = \frac{160}{729}$$

(3) 5 回とも、赤が出る確率は $\frac{3}{5}$, 出ない確率は $\frac{2}{5}$ である。

$$(a) {}_5C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5 \cdot 4^2 \cdot 3}{3 \cdot 2} \cdot \frac{3^3 \cdot 2^2}{5^5} = \frac{2 \cdot 27 \cdot 4}{625} = \frac{216}{625}$$

$$(b) {}_5C_2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4^2}{2} \cdot \frac{3^2 \cdot 2^3}{5^5} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 8}{625} = \frac{144}{625}$$

(c) 白が 4 回、または 5 回出れば良い。

$$\text{白が 5 回出るのは } \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{32}{5^5}$$

$$\text{白が 4 回出るのは } {}_5C_1 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{240}{5^5}$$

$$\text{求める確率は } \frac{240}{5^5} + \frac{32}{5^5} = \frac{272}{3125}$$

◀ 当たらない確率は $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ である

◀ 3^6 は $9 \times 9 \times 9$ と考えて計算するとよい。

◀ 白が 5 回でる場合の分母が 5^5 のため、約分しない。

C. 反復試行の応用

【例題 86】 コイン 1 枚を振って表か裏か記録していき、表が出た回数が 4 回になるまで振り続ける。

1. コインを 4 回振って終わる確率は **ア** である。
2. 5 回で終わるのは、4 回目までに表がちょうど **イ** 回出て、5 回目が表になる場合である。よって、その確率は **ウ** である。
3. 6 回で終わるのは、5 回目までに表がちょうど **エ** 回出て、6 回目が表になる場合である。よって、確率は **オ** である。
4. 7 回で終わる確率は **カ** である。

【解答】

1. ア: $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

2. イ: 3, ウ: 4 回目までに表が 3 回出る確率は ${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)$,

さらに 5 回目で表が出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2^8} = \frac{1}{8}$$

3. エ: 3, オ: 5 回目までに表が 3 回出る確率は ${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$,

さらに 6 回目で表が出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = 10^5 \times \frac{1}{2^8} = \frac{5}{32}$$

4. カ: ${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{1}{2^7} = \frac{5}{32}$

【練習 87: 反復試行の応用】

さいころ 1 つを振り、1 か 2 が出たら +3 点、他が出たら -2 点になるゲームを考える。

- (1) このゲームを 3 回繰り返す、4 点である確率を求めよ。
- (2) このゲームを 5 回繰り返す、0 点である確率を求めよ。

【解答】 +3 になる確率は $\frac{1}{3}$ 、-2 になる確率は $\frac{2}{3}$ である。

- (1) +3 が 2 回、-2 が 1 回出ればよいので

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{3^3} = \frac{2}{9}$$

- (2) +3 が 2 回、-2 が 3 回出ればよいので

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \cdot \frac{2^3}{3^5} = \frac{80}{243}$$

◀ 結局、何回 +3 になるかで、最終得点が決まる。

◀ +3 が 2 回出ればよいことは、次の式からも計算できる。

+3 が x 回とすると、得点は $3x + (-2)(5-x) = 5x - 10$ 点、
 $5x - 10 = 0$ を解いて $x = 2$ 。

D. (発) (展) 反復試行で複数の事象を考える

さいころを6回振って、そのうち1がちょうど2回、5以上がちょうど2回出る確率を考えてみよう。

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|--|
| 1回目 | 2回目 | 3回目 | 4回目 | 5回目 | 6回目 | | |
| 1 | 1 | 5か6 | 5か6 | 他 | 他 | ←確率は | $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2$ |
| 1 | 1 | 5か6 | 他 | 5か6 | 他 | ←確率は | $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2$ |
| | | | | | | | ↑↑↑ すべて同じ確率 |

6ヶ所に「1」を2つ、
「5か6」を2つ、「他」を2つ並べる
そのような並べ方は $\frac{6!}{2!2!2!}$ 通り

この結果、次の式で計算できる。

$$\frac{6!}{2!2!2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 3}{6^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = \frac{5}{72}$$

【(発) (展) 88 : 3つ以上の事象がある反復試行】

- ① さいころを4回振って、1がちょうど1回、2がちょうど1回出る確率を求めよ。
- ② さいころを6回振って、1も2も3も2回ずつ出る確率を求めよ。

【解答】

- ① 1が1回(確率 $\frac{1}{6}$)、2が1回(確率 $\frac{1}{6}$)、他が2回(確率 $\frac{2}{3}$)出ればよいので

$$\frac{4!}{1!1!2!} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4^2 \cdot 3 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2^2}{6 \cdot 6^3 \cdot 3^2} = \frac{4}{27}$$

② $\frac{6!}{2!2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6^6} = \frac{5}{2592}$

4. 条件付き確率 ～ 従属な試行どうしの関係

A. 条件付き確率とは

事象 A, B があり、「 A が起こった条件の下、 B が起こる確率」を記号 $P_A(B)$ で表し、条件付き確率 (conditional probability) という。

たとえば、右の表のようにまとめられるクラス内の 40 人から、1 人を無作為に選ぶとき、事象 A, B を以下とする。

A : 選ばれた人に兄弟がいる

B : 選ばれた人に姉妹がいる

| | | 兄弟 | | 計 |
|----|--------|--------|-----|----|
| | | いる (A) | いない | |
| 姉妹 | いる (B) | 4 | 7 | 11 |
| | いない | 11 | 18 | 29 |
| 計 | | 15 | 25 | 40 |

このとき、 $P_A(B)$ とは「選ばれた人に兄弟がいたとき、その人に姉妹がいる確率」である。「兄弟がいる」のは 15 人、そのうち姉妹もいるのは 4 人であるから、 $P_A(B) = \frac{4}{15}$ と分かる。

また、 $P_{\bar{A}}(B)$ は、「選ばれた人に兄弟がいないとき、その人に姉妹がいる確率」である。「兄弟がいない」のは 25 人、そのうち姉妹もいるのは 7 人であるから、 $P_{\bar{A}}(B) = \frac{7}{25}$ と分かる。

【例題 89】 上の例において、次の条件付き確率を求めなさい。

1. $P_A(\bar{B})$

2. $P_{\bar{A}}(\bar{B})$

3. $P_B(A)$

4. $P_B(\bar{A})$

5. $P_{\bar{B}}(\bar{A})$

【解答】

1. A は 15 人、そのうち \bar{B} は 11 人であるから $P_A(\bar{B}) = \frac{11}{15}$
2. \bar{A} は 25 人、そのうち \bar{B} は 18 人であるから $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{18}{25}$
3. B は 11 人、そのうち A は 4 人であるから $P_B(A) = \frac{4}{11}$
4. B は 11 人、そのうち \bar{A} は 7 人であるから $P_B(\bar{A}) = \frac{7}{11}$
5. \bar{B} は 29 人、そのうち \bar{A} は 18 人であるから $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{18}{29}$

条件付き確率の定義

全事象 U が同様に確からしいとき、「 A が起こった条件の下、 B が起こる条件付き確率」 $P_A(B)$ を

$$P_A(B) = \frac{\text{事象 } A \text{ も } B \text{ も起こる場合の数}}{\text{事象 } A \text{ が起こる場合の数}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

で定義する。ここで、 $n(A)$ は事象 A の場合の数を表す。また、 A が起こる確率 $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$ であるから

$$P_A(B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(U)}}{\frac{n(A)}{n(U)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

とも定義できる。

| | | A | | 計 |
|---|-------|---------------------|---------------------------|--------------|
| | | 起こる | 起こらない | |
| B | 起こる | $n(A \cap B)$ | $n(\bar{A} \cap B)$ | $n(B)$ |
| | 起こらない | $n(A \cap \bar{B})$ | $n(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $n(\bar{B})$ |
| 計 | | $n(A)$ | $n(\bar{A})$ | $n(U)$ |

↓↓↓すべての値を $n(U)$ で割る↓↓↓

| | | A | | 計 |
|---|-------|---------------------|---------------------------|--------------|
| | | 起こる | 起こらない | |
| B | 起こる | $P(A \cap B)$ | $P(\bar{A} \cap B)$ | $P(B)$ |
| | 起こらない | $P(A \cap \bar{B})$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(\bar{B})$ |
| 計 | | $P(A)$ | $P(\bar{A})$ | 1 |

【例題 90】 ある試験は、受験生のうち 60% が男子であった。また、合格した男子は受験生全体の 40% 合格した女子は受験生全体の 30% になった。

- 右の表の空欄を、全体に対する割合ですべて埋めなさい。
- 受験生から 1 人を無作為に選び、男子である事象を A 、合格者である事象を B とするとき、次の条件付き確率を求めよ。

- (a) $P_A(B)$ (b) $P_B(A)$ (c) $P_{\bar{A}}(B)$ (d) $P_{\bar{B}}(\bar{A})$

| | 合格 | 不合格 | 計 |
|----|----|-----|-----|
| 男子 | | | 0.6 |
| 女子 | | | |
| 計 | | | 1 |

【解答】

1. 問題文から左下になり、残りの空欄を埋めて右下のようになる。

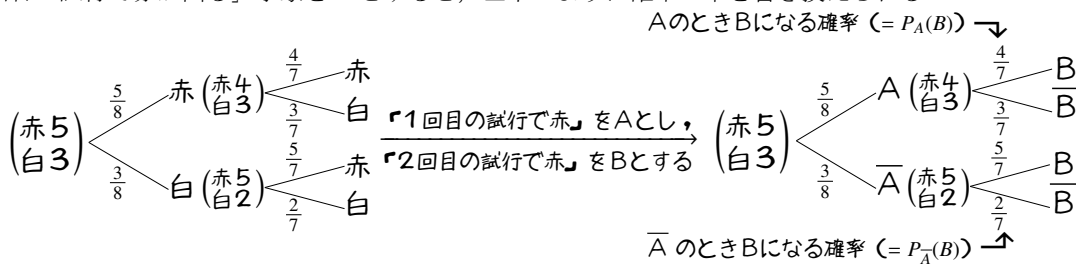
| | 合格 | 不合格 | 計 | ⇒ | 合格 | 不合格 | 計 |
|----|-----|-----|-----|---|-----|-----|-----|
| 男子 | 0.4 | | 0.6 | | 0.4 | 0.2 | 0.6 |
| 女子 | 0.3 | | | | 0.3 | 0.1 | 0.4 |
| 計 | | | 1 | | 0.7 | 0.3 | 1 |

2. (a) $P_A(B) = \frac{0.4}{0.6} = \frac{2}{3}$
 (c) $P_{\bar{A}}(B) = \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4}$

(b) $P_B(A) = \frac{0.4}{0.7} = \frac{4}{7}$
 (d) $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$

B. 確率の木と条件付き確率

p.48 で学んだように、「赤球が 5 個、白球が 3 個」入った袋から 1 個を選んで元に戻さない試行を、2 回繰り返したとき、確率の木にまとめると左下のようになる。さらに、「1 回目の試行で赤が出る」事象を A 、「2 回目の試行で赤が出る」事象を B とすると、左下のように確率の木を書き換えられる。



たとえば、 $P_A(B)$ は「1 回目は赤であった (A) ときに、2 回目は赤 (B) である」であり $\frac{4}{7}$ である。

また、 $P_{\bar{A}}(B)$ は「1 回目は赤でない (\bar{A}) ときに、2 回目は赤 (B) である」であり $\frac{5}{7}$ である。

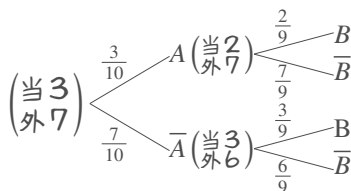
【例題 91】 当たりが 3 本、外れが 7 本入ったくじがあり、2 人が順にくじを引く。

1 人目が当たりである事象を A 、2 人目が当たりである事象を B とするとき、以下の条件付き確率を求めなさい。ただし、一度引いたくじは元に戻さない。

1. $P_A(B)$ 2. $P_A(\bar{B})$ 3. $P_{\bar{A}}(\bar{B})$

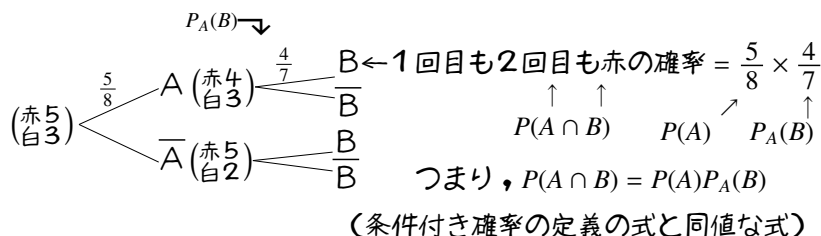
【解答】 確率の木は右のようになる。

1. $P_A(B) = \frac{2}{9}$ 2. $P_A(\bar{B}) = \frac{7}{9}$
 3. $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$



C. 乗法定理と条件付き確率

p.56の例において、事象A∩B, つまり「1回目も2回目も赤」となる確率P(A∩B)は乗法定理から $\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}$ と求められるが、これは $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ を意味する。さらに、この式は条件付き確率の定義と同値である。



乗法定理と条件付き確率

条件付き確率の定義 $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ⇔ 乗法定理 $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

特に、事象AとBが独立ならば、 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ となる ($P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = P(B)$ であるため)。

【例題 92】 事象A, Bについて、 $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.1$ であるとき、条件付き確率 $P_A(B)$, $P_B(A)$ を求めなさい。

【解答】 $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4}$
 $P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$

◀ $P(B \cap A) = P(A \cap B)$

D. いろいろな条件付き確率

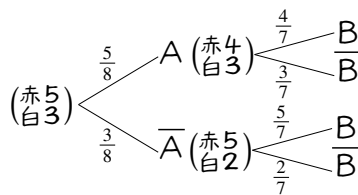
p.56の例において、確率 $P_B(A)$, つまり「2回目が赤のとき、1回目も赤であった確率」を求めてみよう。これは、 $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ で計算できる。

2人とも当たる確率P(B)は「赤→赤」「白→赤」と引く確率の和であり、前者は $\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}$, 後者は $\frac{3}{8} \times \frac{5}{7}$ である。

一方、「赤→赤」と引く確率 $P(A \cap B) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7}$ である。

以上から $P_B(A) = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}}{\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}} = \frac{5 \times 4}{5 \times 4 + 3 \times 5} = \frac{4}{7}$ となる。

↪ 分母分子に56を掛けて複分数を無くした

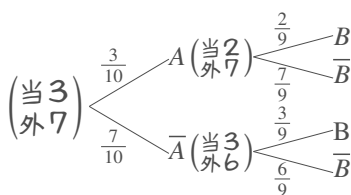


【練習 93 : 条件付き確率】

当たりが3本、外れが7本入ったくじがあり、2人が順にくじを引く。選んでくじは元に戻さない。2人目が当たったとき、1人目も当たっていた確率を求めよ。

【解答】 2人とも当たる場合のうち
 1人目も当たる確率は $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}$,
 1人目は外れた確率は $\frac{7}{10} \times \frac{3}{9}$
 である。よって、求める確率は

$\frac{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}}{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9}} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 2 + 7 \cdot 3} = \frac{2}{9}$



◀ 結局、 $\frac{(2人とも当たった)}{(2人目が当たった)}$ の確率を求めればよい。

【練習 94 : 原因の確率】

(1) A 工場では部品 P, Q, R を使って品物を作る. 各部品には色違いがあり, P は 2 個に 1 個が白, Q は 3 個に 1 個が白, R は 4 個に 1 個が白であり, 他はすべて黒である.

- (a) 部品が 1 つだけ白い品物があるとき, 白い原因が部品 P である確率を求めよ.
 (b) 部品が 1 つだけ黒い品物があるとき, 黒い原因が部品 R である確率を求めよ.

(2) B 工場では, 100 個に 1 個不良品が作られてしまう. さらに, 不良品を機械がチェックするとき, 不良品は必ず見つけ出せるものの, 100 回に 1 回, 良品を不良品と誤って判断することがある. 機械が「不良品」と判断した中に, 「良品」が含まれている確率を求めよ.

【解答】

(1) 確率の木にまとめると, 右のようになる.

(a) P だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{24}$

Q だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{24}$

R だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{24}$

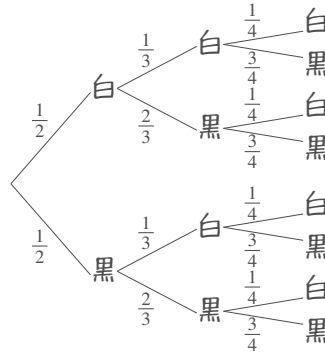
であるから $\frac{\frac{6}{24}}{\frac{6}{24} + \frac{3}{24} + \frac{2}{24}} = \frac{6}{11}$.

(b) P だけ黒は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

Q だけ黒は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{24}$

R だけ黒は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{24}$

であるから, $\frac{\frac{3}{24}}{\frac{1}{24} + \frac{2}{24} + \frac{3}{24}} = \frac{1}{2}$



←すべて白

←Pだけ白

←Qだけ白

←Rだけ白

◀ 1 つだけ白は上の 3 パターンの和である

(2) 確率の木にまとめると, 右のようになる.

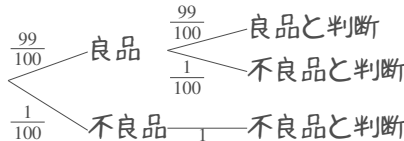
機械が「不良品」と判断するのは

実際は良品だった場合が

$$\frac{99}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{99}{10000}$$

もともと不良品だった場合が $\frac{1}{100}$ である.

つまり, $\frac{\frac{99}{10000}}{\frac{1}{100} + \frac{99}{10000}} = \frac{99}{199}$



◀ 良品を良品と判断する場合の余事象と考え, $1 - \frac{99}{100} \times \frac{99}{100} =$

$$\frac{199}{10000} \text{ でもよい.}$$

第2章 整数の性質と不定方程式



この章では、まず、約数・倍数を負の数にも広げて定義しなおし、整数の性質について学ぶ。その後、ユークリッドの互除法を学び、それを応用して1次不定方程式の解法を学ぶ。最後に、 n 進法という新しい数の表し方を学ぶ。



2.1 約数と倍数



1. 約数と倍数

高校数学では、約数・倍数が負の数であってもよい。

A. (負の数も含めた) 約数と倍数

たとえば、 $15 \div 5 = 3$ 、つまり $15 = 5 \times 3$ から、15 は 5 の倍数、5 は 15 の約数である。

同様に、 $(-15) \div 5 = -3$ 、つまり $-15 = 5 \times (-3)$ から、-15 は 5 の倍数、5 は -15 の約数と考えられる。

5 の倍数は、 $\dots, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots$ である。つまり、0 や負の整数でもよい。

15 の約数は、-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15 となる。つまり、負の整数でもよい。

割り切れる・倍数・約数

2つの整数 a, b があって、 $a = bk$ となる整数 k があるならば、 a は b で割り切れる (divisible) といい、 a は b の倍数 (multiple)、 b は a の約数 (divisor) であるという。ただし、0 の倍数・約数は考えない。

【例題 1】 以下の中から、4 の倍数を全て選びなさい。また、36 の約数を全て選びなさい。

-3, 8, -13, 18, -23, 28, 0, 1, -1

【解答】 4 の倍数は $0, \pm 4, \pm 8, \dots$ なので、**8, 28, 0**

$36 \div 0$ はなし、 $36 \div 1 = 36$ 、 $36 \div (-1) = -36$ は割り切れていることに注意して、**36 の約数は -3, 18, 1, -1**。

【練習 2：約数と倍数の拡張】

次のうち、正しい文章をすべて選べ。

- a. 0 は、どんな数の倍数でもある。
- b. 100 以下の 10 の倍数は 10 個である。
- c. 4 の正の約数は 3 つあり、負の約数も 3 つある。

【解答】

- a. どんな数も 0 倍して 0 なので、正しい。
 - b. 10 の倍数は、100, 90, \dots , 10, 0, -10, -20, \dots となって、10 個より多
- ◀ 倍数は負でもよいことに注意。

く、間違っている。

c. 4の約数は1, 2, 4, -1, -2, -4であり、正と負は3個ずつある。

以上より、正しいものはa, c.

◀一般に、正の約数と負の約数は必ず同数ある。

B. 倍数の性質の証明

たとえば「 a は7の倍数である」ことは「 $a = 7k$ (k は整数)」と言い換えられ、証明などに利用できる。

(例) 命題「整数 a, b が7の倍数ならば、 $3a + 2b$ も7の倍数である」を示せ。

(解) 仮定「整数 a, b が7の倍数」より $a = 7k, b = 7l$ とおける (k, l は整数). すると、 $3a + 2b = 21k + 14l = 7(3k + 2l)$. $3k + 2l$ は整数より、 $3a + 2b$ は7の倍数であると示された。

【例題3】 次の□に適当な式・言葉を入れて、証明を完成させなさい。

1. 命題「整数 a, b が4の倍数ならば $5a - 2b$ は4の倍数である」を示せ。

(証明) 整数 a, b が4の倍数なので $a = 4k, b = 4l$ とおける (k, l は□ア). すると、 $5a - 2b =$ □イ.

□ウは整数なので、 $5a - 2b$ は4の倍数であると示された。

2. 命題「 $a + b, a - b$ が4の倍数ならば a, b は偶数である」を示せ。

(証明) $a + b, a - b$ が4の倍数なので $a + b =$ □エ, $a - b =$ □オ とおける (k, l は整数). 連立方程

式 $\begin{cases} a + b = \square\text{エ} \\ a - b = \square\text{オ} \end{cases}$ を解くと、 $a =$ □カ, $b =$ □キ である. □ク, □ケは整数なので、 a, b は偶数であると示された。

【解答】

1. a, b が4の倍数なので $a = 4k, b = 4l$ とおける (k, l は整数_(ア)). すると、 $5a - 2b = 20k - 8l = \underline{4(5k - 2l)}$ _(イ). $\underline{5k - 2l}$ _(ウ)は整数なので、 $5a - 2b$ は4の倍数であることが示された。

2. $a + b, a - b$ が4の倍数なので $a + b = \underline{4k}$ _(エ), $a - b = \underline{4l}$ _(オ) とおける (k, l は整数). すると

$$\begin{array}{r} a + b = 4k \\ +) a - b = 4l \\ \hline 2a = 4(k + l) \end{array} \quad \begin{array}{r} a + b = 4k \\ -) a - b = 4l \\ \hline 2b = 4(k - l) \end{array}$$

なので、 $a = \underline{2(k + l)}$ _(カ), $b = \underline{2(k - l)}$ _(キ) である. $\underline{k + l}$ _(ク), $\underline{k - l}$ _(ケ)は整数なので、 a, b は偶数であると示された。

【練習4：倍数であることの証明】

(1) a, b が5の倍数ならば、 $4a + 2b$ は10の倍数であることを示せ。

(2) a, b が3の倍数ならば、 $a^2 - 3b$ が9の倍数であることを示せ。

【解答】

(1) $a = 5k, b = 5l$ とおく (k, l は整数) と、 $4a + 2b = 20k + 10l = 10(2k + l)$ である. $2k + l$ は整数なので、 $4a + 2b$ は10の倍数であると示された。

(2) $a = 3k, b = 3l$ とおく (k, l は整数) と、 $a^2 - 3b = 9k^2 - 9l = 9(k^2 - l)$ である. $k^2 - l$ は整数なので、 $a^2 - 3b$ は9の倍数であると示された。

2. いくつかの倍数の判定法

A. 2の倍数, 5の倍数

2の倍数, 5の倍数は, 一の位から判定できる.

たとえば, 一の位が2の倍数である124, -648, 23990, は2の倍数であり, 一の位が5の倍数である485, 23990, -83025は5の倍数である.

$$\begin{array}{l}
 \underline{124} \quad \leftarrow 2 \text{の倍数} \rightarrow \quad \underline{23990} \\
 \text{下1桁の4は2の倍数} \qquad \qquad \text{下1桁の0は2の倍数} \\
 \underline{23990} \quad \leftarrow 5 \text{の倍数} \rightarrow \quad \underline{-83025} \\
 \text{下1桁の0は5の倍数} \qquad \qquad \text{下1桁の5は5の倍数}
 \end{array}$$

B. 4の倍数, 8の倍数, 25の倍数

4の倍数, 25の倍数は, 下2桁から判定できる.

たとえば, 下2桁が4の倍数である124, -648 23900は4の倍数であり, 下2桁が25の倍数である475, 23900, -83025は25の倍数である.

また, 8の倍数は下3桁から判定できる*1. たとえば, 567008, -456784は8の倍数である.

$$\begin{array}{l}
 \underline{124} \quad \leftarrow 4 \text{の倍数} \rightarrow \quad \underline{23900} \\
 \text{下2桁の24は4の倍数} \qquad \qquad \text{下2桁の00は4の倍数} \\
 \underline{23900} \quad \leftarrow 25 \text{の倍数} \rightarrow \quad \underline{-83025} \\
 \text{下2桁の00は25の倍数} \qquad \qquad \text{下2桁の25は25の倍数} \\
 \underline{567008} \quad \leftarrow 8 \text{の倍数} \rightarrow \quad \underline{-456784} \\
 \text{下3桁の008は8の倍数} \qquad \qquad \text{下3桁の784は8の倍数}
 \end{array}$$

【例題5】 2の倍数, 4の倍数, 8の倍数, 5の倍数, 25の倍数をそれぞれ選び, 全て答えなさい.

- a) 5784 b) 8975 c) -134654 d) -4500 e) 35468004 f) 1234567890

【解答】 下1桁が2の倍数である, a), c), d), e), f) が2の倍数,

下1桁が5の倍数である, b), d), f) が5の倍数.

下2桁を4で割ると, a) $84 \div 4 = 21$ で割り切れる, b) は余る, c) $54 \div 4$ は余る, d), e) は割り切れる, f) $90 \div 4$ は余る. **4の倍数は a), d), e).**

下2桁を25で割ると, a) は余る, b) $75 \div 25 = 3$, c) は余る, d) $0 \div 25 = 0$, e) は余る, f) $90 \div 25$ は余る. **25の倍数は b), d).**

下3桁を8で割ると, a) $784 \div 8 = 98$ で割り切れる, b), c) は余る, d) $500 \div 8$ は余る, e), f) も余る. **8の倍数は a).**

◀実際には, 4の倍数である a), d), e) の中から探せばよい.

C. 3の倍数, 9の倍数

3の倍数や9の倍数は, すべての位の数字を足して判定できる.

たとえば, $3+4+6+5=18$ は3でも9でも割り切れるので, -3465, 3465は3の倍数でも9の倍数でもある.

たとえば, $1+2+4+5=12$ は3の倍数であるが9の倍数でないので, -1245, 1245は3の倍数であるが9の倍数でない.

たとえば, $8+7+4+4=22$ は3の倍数でも9の倍数でもないので, -8744, 8744は3の倍数でも9の倍数でもない.

$$\underline{3465}, \underline{-3465} \quad \leftarrow 3 \text{の倍数} \& 9 \text{の倍数} \\
 3+4+6+5=18 \text{ は3の倍数} \& 9 \text{の倍数}$$

$$\underline{1245}, \underline{-1245} \quad \leftarrow 3 \text{の倍数} \\
 1+2+4+5=12 \text{ は3の倍数 (9で割れない)}$$

$$\underline{8744}, \underline{-8744} \\
 8+7+4+4=22 \text{ は3でも9でも割れない}$$

【例題6】 123456, -111111111は3の倍数か, 9の倍数か.

【解答】 $1+2+3+4+5+6=21$ は3の倍数だが9の倍数でない, つまり

*1 $2^3=8$ であるため. 同様に, $5^3=125$ の倍数は下3桁だけ調べればよく, $2^4=16$ の倍数は下4桁だけ調べればよい.

123456 は 3 の倍数だが 9 の倍数でない.

-111111111 は各位の和が 9 になり, 3 の倍数でも 9 の倍数でもある.

【練習 7: 倍数の判定法】

次の条件を満たすよう, □に当てはまる数をすべて答えよ.

- (1) $987□$ が 2 の倍数 (2) $987□$ が 5 の倍数 (3) $987□$ が 4 の倍数
(4) $123□5$ が 9 の倍数 (5) $11□11$ が 3 の倍数 (6) $25□2$ が 9 の倍数

【解答】

- (1) □ = 0, 2, 4, 6, 8. (2) □ = 0, 5.
(3) 下 2 桁 $7□$ が 4 の倍数ならよいので, □ = 2, 6.
(4) $1 + 2 + 3 + □ + 5 = 11 + □$ が 9 の倍数となるのは, □ = 7.
(5) $1 + 1 + □ + 1 + 1 = 4 + □$ が 3 の倍数となるのは, □ = 2, 5, 8.
(6) $2 + 5 + □ + 2 = 9 + □$ が 9 の倍数となるのは, □ = 0, 9.

倍数の判定法のまとめ

- 整数 n について「 n が 2 の倍数」 \iff 「 n の一の位が 2 の倍数 (0, 2, 4, 6, 8)」
- 整数 n について「 n が 5 の倍数」 \iff 「 n の一の位が 5 の倍数 (0, 5)」
- 整数 n について「 n が 4 の倍数」 \iff 「 n の下 2 桁が 4 の倍数 (00, 04, 08, 12, \dots , 96)」
- 整数 n について「 n が 25 の倍数」 \iff 「 n の下 2 桁が 25 の倍数 (00, 25, 50, 75)」
- 整数 n について「 n が 8 の倍数」 \iff 「 n の下 3 桁が 8 の倍数 (000, 008, 016, \dots , 992)」
- 整数 n について「 n が 3 の倍数」 \iff 「 n のすべての位の和が 3 の倍数」
- 整数 n について「 n が 9 の倍数」 \iff 「 n のすべての位の和が 9 の倍数」

D. 倍数の判定法の証明~その 1~

2 の倍数に, 2 の倍数を足しても引いても, やはり 2 の倍数である.

これは, 2 以外の倍数でも成り立つ. この事実を用いて, 倍数の判定法を証明しよう.

(問) 2 の倍数の判定法, 5 の倍数の判定法を示せ.

(証明) 整数 n の一の位が a ならば $n = 10A + a$ (..... ①) と表せる (A は整数).

$10A$ は 2 の倍数なので, ①より a が 2 の倍数ならば n は 2 の倍数,

$10A$ は 5 の倍数なので, ①より a が 5 の倍数ならば n は 5 の倍数である.

逆に*2, ①から $a = n - 10A$ (..... ②) である.

$10A$ は 2 の倍数なので, ②より n が 2 の倍数ならば a は 2 の倍数,

$10A$ は 5 の倍数なので, ②より n が 5 の倍数ならば a は 5 の倍数である.

*2 この行以降は, 「また, ①から $a = n - 10A$ なので, 逆も同様にして正しい」でもよい.

【練習 8 : 倍数の判定法の証明～その 1～】

- (1) 整数 n の下 2 桁が a ならば, 整数 A を用い $n = 100A + a$ と表せる. これを用いて, 4 の倍数, 25 の倍数の判定法を証明しなさい.
 (2) 8 の倍数の判定法を証明しなさい.

【解答】

- (1) $n = 100A + a$ (………… ①) (A は整数) について
 $100A$ は 4 の倍数なので, ①より a が 4 の倍数ならば n は 4 の倍数,
 $100A$ は 25 の倍数なので, ①より a が 25 の倍数ならば n は 25 の倍数.
 また, $a = n - 100A$ について,
 $100A$ は 4 の倍数なので, n が 4 の倍数ならば a は 4 の倍数,
 $100A$ は 25 の倍数なので, n が 25 の倍数ならば a は 25 の倍数である.
 (2) 整数 n の下 3 桁が a ならば $n = 1000A + a$ (………… ②) と表せる (A は整数). $1000A$ は 8 の倍数なので, ②より a が 8 の倍数ならば n は 8 の倍数である.
 逆に, $a = n - 1000A$ について, $1000A$ は 8 の倍数なので, n が 8 の倍数ならば a は 8 の倍数である.

◀この行以降は「また, ①から $a = n - 100A$ なので, 逆も同様にして正しい。」でもよい.

E. 倍数の判定法の証明～その 2～

(問) 3 桁の整数について, 3 の倍数の判定法を示せ.

(証明) 3 桁の整数 n は, 0 から 9 の整数 a, b, c を用いて $n = 100a + 10b + c$ と表せる. すると

$$n = (99a + a) + (9b + b) + c = 99a + 9b + a + b + c = 3(33a + 3b) + (a + b + c) \quad \dots\dots\dots ③$$

$3(33a + 3b)$ は 3 の倍数なので, ③より各位の和 $a + b + c$ が 3 の倍数ならば n も 3 の倍数である.

逆に*3, ③から $a + b + c = n - 9(11a + b)$ (………… ④) である.

$9(11a + b)$ は 3 の倍数なので, ④より n が 3 の倍数ならば各位の和 $a + b + c$ も 3 の倍数であり,

以上から, n が 3 の倍数であることと, 各位の和 $a + b + c$ が 3 の倍数であることは同値である.

【発展 9 : 倍数の判定法の証明～その 2～】

4 桁の整数について, 9 の倍数の判定法を証明しなさい.

【解答】 4 桁の整数 n は, 0 から 9 の整数 a, b, c, d を用いて $n = 1000a + 100b + 10c + d$ と表せる. すると

$$\begin{aligned} n &= (999a + a) + (99b + b) + (9c + c) + d \\ &= 9(111a + 11b + c) + (a + b + c + d) \quad \dots\dots\dots ① \end{aligned}$$

$9(111a + 11b + c)$ は 9 の倍数なので, ①より各位の和 $a + b + c + d$ が 9 の倍数ならば n も 9 の倍数である.

逆に, ①から $a + b + c + d = n - 9(111a + 11b + c)$ なので, n が 9 の倍数ならば $a + b + c + d$ は 9 の倍数である.

*3 「また, ③から $a + b + c = n - 9(11a + b)$ なので, 逆も同様にして正しい」でもよい.

3. 約数の性質～素因数分解・約数の個数

「504の約数の個数」は、時間さえかければ小学生でも求められる。しかし、ここで学ぶ方法を使うと、ずっと速く求められ、整数の性質の理解も深まる。

A. 素数

2以上の自然数 p の正の約数が 1, p だけの時, p を素数 (prime number) という。1 は素数ではない*4。

B. 素因数分解

2以上の自然数を、素数だけの積で表すことを素因数分解 (prime factorization) と言い, n の素因数分解に含まれる素数を n の素因数 (prime factor) と言う。たとえば, $24 = 2^3 \cdot 3$ と素因数分解でき, 24 の素因数は 2, 3 である。どんな数の素因数分解も, 必ず 1 通りに定まる。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)24} \\ 2 \overline{)12} \\ 2 \overline{)6} \\ \quad 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \overline{)75} \\ 5 \overline{)15} \\ \quad 3 \end{array}$$

$$24 = 2^3 \times 3 \qquad 75 = 5^2 \times 3$$

素因数分解するには, 右のように割り算をしていくとよい。

【例題 10】 42, 60, 72 を素因数分解しなさい。

【解答】 $42 = 2 \times 3 \times 7$, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $72 = 2^3 \times 3^2$

C. 素因数分解と倍数

素因数の指数から, 倍数かどうかを考えよう。

たとえば, $24 = 2^3 \cdot 3$ と素因数分解できる。

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ や $672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ のように, 2 の指数が 3 以上で 3 の指数が 1 以上の数は, 24 の倍数である。

一方, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $320 = 2^6 \cdot 5$ などの数は, 24 の倍数でない。

$$\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 72 = 2^3 \cdot 3 \cdot 3 \quad \leftarrow 24 \text{ の倍数} \\ 672 = 2^3 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 7 \quad \leftarrow 24 \text{ の倍数} \\ 36 = 2^2 \cdot 3 \cdot 3 \quad \leftarrow 2 \text{ が足りない} \\ 320 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 5 \quad \leftarrow 3 \text{ が足りない} \end{array}$$

【例題 11】 5 つの数 $2^5 \cdot 3^2$, $2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $2^4 \cdot 3 \cdot 7$, 2^5 の中から, 24 の倍数, 21 の倍数をすべて選びなさい。

【解答】 $24 = 2^3 \cdot 3$ なので, 24 の倍数は, 2 の指数が 3 以上, 3 の指数が 1 以上ならよい。つまり, 24 の倍数は $2^5 \cdot 3^2$, $2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $2^4 \cdot 3 \cdot 7$ 。

$21 = 3 \cdot 7$ なので, 21 の倍数は, 3 の指数と 7 の指数が 1 以上ならよい。つまり, 21 の倍数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $2^4 \cdot 3 \cdot 7$ 。

D. 素因数分解と約数

約数かどうか, 指数の値からも判断できる。

たとえば, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ と素因数分解できる。 $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ のように, $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ ($a = 0, 1, 2, 3$, $b = 0, 1, 2$, $c = 0, 1$) は, 504 の約数である。

一方, $48 = 2^4 \cdot 3$, $49 = 7^2$ のような数は, 504 の約数でない。

$$\begin{array}{l} 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \\ 8 = 2^3 \quad \leftarrow 504 \text{ の約数} \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \quad \leftarrow 504 \text{ の約数} \\ 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \quad \leftarrow 504 \text{ の約数} \\ 48 = 2^4 \cdot 3 \quad \leftarrow 2 \text{ が多い} \\ 49 = 7^2 \quad \leftarrow 7 \text{ が多い} \end{array}$$

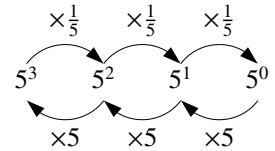
*4 1 を素数にしてしまうと, 素因数分解が無限通りにできてしまう。「素数とは, 正の約数が 2 個の数」と覚えてもよい。

【例題 12】 5つの数 $2^5 \cdot 3^2$, $2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $2^4 \cdot 3 \cdot 7$, 2^5 の中から, 504 の約数, 672 の約数をすべて選びなさい.

【解答】 $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ なので, 504 の約数は, 2 の指数が 3 以下, 3 の指数が 2 以下, 7 の指数が 1 以下に限る. つまり, 504 の約数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$.
 $672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ なので, 672 の約数は, 2 の指数が 5 以下, 3 の指数が 1 以下, 7 の指数が 1 以下ならよい. つまり, 672 の約数は $2^4 \cdot 3 \cdot 7$, 2^5 .

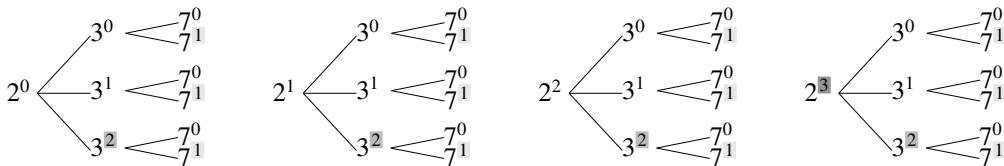
E. 0 乗

$a \neq 0$ のとき, $a^0 = 1$ と定める. これは, 右のような規則から定められる.



F. 正の約数の個数

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ の正の約数は, 次のような樹形図で表せる.



2 の指数は **3** + 1 種類, 3 の指数は **2** + 1 種類, 7 の指数は **1** + 1 種類ある.
 結果, 約数の個数は $(\mathbf{3} + 1)(\mathbf{2} + 1)(\mathbf{1} + 1) = 24$ 個になる.

「指数部分に 1 ずつ足して掛け合わせると, 正の約数の個数になる」と理解するとよい.

正の約数の個数

n を 2 以上の自然数とする.

- (1) n の素因数分解が $n = p^a$ ならば, n の正の約数は $a + 1$ 個である.
- (2) n の素因数分解が $n = p^a q^b$ ならば, n の正の約数は $(a + 1)(b + 1)$ 個である.
- (3) n の素因数分解が $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$ ならば, n の正の約数は $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_m + 1)$ 個である.

【例題 13】 次の整数の, 正の約数の個数を求めよ.

1. 200 2. 294 3. 396 4. 288

【解答】

1. $2 \overline{) 200}$ $200 = 2^3 \cdot 5^2$ より
 $2 \overline{) 100}$ $(3 + 1)(2 + 1)$
 $2 \overline{) 50}$
 $5 \overline{) 25}$ $= 4 \cdot 3 = \mathbf{12}$ 個
2. $2 \overline{) 294}$ $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$ より
 $3 \overline{) 147}$ $(1 + 1)(1 + 1)(2 + 1)$
 $7 \overline{) 49}$ $= 2 \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{12}$ 個
3. $2 \overline{) 396}$ $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$ より
 $2 \overline{) 198}$ $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1)$
 $3 \overline{) 99}$
 $3 \overline{) 33}$ $= 3 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{18}$ 個
4. $2 \overline{) 288}$ $288 = 2^3 \cdot (2 \cdot 3)^2$
 $2 \overline{) 144}$ $= 2^5 \cdot 3^2$ より
 $2 \overline{) 72}$
 $6 \overline{) 36}$ $(5 + 1)(2 + 1)$
 6 $= 6 \cdot 3 = \mathbf{18}$ 個

【練習 14：約数の個数から、元の数を求める～その 1～】

自然数 n は、素因数として 2 と 3 を持っている。

- (1) 正の約数の個数が 9 個であるような、 n の値を全て求めよ。
- (2) 正の約数の個数が 10 個であるような、 n の値を全て求めよ。
- (3) 正の約数の個数が 12 個であるような、 n の値を全て求めよ。

【解答】

- (1) $9 = 3 \cdot 3$ なので、約数の個数は $(2+1)(2+1)$ 個と求められなければならない。つまり、 $n = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ 。
- (2) $10 = 2 \cdot 5$ なので、約数の個数は $(1+1)(4+1)$ 個と求められなければならない。つまり、 $n = 2^1 \cdot 3^4, 3^1 \cdot 2^4$ のどちらかであり、 $n = 162, 48$ 。
- (3) $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ なので、約数の個数は $(1+1)(5+1)$ 個か、 $(2+1)(3+1)$ 個と求められなければならない。つまり、 $n = 2 \cdot 3^5, 3 \cdot 2^5, 2^2 \cdot 3^3, 3^2 \cdot 2^3$ のどれかであり、 $n = 486, 96, 108, 72$ 。

◀ $n = p^8$ でも正の約数は $8+1=9$ 個だが、素因数を 2 種類持つことができない。

◀ $(1+1)(5+1)$ 個なら
 $n = 2 \cdot 3^5, 3 \cdot 2^5,$
 $(2+1)(3+1)$ 個なら
 $n = 2^2 \cdot 3^3, 3^2 \cdot 2^3$

【例題 15：約数の個数から、元の数を求める～その 2～】

- ① 50 以下の自然数 n のうち、正の約数の個数が 6 個であるものを全て求めよ。
- ② 200 以下の奇数 n のうち、正の約数の個数が 8 個であるものを全て求めよ。

【解答】

- ① 素因数が 1 種類の時、 $n = 2^5, 3^5, \dots$ のどれかである。 $n \leq 50$ より、 $n = 2^5 = 32$ のみ適する。
 素因数が 2 種類の時、 $6 = 3 \cdot 2 = (2+1)(1+1)$ より $n = p^2 q$ とおける。
 - i) $p = 2$ のとき、 $n = 4q$ より $q = 3, 5, 7, 11$ が適するが、 $q = 13$ のとき $n = 2^2 \cdot 13 = 52 > 50$ より不適。
 - ii) $p = 3$ のとき、 $n = 9q$ より $q = 2, 5$ が適するが、 $q = 7$ のとき $n = 3^2 \cdot 7 = 63 > 50$ より不適。
 - iii) $p = 5$ のとき、 $q = 2$ のとき $n = 5^2 \cdot 2 = 50$ より適し、他は不適。
 - iv) $p > 5$ ではすべて $n > 50$ となる。
 以上より、 $n = 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 11, 3^2 \cdot 2, 3^2 \cdot 5, 5^2 \cdot 2,$
 つまり $n = 12, 20, 28, 44, 18, 45, 50$ 。
- ② 素因数が 1 種類の時、 n は奇数より $n = 3^7, 5^7, \dots$ のどれかである。 $n \leq 200$ より、すべて不適。
 素因数が 2 種類の時、 $8 = 4 \cdot 2 = (3+1)(1+1)$ より $n = p^3 q$ とおける。
 - i) $p = 2$ ならば n は偶数となって不適。
 - ii) $p = 3$ のとき、 $n = 27q$ より $q = 5, 7$ が適するが、 $q = 11$ のとき $n = 3^3 \cdot 11 = 297 > 200$ より $q \geq 11$ では不適。
 - iii) $p = 5$ のとき、 $q = 3$ のとき $n = 5^3 \cdot 3 = 375 > 200$ より不適。
 - iv) $p > 5$ では $p^3 > 200$ となり不適。
 素因数が 3 種類の時、 $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = (1+1)(1+1)(1+1)$ より $n = pqr$ ($p < q < r$) とおける。
 - i) $p = 3, q = 5$ のとき、 $n = 15r$ より $r = 7, 11, 13$ は適するが、 $r = 17$

のとき $n = 15 \cdot 17 = 255 > 200$ より $r \geq 17$ では適さない.

ii) $p = 3, q = 7$ のとき, $r = 11$ のとき $n = 231 > 200$ より不適.

iii) $p > 3$ では, 最小でも $n = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385 > 200$ より不適.

以上より, $n = 3^3 \cdot 5, 3^3 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 11, 3 \cdot 5 \cdot 13$ より
 $n = 135, 189, 105, 165, 195.$

4. 最大公約数と最小公倍数

A. 公倍数・最小公倍数

自然数 48 は, 6 の倍数でも 8 の倍数でもあるから, 48 を 6, 8 の公倍数といった.

同様に, 整数 m が, a の倍数でも b の倍数でもあるとき, m を a, b の公倍数 (common multiple) という. たとえば, -48 も 6, 8 の公倍数である. また, 最小公倍数 (least common multiple) *5 は最小の正の公倍数と定める. 6, 8 の最小公倍数はやはり 24 である.

B. 公約数・最大公約数

整数 a, b について, 整数 d が a の約数でも b の約数でもあるとき, d を a, b の公約数 (common divisor) といい, 最大の公約数を最大公約数 (greatest common divisor) という*6.

たとえば, 6, 8 の公約数は 2, 1, $-1, -2$ であり, 最大公約数は 2 である.

【例題 16】

- $-42, -24, -10, 2, 12, 63$ の中から, 2 と 3 の公倍数, 3 と 7 の公倍数をすべて選べ.
- $-12, -7, -3, 2, 9, 14$ の中から, 18 と 24 の公約数, 42 と 56 の公約数をすべて選べ.

【解答】

- 2 と 3 の公倍数は $-42, -24, 12$, 3 と 7 の公倍数は $-42, 63$
- 18 と 24 の公約数は $-3, 2$, 42 と 56 の公約数は $-7, 2, 14$

C. 約数と倍数の関係

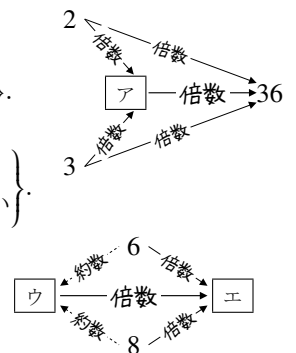
【例題 17】 次の文章から正しい言葉を選び, \square に適する値を入れなさい.

1. 36 は 2 でも 3 でも $\left\{ \begin{array}{l} \text{割りきれ} \\ \text{る} \end{array} \right\}$ ので, $2 \times 3 = \square$ でも $\left\{ \begin{array}{l} \text{割りきれ} \\ \text{る} \end{array} \right\}$.

60 は 3 でも 5 でも $\left\{ \begin{array}{l} \text{割りきれ} \\ \text{る} \end{array} \right\}$ ので, $3 \times 5 = \square$ でも $\left\{ \begin{array}{l} \text{割りきれ} \\ \text{る} \end{array} \right\}$.

2. 6 と 8 の最大公約数は \square , 6 と 8 の最小公倍数は \square .

最小公倍数は, 最大公約数の $\left\{ \begin{array}{l} \text{倍数} \\ \text{約数} \end{array} \right\}$ になっている.



【解答】

*5 しばしば, 頭文字をとって"lcm"と略される. また, 2 数 a, b の最小公倍数を $\text{lcm}(a, b)$ と表すこともある.

*6 しばしば, 頭文字をとって"gcd"と略される. また, 2 数 a, b の最大公約数を $\text{gcd}(a, b)$ と表すこともある.

- 36 は 2 でも 3 でも割り切れるので、 $2 \times 3 = \underline{6}$ _(ア) でも割り切れる。
60 は 3 でも 5 でも割り切れるので、 $3 \times 5 = \underline{15}$ _(イ) でも割り切れる。
- 6 と 8 の最大公約数は $\underline{2}$ _(ウ)、6 と 8 の最小公倍数は $\underline{24}$ _(エ)、最小公倍数は、最大公約数の倍数になっている。



- 「ある数」の約数を掛け合わせても、やっぱりもとの「ある数」の約数になる。
- 「ある数」の倍数の倍数は、やっぱりもとの「ある数」の倍数になる。

D. 互いに素

整数 a, b について、 a, b の最大公約数が 1 のとき、 a, b は互いに素 (relatively prime) という。

【例題 18】 次のうち、互いに素な 2 数の組をすべて答えなさい。

- a) 14, 21 b) 23, 25 c) 16, 35 d) 45, 51

【解答】 a) は最大公約数 7, d) は最大公約数 3. 互いに素は b), c).

E. 素因数分解と最小公倍数

たとえば、168 と 252 の公倍数を考えよう。それぞれ素因数分解して、右のようになる。

168 と 252 の公倍数は 2^3 の倍数でないといけない。

そうでないと、 2^3 を含む 168 の、倍数にならない。

168 と 252 の公倍数は 3^2 の倍数でないといけない。

そうでないと、 3^2 を含む 252 の、倍数にならない。

7 についても同様に考えて、168 と 252 の最小公倍数は $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ と分かる。

公倍数は $2^3, 2^4, \dots$ が必要
 公倍数は $3^2, 3^3, \dots$ が必要
 公倍数は $7, 7^2, \dots$ が必要
 $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$
 $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$
 $\rightarrow 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ が最小公倍数

【例題 19】 次の に当てはまる、もっともふさわしい数値を答えなさい。

495 と 297 は、素因数分解すると $495 = \text{ア}$, $297 = \text{イ}$ となる。

まず、495 と 297 の公倍数は 3ウ の倍数でないといけない。そうでないと、 エ の倍数にならない。

また、495 と 297 の公倍数は 5オ の倍数でないといけない。そうでないと、 カ の倍数にならない。

同様に、495 と 297 の公倍数は 11キ の倍数でないといけない。

以上から、495 と 297 の最小公倍数は、 $3 \text{ク} \cdot 5 \text{ケ} \cdot 11 \text{コ}$ であると分かる。

【解答】 ア: $495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, イ: $297 = 3^3 \cdot 11$,

ウ: 3, エ: 297, オ: 1, カ: 495, キ: 1

ク: 3, ケ: 1, コ: 1

◀ 495 の倍数は 3^2 を含み、297 の倍数は 3^3 を含む。そのため、公倍数は 3^3 の倍数でないといけない、297 の倍数にならない。

F. 素因数分解と最大公約数

たとえば、168 と 252 の公約数について考えよう。
それぞれ素因数分解して、右ようになる。

168 と 252 のどちらの約数にもなるには、 $2^0, 2^1, 2^2$ しか含んではいけない。たとえば、 2^3 を含む数は 252 の約数にならない。

同様に、168 と 252 の公約数は、 $3^0, 3^1$ しか含まない。たとえば、 3^2 を含む数は 168 の約数にならない。

7 についても同様に考えて、168 と 252 の最大公約数は $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ と分かる。

大きな数、たとえば 6179 と 2923 の最大公約数を求めるには p.85 で学ぶユークリッドの互除法を用いる。

公約数は $2^0, 2^1, 2^2$ のみ含む
公約数は $3^0, 3^1$ のみ含む
公約数は $7^0, 7^1$ のみ含む

$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$
 $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

→ $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ が最大公約数

【例題 20】 次の に当てはまる、もっともふさわしい数値を答えなさい。

495 と 297 は、素因数分解すると $495 = \text{ア}$, $297 = \text{イ}$ となる。

まず、495 と 297 の公約数は、3 の指数が のいずれかでないといけない。

また、495 と 297 の公約数は、5 の指数が のいずれかでないといけない。

同様に、495 と 297 の公約数は、11 の指数が のいずれかでないといけない。

以上から、495 と 297 の最大公約数は、 $3^{\text{カ}} \cdot 5^{\text{キ}} \cdot 11^{\text{ク}}$ であると分かる。

【解答】 ア : $495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, イ : $297 = 3^3 \cdot 11$,

ウ : 0, 1, 2, エ : 0, オ : 0, 1,

カ : 2, キ : 0, ク : 1

◀ 495 の倍数は 3^2 を含み、297 の倍数は 3^3 を含む。そのため、公約数は 3^3 を含んではいけない。

【練習 21 : 素因数分解と最小公倍数・最大公約数】

(1) 252 と 168 をそれぞれ素因数分解しなさい。

(2) 252 と 168 の最小公倍数を求めよ。答えは素因数分解された形でよい。

(3) 252 と 168 の最大公約数と、正の公約数の個数を求めよ。最大公約数は素因数分解された形でよい。

(4) 252, 168, 240 の最小公倍数と最大公約数を求めよ。答えは素因数分解された形でよい。

【解答】

(1) $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

(2) 公倍数は、2 の指数は 3 以上、3 の指数は 2 以上、7 の指数は 1 以上と分
かり、最小公倍数は $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ 。

(3) 公約数は、2 の指数は 2 以下、3 の指数は 1 以下、7 の指数は 1 以下と分
かり、最大公約数は $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ 。正の公約数は、 $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ の正の約数なので、
 $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$ 個。

(4) $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ から

公倍数は、2 の指数は 4 以上、3 の指数は 2 以上、5 と 7 の指数は 1 以上
となるので最小公倍数は $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 。公約数は、2 の指数は 2 以下、3
の指数は 1 以下となり、最大公約数は $2^2 \cdot 3$ 。

◀ 『正の約数の個数』(p.65)

【練習 22：最小公倍数からの逆算】

150 と n の最小公倍数が 900 であるような、自然数 n の値を全て求めよ。

【解答】 $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ である. $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ とおく.

2 の指数について、1 と a のうち最大が 2 となるので、 $a = 2$.

3 の指数について、1 と b のうち最大が 2 となるので、 $b = 2$.

5 の指数について、2 と c のうち最大が 2 となるので、 $c = 0, 1, 2$.

以上より、 $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 36, 180, 900$

5. 約数と倍数に関する種々の問題

A. 2 数の最大公約数・最小公倍数の性質

たとえば、 $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ と $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ について、下のようにとまとめられる。

ここから、まず最大公約数 $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ と分かる。これを g とお

くと、最小公倍数は $g \cdot 2 \cdot 3 = 6g$ になる。

また、 $168 \cdot 252$ は最大公約数・最小公倍数の積 $g \cdot 6g$ に等し

いと分かる。

$$\begin{array}{l}
 \swarrow \text{最小公倍数} = g \cdot 2 \cdot 3 \\
 168 = \underbrace{2^2 \cdot 3 \cdot 7}_{g} \cdot 2 = 2g \\
 252 = \underbrace{2^2 \cdot 3 \cdot 7}_{g} \cdot 3 = 3g \\
 \nwarrow \text{最大公約数} (= g \text{ とおく})
 \end{array}$$

2 数の最小公倍数・最大公約数の性質

a, b を自然数とする。2 数 a, b の最大公約数を g 、最小公倍数を d とする。

- $a = gA, b = gB$ としたとき、2 数 a, b の最小公倍数 $d = gAB$ である。
- $gd = ab$ である。つまり、2 数 a, b の最小公倍数・最大公約数の積は、積 ab に等しい。

(証明) 最大公約数の定義より $a = gA, b = gB$ について、 A, B は互いに素である。

互いに素な 2 数 A, B の最小公倍数は AB なので、 gA, gB の最小公倍数は gAB であり、 a, b の最小公倍数は $d = gAB$ となり 1. が示された。

2 数の最小公倍数・最大公約数の積は $g \times (gAB) = gA \times gB = ab$ となるので 2. も示された。

B. 最大公約数・最小公倍数からもとの 2 数を求める

上の性質を用いて、次のような問題を解くことができる。

(問) 最小公倍数が 630、最大公約数が 14 となる 2 つの自然数 $a, b (a < b)$ の組をすべて求めよ。

(解) 最大公約数が 14 なので、 $a = 14A, b = 14B (A, B$ は互いに素で $A < B)$ とおけて、最小公倍数は $14AB$ になる。よって $14AB = 630$ から $AB = 45$ 。

$A < B$ より $(A, B) = (1, 45), (3, 15), (5, 9)$ であるが、 A, B は互いに素より $(A, B) = (3, 15)$ は不適。

$a = 14A, b = 14B$ より、 $(a, b) = (14, 630), (70, 126)$ が満たす。

【例題 23】 次の条件を満たす自然数 a, b をすべて求めよ。ただし, $a < b$ とする。

1. 最大公約数 6, 最小公倍数 120

2. 最大公約数 4, 最小公倍数 240

【解答】

1. 最大公約数が 6 なので, $a = 6A, b = 6B$ (A, B は互いに素で $A < B$) とおけて, 最小公倍数は $6AB$ になる。よって $6AB = 120$ から $AB = 20$ 。

$A < B$ より $(A, B) = (1, 20), (2, 10), (4, 5)$ であるが, A, B は互いに素より $(A, B) = (1, 20), (4, 5)$ のみ適する。

よって, $(a, b) = (6, 120), (24, 30)$ が満たす。

2. 最大公約数が 4 なので, $a = 4A, b = 4B$ (A, B は互いに素で $A < B$) とおけて, 最小公倍数は $4AB$ になる。よって $4AB = 240$ から $AB = 60$ 。

$A < B$ より $(A, B) = (1, 60), (2, 30), (3, 20), (4, 15), (5, 12), (6, 10)$ であるが, A, B は互いに素より, 適するのは,

$(A, B) = (1, 60), (3, 20), (4, 15), (5, 12)$ 。

よって, $(a, b) = (4, 240), (12, 80), (16, 60), (20, 48)$ 。

◀ $(A, B) = (1, 20)$ のとき,
 $a = 6, b = 6 \cdot 20 = 120$.
 $(A, B) = (4, 5)$ のとき,
 $a = 6 \cdot 4 = 24, b = 6 \cdot 5 = 30$.

C. 2数の和や差と, 最大公約数・最小公倍数

【練習 24 : 2数の和や差】

次の条件を満たす自然数 a, b をすべて求めよ。ただし, $a < b$ とする。

(1) 最大公約数が 6, 和が 48

(2) 最大公約数が 8, 差が 24, $b < 50$

【解答】

(1) 最大公約数が 6 なので, $a = 6A, b = 6B$ (A, B は互いに素で $A < B$) とおける。和が 48 なので $6A + 6B = 48 \Leftrightarrow A + B = 8$ 。

$A < B$ より $(A, B) = (1, 7), (2, 6), (3, 5)$ であるが, A, B は互いに素より $(A, B) = (1, 7), (3, 5)$ のみ適する。

以上より, $(a, b) = (6, 42), (18, 30)$ が満たす。

(2) 最大公約数が 8 なので, $a = 8A, b = 8B$ (A, B は互いに素で $A < B$) とおける。差が 24 なので $8B - 8A = 24 \Leftrightarrow B - A = 3$ 。

$b < 50$ より $8B < 50 \Leftrightarrow B < \frac{25}{4} = 6.25$ より

$(A, B) = (1, 4), (2, 5), (3, 6)$ であるが, A, B は互いに素より, 適するのは, $(A, B) = (1, 4), (2, 5)$ 。

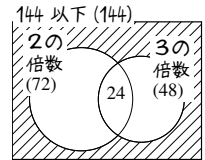
よって, $(a, b) = (8, 32), (16, 40)$ 。

◀ $(A, B) = (1, 7)$ のとき,
 $a = 6, b = 6 \cdot 7 = 42$.
 $(A, B) = (3, 5)$ のとき,
 $a = 6 \cdot 3 = 18, b = 6 \cdot 5 = 30$.

D. 互いに素な整数の個数

(問) 144 以下の自然数のうち、144 と互いに素な数の個数を求めなさい。

(解) $144 = 2^4 \cdot 3^2$ から、144 と 1 以外の公約数をもつ数は 2 の倍数か 3 の倍数である。144 以下の自然数のうち
 2 の倍数は $144 \div 2 = 72$ 個、3 の倍数は $144 \div 3 = 48$ 個あり、
 2 の倍数でも 3 の倍数でもある 6 の倍数は、 $144 \div 6 = 24$ 個ある。
 以上より、互いに素な数の個数は $144 - (72 + 48 - 24) = 48$ 個。

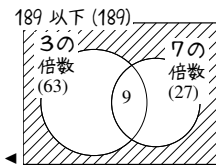
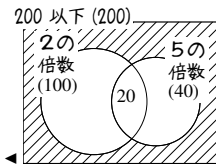


【例題 25】

- 200 以下の自然数のうち、200 と互いに素な数の個数を求めよ。
- 189 以下の自然数のうち、189 と互いに素な数の個数を求めよ。

【解答】

- $200 = 2^3 \cdot 5^2$ から、200 と 1 以外の公約数をもつ数は 2 の倍数か 5 の倍数である。200 以下の自然数のうち、
 2 の倍数は $200 \div 2 = 100$ 個、5 の倍数は $200 \div 5 = 40$ 個、
 2 の倍数でも 5 の倍数でもある 10 の倍数は $200 \div 10 = 20$ 個ある。
 以上より、互いに素な数の個数は $200 - (100 + 40 - 20) = 80$ 個。
- $189 = 3^3 \cdot 7$ から、189 と 1 以外の公約数をもつ数は 3 の倍数か 7 の倍数である。189 以下の自然数のうち、
 3 の倍数は $189 \div 3 = 63$ 個、7 の倍数は $189 \div 7 = 27$ 個、
 3 の倍数でも 7 の倍数でもある 21 の倍数は $189 \div 21 = 9$ 個ある。
 以上より、互いに素な数の個数は $189 - (63 + 27 - 9) = 108$ 個。

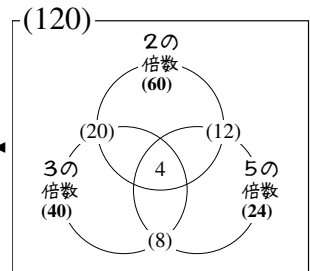


【例題 26 : 互いに素な数の個数】

- 120 以下の自然数のうち、120 と互いに素な数の個数を求めなさい。
- 135 以下の正の偶数のうち、135 と互いに素な数の個数を求めなさい。

【解答】

- $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ から、120 と公約数をもち互いに素でない数は 2 の倍数か 3 の倍数か 5 の倍数である。
 右のベン図を考えて、120 以下の自然数のうち、2 の倍数は $120 \div 2 = 60$ 個、3 の倍数は $120 \div 3 = 40$ 個、5 の倍数は $120 \div 5 = 24$ 個、
 2 の倍数でも 3 の倍数でもある 6 の倍数は $120 \div 6 = 20$ 個、
 2 の倍数でも 5 の倍数でもある 10 の倍数は $120 \div 10 = 12$ 個、
 3 の倍数でも 5 の倍数でもある 15 の倍数は $120 \div 15 = 8$ 個、
 2 でも 3 でも 5 でも割れる 30 の倍数は $120 \div 30 = 4$ 個ある。
 以上より、120 と公約数のある数は $60 + 40 + 24 - 20 - 12 - 8 + 4 = 88$ 個であり、互いに素な数の個数は $120 - 88 = 32$ 個である。
- $135 = 3^3 \cdot 5$ であるから、135 と互いに素でない数は 3 の倍数か 5 の倍数である。



◀ 『包含と排除の関係 (3 集合版)』

1. 余り

A. 負の数の商と余り

$\div 5$ による余りは、負の数であっても、 $0, 1, 2, 3, 4$ のみと定める。

たとえば、 $43 \div 5$ は商 8, 余り 3 であり $43 = 5 \times 8 + 3$ と表せた。

$(-43) \div 5$ の場合は、右のように考えて $-43 = 5 \times (-9) + 2$ となるので、商は -9 , 余りは 2 である。

$43 \div 5$ の余りは？

$$\Rightarrow \begin{cases} 43 = 5 \times 9 - 2 & \leftarrow \text{余りが } -2 \text{ なので不適} \\ 43 = 5 \times 8 + 3 & \leftarrow \text{余りは } 3 \\ 43 = 5 \times 7 + 8 & \leftarrow \text{余りが } 8 \text{ なので不適} \end{cases}$$

$(-43) \div 5$ の余りは？

$$\Rightarrow \begin{cases} -43 = 5 \times (-7) - 8 & \leftarrow \text{余りが } -8 \text{ なので不適} \\ -43 = 5 \times (-8) - 3 & \leftarrow \text{余りが } -3 \text{ なので不適} \\ -43 = 5 \times (-9) + 2 & \leftarrow \text{余りは } 2 \end{cases}$$

【例題 28】

1. 次の に、割り算の商と余りを入れなさい。

(a) $26 \div 5$ の商と余りは？ $\rightarrow 26 = 5 \times \text{ア} + \text{イ}$ から商は , 余り

(b) $(-26) \div 5$ の商と余りは？ $\rightarrow -26 = 5 \times \text{ウ} + \text{エ}$ から商は , 余り

2. $34 \div 5$, $(-34) \div 5$, $7 \div 6$, $(-7) \div 6$ の商と余りを答えなさい。

【解答】

1. (a) $26 = 5 \times \underline{5}_{(\text{ア})} + \underline{1}_{(\text{イ})}$ (b) $-26 = 5 \times \underline{-6}_{(\text{ウ})} + \underline{4}_{(\text{エ})}$

2. $34 = 5 \times 6 + 4$ より、商は 6, 余りは 4.

$-34 = 5 \times (-7) + 1$ より、商は -7 , 余りは 1.

$7 = 6 \times 1 + 1$ より、商は 1, 余りは 1.

$-7 = 6 \times (-2) + 5$ より、商は -2 , 余りは 5.

— 負の数を割る割り算の余り —

整数 A を自然数 m で割る^{*7}とき、余りは $0, 1, 2, \dots, m-1$ のいずれかとなるよう定める。

つまり、割り算 $A \div m$ において、等式 $A = mk + r$ (r は $0, 1, 2, \dots, m-1$ のいずれか) を満たす整数 k を商, r を余りと定める。このとき、どんな割り算も商と余りがただ 1 つに定まる。

*7 負の数 m や 0 で割ったときの余りは考えない。

B. 倍数と余りの判定法

倍数と余りの判定法のまとめ

自然数 n について*8, 倍数と余りの判定が以下のようにできる.

- (1) ● 「 $n \div 2$ の余り」 = 「 n の一の位 $\div 2$ の余り」
 - 「 $n \div 4$ の余り」 = 「 n の下 2 桁 $\div 4$ の余り」
 - 「 $n \div 8$ の余り」 = 「 n の下 3 桁 $\div 8$ の余り」
- (2) ● 「 $n \div 5$ の余り」 = 「 n の一の位 $\div 5$ の余り」
 - 「 $n \div 25$ の余り」 = 「 n の下 2 桁 $\div 25$ の余り」
- (3) ● 「 $n \div 3$ の余り」 = 「 n の全ての位の和 $\div 3$ の余り」
 - 「 $n \div 9$ の余り」 = 「 n の全ての位の和 $\div 9$ の余り」

(証明) 『余りの判定法の証明』(p.108) を参照のこと.

【例題 29】 次の割り算の余りをそれぞれ求めよ (商は求めなくて良い).

- a) $245 \div 2$ b) $2314 \div 4$ c) $87654321 \div 4$ d) $192837465 \div 8$ e) $6789 \div 5$
f) $123401 \div 25$ g) $12345 \div 3$ h) $1234567 \div 9$

【解答】

- a) 1 の位について $5 \div 2$ は余り 1 なので, 余り 1.
b) 下 2 桁について $14 \div 4$ は余り 2 なので, 余り 2.
c) 下 2 桁について $21 \div 4$ は余り 1 なので, 余り 1.
d) 下 3 桁について $465 \div 8$ は余り 1 なので, 余り 1.
e) 下 1 桁について $9 \div 5$ は余り 4 なので, 余り 4.
f) 下 2 桁について $01 \div 25$ は余り 1 なので, 余り 1.
g) $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15) \div 3 = 15 \div 3$ は余り 0 なので, 余り 0.
h) $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \div 9 = 28 \div 9$ は余り 1 なので, 余り 1.

◀ 全ての位を足した.

◀ 全ての位を足した.

*8 この判定法は, n が負の数でも注意すれば使える. たとえば「 -344 を 5 で割った余り」は「 -4 を 5 で割った余り」(4 ではない) になり, 余り 1 である.

同様に「 -3576 を 9 で割った余り」も, $3 + 5 + 7 + 6 = 21$ より「 -21 を 9 で割った余り」に等しく 6 になる.

2. 余りと文字式

A. 余りの立式(1)～文字式の利用

たとえば、 a が「3で割って1余る整数」ならば、 $a = 3k + 1$ (k は整数)とおける。

(例) 3で割って、整数 a は1余り、整数 b は2余るならば、 $2a + 5$, $4a + 3b$ を3で割った余りを求めよ。

(解) $a = 3k + 1$, $b = 3l + 2$ (k, l は整数)とおける。 ← a の商を k , b の商を l とおいた。

$2a + 5 = 2(3k + 1) + 5 = 6k + 7 = 3(2k + 2) + 1$ なので、 $2a + 5$ を3で割った余りは1。

$$\begin{aligned}4a - 3b &= 4(3k + 1) - 3(3l + 2) = 12k + 4 - 9l - 6 \\ &= 12k - 9l - 2\end{aligned}$$

$$= 3(4k - 3l - 1) + 1 \quad \leftarrow (-2) = 3 \cdot (-1) + 1 \text{ に注意 } (-2 \div 3 \text{ は商 } -1, \text{ 余り } 1).$$

$4a + 3b$ を3で割った余りは1。



a, b では商が等しいとは限らないため、 k, l という異なる文字でおいていることに注意しよう。

【例題30】 5で割って、整数 a は1余り、整数 b は2余るとする。次の数を5で割った余りを求めよ。

1) $2a + 1$

2) $5b - 2$

3) $2a + 3b$

4) $2a - 4b$

5) $a^2 - b^2$

【解答】 $a = 5k + 1$, $b = 5l + 2$ (k, l は整数)とおける。

1. $2a + 1 = 2(5k + 1) + 1 = 10k + 3 = 5 \cdot 2k + 3$ なので、余りは3。

2. $5b - 2 = 5(5l + 2) - 2 = 25l + 8 = 5(5l + 1) + 3$ なので、余りは3。

3. $2a + 3b = 2(5k + 1) + 3(5l + 2) = 10k + 15l + 8 = 5(2k + 3l + 1) + 3$ なので、余りは3。

4. $2a - 4b = 2(5k + 1) - 4(5l + 2) = 10k - 20l - 6 = 5(2k - 4l - 2) + 4$ なので、余りは4。

$$\begin{aligned}5. \quad a^2 - b^2 &= (5k + 1)^2 - (5l + 2)^2 = 25k^2 + 10k + 1 - 25l^2 - 20l - 4 \\ &= 5(5k^2 + 2k - 5l^2 - 4l) - 3 \\ &= 5(5k^2 + 2k - 5l^2 - 4l - 1) + 2\end{aligned}$$

よって、余りは2。

◀ a の商を k , b の商を l とおいた。
 a, b の商が一致するか分からないので、別の文字をおいた。

◀ $-6 = 5 \cdot (-2) + 4$

◀ $-3 = 5 \cdot (-1) + 2$



このタイプの問題には、p.82で学ぶように、別解が存在する。

余りが分かる数の立式～その1～

a が「 p で割って r 余る整数」ならば、 $a = pk + r$ (k は整数)とおける。

B. 余りを用いた証明(1)～文字式の利用

たとえば、どんな整数も2で割った余りは0か1であり、 $2k, 2k + 1$ (k は整数)の形をしている。

また、どんな整数も3で割った余りは0か1か2であり、 $3k, 3k + 1, 3k + 2$ (k は整数)の形をしている^{*9}ため、次のような証明ができる。

^{*9} または、余りは $0, \pm 1$ だと思い、「どんな整数も $3k, 3k \pm 1$ (k は整数)の形をしている」としてもよい。証明も簡潔になる。



次の問題には、p.82 で学ぶように、別解が存在する.

【例題 31】 \square に適する式を入れ、整数 n について、 n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを示せ.

どんな整数 n も $n = 3k, 3k + 1, 3k + 2$ (k は整数) のいずれかである.

i) $n = 3k$ のとき、 $n^2 = 3 \cdot \square$ であり、 \square は整数なので余り 0.

ii) $n = 3k + 1$ のとき、 $n^2 = 3 \cdot \square + 1$ であり、 \square は整数なので余り 1.

iii) $n = 3k + 2$ のとき、 $n^2 = 3 \cdot \square + 1$ であり、 \square は整数なので余り 1.

以上より、どんな整数 n についても、 n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 のいずれかである.

【解答】 どんな整数 n も $n = 3k, 3k + 1, 3k + 2$ (k は整数) のいずれか.

i) $n = 3k$ のとき、 $n^2 = 9k^2 = 3 \cdot \underline{3k^2}_{(ア)}$ であり、 $3k^2$ は整数なので余り 0.

ii) $n = 3k + 1$ のとき、 $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(\underline{3k^2 + 2k}_{(イ)}) + 1$ であり、 $3k^2 + 2k$ は整数なので余り 1.

iii) $n = 3k + 2$ のとき、 $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(\underline{3k^2 + 4k + 1}_{(ウ)}) + 1$ であり、 $3k^2 + 4k + 1$ は整数なので余り 1.

以上より、どんな整数 n についても、 n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 のいずれかである.

【練習 32 : 余りを用いた証明~文字式の利用~その 1~】

(1) どんな整数 n についても、 $n(n + 3)$ が偶数であることを示しなさい.

(2) どんな整数 n についても、 $n^3 + 2n + 3$ は 3 の倍数であることを示せ.

【解答】

(1) どんな整数 n も $n = 2k, 2k + 1$ (k は整数) のいずれかである.

i) $n = 2k$ のとき、 $n(n + 3) = 2k(2k + 3) = 2k(2k + 3)$ となり、 $k(2k + 3)$ は整数なので $n(n + 3)$ は偶数である.

ii) $n = 2k + 1$ のとき、 $n(n + 3) = (2k + 1)(2k + 4) = 2(2k + 1)(k + 2)$ となり、 $(2k + 1)(k + 2)$ は整数なので $n(n + 3)$ は偶数である.

以上 i), ii) より、 $n(n + 3)$ は必ず偶数である.

(2) どんな整数 n も、 $n = 3k, 3k + 1, 3k + 2$ (k は整数) のいずれかである.

i) $n = 3k$ のとき、 $n^3 + 2n + 3 = (3k)^3 + 6k + 3 = 3(9k^3 + 2k + 1)$ であり、 $9k^3 + 2k + 1$ は整数なので 3 の倍数.

ii) $n = 3k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} n^3 + 2n + 3 &= (27k^3 + 27k^2 + 9k + 1) + (6k + 2) + 3 \\ &= 27k^3 + 27k^2 + 15k + 6 = 3(9k^3 + 9k^2 + 5k + 2) \end{aligned}$$

となり、 $9k^3 + 9k^2 + 5k + 2$ は整数なので 3 の倍数である.

iii) $n = 3k + 2$ のとき

$$\begin{aligned} n^3 + 2n + 3 &= (27k^3 + 54k^2 + 36k + 8) + (6k + 4) + 3 \\ &= 27k^3 + 54k^2 + 42k + 15 = 3(9k^3 + 18k^2 + 14k + 5) \end{aligned}$$

となり、 $9k^3 + 18k^2 + 14k + 5$ は整数なので 3 の倍数である.

◀ $n = 3k, 3k \pm 1$ (k は整数) のいずれかである、でもよい.

◀ $n = 3k - 1$ とした場合は

$$\begin{aligned} &n^3 + 2n + 3 \\ &= (27k^3 - 27k^2 + 9k - 1) \\ &\quad + (6k - 2) + 3 \\ &= 3(9k^3 - 9k^2 + 5k) \end{aligned}$$

以上 i), ii), iii) より, $n^3 + 2n + 3$ が 3 の倍数であることが示された.

— 余りによる分類～その 1～ —

p を 2 以上の自然数とする. どんな整数も, $pk, pk + 1, pk + 2, \dots, pk + (p - 1)$ (k は整数) のいずれかの形をしている.

【練習 33 : 余りを用いた証明～文字式の利用～その 2～】

- (1) どんな整数 n についても, $n^2 - 5n$ が偶数であることを示しなさい.
(2) 整数 n が 3 で割り切れないならば, $3n^2 - 2$ を 9 で割った余りは 1 であることを示せ.

【解答】

- (1) どんな整数 n も, $n = 2k, 2k + 1$ (k は整数) のいずれかである.
i) $n = 2k$ のとき, $n^2 - 5n = (2k)^2 - 5 \cdot 2k = 4k^2 - 10k = 2(2k^2 - 5k)$ となり, $2k^2 - 5k$ は整数なので $n^2 - 5n$ は偶数である.
ii) $n = 2k + 1$ のとき, $n^2 - 5n = (2k + 1)^2 - 5 \cdot (2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 = 4k^2 - 6k - 4 = 2(2k^2 - 3k - 2)$ となり, $2k^2 - 3k - 2$ は整数なので $n^2 - 5n$ は偶数である.

以上 i), ii) より, $n^2 - 5n$ は偶数であることが示された.

- (2) 3 で割り切れない整数 n は, $n = 3k + 1, 3k + 2$ (k は整数) のいずれかである.

i) $n = 3k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} 3n^2 - 2 &= 3(3k + 1)^2 - 2 \\ &= 3(9k^2 + 6k + 1) - 2 \\ &= 27k^2 + 18k + 1 = 9(3k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

$3k^2 + 2k$ は整数なので, $3n^2 - 2$ を 9 で割った余りは 1 である.

ii) $n = 3k + 2$ のとき

$$\begin{aligned} 3n^2 - 2 &= 3(3k + 2)^2 - 2 \\ &= 3(9k^2 + 12k + 4) - 2 \\ &= 27k^2 + 36k + 10 = 9(3k^2 + 4k + 1) + 1 \end{aligned}$$

$3k^2 + 4k + 1$ は整数なので, $3n^2 - 2$ を 9 で割った余りは 1 である.

以上 i), ii) より, $3n^2 - 2$ を 9 で割った余りは 1 であると示された.

◀ $n = 3k \pm 1$ (k は整数) においてもよく, この方が計算は簡単になる.

C. 連続する 2 数の積

連続する 2 つの整数, たとえば 12, 13 は, 必ずどちらかが偶数であるから, 積 $12 \cdot 13$ は偶数である. つまり, 連続する 2 つの整数の積, たとえば $n(n + 1)$ は必ず偶数になると分かる (n は整数とする).

【暗記 34 : 連続する 2 数の積～その 1～】

n は奇数とする. このとき, $n^2 - 1$ は 8 の倍数であることを示せ.

【解答】 奇数 n は, $n = 2k + 1$ とおける (k は整数). 計算すると

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$$

となる. $k(k+1)$ は連続する 2 数の積なので偶数となるから, $4k(k+1)$ は 8 の倍数である. よって $n^2 - 1$ が 8 の倍数であると示された.

【練習 35 : 文字式を利用した証明～その 1～】

3 で割って 1 余る数を n とする. $n^2 + n - 2$ は 18 の倍数であることを示せ.

【解答】 3 で割って 1 余る数 n は, $n = 3k + 1$ とおける (k は整数).

$$\begin{aligned}n^2 + n - 2 &= (3k + 1)^2 + (3k + 1) - 2 \\ &= 9k^2 + 6k + 1 + 3k + 1 - 2 = 9k(k + 1)\end{aligned}$$

となる. $k(k+1)$ は連続する 2 数の積なので偶数となるから, $9k(k+1)$ は 18 の倍数である. よって $n^2 + n - 2$ が 18 の倍数であると示された.

D. 連続する 3 数の積

連続する 3 つの整数, たとえば 11, 12, 13 は, 必ず偶数を含むが, さらに, 3 の倍数も必ず含むので, 積 $11 \cdot 12 \cdot 13$ は 2 でも 3 でも割れて 6 の倍数である. これは, 順に並べた整数の列 $\dots 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$ において, 3 つ毎に 3 の倍数が現れるためである.

この事実から, 連続する 3 数の積, たとえば $n(n+1)(n+2)$ は, 偶数にも 3 の倍数にもなり, 必ず 6 の倍数になると分かる (n は整数とする).

【暗記 36 : 文字式を利用した証明～その 3～】

n は整数とする. $n^3 - n$ は 6 の倍数であることを示せ.

【解答】 $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$ である. これは, 連続する 3 つの整数 $n-1, n, n+1$ の積であるから, 必ず 6 の倍数である. ◀ 因数分解した

【練習 37 : 文字式を利用した証明～その 4～】

連続する 3 つの偶数の積は, 必ず 48 の倍数であることを示せ.

【解答】 連続する 3 つの偶数は, $2k, 2k+2, 2k+4$ とおける (k は整数). これらの積は

$$2k(2k+2)(2k+4) = 2k \cdot 2(k+1) \cdot 2(k+2) = 8k(k+1)(k+2)$$

となる. ここで, $k(k+1)(k+2)$ は連続する 3 数の積なので 6 の倍数となるから, $8k(k+1)(k+2)$ は $8 \cdot 6 = 48$ の倍数である. よって, 連続する 3 つの偶数の積 $2k(2k+2)(2k+4)$ が 48 の倍数であると示された.

3. 合同式

A. 合同式とは何か

たとえば、 $41 \div 7$ 、 $34 \div 7$ は共に余りが 6 で等しい。これを $41 \equiv 34 \pmod{7}$ と表し、**合同式** (congruence equation) という。mod7 で考えると、明らかに次のことが成り立つ。

$$41 \equiv 34 \equiv 27 \equiv 20 \equiv 13 \equiv 6 \leftarrow 7 \text{ ずつ引いても、ずっと合同のまま (余りは変わらない)}$$
$$-36 \equiv -29 \equiv -22 \equiv -15 \equiv -8 \equiv -1 \equiv 6 \leftarrow 7 \text{ ずつ足しても、ずっと合同のまま (余りは変わらない)}$$

【例題 38】 次の に、1 桁の正の数・負の数を入れなさい。

- $36 \div 7$ の余りは 、 $50 \div 7$ の余りは であるから、 $36 \equiv 50 \pmod{\text{}}$ である。
- mod5 において、 $18 \equiv 13 \equiv \text{} \equiv 3 \equiv \text{} \equiv \text{} \equiv -12$
- mod8 において、 $18 \equiv 10 \equiv \text{} \equiv \text{} \equiv -14$
- mod11 において、 $-18 \equiv \text{} \equiv \text{} \equiv 15$

【解答】

- $36 \div 7$ の余りは 1、 $50 \div 7$ の余りは 1 であるから、 $36 \equiv 50 \pmod{7}$ 。
- 5 ずつ引いていき、 $18 \equiv 13 \equiv 8 \equiv 3 \equiv -2 \equiv -7 \equiv -12$ 。
- 8 ずつ引いていき、 $18 \equiv 10 \equiv 2 \equiv -6 \equiv -14$ 。
- 11 ずつ足していき、 $-18 \equiv -7 \equiv 4 \equiv 15$ 。

合同式の定義

整数 a, b と自然数 p について、 $a \div p$ の余りと $b \div p$ の余りが等しいとき、 a, b は p を法として合同である (congruent modulo p) と言い、 $a \equiv b \pmod{p}$ と表す。

また、 $a \equiv b \pmod{p}$ を言い換えて、 $a - b$ が p の倍数になるとも言える。

B. 合同式の和・差・積

たとえば、 $a \div 10$ の余りが 1 ならば、 $(a+3) \div 10$ の余りは 4 である。

また、 $21 \div 10$ は余り 1、 $42 \div 10$ は余り 2 であり、 $(21+42) \div 10$ の余りは $1+2=3$ になっている。

合同式で表すと右のようになり、同じ事が引き算・掛け算でも成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{mod } 10 \text{ において,} \\ a \equiv 1 \text{ のとき} \\ a + 3 \equiv 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

【例題 39】 次の に、適当な値を入れなさい。

- $41 \div 9$ の余りは ア であり、 ア $\div 9$ の余りも ア であるから、 $41 \equiv \text{ イ} \pmod{\text{ ウ}}$ である。
- $31 \div 5$ の余りは エ、 $23 \div 5$ の余りは オ であり、 $(31+23) \div 5$ の余りは カ である。これを合同式で書き直すと、mod キ において、 $31 \equiv \text{ エ}$ 、 $23 \equiv \text{ オ}$ であり、 $31+23 \equiv \text{ エ} + \text{ オ} = \text{ カ}$ となる。

【解答】

- ア:5、イ:5、ウ:9
- エ:1、オ:3、カ:4

a, b, c, d, p を整数とする. 合同式には次の性質がある.

$$\text{mod } p \text{ において, } a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} (1) a + c \equiv b + d & \leftarrow \text{左辺同士, 右辺同士足しても合同} \\ (2) a - c \equiv b - d & \leftarrow \text{左辺同士, 右辺同士引いても合同} \\ (3) ac \equiv bd & \leftarrow \text{左辺同士, 右辺同士掛けても合同} \\ (4) a^c \equiv b^c & \leftarrow \text{左辺, 右辺を同じ累乗しても合同} \end{cases}$$

(証明) $a \equiv b, c \equiv d \pmod{p}$ より, $a = kp + b, c = lp + d$ (k, l は整数) とおける.

$$(1) a + c = (kp + b) + (lp + d) = (k + l)p + b + d \text{ なので } a + c \equiv b + d \pmod{p},$$

$$(2) a - c = (kp + b) - (lp + d) = (k - l)p + b - d \text{ なので } a - c \equiv b - d \pmod{p},$$

$$(3) ac = (kp + b)(lp + d) = klp^2 + dkp + blp + bd = (klp + dk + bl)p + bd \text{ なので } ac \equiv bd \pmod{p}.$$

$$(4) a^c = \underbrace{aaa \cdots a}_c \equiv \underbrace{bbb \cdots b}_c = b^c \text{ (2番目の } = \text{ は (3) を用いた)}$$

C. 合同式の計算

たとえば, $\text{mod } 5$ において $a \equiv 2, b \equiv 1$ のとき, (1) より $a + b \equiv 2 + 1$ であり, $a + b \equiv 3$ と分かる.

結局, 以下のようにして, 「合同式でも代入ができる」と分かる.

(1) (文字式の「代入」)

$a = 2, b = 1$ のとき

$$a + b = 2 + 1 = 3$$

$$a - b = 2 - 1 = 1$$

$$ab = 2 \times 1 = 2$$

$$2a + 3b = 2 \times 2 + 3 \times 1 = 7$$

$$a^4 = 2^4 = 16$$

(2) (合同式の「代入」)

$\text{mod } 5$ において $a \equiv 2, b \equiv 1$ のとき

$$a + b \equiv 2 + 1 = 3 \quad \leftarrow (1) \text{ を利用}$$

$$a - b \equiv 2 - 1 = 1 \quad \leftarrow (2) \text{ を利用}$$

$$ab \equiv 2 \times 1 = 2 \quad \leftarrow (3) \text{ を利用}$$

$$2a + 3b \equiv 2 \times 2 + 3 \times 1 = 7 \equiv 2$$

$$a^4 \equiv 2^4 = 16 \equiv 1 \quad \leftarrow (4) \text{ を利用}$$

【例題 40】 $\text{mod } 9$ で考える. $a \equiv 3, b \equiv 2$ のとき, 以下の値を計算し, 1桁の整数で答えなさい.

1. $a + 2b$

2. $3a - b$

3. $2a + 3b$

4. $2a - 4b$

5. $a^2 - b^2$

【解答】

1. $a + 2b \equiv 3 + 2 \cdot 2 = 7$

2. $3a - b \equiv 3 \cdot 3 - 2 = 7$

3. $2a + 3b \equiv 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \equiv 3$

4. $2a - 4b \equiv 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -2 \equiv 7$

5. $a^2 - b^2 \equiv 3^2 - 2^2 = 5$

◀ $\text{mod } 9$ より $-2 \equiv -2 + 9 = 7$

D. 余りの立式(2)～合同式の利用

たとえば、 a が「3で割って1余る整数」ならば、 $a \equiv 1 \pmod{3}$ とおける。

p.76と同じ問題を、合同式を用いて解いてみよう。

(例) 3で割って、整数 a は1余り、整数 b は2余るならば、 $2a+5$ 、 $4a-3b$ を3で割った余りを求めよ。

(解) mod3で考える。 $a \equiv 1$ 、 $b \equiv 2$ であるから

$2a+5$ の余りは、 $2a+5 \equiv 2 \cdot 1 + 5 = 7 \equiv 1$ より、余り1。

$4a-3b$ の余りは、 $4a-3b \equiv 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2 \equiv 1$ より、余り1。

【例題41】 a は5で割って余り1、 b は5で割って余り2とする。次の数を5で割った余りを求めよ。

- 1) $2a+1$ 2) $5b-2$ 3) $3a+2b$ 4) $5a-2b$ 5) $a-2b$ 6) $3a-2b$

【解答】 mod5で考える。 $a \equiv 1$ 、 $b \equiv 2$ であるから

- $2a+1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 = 3$ 、よって余り3。
- $5b-2 \equiv 5 \cdot 2 - 2 = 8 \equiv 3$ 、よって余り3。
- $3a+2b \equiv 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7 \equiv 2$ 、よって余り2。
- $5a-2b \equiv 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1$ 、よって余り1。
- $a-2b \equiv 1 - 2 \cdot 2 = -3 \equiv 2$ 、よって余り2。
- $3a-2b \equiv 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1 \equiv 4$ 、よって余り4。

余りが分かる数の立式～その2～

a が「 p で割って r 余る整数」ならば、 $a \equiv r \pmod{p}$ とおける。

【例題42】 n を5で割って2余る数とするとき、 n^2+n+1 も5で割って2余ることを示せ。

【解答】 mod5で考える。 $n \equiv 2$ から、 $n^2+n+1 \equiv 2^2+2+1 = 7 \equiv 2$ となつて示された。

E. 余りを用いた証明(2)～合同式の利用

どんな整数も、3で割った余りは0, 1, 2のどれかである。合同法で言い換えると次のようになる。

「mod3で考えて、整数 n は $n \equiv 0, 1, 2$ のいずれかである。」

この考え方を利用して、p.76の例題を次のように解くことができる。

【暗記43：余りを用いた証明～合同式の利用～その1～】

整数 n について、 n^2 を3で割った余りは、0か1であることを示せ。

【解答】 mod3で考えて、整数 n は $n \equiv 0, 1, 2$ のいずれかである。

1. $n \equiv 0$ のとき、 $n^2 \equiv 0^2 = 0$ 2. $n \equiv 1$ のとき、 $n^2 \equiv 1^2 = 1$

3. $n \equiv 2$ のとき、 $n^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 1$

以上より、 n^2 を3で割った余りは0か1である。

◀【別解】 mod3で考えて $n \equiv 0, \pm 1$ なので、 $n^2 \equiv 0^2, (-1)^2 = 0, 1$ 、つまり n^2 を3で割った余りは0か1。

【練習 44 : 余りを用いた証明～合同式の利用～その 2～】

整数 n について、 n^2 を 5 で割った余りは、0 か 1 か 4 であることを示せ。

【解答】 $\text{mod}5$ で考えて、整数 n は $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4$ のいずれかである。

- (1) $n \equiv 0$ のとき、 $n^2 \equiv 0^2 = 0$ (2) $n \equiv 1$ のとき、 $n^2 \equiv 1^2 = 1$
 (3) $n \equiv 2$ のとき、 $n^2 \equiv 2^2 = 4$ (4) $n \equiv 3$ のとき、 $n^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 4$
 (5) $n \equiv 4$ のとき、 $n^2 \equiv 4^2 = 16 \equiv 1$

以上より、 n^2 を 5 で割った余りは 0 か 1 か 4 である。

◀ $n \equiv 0, \pm 1, \pm 2$ のいずれか、とすると、証明はより簡潔にできる。

余りによる分類～その 2～

p を 2 以上の自然数とする。どんな整数 a も、 $a \equiv 0, 1, \dots, p-1 \pmod{p}$ のいずれかである。

【練習 45 : 余りを用いた証明～合同式の利用～その 3～】

どんな整数 n についても、 $n(n+2)(n+4)$ は 3 の倍数であることを示せ。

【解答】 $\text{mod}3$ で考えて、整数 n は $n \equiv 0, 1, 2$ のいずれかである。

- (1) $n \equiv 0$ のとき、 $n(n+2)(n+4) \equiv 0 \cdot 2 \cdot 4 = 0$
 (2) $n \equiv 1$ のとき、 $n(n+2)(n+4) \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15 \equiv 0$
 (3) $n \equiv 2$ のとき、 $n(n+2)(n+4) \equiv 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48 \equiv 0$

以上より、 $n(n+2)(n+4)$ を 3 で割った余り 0 である。

F. 累乗と余り

まず、 11^{13} を 5 で割った余りは、 $11^{13} \equiv 1^{13} = 1 \pmod{5}$ であるから、余り 1 である。では、 12^{13} はどうだろうか。

(例) $12^{13}, 12^{99}$ を 5 で割った余りを求めよ。

(解) $\text{mod}5$ で考える。 $12^{13} \equiv 2^{13}$ である。

ここで、 $2^2 = 4, 2^3 = 8 \equiv 3, 2^4 = 16 \equiv 1$ であるから ← $2^p \equiv 1$ になる p を探した

$$2^{13} = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

よって、 12^{13} を 5 で割った余りは 2 である。同じようにして

$$12^{99} \equiv 2^{99} = (2^4)^{24} \cdot 2^3 \equiv 1^{24} \cdot 8 \equiv 3$$

よって、 12^{99} を 5 で割った余りは 3 である。

【練習 46：累乗と余り～その 1～】

(1) 11^{22} を 8 で割った余りを求めよ.

(2) 23^{45} を 5 で割った余りを求めよ.

(3) 13^{100} の 1 の位を求めよ.

【解答】

(1) mod8 で考える. $11^{22} \equiv 3^{22}$ である. ここで, $3^2 = 9 \equiv 1$ であるから

$$3^{22} = (3^2)^{11} \equiv 1^{11} = 1$$

よって, 余り **1** である.

(2) mod5 で考える. $23^{45} \equiv 3^{45}$ である.

ここで, $3^2 = 9 \equiv 4$, $3^3 = 27 \equiv 2$, $3^4 = 81 \equiv 1$ であるから

$$3^{45} = (3^4)^{11} \cdot 3 \equiv 1^{11} \cdot 3 = 3$$

よって, 余り **3** である.

(3) 13^{100} を 10 で割った余りが, 1 の位である. mod10 で考えて

$$13^{100} \equiv 3^{100} = (3^4)^{25} = 81^{25} \equiv 1^{25} = 1$$

よって, **1** の位は **1** である.

◀ $3^p \equiv 1 \pmod{8}$ となる p を探した

◀ $3^p \equiv 1 \pmod{5}$ となる p を探した

◀ $3^2 = 9$, $3^3 = 27 \equiv 7$, $3^4 = 81 \equiv 1$ を用いた. なお, $9 \equiv -1$ に注目して, 次の別解もできる.
 $13^{100} \equiv 3^{100} = 9^{50} \equiv (-1)^{50} = 1$

【発展 47：累乗と余り～その 2～】

① 8^{100} を 6 で割った余りを求めよ.

② 12^{100} の 1 の位を求めよ.

【解答】

① mod6 で考える. $8^{100} \equiv 2^{100}$ であり, $2^2 = 4$, $2^3 = 8 \equiv 2$ から

$$\begin{aligned} 8^{100} &\equiv 2^{100} = (2^3)^{33} \cdot 2 \\ &\equiv 2^{33} \cdot 2 = (2^3)^{11} \cdot 2 \\ &\equiv 2^{11} \cdot 2 = 2^{12} = (2^3)^4 \\ &\equiv 2^4 = 16 \equiv 4 \end{aligned}$$

よって, 余り **4** である.

② 12^{100} を 10 で割った余りが, 1 の位である. mod10 で考えて $12^{100} \equiv 2^{100}$

であるが, $2^5 = 32 \equiv 2$ であることを利用して

$$2^{100} = (2^5)^{20} = 32^{20} \equiv 2^{20} = (2^5)^4 = 32^4 \equiv 2^4 = 16 \equiv 6$$

よって, **1** の位は **6** になる.

◀ 8 も 6 も偶数なので, $8^p \equiv 1 \pmod{6}$ となる p はない.

◀ 2 も 10 も偶数なので, $2^p \equiv 1 \pmod{10}$ となる p はない.

2.3 ユークリッドの互除法と不定方程式

ユークリッドの互除法は、2000年以上前、古代ギリシャの時代には用いられていた計算法である。これは、もともと大きな数同士の最大公約数を求める方法であるが、後に見るように $ax + by = c$ という一次不定方程式の解法にも用いられる。

1. ユークリッドの互除法

A. ユークリッドの互除法とは

たとえば、35 と 14 の最大公約数は 7 である。

一方、 $35 \div 14$ は余り 7 であるが、割った数 14 と余り 7 の最大公約数も 7 である。

一般に、次の法則が成り立つ。

ユークリッドの互除法

自然数 a, b, q, r について、 $a = bq + r$ とする。たとえば、 $a \div b$ の商が q 、余り r とする。このとき、ユークリッドの互除法 (Euclidean algorithm) と呼ばれる次の定理が成り立つ。

$$(a, b \text{ の最大公約数}) = (b, r \text{ の最大公約数})$$

(証明) a, b の最大公約数を d 、 b, r の最大公約数を d' とする。 $d = d'$ を示せばよい。

まず、 $a = bq + r$ において、 b, r は d' の倍数なので、 a は d' の倍数である。つまり、 a, b とも d' の倍数なので、 d' は a, b の公約数である。よって、 $d' \leq d$ (..... ①) である。

次に、 $a = bq + r \Leftrightarrow r = a - bq$ であり、 a, b は d の倍数なので、 r も d の倍数である。つまり、 b, r とも d の倍数なので、 d は b, r の公約数である。よって、 $d \leq d'$ (..... ②) である。

①、②から、 $d = d'$ が示された。

B. 大きな数の最大公約数を求める

たとえば、6179 と 2923 の最大公約数は、ユークリッドの互除法から、次のように求められる。

6179 と 2923 の最大公約数は、

2923 と 333 の最大公約数と等しく ($6179 \div 2923 = 2 \cdots 333$ なので)

333 と 259 の最大公約数と等しく ($2923 \div 333 = 8 \cdots 259$ なので)

259 と 74 の最大公約数と等しく ($333 \div 259 = 1 \cdots 74$ なので)

74 と 37 の最大公約数と等しく ($259 \div 74 = 3 \cdots 37$ なので)

つまり、37 である。

以上の計算は、筆算を用い、次のようにまとめて計算できる。

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 2923 \overline{) 6179} \\
 \underline{5846} \\
 333
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 8 \quad 2 \\
 333 \overline{) 2923} \\
 \underline{2664} \\
 259 \quad 333
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 2 \quad 3 \quad 1 \quad 8 \quad 2 \\
 37 \overline{) 74} \overline{) 259} \overline{) 333} \overline{) 2923} \overline{) 6179} \\
 \underline{74} \quad \underline{222} \quad \underline{259} \quad \underline{2664} \quad \underline{5846} \\
 0 \quad 37 \quad 74 \quad 259 \quad 333
 \end{array}$$

【例題 48】 次の 2 数の最大公約数を求めよ.

1. 611 と 564 2. 2449 と 1612 3. 3118 と 2219 4. 5217 と 2961 5. 7183 と 3758

【解答】

1. 右の計算から, 564 と 47 の最大公約数と等しく, **47** である.

$$\begin{array}{r} 12 \quad 1 \\ 47 \overline{)564} \overline{)611} \\ \underline{564} \quad \underline{564} \\ 0 \quad 47 \end{array}$$

2. 右の計算から, 62 と 31 の最大公約数と等しく, **31** である.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 12 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 31 \overline{)62} \overline{)775} \overline{)837} \overline{)1612} \overline{)2449} \\ \underline{62} \quad \underline{744} \quad \underline{775} \quad \underline{837} \quad \underline{1612} \\ 0 \quad 31 \quad 62 \quad 775 \quad 837 \end{array}$$

3. 右の計算から, 22 と 13 の最大公約数と等しく, **1** である.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 7 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ 22 \overline{)44} \overline{)399} \overline{)842} \overline{)1798} \overline{)2219} \\ \underline{44} \quad \underline{399} \quad \underline{842} \quad \underline{1798} \quad \underline{2219} \\ 0 \quad 22 \quad 57 \quad 421 \quad 899 \end{array}$$

4. 右の計算から, 705 と 141 の最大公約数と等しく, **141** である.

$$\begin{array}{r} 5 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \\ 141 \overline{)705} \overline{)2256} \overline{)2961} \overline{)5217} \\ \underline{705} \quad \underline{2115} \quad \underline{2256} \quad \underline{2961} \\ 0 \quad 141 \quad 705 \quad 2256 \end{array}$$

5. 右の計算から, 48 と 47 の最大公約数と等しく, **1** である.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 10 \quad 1 \quad 1 \\ 48 \overline{)95} \overline{)333} \overline{)3425} \overline{)3758} \overline{)7183} \\ \underline{48} \quad \underline{285} \quad \underline{3330} \quad \underline{3425} \quad \underline{3758} \\ 0 \quad 47 \quad 48 \quad 95 \quad 333 \quad 3425 \end{array}$$

◀ さらに続けて
 $22 \div 13 = 1 \dots 9$
 $13 \div 9 = 1 \dots 4$
 $9 \div 4 = 2 \dots 1$ から,
 4 と 1 の最大公約数 1 と等しい,
 でもよい.

◀ さらに続けて
 $48 \div 47 = 1 \dots 1$ から,
 47 と 1 の最大公約数 1 と等しい,
 でもよい.

【(発)展 49 : ユークリッドの互除法の応用】

- ① 整数 n について, $5n + 1$ と $2n + 3$ の最大公約数は, 最大でいくつか.
 ② ①となるような, 1000 以下の自然数 n は何個あるか.

【解答】

① $5n + 1, 2n + 3$ の最大公約数は

$5n + 1 = 2(2n + 3) + (n - 5)$ より $2n + 1, n - 5$ の最大公約数に等しく,

$2n + 3 = 2(n - 5) + 13$ より $n - 5, 13$ の最大公約数に等しい.

13 の約数は 13 が最大なので, $n - 5, 13$ の最大公約数も 13 が最大. よって, $5n + 1$ と $2n + 3$ の最大公約数も, **最大で 13** になる.

② $n - 5 = 13k \Leftrightarrow n = 13k + 5$ (k は整数) であればよい. $1 \leq n \leq 1000$ より

$$1 \leq 13k + 5 \leq 1000$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq 13k \leq 995$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{13} \leq k \leq \frac{995}{13} = 76. \dots$$

$0 \leq k \leq 76$ となるから, **77** 個.

◀ $k = 0$ のときも $n = 5$ となり,
 $5n + 1 = 26, 2n + 3 = 13$ の最大公約数が 13 になっている.
 ▶ すべての辺から 5 を引いた
 ▶ すべての辺を 13 で割った

2. 不定方程式の解の1つを求める

A. 不定方程式とは何か

変数の数より方程式の数が少ないなどによって、解が無数に存在してしまう方程式を、**不定方程式** (Diophantine equation) という*10. 不定方程式の**解** (solution) は、たいてい**整数解のみ**を考える*11.

たとえば、 $3x + 2y = 6$ は不定方程式である. 変数 2 つに対し方程式は 1 つであり、 $(x, y) = (0, 3), (2, 0)$ など、無数の整数解が存在する.

一方、 $3x = 6$ は不定方程式でない. 変数 1 つに対し方程式は 1 つであり、解は $x = 2$ しかない.

特に、1 次式で表された不定方程式 $ax + by = c$ を **1 次不定方程式** という.

B. $ax + by = 1$ の整数解を 1 つ求める～その 1

たとえば、 $2x + 3y = 1$ を満たす整数解の 1 つとして、 $(x, y) = (2, -1), (-1, 1)$ などが簡単に見つけられる.

【例題 50】 次の不定方程式を満たす整数解 (x, y) の組を 1 つずつ求めよ.

1. $3x + 4y = 1$

2. $3x - 4y = 1$

3. $2x - 3y = 1$

【解答】 以下は、答えの一例である.

1. $(-1, 1), (3, -2)$

2. $(3, 2), (-1, -1)$

3. $(2, 1), (-1, -1)$

C. $ax + by = 1$ の整数解を 1 つ求める～その 2

$68x + 47y = 1$ のように、整数解 (x, y) が見つけられない場合は、ユークリッドの互除法を用いる*12.

互除法の結果を並べた $\Rightarrow A = mk + r$ の形に変形 \Rightarrow 移項して $r = \dots$ の形にした

$$\begin{cases} 68 \div 47 = 1 \cdots 21 \\ 47 \div 21 = 2 \cdots 5 \\ 21 \div 5 = 4 \cdots 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 68 = 47 \cdot 1 + 21 \\ 47 = 21 \cdot 2 + 5 \\ 21 = 5 \cdot 4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21 = 68 - 47 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 5 = 47 - 21 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 1 = 21 - 5 \cdot 4 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

③へ、②、①を次のように代入していく.

$$1 = 21 - 5 \cdot 4$$

$$= 21 - (47 - 21 \cdot 2) \cdot 4$$

\Leftarrow ② を代入した

$$= 21 - 47 \cdot 4 + 21 \cdot 8$$

\Leftarrow $\cdot 4$ を分配した

$$= -47 \cdot 4 + 21 \cdot 9$$

$\Leftarrow 21 + 21 \cdot 8 = 21 \cdot (1 + 8)$

$$= -47 \cdot 4 + (68 - 47 \cdot 1) \cdot 9$$

\Leftarrow ① を代入した

$$= -47 \cdot 4 + 68 \cdot 9 - 47 \cdot 9$$

\Leftarrow $\cdot 9$ を分配した

$$= 68 \cdot 9 - 47 \cdot 13$$

$\Leftarrow -47 \cdot 4 - 47 \cdot 9 = 47 \cdot (-4 - 9)$

つまり、 $68x + 47y = 1$ の解の一つが $(x, y) = (9, -13)$ と求められる.

【例題 51】 次の式を満たす整数解 (x, y) の一つを、上のようにして求めなさい.

1. $23x + 16y = 1$

2. $41x + 17y = 1$

3. $38x - 27y = 1$

4. $36x + 29y = 1$

*10 ディオファントス方程式ともいう. 不定方程式に関するまとまった研究のうち、残された最古のものがアレクサンドリアのディオファントスによる (3 世紀) ため.

*11 高校数学以後では、有理数解を考えることもある.

*12 ただし、これとは別のやり方も存在する. 詳しくは p.108 を参照のこと.

【解答】

1. 23 と 16 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 23 \div 16 = 1 \cdots 7 \\ 16 \div 7 = 2 \cdots 2 \\ 7 \div 2 = 3 \cdots 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 23 - 16 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2 = 16 - 7 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 1 = 7 - 2 \cdot 3 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 2 \cdot 3 = 7 - (16 - 7 \cdot 2) \cdot 3 \\ &= 7 - 16 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \\ &= -16 \cdot 3 + 7 \cdot 7 \\ &= -16 \cdot 3 + (23 - 16 \cdot 1) \cdot 7 \\ &= -16 \cdot 3 + 23 \cdot 7 - 16 \cdot 7 \\ &= 23 \cdot 7 - 16 \cdot 10 \end{aligned}$$

つまり、 $23x + 16y = 1$ の解の一つが $(x, y) = (7, -10)$ と求められる。

- ◀ ③へ②を代入した
- ◀ $\cdot 3$ を分配した
- ◀ $7 + 7 \cdot 6 = 7 \cdot (1 + 6)$
- ◀ ①を代入した
- ◀ $\cdot 7$ を分配した
- ◀ $-16 \cdot 3 - 16 \cdot 7 = 16 \cdot (-3 - 7)$

2. 41 と 17 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 41 \div 17 = 2 \cdots 7 \\ 17 \div 7 = 2 \cdots 3 \\ 7 \div 3 = 2 \cdots 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 41 - 17 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{4} \\ 3 = 17 - 7 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{5} \\ 1 = 7 - 3 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \cdot 2 = 7 - (17 - 7 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 7 - 17 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \\ &= -17 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \\ &= -17 \cdot 2 + (41 - 17 \cdot 2) \cdot 5 \\ &= -17 \cdot 2 + 41 \cdot 5 - 17 \cdot 10 \\ &= 41 \cdot 5 - 17 \cdot 12 \end{aligned}$$

つまり、 $41x + 17y = 1$ の解の一つが $(x, y) = (5, -12)$ と求められる。

- ◀ ⑥へ⑤を代入した
- ◀ $\cdot 2$ を分配した
- ◀ $7 + 7 \cdot 4 = 7 \cdot (1 + 4)$
- ◀ ④を代入した
- ◀ $\cdot 5$ を分配した
- ◀ $-17 \cdot 2 - 17 \cdot 10 = 17 \cdot (-2 - 10)$

3. 38 と 27 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 38 \div 27 = 1 \cdots 11 \\ 27 \div 11 = 2 \cdots 5 \\ 11 \div 5 = 2 \cdots 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11 = 38 - 27 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{7} \\ 5 = 27 - 11 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{8} \\ 1 = 11 - 5 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{9} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 5 \cdot 2 = 11 - (27 - 11 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 11 - 27 \cdot 2 + 11 \cdot 4 \\ &= -27 \cdot 2 + 11 \cdot 5 \\ &= -27 \cdot 2 + (38 - 27 \cdot 1) \cdot 5 \\ &= -27 \cdot 2 + 38 \cdot 5 - 27 \cdot 5 \\ &= 38 \cdot 5 - 27 \cdot 7 \end{aligned}$$

つまり、 $38x - 27y = 1$ の解の一つが $(x, y) = (5, 7)$ と求められる。

- ◀ ⑨へ⑧を代入した
- ◀ $\cdot 2$ を分配した
- ◀ $11 + 11 \cdot 4 = 11 \cdot (1 + 4)$
- ◀ ⑦を代入した
- ◀ $\cdot 5$ を分配した
- ◀ $-27 \cdot 2 - 27 \cdot 5 = 27 \cdot (-2 - 5)$

4. 36 と 29 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 36 \div 29 = 1 \cdots 7 \\ 29 \div 7 = 4 \cdots 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 36 - 29 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{10} \\ 1 = 29 - 7 \cdot 4 & \cdots \cdots \textcircled{11} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 29 - 7 \cdot 4 = 29 - (36 - 29 \cdot 1) \cdot 4 \\ &= 29 - 36 \cdot 4 + 29 \cdot 4 \end{aligned}$$

◀ y の符号に注意

- ◀ ⑪へ⑩を代入した
- ◀ $\cdot 4$ を分配した

$$= -36 \cdot 4 + 29 \cdot 5$$

$$\leftarrow 29 + 29 \cdot 4 = 29 \cdot (1 + 4)$$

つまり、 $36x + 29y = 1$ の解の一つが $(x, y) = (-4, 5)$ と求められる。

【練習 52 : 整数解をもたない $ax + by = 1$ 】

$3x + 6y = 1$ には整数解 x, y が存在しないことを示せ。

【解答】 整数解 (x, y) があつたとすると、(与式) $\Leftrightarrow 3(x + 2y) = 1$ となつて
左辺は 3 の倍数だが、右辺は 3 の倍数にならないので矛盾する。

よつて、 $3x + 6y = 1$ には整数解がない。

⋮ $ax + by = 1$ が整数解をもつ必要十分条件は、 a, b が互いに素なことである (p.109)。

D. $ax + by = c$ の整数解を 1 つ求める

たとえば、 $2x + 3y = 5$ の整数解は $(x, y) = (1, 1)$ などが簡単に見つけられる。

しかし、 $60x + 41y = 5$ の整数解は容易には見つからないので、互除法を用いて求める*13。

互除法の結果を並べた $\Rightarrow A = bk + r$ の形に変形 \Rightarrow 移項して $r = \dots$ の形にした

$$\begin{cases} 60 \div 41 = 1 \cdots 19 \\ 41 \div 19 = 2 \cdots 3 \\ 19 \div 3 = 6 \cdots 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60 = 41 \cdot 1 + 19 \\ 41 = 19 \cdot 2 + 3 \\ 19 = 3 \cdot 6 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19 = 60 - 41 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3 = 41 - 19 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 1 = 19 - 3 \cdot 6 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 19 - 3 \cdot 6 \\ &= 19 - (41 - 19 \cdot 2) \cdot 6 && \leftarrow \textcircled{2} \text{ を代入した} \\ &= 19 - 41 \cdot 6 + 19 \cdot 12 && \leftarrow \bullet 6 \text{ を分配した} \\ &= -41 \cdot 6 + 19 \cdot 13 && \leftarrow 19 + 19 \cdot 12 = 19 \cdot (1 + 12) \\ &= -41 \cdot 6 + (60 - 41 \cdot 1) \cdot 13 && \leftarrow \textcircled{1} \text{ を代入した} \\ &= -41 \cdot 6 + 60 \cdot 13 - 41 \cdot 13 && \leftarrow \bullet 13 \text{ を分配した} \\ &= 60 \cdot 13 - 41 \cdot 19 && \leftarrow -41 \cdot 6 - 41 \cdot 13 = 41 \cdot (-6 - 13) \end{aligned}$$

ここまでは、p.87 と同じであるが、最後の式 $60 \cdot 13 - 41 \cdot 19 = 1$ の両辺を 5 倍して

$$\begin{aligned} &(60 \cdot 13 - 41 \cdot 19) \cdot 5 = 1 \cdot 5 \\ \Leftrightarrow &60 \cdot (13 \cdot 5) - 41 \cdot (19 \cdot 5) = 5 \quad \leftarrow 60 \text{ と } 41 \text{ はそのまま} \\ \Leftrightarrow &60 \cdot 65 - 41 \cdot 95 = 5 \end{aligned}$$

こうして、 $60x + 41y = 5$ の解の一つが $(x, y) = (65, -95)$ と求められる*14。

*13 ただし、これとは別のやり方も存在する。詳しくは p.108 を参照のこと。

*14 ただし、 $(x, y) = (24, -35), (-17, 25)$ も解になることが、一般解を求める (p.95) と分かる。

【例題 53】 次の式を満たす整数解 (x, y) の一つを、前ページのようにして求めなさい。

1. $37x + 21y = 3$

2. $69x + 56y = 2$

3. $31x - 22y = 4$

4. $25x + 16y = 3$

【解答】

1. 37 と 21 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 37 \div 21 = 1 \cdots 16 \\ 21 \div 16 = 1 \cdots 5 \\ 16 \div 5 = 3 \cdots 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 = 37 - 21 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 5 = 21 - 16 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 1 = 16 - 5 \cdot 3 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 16 - 5 \cdot 3 = 16 - (21 - 16 \cdot 1) \cdot 3 \\ &= 16 - 21 \cdot 3 + 16 \cdot 3 \\ &= -21 \cdot 3 + 16 \cdot 4 \\ &= -21 \cdot 3 + (37 - 21 \cdot 1) \cdot 4 \\ &= -21 \cdot 3 + 37 \cdot 4 - 21 \cdot 4 \\ &= 37 \cdot 4 - 21 \cdot 7 \end{aligned}$$

最後の $37 \cdot 4 - 21 \cdot 7 = 1$ の両辺を 3 倍して、 $37 \cdot 12 - 21 \cdot 21 = 3$ となり、 $37x + 21y = 3$ の解の一つが $(x, y) = (12, -21)$ と求められる。

- ◀ ③へ②を代入した
- ◀ $\cdot 3$ を分配した
- ◀ $16 + 16 \cdot 3 = 16 \cdot (1 + 3)$
- ◀ ①を代入した
- ◀ $\cdot 4$ を分配した
- ◀ $-21 \cdot 3 - 21 \cdot 4 = 21 \cdot (-3 - 4)$

2. 69 と 56 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 69 \div 56 = 1 \cdots 13 \\ 56 \div 13 = 4 \cdots 4 \\ 13 \div 4 = 3 \cdots 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 = 69 - 56 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{4} \\ 4 = 56 - 13 \cdot 4 & \cdots \cdots \textcircled{5} \\ 1 = 13 - 4 \cdot 3 & \cdots \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 4 \cdot 3 = 13 - (56 - 13 \cdot 4) \cdot 3 \\ &= 13 - 56 \cdot 3 + 13 \cdot 12 \\ &= -56 \cdot 3 + 13 \cdot 13 \\ &= -56 \cdot 3 + (69 - 56 \cdot 1) \cdot 13 \\ &= -56 \cdot 3 + 69 \cdot 13 - 56 \cdot 13 \\ &= 69 \cdot 13 - 56 \cdot 16 \end{aligned}$$

最後の $69 \cdot 13 - 56 \cdot 16 = 1$ の両辺を 2 倍して $69 \cdot 26 - 56 \cdot 32 = 2$ となり、 $69x + 56y = 2$ の解の一つが $(x, y) = (26, -32)$ と求められる。

- ◀ ⑥へ⑤を代入した
- ◀ $\cdot 3$ を分配した
- ◀ $13 + 13 \cdot 12 = 13 \cdot (1 + 12)$
- ◀ ④を代入した
- ◀ $\cdot 13$ を分配した
- ◀ $-56 \cdot 3 - 56 \cdot 13 = 56 \cdot (-3 - 13)$

3. 31 と 22 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 31 \div 22 = 1 \cdots 9 \\ 22 \div 9 = 2 \cdots 4 \\ 9 \div 4 = 2 \cdots 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 31 - 22 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{7} \\ 4 = 22 - 9 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{8} \\ 1 = 9 - 4 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{9} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 4 \cdot 2 = 9 - (22 - 9 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 9 - 22 \cdot 2 + 9 \cdot 4 \\ &= -22 \cdot 2 + 9 \cdot 5 \\ &= -22 \cdot 2 + (31 - 22 \cdot 1) \cdot 5 \\ &= -22 \cdot 2 + 31 \cdot 5 - 22 \cdot 5 \\ &= 31 \cdot 5 - 22 \cdot 7 \end{aligned}$$

最後の $31 \cdot 5 - 22 \cdot 7 = 1$ の両辺を 4 倍して $31 \cdot 20 - 22 \cdot 28 = 4$ となり、

- ◀ ⑨へ⑧を代入した
- ◀ $\cdot 2$ を分配した
- ◀ $9 + 9 \cdot 4 = 9 \cdot (1 + 4)$
- ◀ ⑦を代入した
- ◀ $\cdot 5$ を分配した
- ◀ $-22 \cdot 2 - 22 \cdot 5 = 22 \cdot (-2 - 5)$

$31x - 22y = 4$ の解の一つが $(x, y) = (20, 28)$ と求められる.

4. 25 と 16 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 25 \div 16 = 1 \cdots 9 \\ 16 \div 9 = 1 \cdots 7 \\ 9 \div 7 = 1 \cdots 2 \\ 7 \div 2 = 3 \cdots 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 25 - 16 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{10} \\ 7 = 16 - 9 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{11} \\ 2 = 9 - 7 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{12} \\ 1 = 7 - 2 \cdot 3 & \cdots \cdots \textcircled{13} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 2 \cdot 3 = 7 - (9 - 7 \cdot 1) \cdot 3 \\ &= 7 - 9 \cdot 3 + 7 \cdot 3 \\ &= -9 \cdot 3 + 7 \cdot 4 \\ &= -9 \cdot 3 + (16 - 9 \cdot 1) \cdot 4 \\ &= -9 \cdot 3 + 16 \cdot 4 - 9 \cdot 4 \\ &= 16 \cdot 4 - 9 \cdot 7 \\ &= 16 \cdot 4 - (25 - 16 \cdot 1) \cdot 7 \\ &= 16 \cdot 4 - 25 \cdot 7 + 16 \cdot 7 \\ &= -25 \cdot 7 + 16 \cdot 11 \end{aligned}$$

最後の $-25 \cdot 7 + 16 \cdot 11 = 1$ の両辺を 3 倍して $-25 \cdot 21 + 16 \cdot 33 = 3$ となり, $25x + 16y = 3$ の解の一つが $(x, y) = (-21, 33)$ と求められる.

- ◀ ⑬へ ⑫ を代入した
- ◀ $\cdot 3$ を分配した
- ◀ $7 + 7 \cdot 3 = 7 \cdot (1 + 3)$
- ◀ ⑪ を代入した
- ◀ $\cdot 4$ を分配した
- ◀ $-9 \cdot 3 - 9 \cdot 4 = 9 \cdot (-3 - 4)$
- ◀ ⑩ を代入した
- ◀ $\cdot 7$ を分配した
- ◀ $16 \cdot 4 + 16 \cdot 7 = 16 \cdot (4 + 7)$

◀ 実際には $(x, y) = (-5, 8)$ という解も存在する. これは一般解を求める (p.95) と分かる.

3. 1 次不定方程式の一般解

A. 一般解とは何か

たとえば, 不定方程式 $3x + 4y = 0$ を考えよう. この整数解として $(x, y) = (0, 0), (4, -3), (8, -6)$ などが考えられ, そのいずれも x は 4 の倍数, y は 3 の倍数になっている.

実際, 次の **暗記** のようにして, $3x + 4y = 0$ の整数解はすべて $(x, y) = (4k, -3k)$ (k は整数) と表されると分かる. このように, 整数 k を用いて, 不定方程式のすべての整数解を表したものを, **一般解** と言う.

【暗記 54 : 1 次不定方程式の一般解~その 1~】

にもっともふさわしい数字・式・言葉を入れ, $3x + 4y = 0$ の整数解を求めなさい.

方程式 $3x + 4y = 0$ は $3x = \text{ア}$ と変形でき, $3x$ は **イ** の倍数と分かる. 3 と 4 は **ウ** なので, x が **イ** の倍数でないといけない.

そこで, k を整数として $x = \text{エ}$ とおいて与式に代入すると, $3 \cdot \text{エ} + 4y = 0$ となる. これを解いて $y = \text{オ}$ であるから, $3x + 4y = 0$ の一般解は $(x, y) = (\text{エ}, \text{オ})$ (k は **カ**) となる.

【解答】 $3x + 4y = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{-4y}{\text{ア}}$ から, $3x$ は (イ) 4 の倍数と分かる. 3 と 4 は 互いに素 (ウ) なので, x は 4 の倍数.

そこで, k を整数として $x = 4k$ (エ) とおいて代入すると

$$3(4k) + 4y = 0 \Leftrightarrow 3k + y = 0 \Leftrightarrow y = -3k$$
 (オ)

$3x + 4y = 0$ の一般解は $(x, y) = (4k, -3k)$ (k は 整数 (カ)) となる.



一般解の表し方は1通りではない. $(x, y) = (-4k, 3k)$ (k は整数) と答えてもよい.

実際, 次のようにして考えると, 2つの表し方は同じことを表していると分かる.

| | ... | $k = -2$ | $k = -1$ | $k = 0$ | $k = 1$ | $k = 2$ | ... |
|----------------------|-----|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----|
| $(x, y) = (4k, -3k)$ | ... | $(-8, 6)$ | $(-4, 3)$ | $(0, 0)$ | $(4, -3)$ | $(8, -6)$ | ... |
| $(x, y) = (-4k, 3k)$ | ... | $(8, -6)$ | $(4, -3)$ | $(0, 0)$ | $(-4, 3)$ | $(-8, 6)$ | ... |

順序が逆になっただけで、全体としては結局同じ

このように, 不定方程式の一般解は複数の形がある. 詳しくは p.93 を参照のこと.

【例題 55】 次の1次不定方程式の一般解を求めなさい.

1. $2x + 3y = 0$

2. $5x + 3y = 0$

3. $4x - 3y = 0$

4. $12x + 9y = 0$

【解答】

1. $2x = -3y$ であり, 2 と 3 は互いに素なので

$$(x, y) = (3k, -2k) \quad (k \text{ は整数}).$$

2. $2x = -3y$ であり, 5 と 3 は互いに素なので $x = 3k$ とおけて

$$(x, y) = (3k, -5k) \quad (k \text{ は整数}).$$

3. $4x = 3y$ であり, 4 と 3 は互いに素なので $x = 3k$ とおけて

$$(x, y) = (3k, 4k) \quad (k \text{ は整数}).$$

4. 与式の両辺を3で割って $4x + 3y = 0$. 4 と 3 は互いに素なので

$$(x, y) = (3k, -4k) \quad (k \text{ は整数}).$$

◀ $(x, y) = (-3k, 2k)$ (k は整数) でもよい.

◀ $(x, y) = (-3k, 5k)$ (k は整数) でもよい.

◀ $(x, y) = (-3k, -4k)$ (k は整数) でもよい.

◀ $(x, y) = (-3k, 4k)$ (k は整数) でもよい.

B. 1次不定方程式 $ax + by = c$ の一般解~その1・解法の基礎~

$ax + by = c$ の一般解は, 次のようにして求めることができる.

(問) $2x + 3y = 1$ の一般解を求めなさい.

(解) $2x + 3y = 1$ …… ① の解の一つは $(2, -1)$ であり, $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1$ …… ②. ① - ② から

$$\begin{array}{r}
 2x + 3y = 1 \\
 -) \quad 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1 \\
 \hline
 2(x - 2) + 3\{y - (-1)\} = 0 \iff 2(x - 2) = -3(y + 1)
 \end{array}$$

2 と 3 は互いに素なので, $x - 2 = 3k, y + 1 = -2k$ (k は整数) とおける.

よって, 一般解は $(x, y) = (3k + 2, -2k - 1)$ となる.



もし, $2x + 3y = 1$ の解の一つを $(-1, 1)$ とすると最後の一般解は $(x, y) = (3k - 1, -2k + 1)$ (k は整数) と変わるが, この形も正しい. 詳しくは p.93 を参照のこと.

【暗記 56 : 1 次不定方程式の一般解～その 2～】

□ に当てはまる式を答え、 $4x + 3y = 2$ の一般解を求めなさい。

$4x + 3y = 2 \dots\dots$ ① の解の一つは $(2, -2)$ なので、 $4 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = 2 \dots\dots$ ②。① - ② から □ ア = 0 となる。ここから □ イ = □ ウ であり、4 と 3 は互いに素なので、□ エ = $3k$ 、□ オ = $-4k$ とおける。よって、 $(x, y) = (\square \text{カ}, \square \text{キ})$ (k は整数) となる。

【解答】

$$\begin{array}{rcl} 4x + 3y & = & 2 \\ -) & 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) & = 2 \\ \hline \text{(ア)} & 4(x - 2) + 3\{y - (-2)\} & = 0 \iff \text{(イ)} \quad 4(x - 2) = \text{(ウ)} \quad -3(y + 2) \end{array}$$

◀ アは $4(x - 2) + 3(y + 2) = 0$ でも正しい。

であり、4 と 3 は互いに素なので、 $\text{(エ)} \quad x - 2 = 3k$ 、 $\text{(オ)} \quad y + 2 = -4k$ とおける。よって、 $(x, y) = (\text{(カ)} \quad 3k + 2, \text{(キ)} \quad -4k - 2)$ (k は整数)。

C. 1 次不定方程式 $ax + by = c$ の一般解～その 2・一般解の様々な形～

p.91 などで見たとように、不定方程式の一般解は複数の形が存在する。この点を詳しく考えよう。

たとえば、 $3x + 2y = 1$ の解を考える。この解には $(-1, 2)$ や、 $(1, -1)$ や、 $(3, -4)$ がある。それぞれを利用して一般解を考えてみよう。

i. $(-1, 2)$ とした場合

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 1 \\ -) & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & = 1 \\ \hline 3\{x - (-1)\} + 2\{y - 2\} & = & 0 \\ \iff & 3(x + 1) = -2(y - 2) & \\ 3 \text{ と } 2 \text{ は互いに素なので} & & \\ x + 1 = 2k, y - 2 = -3k \text{ となり} & & \\ (x, y) = (2k - 1, -3k + 2) & & \\ & (k \text{ は整数}) & \end{array}$$

ii. $(1, -1)$ とした場合

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 1 \\ -) & 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & = 1 \\ \hline 3(x - 1) + 2\{y - (-1)\} & = & 0 \\ \iff & 3(x - 1) = -2(y + 1) & \\ 3 \text{ と } 2 \text{ は互いに素なので} & & \\ x - 1 = 2k, y + 1 = -3k \text{ となり} & & \\ (x, y) = (2k + 1, -3k - 1) & & \\ & (k \text{ は整数}) & \end{array}$$

iii. $(3, -4)$ とした場合

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 1 \\ -) & 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) & = 1 \\ \hline 3(x - 3) + 2\{y - (-4)\} & = & 0 \\ \iff & 3(x - 3) = -2(y + 4) & \\ 3 \text{ と } 2 \text{ は互いに素なので} & & \\ x - 3 = 2k, y + 4 = -3k \text{ となり} & & \\ (x, y) = (2k + 3, -3k - 4) & & \\ & (k \text{ は整数}) & \end{array}$$

これらはすべて一般解として正しい。式の形は異なるが、以下のように同じ内容を表している。

| | ... | $k = -2$ | $k = -1$ | $k = 0$ | $k = 1$ | $k = 2$ | ... |
|------------------------------|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----|
| $(x, y) = (2k - 1, -3k + 2)$ | ... | $(-5, 8)$ | $(-3, 5)$ | $(-1, 2)$ | $(1, -1)$ | $(3, -4)$ | ... |
| $(x, y) = (2k + 1, -3k - 1)$ | ... | $(-3, 5)$ | $(-1, 2)$ | $(1, -1)$ | $(3, -4)$ | $(5, -7)$ | ... |
| $(x, y) = (2k + 3, -3k - 4)$ | ... | $(-1, 2)$ | $(1, -1)$ | $(3, -4)$ | $(5, -7)$ | $(7, -10)$ | ... |

← 1つずつずれているだけで、結局は同じ

結局、この 3 つの式は、次のような関係になっている。

$$(x, y) = (2k - 1, -3k + 2) \xrightarrow[k, y \text{ に代入}]{k = k - 1 \text{ を}} (x, y) = (2k + 1, -3k - 1) \xrightarrow[k, y \text{ に代入}]{k = k - 1 \text{ を}} (x, y) = (2k + 3, -3k - 4)$$

D. 1次不定方程式 $ax + by = c$ の一般解～その3・正しい一般解の見分け方～

たとえば, $(x, y) = (-2k - 3, 3k + 5)$ は $3x + 2y = 1$ の一般解として正しい. これは, 次の2点が確認できるからである.

- i. (左辺) $= 3(-2k - 3) + 2(3k + 5) = -6k - 9 + 6k + 10 = 1 =$ (右辺)
- ii. x の k の係数について $|-2| = 2$, y の k の係数について $|3| = 3$, 2と3は互いに素になっている.

⋯ ii. を満たさない場合, 整数でない k から整数解 (x, y) が作りうる. たとえば, $3x + 2y = 1$ の一般解として $x = -4k - 3, y = 6k + 5$ (k が整数) を考えると, $k = \frac{1}{2}$ から整数解 $(x, y) = (-5, 8)$ が得られてしまう.

【例題 57】 以下の解は, $7x + 4y = 1$ の一般解であるか. 一般解でない場合はその理由を簡潔に示せ. ただし, k は整数とする.

- 1. $(x, y) = (4k - 1, 7k + 2)$
- 2. $(x, y) = (4k + 3, -7k - 5)$
- 3. $(x, y) = (-12k - 1, 21k + 2)$

【解答】

- 1. $(x, y) = (4k - 1, 7k + 2)$ を $7x + 4y$ に代入すると, $7(4k - 1) + 4(7k + 2) = 28k - 7 + 28k + 8$ となり, 右辺の1にならないため一般解でない.
- 2. $(x, y) = (4k + 3, -7k - 5)$ を $7x + 4y$ に代入すると, $7(4k + 3) + 4(-7k - 5) = 28k + 21 - 28k - 20 = 1$ となる. さらに, x, y の k の係数の絶対値は4, 7であり互いに素である. よって, 一般解である.
- 3. x, y の k の係数の絶対値は12, 21であり公約数3をもち互いに素でないため, 一般解でない.

1次不定方程式の一般解の正誤を確かめる

$x = x_0k + x_1, y = y_0k + y_1$ (k は整数) は, 次の2点を満たしていれば1次不定方程式 $ax + by = c$ の一般解である. ただし, x_0, x_1, y_0, y_1, a, b はすべて整数であり, x_0, y_0, a, b は0でないとする.

- i. $ax + by = c$ であること. つまり, $ax + by = a(x_0k + x_1) + b(y_0k + y_1)$ を計算して c になること.
- ii. $|x_0|, |y_0|$ が互いに素であること.

⋯ 高校数学においては, この事実を定理としては用いず, 答えの確認のために用いた方がよい.

この確認方法が有効である証明は難しい. 詳しくは p.110 を参照のこと.

ひとまずは, i. が成り立たなければ $x = x_0k + x_1, y = y_0k + y_1$ は解として不適切であること, ii. が成り立たなければ, k が整数でなくても, x, y が整数になりうることを理解しよう.

【練習 58 : 1次不定方程式の解法～その3～】

次の1次不定方程式の一般解を求めなさい.

- (1) $5x + 4y = 1$
- (2) $3x + 4y = 1$
- (3) $6x - 5y = 4$
- (4) $2x + 3y = 4$

【解答】 以下はすべて, 一般解の一例である.

- (1) $5x + 4y = 1$ の解の1つとして $(x, y) = (1, -1)$ があるので

◀ 違った形を求めた場合は, 自分で確認しよう.

$$\begin{array}{r} 5x + 4y = 1 \\ -) 5 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 1 \\ \hline \end{array}$$

$$5(x-1) + 4\{y-(-1)\} = 0 \Leftrightarrow 5(x-1) = -4(y+1)$$

5 と 4 は互いに素なので $x-1 = 4k$, $y+1 = -5k$ となり,

$$(x, y) = (4k + 1, -5k - 1) \quad (k \text{ は整数}) .$$

(2) $3x + 4y = 1$ の解の 1 つとして $(x, y) = (-1, 1)$ があるので

$$\begin{array}{r} 3x + 4y = 1 \\ -) 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 1 \\ \hline \end{array}$$

$$3\{x-(-1)\} + 4\{y-1\} = 0 \Leftrightarrow 3(x+1) = -4(y-1)$$

3 と 4 は互いに素なので $x+1 = 4k$, $y-1 = -3k$ となり,

$$(x, y) = (4k - 1, -3k + 1) \quad (k \text{ は整数}) .$$

(3) $6x - 5y = 4$ の解の 1 つとして $(x, y) = (4, 4)$ があるので

$$\begin{array}{r} 6x - 5y = 4 \\ -) 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 4 \\ \hline \end{array}$$

$$6(x-4) - 5(y-4) = 0 \Leftrightarrow 6(x-4) = 5(y-4)$$

6 と 5 は互いに素なので $x-4 = 5k$, $y-4 = 6k$ となり,

$$(x, y) = (5k + 4, 6k + 4) \quad (k \text{ は整数}) .$$

(4) $2x + 3y = 4$ の解の 1 つとして $(x, y) = (2, 0)$ があるので

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ -) 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4 \\ \hline \end{array}$$

$$2(x-2) + 3(y-0) = 0 \Leftrightarrow 2(x-2) = -3y$$

2 と 3 は互いに素なので $x-2 = 3k$, $y = -2k$ となり,

$$(x, y) = (3k + 2, -2k) \quad (k \text{ は整数}) .$$

E. 1 次不定方程式 $ax + by = c$ の一般解～その 4・ユークリッドの互除法の利用～

$29x + 22y = 3$ のように係数が大きな方程式の場合は、ユークリッドの互除法を用いて解の 1 つを求めて (p.87) から、一般解を求める (p.92).

例として $29x + 22y = 3$ を解こう. 29 と 22 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \begin{cases} 29 \div 22 = 1 \cdots 7 \\ 22 \div 7 = 3 \cdots 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 7 = 29 - 22 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 1 = 22 - 7 \cdot 3 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow 1 = 22 - 7 \cdot 3 \\ &= 22 - (29 - 22 \cdot 1) \cdot 3 \quad \Leftarrow \textcircled{2} \text{ を代入} \\ &= 22 - 29 \cdot 3 + 22 \cdot 3 \quad \Leftarrow \cdot 3 \text{ を分配} \\ &= -29 \cdot 3 + 22 \cdot 4 \end{aligned}$$

つまり, $29 \cdot (-3) + 22 \cdot 4 = 1$ となるので, 両辺に 3 を掛けて $29 \cdot (-9) + 22 \cdot 12 = 3$ となり解の 1 つを得る.

$$\begin{array}{r} 29x + 22y = 3 \\ -) 29 \cdot (-9) + 22 \cdot 12 = 3 \\ \hline \end{array}$$

$$29\{x-(-9)\} + 22\{y-12\} = 0 \Leftrightarrow 29(x+9) = -22(y-12)$$

29 と 22 は互いに素なので $x+9 = 22k$, $y-12 = -29k$ となり, $(x, y) = (22k - 9, -29k + 12)$ (k は整数).

【練習 59 : 1 次不定方程式の解法～その 4～】

次の 1 次不定方程式の一般解を求めなさい。

(1) $20x + 11y = 1$

(2) $31x + 24y = 3$

(3) $38x - 29y = 4$

(4) $37x + 26y = 2$

【解答】

(1) 20 と 11 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 20 \div 11 = 1 \cdots 9 \\ 11 \div 9 = 1 \cdots 2 \\ 9 \div 2 = 4 \cdots 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 9 = 20 - 11 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2 = 11 - 9 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 1 = 9 - 2 \cdot 4 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

③へ, ②, ①を次のように代入していく.

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 2 \cdot 4 = 9 - (11 - 9 \cdot 1) \cdot 4 \\ &= 9 - 11 \cdot 4 + 9 \cdot 4 \\ &= -11 \cdot 4 + 9 \cdot 5 \\ &= -11 \cdot 4 + (20 - 11 \cdot 1) \cdot 5 \\ &= -11 \cdot 4 + 20 \cdot 5 - 11 \cdot 5 \\ &= 20 \cdot 5 - 11 \cdot 9 \end{aligned}$$

つまり, $20x + 11y = 1$ の解の一つが $(x, y) = (5, -9)$ と求められる.

$$\begin{array}{r} 20x + 11y = 1 \\ -) 20 \cdot 5 + 11 \cdot (-9) = 1 \\ \hline 20(x - 5) + 11\{y - (-9)\} = 0 \iff 20(x - 5) = -11(y + 9) \end{array}$$

20 と 11 は互いに素なので $x - 5 = 11k, y + 9 = -20k$ となり,
 $(x, y) = (11k + 5, -20k - 9)$ (k は整数) .

(2) 31 と 24 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 31 \div 24 = 1 \cdots 7 \\ 24 \div 7 = 3 \cdots 3 \\ 7 \div 3 = 2 \cdots 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 7 = 31 - 24 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{4} \\ 3 = 24 - 7 \cdot 3 & \cdots \cdots \textcircled{5} \\ 1 = 7 - 3 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

⑥へ, ⑤, ④を次のように代入していく.

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \cdot 2 = 7 - (24 - 7 \cdot 3) \cdot 2 \\ &= 7 - 24 \cdot 2 + 7 \cdot 6 \\ &= -24 \cdot 2 + 7 \cdot 7 \\ &= -24 \cdot 2 + (31 - 24 \cdot 1) \cdot 7 \\ &= -24 \cdot 2 + 31 \cdot 7 - 24 \cdot 7 \\ &= 31 \cdot 7 - 24 \cdot 9 \end{aligned}$$

つまり, $31 \cdot 7 + 24 \cdot (-9) = 1$ となるので, 両辺に 3 を掛けて $31 \cdot 21 + 24 \cdot (-27) = 3$ となり解の 1 つを得る.

$$\begin{array}{r} 31x + 24y = 3 \\ -) 31 \cdot 21 + 24 \cdot (-27) = 3 \\ \hline 31(x - 21) + 24\{y - (-27)\} = 0 \iff 31(x - 21) = -24(y + 27) \end{array}$$

31 と 24 は互いに素なので $x - 21 = 24k, y + 27 = -31k$ となり,
 $(x, y) = (24k + 21, -31k - 27)$ (k は整数) .

(3) 38 と 29 で互除法を用いて変形すると

- ◀ ② を代入した
- ◀ $\cdot 4$ を分配した
- ◀ $9 + 9 \cdot 4 = 9 \cdot (1 + 4)$
- ◀ ① を代入した
- ◀ $\cdot 5$ を分配した
- ◀ $-11 \cdot 4 - 11 \cdot 5 = 11 \cdot (-4 - 5)$

- ◀ ⑤ を代入した
- ◀ $\cdot 2$ を分配した
- ◀ $7 + 7 \cdot 6 = 7 \cdot (1 + 6)$
- ◀ ④ を代入した
- ◀ $\cdot 7$ を分配した
- ◀ $-24 \cdot 2 - 24 \cdot 7 = 24 \cdot (-2 - 7)$

$$\begin{cases} 38 \div 29 = 1 \cdots 9 \\ 29 \div 9 = 3 \cdots 2 \\ 9 \div 2 = 4 \cdots 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 9 = 38 - 29 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{7} \\ 2 = 29 - 9 \cdot 3 & \cdots \cdots \textcircled{8} \\ 1 = 9 - 2 \cdot 4 & \cdots \cdots \textcircled{9} \end{cases}$$

⑨へ、⑧、⑦を次のように代入していく。

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 2 \cdot 4 = 9 - (29 - 9 \cdot 3) \cdot 4 \\ &= 9 - 29 \cdot 4 + 9 \cdot 12 \\ &= -29 \cdot 4 + 9 \cdot 13 \\ &= -29 \cdot 4 + (38 - 29 \cdot 1) \cdot 13 \\ &= -29 \cdot 4 + 38 \cdot 13 - 29 \cdot 13 \\ &= 38 \cdot 13 - 29 \cdot 17 \end{aligned}$$

つまり、 $38 \cdot 13 - 29 \cdot 17 = 1$ となるので、両辺に4を掛けて $38 \cdot 52 - 29 \cdot 68 = 4$ となり解の1つを得る。

$$\begin{array}{r} 38x - 29y = 4 \\ -)38 \cdot 52 - 29 \cdot 68 = 4 \\ \hline \end{array}$$

$$38(x - 52) - 29(y - 68) = 0 \iff 38(x - 52) = 29(y - 68)$$

38と29は互いに素なので $x - 52 = 29k$, $y - 68 = 38k$ となり、

$$(x, y) = (29k + 52, 38k + 68) \quad (k \text{ は整数}) .$$

(4) 37と26で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 37 \div 26 = 1 \cdots 11 \\ 26 \div 11 = 2 \cdots 4 \\ 11 \div 4 = 2 \cdots 3 \\ 4 \div 3 = 1 \cdots 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 11 = 37 - 26 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{10} \\ 4 = 26 - 11 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{11} \\ 3 = 11 - 4 \cdot 2 & \cdots \cdots \textcircled{12} \\ 1 = 4 - 3 \cdot 1 & \cdots \cdots \textcircled{13} \end{cases}$$

⑬へ、⑫、⑪、⑩を次のように代入していく。

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (11 - 4 \cdot 2) \cdot 1 \\ &= 4 - 11 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ &= -11 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ &= -11 \cdot 1 + (26 - 11 \cdot 2) \cdot 3 \\ &= -11 \cdot 1 + 26 \cdot 3 - 11 \cdot 6 \\ &= 26 \cdot 3 - 11 \cdot 7 \\ &= 26 \cdot 3 - (37 - 26 \cdot 1) \cdot 7 \\ &= 26 \cdot 3 - 37 \cdot 7 + 26 \cdot 7 \\ &= 37 \cdot (-7) + 26 \cdot 10 \end{aligned}$$

つまり、 $37 \cdot (-7) + 26 \cdot 10 = 1$ となるので、両辺に2を掛けて $37 \cdot (-14) + 26 \cdot 20 = 2$ となり解の1つを得る。

$$\begin{array}{r} 37x + 26y = 2 \\ -)37 \cdot (-14) + 26 \cdot 20 = 2 \\ \hline \end{array}$$

$$37\{x - (-14)\} + 26\{y - 20\} = 0 \iff 37(x + 14) = -26(y - 20)$$

37と26は互いに素なので $x + 14 = 26k$, $y - 20 = -37k$ となり、

$$(x, y) = (26k - 14, -37k + 20) \quad (k \text{ は整数}) .$$

- ◀ ⑧を代入した
- ◀ 4を分配した
- ◀ $9 + 9 \cdot 12 = 9 \cdot (1 + 12)$
- ◀ ⑦を代入した
- ◀ 13を分配した
- ◀ $-29 \cdot 4 - 29 \cdot 13 = 29 \cdot (-4 - 13)$

- ◀ ⑫を代入した
- ◀ 1を分配した
- ◀ $4 + 4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 + 2)$
- ◀ ⑪を代入した
- ◀ 3を分配した
- ◀ $-11 \cdot 1 - 11 \cdot 6 = 11 \cdot (-1 - 6)$
- ◀ ⑩を代入した
- ◀ 7を分配した
- ◀ $26 \cdot 3 + 26 \cdot 7 = 26 \cdot (3 + 7)$

4. 種々の1次不定方程式

A. 1次不定方程式の自然数解

1次不定方程式の解を自然数に限るなら、解は有限個に限定される。

【例題 60】 以下の□に当てはまる数字、解の組を答え、適する言葉を選びなさい。

1. 等式 $3x + 2y = 20$ を満たす自然数解 (x, y) を考えよう。

$2y > 0$ より、 $3x < 20$ でないといけないので、 x に適する自然数は1以上□ア以下に限る。

$x = 1$ のとき y は□イとなり $\left\{ \begin{array}{l} \text{適する} \\ \text{不適} \end{array} \right.$, $x = 2$ のとき y は□ウとなり $\left\{ \begin{array}{l} \text{適する} \\ \text{不適} \end{array} \right.$. これらを□アまで

繰り返して、すべての自然数解は□エと分かる。

2. 等式 $2x + 3y + 4z = 21$ を満たす自然数解 (x, y, z) を考えよう。

$2x + 3y > 0$ より、 z に適する自然数は1以上□オ以下に限る。

$z = 1$ のとき $2x + 3y =$ □カとなり、 y は1以上□キ以下に限り全ての自然数解 $(x, y) =$ □ク。

$z = 2$ のときは $2x + 3y =$ □ケとなり、同様にして全ての自然数解は $(x, y) =$ □コである。

これを $z =$ □オまで繰り返して、 (x, y, z) の自然数解は□サがすべてである。

【解答】

1. $2y > 0$ より $3x < 20 \Leftrightarrow x < \frac{20}{3} = 6.\bar{6}$ となり、 $1 \leq x \leq \underline{6}$ (ア)。

$x = 1$ のとき $3 + 2y = 20 \Leftrightarrow 2y = 17 \therefore y = \frac{17}{2}$ となり、不適。
(イ)

$x = 2$ のとき $6 + 2y = 20 \Leftrightarrow 2y = 14 \therefore y = \underline{7}$ (ウ) となり、適する。

$x = 3$ のとき $9 + 2y = 20 \Leftrightarrow 2y = 11$ (×), $x = 4$ のとき $y = 4$,

$x = 5$ のとき $2y = 5$ (×), $x = 6$ のとき $y = 1$,

以上から、すべての自然数解は $(x, y) = \underline{(2, 7), (4, 4), (6, 1)}$ (エ)。

2. $2x + 3y > 0$ より $4z < 21 \Leftrightarrow z < \frac{21}{4} = 5.25$ となり、

$1 \leq z \leq \underline{5}$ (右脚注の方法から4でもよい) (オ)。

$z = 1$ のとき $2x + 3y = \underline{17}$ (カ), $2x > 0$ より $3y < 17$ なので $1 \leq y \leq \underline{5}$ (キ)。

$y = 1 \rightarrow x = 7$, $y = 2 \rightarrow 2x = 11$ (×), $y = 3 \rightarrow x = 4$,

$y = 4 \rightarrow 2x = 5$ (×), $y = 5 \rightarrow x = 1$ より、

$(x, y) = \underline{(7, 1), (4, 3), (1, 5)}$ (ク)。

$z = 2$ のとき $2x + 3y = \underline{13}$ (ケ), $2x > 0$ より $3y < 13$ なので $1 \leq y \leq 4$ 。

$y = 1 \rightarrow x = 5$, $y = 2 \rightarrow 2x = 7$ (×),

$y = 3 \rightarrow x = 2$, $y = 4 \rightarrow 2x = 1$ (×) より、 $(x, y) = \underline{(5, 1), (2, 3)}$ (コ)。

$z = 3$ のとき $2x + 3y = 9$, $2x > 0$ より $3y < 9$ なので $1 \leq y \leq 2$ 。

$y = 1 \rightarrow x = 3$, $y = 2 \rightarrow 2x = 3$ (×) より、 $(x, y) = (3, 1)$ 。

$z = 4$ のとき $2x + 3y = 5$, $y > 2$ は適さず、 $(x, y) = (1, 1)$ 。

$z = 5$ のとき $2x + 3y = 1$ (×) 以上から、 $(x, y, z) =$

$\underline{(7, 1, 1), (4, 3, 1), (1, 5, 1), (5, 1, 2), (2, 3, 2), (3, 1, 3), (1, 1, 4)}$ (サ)。

◀ または、 $x \geq 1, y \geq 1$ から $2x + 3y \geq 5$ となり、 $4z \leq 16$ であり $z \leq 4$ である。

B. 整数解, 自然数解を求める

【暗記 61: 因数分解を利用して整数解を求める】

次の不定方程式を満たす整数解 (x, y) をすべて求めなさい。

1. $(x-1)(y+2) = 3$

2. $xy - x + 2y = 3$

3. $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 1$

【解答】

1. 3 の約数は $\pm 1, \pm 3$ なので, 以下のいずれかである。

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y+2=3 \end{cases}, \begin{cases} x-1=3 \\ y+2=1 \end{cases}, \begin{cases} x-1=-1 \\ y+2=-3 \end{cases}, \begin{cases} x-1=-3 \\ y+2=-1 \end{cases}$$

これらを解いて, $(x, y) = (2, 1), (4, -1), (0, -5), (-2, -3)$.

2. (与式) $\Leftrightarrow x(y-1) + 2y = 3$

$$\Leftrightarrow x(y-1) + 2(y-1) = 3-2 \Leftrightarrow (x+2)(y-1) = 1$$

1 の約数は ± 1 なので, $\begin{cases} x+2=1 \\ y-1=1 \end{cases}, \begin{cases} x+2=-1 \\ y-1=-1 \end{cases}$ のいずれかである。

これらを解いて, $(x, y) = (-1, 2), (-3, 0)$.

3. (与式) $\Leftrightarrow y - 2x = xy$

$$\Leftrightarrow 0 = xy + 2x - y = x(y+2) - y$$

$$\Leftrightarrow x(y+2) - (y+2) = -2 \Leftrightarrow (x-1)(y+2) = -2$$

-2 の約数は $\pm 1, \pm 2$ なので, 以下のいずれかである。

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y+2=-2 \end{cases}, \begin{cases} x-1=-1 \\ y+2=2 \end{cases}, \begin{cases} x-1=2 \\ y+2=-1 \end{cases}, \begin{cases} x-1=-2 \\ y+2=1 \end{cases}$$

これらを解いて, $(x, y) = (2, -4), (0, 0), (3, -3), (-1, -1)$ であるが,

$x \neq 0, y \neq 0$ より $(x, y) = (2, -4), (3, -3), (-1, -1)$.

◀ x の係数をまとめた

◀ 両辺から 2 を引き $(y-1)$ を作る

◀ 両辺を xy 倍した

◀ 問題文において, 分母が 0 になってはいけない。

【発展 62: 候補を有限個に絞る】

$3a + 2b + c = c^2, a < b < c$ を満たす自然数 a, b, c を全て求めなさい。

【解答】 $a < c, b < c$ より, $3a + 2b + c < 3c + 2c + c = 6c$ であるから

$c^2 < 6c. c > 0$ なので $c < 6$ である。

$a < b < c$ より $c \neq 1, 2$ なので, $c = 3, 4, 5$ しか適さない。

1. $c = 3$ のとき, $3a + 2b + 3 = 3^2 \Leftrightarrow 3a + 2b = 6$ である。 $2b > 0$ より $3a < 6$ であり $a = 1$, このとき $2b = 3$ (×)。

2. $c = 4$ のとき, $3a + 2b + 4 = 4^2 \Leftrightarrow 3a + 2b = 12$ であるが, $2b > 0$ より $3a < 12$ であり $a = 1, 2, 3$ 。

$$a = 1 \rightarrow 2b = 9 \text{ (×)}, a = 2 \rightarrow b = 3, a = 3 \rightarrow 2b = 3 \text{ (×)}.$$

3. $c = 5$ のとき, $3a + 2b + 5 = 5^2 \Leftrightarrow 3a + 2b = 20$ であるが, $2b > 0$ より $3a < 20$ であり $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 。

$$a = 1 \rightarrow 2b = 17 \text{ (×)}, a = 2 \rightarrow b = 7, a = 3 \rightarrow 2b = 11 \text{ (×)},$$

$$a = 4 \rightarrow b = 4, a = 5, 6 \text{ ならば } a > b \text{ となって不適。}$$

以上より, $(a, b, c) = (2, 3, 4), (2, 7, 5), (4, 4, 5)$ であるが, $a < b < c$ より

$(a, b, c) = (2, 3, 4)$ 。

◀ 2 次方程式 $c^2 - 6c < 0$ を解くと考えてもよい。

◀ $c = 4$ なので $a < b < c$ より $a = 3$ は不適としてもよい。

◀ $c = 5$ なので $a < b < c$ より $a = 4, 5, 6$ は不適としてもよい。

1. n 進法とは何か

A. 10 進法

私たちは普段、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ... と数えていく。用いられる数字は 0, 1, 2, ..., 9 の 10 個の数字だけであるため、この数え方は **10 進法** (decimal numeral system) とされる。また、10 進法を用いて表された数は **10 進数** (decimal numeral) とされる。

B. n 進法

0, 1, 2 の 3 個の数字だけを用い、1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, ... と数えることができる。このような数の表し方を **3 進法** (ternary numeral system), 表された数を **3 進数** (ternary numeral) とする。

3 進数 A は、しばしば $A_{(3)}$ のように書かれる。たとえば、3 進数 121 であれば $121_{(3)}$ となる。

同様に、0, 1, 2, ..., $n-1$ の n 個の数字だけを用いた数の表し方を **n 進法** (base- n numeral system) とし、 n 進法で表された数を **n 進数** (base- n numeral) とする。 n 進数 A は、 $A_{(n)}$ のように書かれる。

【例題 63】 右の 1. は、10 進数と 3 進数の対応を表にまとめたものである。最後の空欄を埋めなさい。

また、2. 以降の空欄を埋めて、10 進数と、4 進数や 7 進数や 2 進数との対応をまとめなさい。

| 1. | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border: none;">10 進数</th><th style="border: none;">3 進数</th></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">1</td><td style="border: 1px solid black;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">2</td><td style="border: 1px solid black;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">3</td><td style="border: 1px solid black;">10</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">4</td><td style="border: 1px solid black;">11</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">5</td><td style="border: 1px solid black;">12</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">6</td><td style="border: 1px solid black;">20</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">7</td><td style="border: 1px solid black;">21</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">8</td><td style="border: 1px solid black;">22</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">9</td><td style="border: 1px solid black;">100</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">10</td><td style="border: 1px solid black;">101</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">11</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">12</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">13</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">⋮</td><td style="border: 1px solid black;">⋮</td></tr> </table> | 10 進数 | 3 進数 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 10 | 4 | 11 | 5 | 12 | 6 | 20 | 7 | 21 | 8 | 22 | 9 | 100 | 10 | 101 | 11 | | 12 | | 13 | | ⋮ | ⋮ | 2. | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border: none;">10 進数</th><th style="border: none;">4 進数</th></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">1</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">2</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">3</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">4</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">5</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">6</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">7</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">8</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">9</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">10</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">11</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">12</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">13</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">⋮</td><td style="border: 1px solid black;">⋮</td></tr> </table> | 10 進数 | 4 進数 | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | 11 | | 12 | | 13 | | ⋮ | ⋮ | 3. | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border: none;">10 進数</th><th style="border: none;">7 進数</th></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">1</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">2</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">3</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">4</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">5</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">6</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">7</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">8</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">9</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">10</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">11</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">12</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">13</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">⋮</td><td style="border: 1px solid black;">⋮</td></tr> </table> | 10 進数 | 7 進数 | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | 11 | | 12 | | 13 | | ⋮ | ⋮ | 4. | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border: none;">10 進数</th><th style="border: none;">2 進数</th></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">1</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">2</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">3</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">4</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">5</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">6</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">7</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">8</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">9</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">10</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">11</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">12</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">13</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">⋮</td><td style="border: 1px solid black;">⋮</td></tr> </table> | 10 進数 | 2 進数 | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | 11 | | 12 | | 13 | | ⋮ | ⋮ |
|-------|--|-------|------|---|---|---|---|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|-----|----|-----|----|--|----|--|----|--|---|---|----|--|-------|------|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|---|---|----|--|-------|------|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|---|---|----|--|-------|------|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|---|---|
| 10 進数 | 3 進数 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 22 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 100 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 101 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 進数 | 4 進数 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 進数 | 7 進数 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 進数 | 2 進数 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

【解答】

| 1. | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border: none;">10 進数</th><th style="border: none;">3 進数</th></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">1</td><td style="border: 1px solid black;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">2</td><td style="border: 1px solid black;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">3</td><td style="border: 1px solid black;">10</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">4</td><td style="border: 1px solid black;">11</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">5</td><td style="border: 1px solid black;">12</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">6</td><td style="border: 1px solid black;">20</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">7</td><td style="border: 1px solid black;">21</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">8</td><td style="border: 1px solid black;">22</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">9</td><td style="border: 1px solid black;">100</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">10</td><td style="border: 1px solid black;">101</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">11</td><td style="border: 1px solid black;">102</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">12</td><td style="border: 1px solid black;">110</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">13</td><td style="border: 1px solid black;">111</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">⋮</td><td style="border: 1px solid black;">⋮</td></tr> </table> | 10 進数 | 3 進数 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 10 | 4 | 11 | 5 | 12 | 6 | 20 | 7 | 21 | 8 | 22 | 9 | 100 | 10 | 101 | 11 | 102 | 12 | 110 | 13 | 111 | ⋮ | ⋮ | 2. | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border: none;">10 進数</th><th style="border: none;">4 進数</th></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">1</td><td style="border: 1px solid black;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">2</td><td style="border: 1px solid black;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">3</td><td style="border: 1px solid black;">3</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">4</td><td style="border: 1px solid black;">10</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">5</td><td style="border: 1px solid black;">11</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">6</td><td style="border: 1px solid black;">12</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">7</td><td style="border: 1px solid black;">13</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">8</td><td style="border: 1px solid black;">20</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">9</td><td style="border: 1px solid black;">21</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">10</td><td style="border: 1px solid black;">22</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">11</td><td style="border: 1px solid black;">23</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">12</td><td style="border: 1px solid black;">30</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">13</td><td style="border: 1px solid black;">31</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">⋮</td><td style="border: 1px solid black;">⋮</td></tr> </table> | 10 進数 | 4 進数 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 10 | 5 | 11 | 6 | 12 | 7 | 13 | 8 | 20 | 9 | 21 | 10 | 22 | 11 | 23 | 12 | 30 | 13 | 31 | ⋮ | ⋮ | 3. | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border: none;">10 進数</th><th style="border: none;">7 進数</th></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">1</td><td style="border: 1px solid black;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">2</td><td style="border: 1px solid black;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">3</td><td style="border: 1px solid black;">3</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">4</td><td style="border: 1px solid black;">4</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">5</td><td style="border: 1px solid black;">5</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">6</td><td style="border: 1px solid black;">6</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">7</td><td style="border: 1px solid black;">10</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">8</td><td style="border: 1px solid black;">11</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">9</td><td style="border: 1px solid black;">12</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">10</td><td style="border: 1px solid black;">13</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">11</td><td style="border: 1px solid black;">14</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">12</td><td style="border: 1px solid black;">15</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">13</td><td style="border: 1px solid black;">16</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">⋮</td><td style="border: 1px solid black;">⋮</td></tr> </table> | 10 進数 | 7 進数 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 10 | 8 | 11 | 9 | 12 | 10 | 13 | 11 | 14 | 12 | 15 | 13 | 16 | ⋮ | ⋮ | 4. | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border: none;">10 進数</th><th style="border: none;">2 進数</th></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">1</td><td style="border: 1px solid black;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">2</td><td style="border: 1px solid black;">10</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">3</td><td style="border: 1px solid black;">11</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">4</td><td style="border: 1px solid black;">100</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">5</td><td style="border: 1px solid black;">101</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">6</td><td style="border: 1px solid black;">110</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">7</td><td style="border: 1px solid black;">111</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">8</td><td style="border: 1px solid black;">1000</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">9</td><td style="border: 1px solid black;">1001</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">10</td><td style="border: 1px solid black;">1010</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">11</td><td style="border: 1px solid black;">1011</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">12</td><td style="border: 1px solid black;">1100</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">13</td><td style="border: 1px solid black;">1101</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">⋮</td><td style="border: 1px solid black;">⋮</td></tr> </table> | 10 進数 | 2 進数 | 1 | 1 | 2 | 10 | 3 | 11 | 4 | 100 | 5 | 101 | 6 | 110 | 7 | 111 | 8 | 1000 | 9 | 1001 | 10 | 1010 | 11 | 1011 | 12 | 1100 | 13 | 1101 | ⋮ | ⋮ |
|-------|---|-------|------|---|---|---|---|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|---|---|----|---|-------|------|---|---|---|---|---|---|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|----|--|-------|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|---|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|----|---|-------|------|---|---|---|----|---|----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|------|---|------|----|------|----|------|----|------|----|------|---|---|
| 10 進数 | 3 進数 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 22 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 100 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 101 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 102 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 110 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 111 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 進数 | 4 進数 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 22 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 23 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 30 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 31 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 進数 | 7 進数 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 14 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 進数 | 2 進数 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 100 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 101 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 110 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 111 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 1000 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 1001 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 1010 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 1011 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 1100 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 1101 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

C. 世の中における n 進法

現在の私たちが 10 進法を用いる大きな理由の一つは、私たちの手の指が 10 本であることだろう。

しかし、歴史上、10 進法以外の方法で数えられた文明は多数存在する。たとえば、その名残として現在でも、時間の秒や分は 60 進法が用いられている。

また、私たちの社会に欠かせないコンピューターは、電気の ON/OFF だけで物を数えている。一方、**2 進法** (binary numeral system) は、数字の 1 か 0 だけで物を数える仕組みである。この類似性のため、コンピューターと 2 進法は大変密接な関係がある*15。

2. n 進数を 10 進数に

A. 10 進数への変換

10 進数 46073 において、3 は 1 の位であり、4 は 10 の位、0 は 100 の位、6 は 1000 の位、7 は 10000 の位である。これは、 10^0 の位、 10^1 の位、 10^2 の位、 10^3 の位、 10^4 の位と言い換えられ、次のように表せる。

$$46073_{(10)} = 4 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

同様に、3 進数 $12012_{(3)}$ は、右から順に 3^0 の位、 3^1 の位、 3^2 の位、 3^3 の位、 3^4 の位となる。そのため、次のように計算して 10 進数にできる。

$$\begin{aligned} 12012_{(3)} &= 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \\ &= 1 \cdot 81 + 2 \cdot 27 + 0 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 81 + 54 + 0 + 3 + 2 = 140_{(10)} \end{aligned}$$

【例題 64】 $2101_{(3)}$, $321_{(4)}$, $432_{(5)}$, $807_{(9)}$, $10101_{(2)}$ を、すべて 10 進数に変えなさい。

【解答】

$$\begin{aligned} 2101_{(3)} &= 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \\ &= 2 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 54 + 9 + 0 + 1 = 64_{(10)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 321_{(4)} &= 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 \\ &= 3 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 48 + 8 + 1 = 57_{(10)} \end{aligned}$$

$$432_{(5)} = 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 117_{(10)}$$

$$807_{(9)} = 8 \cdot 9^2 + 0 \cdot 9^1 + 7 \cdot 9^0 = 655_{(10)}$$

$$10101_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 21_{(10)}$$

*15 2 進数を 4 桁ずつに区切った 16 進数を用いられることが多い。16 進法においては、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10, 11, 12, … と数える。詳しくは、情報端末に関する他の科目などを参照のこと。

B. 2進法, 5進法の小数を10進法の小数に

10進数の0.3109は、左から順に1の位、 $\frac{1}{10}$ の位、 $\frac{1}{100}$ の位、 $\frac{1}{1000}$ の位、 $\frac{1}{10000}$ の位からできている。これは、 10^0 の位、 $\frac{1}{10^1}$ の位、 $\frac{1}{10^2}$ の位、 $\frac{1}{10^3}$ の位、 $\frac{1}{10^4}$ の位^{*16}と言い換えられる。

$$0.3109_{(10)} = 0 \cdot 10^0 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 1 \cdot \frac{1}{10^2} + 0 \cdot \frac{1}{10^3} + 9 \cdot \frac{1}{10^4}$$

同様に、5進数ならば桁が1つ減るごとに $\frac{1}{5}$ 倍の個数の数を表せるため、 $0.1304_{(5)}$ は、右から順に 5^0 の位、 $\frac{1}{5^1}$ の位、 $\frac{1}{5^2}$ の位、 $\frac{1}{5^3}$ の位、 $\frac{1}{5^4}$ の位となる。そのため、次のように計算して10進数にできる。

$$\begin{aligned} 0.1304_{(5)} &= 0 \cdot 5^0 + 1 \cdot \frac{1}{5^1} + 3 \cdot \frac{1}{5^2} + 0 \cdot \frac{1}{5^3} + 4 \cdot \frac{1}{5^4} \\ &= 1 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.04 + 0 \cdot 0.008 + 4 \cdot 0.0016 = 0.2 + 0.12 + 0.0064 = 0.3264_{(10)} \end{aligned}$$

$$0.1304_{(5)} = 0.3264_{(10)}$$

| | |
|-----------|--------------|
| 0.2 | ← 1 × 0.2 |
| 0.12 | ← 3 × 0.04 |
| 0 | ← 0 × 0.008 |
| +) 0.0064 | ← 4 × 0.0016 |
| 0.3264 | |

この計算は、右上のような筆算を用いて行くとよい。



一般に、10進法の分数に直して、分母が2の累乗や5の累乗になるときのみ、2進法や5進法にしたとき有限小数になる。特に、 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$ が無限小数になってしまうので、3進法、6進法、7進法、9進法などで表された小数を10進法の小数にすることは、ここでは取り上げない。

【例題 65】 以下の小数を、すべて10進法の小数に変えなさい。

1. $0.321_{(5)}$

2. $0.4012_{(5)}$

3. $0.101_{(2)}$

4. $0.1101_{(2)}$

5. $0.31_{(4)}$

【解答】

1. $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{1}{5^2} = 0.04$, $\frac{1}{5^3} = 0.008$ なので
 $0.321_{(5)} = 3 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.04 + 1 \cdot 0.008$
 $= 0.6 + 0.08 + 0.008 = 0.688_{(10)}$

| | | |
|---|----------|-------------|
| ◀ | 0.6 | ← 3 × 0.2 |
| | 0.08 | ← 2 × 0.04 |
| | +) 0.008 | ← 1 × 0.008 |
| | 0.688 | |

2. $\frac{1}{5^4} = 0.0016$ なので
 $0.4012_{(5)} = 4 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.04 + 1 \cdot 0.008 + 2 \cdot 0.0016$
 $= 0.8 + 0.008 + 0.0032 = 0.8112_{(10)}$

| | | |
|---|-----------|--------------|
| ◀ | 0.8 | ← 4 × 0.2 |
| | 0 | ← 0 × 0.04 |
| | 0.008 | ← 1 × 0.008 |
| | +) 0.0032 | ← 2 × 0.0016 |
| | 0.8112 | |

3. $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{2^2} = 0.25$, $\frac{1}{2^3} = 0.125$ なので
 $0.101_{(2)} = 1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.125$
 $= 0.5 + 0.125 = 0.625_{(10)}$

| | | |
|---|----------|-------------|
| ◀ | 0.5 | ← 1 × 0.5 |
| | 0 | ← 0 × 0.25 |
| | +) 0.125 | ← 1 × 0.125 |
| | 0.625 | |

4. $\frac{1}{2^4} = 0.0625$ なので
 $0.1101_{(2)} = 1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.125 + 1 \cdot 0.0625$
 $= 0.5 + 0.25 + 0.0625 = 0.8125_{(10)}$

| | | |
|---|-----------|--------------|
| ◀ | 0.5 | ← 1 × 0.5 |
| | 0.25 | ← 1 × 0.25 |
| | 0 | ← 0 × 0.125 |
| | +) 0.0625 | ← 1 × 0.0625 |
| | 0.8125 | |

5. $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{4^2} = 0.0625$ なので
 $0.31_{(4)} = 3 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.0625$
 $= 0.75 + 0.0625 = 0.8125_{(10)}$

| | | |
|---|-----------|--------------|
| ◀ | 0.75 | ← 3 × 0.25 |
| | +) 0.0625 | ← 1 × 0.0625 |
| | 0.8125 | |

^{*16} 数学Ⅱにおいて、負の指数を学び、 $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ と定義され、たとえば、 $\frac{1}{10^1} = 10^{-1}$, $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$ である。そのため、0.3109を左から順に 10^0 の位、 10^{-1} の位、 10^{-2} の位、 10^{-3} の位、 10^{-4} の位と考えることもできる。

3. 10進数を n 進数に

A. 10進法の整数を n 進法の整数に

$$26_{(10)} = 11010_{(2)} \quad 163_{(10)} = 431_{(6)}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 26} \\ 2 \overline{) 13} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 6} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 3} \cdots 0 \\ 1 \cdots 1 \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \overline{) 163} \\ 6 \overline{) 27} \cdots 1 \\ 4 \cdots 3 \uparrow \end{array}$$

たとえば、 $26_{(10)}$ を 2 進数にするには、 $4531_{(10)} = 4531_{(10)}$
 左のようにする。
 $10 \overline{) 4531}$
 $10 \overline{) 453} \cdots 1$
 $10 \overline{) 45} \cdots 3$
 $4 \cdots 5 \uparrow$
 つまり、2 で割り続けて余りを書き並べ、
 $26_{(10)} = 11010_{(2)}$ と求められる。
 この求め方については、 $4531_{(10)}$ を 10 で
 割り続けると、右のように、10 進数の位
 が順に現れることから理解できる。



上のやり方で求められることの厳密な証明は難しい (p.111).

【例題 66】 $53_{(10)}$ を 4 進数, 3 進数, 2 進数で表しなさい。

また、 $456_{(10)}$ を 9 進数, 8 進数, 7 進数で表しなさい。

【解答】

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 53} \\ 3 \overline{) 17} \cdots 2 \\ 3 \overline{) 5} \cdots 2 \\ 1 \cdots 2 \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \overline{) 53} \\ 2 \overline{) 26} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 13} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 6} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 3} \cdots 0 \\ 1 \cdots 1 \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \overline{) 456} \\ 9 \overline{) 50} \cdots 6 \\ 5 \cdots 5 \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \overline{) 456} \\ 8 \overline{) 57} \cdots 0 \\ 7 \cdots 1 \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \overline{) 456} \\ 7 \overline{) 65} \cdots 1 \\ 7 \overline{) 9} \cdots 2 \\ 1 \cdots 2 \uparrow \end{array}$$

$$53_{(10)} = 311_{(4)} = 1222_{(3)} = 110101_{(2)}$$

$$456_{(10)} = 556_{(9)} = 710_{(8)} = 1221_{(7)}$$

B. 10進法の小数を 2 進法, 5 進法の小数に

たとえば、 $0.296_{(10)}$ を 5 進法の小数にするには、左下のように、5 を掛けて整数部分を取り除くことを繰り返し、最後に整数部分を上から書き並べればよい。同じように、2 進数にするには、真ん中のように 2 を掛けていく。

$$0.296_{(10)} = 0.122_{(5)}$$

$$\begin{array}{r} 0.296 \\ \times 5 \\ \hline \textcircled{1}.480 \\ \times 5 \leftarrow \textcircled{1} \text{は無視して掛ける} \\ \hline \textcircled{2}.40 \leftarrow 0.48 \times 5 \\ \times 5 \leftarrow \textcircled{2} \text{は無視して掛ける} \\ \hline \textcircled{2}.0 \leftarrow 0.4 \times 5 \end{array}$$

$$0.625_{(10)} = 0.101_{(2)}$$

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ \times 2 \\ \hline \textcircled{1}.250 \\ \times 2 \leftarrow \textcircled{1} \text{は無視して掛ける} \\ \hline \textcircled{0}.50 \leftarrow 0.25 \times 2 \\ \times 2 \\ \hline \textcircled{1}.0 \leftarrow 0.5 \times 2 \end{array}$$

$$0.378_{(10)} = 0.378_{(10)}$$

$$\begin{array}{r} 0.378 \\ \times 10 \\ \hline \textcircled{3}.780 \\ \times 10 \\ \hline \textcircled{7}.80 \leftarrow 0.78 \times 10 \\ \times 10 \\ \hline \textcircled{8}.0 \leftarrow 0.8 \times 10 \end{array}$$

これは、 $0.378_{(10)}$ に 10 を掛けて整数部分を取り除くことを繰り返すと、下ののように、10 進数の位が順に現れることから理解できる。



上のやり方で求められることの厳密な証明は難しい (p.112).

【例題 67】 $0.456_{(10)}$ を 5 進数で表せ。また、 $0.8125_{(10)}$ を 2 進数で表せ。

【解答】

$$\begin{array}{r}
 0.456 \\
 \times 5 \\
 \hline
 \textcircled{2}.280 \\
 \times 5 \quad \leftarrow \textcircled{2} \text{は無視して掛ける} \\
 \hline
 \textcircled{1}.40 \quad \leftarrow 0.28 \times 5 \\
 \times 5 \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{は無視して掛ける} \\
 \hline
 \textcircled{2}.0 \quad \leftarrow 0.4 \times 5
 \end{array}$$

$$0.456_{(10)} = 0.212_{(5)}$$

$$\begin{array}{r}
 0.8125 \\
 \times 2 \\
 \hline
 \textcircled{1}.6250 \\
 \times 2 \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{は無視して掛ける} \\
 \hline
 \textcircled{1}.250 \quad \leftarrow 0.625 \times 2 \\
 \times 2 \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{は無視して掛ける} \\
 \hline
 \textcircled{0}.50 \quad \leftarrow 0.25 \times 2 \\
 \times 2 \\
 \hline
 \textcircled{1}.0 \quad \leftarrow 0.25 \times 2
 \end{array}$$

$$0.8125_{(10)} = 0.1101_{(2)}$$

4. n 進数の四則計算

A. 2進数の足し算

まず、10進数の足し算 $3578 + 8229$ を筆算で考えてみよう。

$$\begin{array}{r}
 3578 \\
 + 8229 \\
 \hline
 11807
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 3578 \\
 + 8229 \\
 \hline
 107
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 3578 \\
 + 8229 \\
 \hline
 807
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 3578 \\
 + 8229 \\
 \hline
 11807
 \end{array}$$

$8+9=17$ $7+2+1=10$ $5+2+1=8$ $3+8=11$

同様に、2進数の足し算 $10001_{(2)} + 1011_{(2)}$ は次のように筆算できる。

ここで、 $0_{(2)} + 0_{(2)} = 0_{(2)}$, $0_{(2)} + 1_{(2)} = 1_{(2)}$, $1_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$, $1_{(2)} + 1_{(2)} + 1_{(2)} = 11_{(2)}$ に注意しよう。

$$\begin{array}{r}
 10001 \\
 + 1011 \\
 \hline
 11100
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 10001 \\
 + 1011 \\
 \hline
 100
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 10001 \\
 + 1011 \\
 \hline
 100
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 10001 \\
 + 1011 \\
 \hline
 1100
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 10001 \\
 + 1011 \\
 \hline
 11100_{(2)}
 \end{array}$$

$1+1=10$ $0+1+1=10$ $0+0+1=1$ $0+1=1$ 1 を下ろした

【例題 68】 次の足し算をしなさい。

1. $1001_{(2)} + 101_{(2)}$

2. $11001_{(2)} + 11011_{(2)}$

3. $11111_{(2)} + 1011_{(2)}$

【解答】

1.
$$\begin{array}{r}
 1001 \\
 + 101 \\
 \hline
 1110_{(2)}
 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r}
 11001 \\
 + 11011 \\
 \hline
 110100_{(2)}
 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r}
 11111 \\
 + 1011 \\
 \hline
 10100_{(2)}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 11111 \\
 + 1011 \\
 \hline
 10
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 11111 \\
 + 1011 \\
 \hline
 010
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 11111 \\
 + 1011 \\
 \hline
 10100_{(2)}
 \end{array}$$

◀ 2進数では $1+1+1=11$ に注意.

C. 2進数の掛け算

2進数の掛け算 $1101_{(2)} \times 101_{(2)}$ は次のように筆算して、 $1000001_{(2)}$ と分かる。

$$\begin{array}{r}
 1101 \\
 \times 101 \\
 \hline
 1101 \\
 11010 \\
 \hline
 1101001 \\
 \hline
 1000001_{(2)}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 1101 \\
 \times 101 \\
 \hline
 1101 \\
 11010 \\
 \hline
 1101001 \\
 \hline
 1001
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 1101 \\
 \times 101 \\
 \hline
 1101 \\
 11010 \\
 \hline
 1101001 \\
 \hline
 1001
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 1101 \\
 \times 101 \\
 \hline
 1101 \\
 11010 \\
 \hline
 1101001 \\
 \hline
 1000001_{(2)}
 \end{array}$$

1101×1 1101×1 最後に足し算

【例題 70】 次の掛け算をしなさい。

1. $1011_{(2)} \times 101_{(2)}$ 2. $10101_{(2)} \times 1011_{(2)}$ 3. $1011_{(2)} \times 111_{(2)}$ 4. $10011_{(2)} \times 1111_{(2)}$

【解答】

(1)
$$\begin{array}{r}
 1011 \\
 \times 101 \\
 \hline
 1011 \\
 10110 \\
 \hline
 110111_{(2)}
 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r}
 10101 \\
 \times 1011 \\
 \hline
 10101 \\
 101010 \\
 1010100 \\
 10101001 \\
 \hline
 11100111_{(2)}
 \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r}
 1011 \\
 \times 111 \\
 \hline
 1011 \\
 10110 \\
 101100 \\
 \hline
 1001101_{(2)}
 \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{r}
 10011 \\
 \times 1111 \\
 \hline
 10011 \\
 100110 \\
 1001100 \\
 10011001 \\
 \hline
 100011101_{(2)}
 \end{array}$$

D. 2進数の割り算

2進数の足し算 $110101_{(2)} \div 101_{(2)}$ は次のように筆算して、商 $1010_{(2)}$ ，余り $11_{(2)}$ となる。

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 101 \overline{) 110101} \\
 \underline{101} \\
 11 \\
 \underline{101} \\
 110
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 1 \\
 101 \overline{) 110101} \\
 \underline{101} \\
 11 \\
 \underline{101} \\
 110
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 10 \\
 101 \overline{) 110101} \\
 \underline{101} \\
 11 \\
 \underline{101} \\
 110
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 10 \\
 101 \overline{) 110101} \\
 \underline{101} \\
 110 \\
 \underline{101} \\
 110
 \end{array}$$

$110 \div 101$ は商が1 1 を下ろした $11 \div 101$ は商が0 さらに0を下ろした

$$\begin{array}{r}
 101 \\
 101 \overline{) 110101} \\
 \underline{101} \\
 110 \\
 \underline{101} \\
 1
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 101 \\
 101 \overline{) 110101} \\
 \underline{101} \\
 110 \\
 \underline{101} \\
 11
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 1010 \\
 101 \overline{) 110101} \\
 \underline{101} \\
 110 \\
 \underline{101} \\
 110 \\
 \underline{101} \\
 11_{(2)}
 \end{array}$$

$110 \div 101$ は商が1 さらに1を下ろした $11 \div 101$ は商が0

【例題 71】 次の割り算をしなさい。割り切れない場合は商と余りを答えなさい。

1. $111111_{(2)} \div 11_{(2)}$ 2. $10101111_{(2)} \div 110_{(2)}$ 3. $10001000_{(2)} \div 101_{(2)}$

【解答】

(1)
$$\begin{array}{r}
 10101 \\
 11 \overline{) 111111} \\
 \underline{11} \\
 11 \\
 \underline{11} \\
 11 \\
 \underline{11} \\
 11 \\
 \underline{11} \\
 0
 \end{array}$$

商 $10101_{(2)}$

(2)
$$\begin{array}{r}
 11101 \\
 110 \overline{) 10101111} \\
 \underline{110} \\
 1001 \\
 \underline{110} \\
 111 \\
 \underline{110} \\
 111 \\
 \underline{111} \\
 110 \\
 \underline{110} \\
 1
 \end{array}$$

商 $11101_{(2)}$ ，余り $1_{(2)}$

(3)
$$\begin{array}{r}
 11011 \\
 101 \overline{) 10001000} \\
 \underline{101} \\
 111 \\
 \underline{101} \\
 1000 \\
 \underline{101} \\
 110 \\
 \underline{101} \\
 1
 \end{array}$$

商 $11011_{(2)}$ ，余り $1_{(2)}$

【練習 72 : 2 進数の四則計算】

次の計算をなさい。割り切れない場合は商と余りを答えなさい。

- (1) $11111_{(2)} + 11111_{(2)}$ (2) $1001000_{(2)} - 101011_{(2)}$ (3) $100100100_{(2)} - 111111_{(2)}$
 (4) $11010110_{(2)} \div 111_{(2)}$ (5) $1101011010_{(2)} \div 1011_{(2)}$ (6) ㊦㊧ $1111_{(2)} \times 1111_{(2)}$

(1)
$$\begin{array}{r} 11111 \\ + 11111 \\ \hline 111110_{(2)} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 1001000 \\ - 101011 \\ \hline 11101_{(2)} \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r} 100100100 \\ - 111111 \\ \hline 11100101_{(2)} \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{r} 11110 \\ 111 \overline{) 11010110} \\ \underline{111} \\ 1100 \\ \underline{111} \\ 1011 \\ \underline{111} \\ 1001 \\ \underline{111} \\ 1000_{(2)} \end{array}$$

 商 $11110_{(2)}$, 余り $100_{(2)}$

(5)
$$\begin{array}{r} 1001110 \\ 1011 \overline{) 1101011010} \\ \underline{1011} \\ 10011 \\ \underline{1011} \\ 10000 \\ \underline{1011} \\ 1011 \\ \underline{1011} \\ 0_{(2)} \end{array}$$

 商 $1001110_{(2)}$

(6) $1_{(2)} + 1_{(2)} + 1_{(2)} + 1_{(2)} = 20$
 のように表して進めると

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 1111 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ \hline 11111 \\ 0101 \\ \hline 2^1 3^0 0^3 0^2 0^1 0^1 \\ \downarrow \\ 11100001_{(2)} \end{array}$$

E. n 進数の計算

2 進数以外においても、足し算と引き算は筆算で計算できる*17.

【㊦㊧ 73 : n 進数の計算】

次の計算をなさい。

- ① $12012_{(3)} + 2201_{(3)}$ ② $123456_{(7)} - 54321_{(7)}$ ③ $43210123_{(5)} - 1234321_{(5)}$

【解答】

①
$$\begin{array}{r} 12012 \\ + 2201 \\ \hline 21220_{(3)} \end{array}$$

②
$$\begin{array}{r} 123456 \\ - 54321 \\ \hline 36135_{(7)} \end{array}$$

③
$$\begin{array}{r} 43210123 \\ - 1234321 \\ \hline 41420302_{(5)} \end{array}$$

*17 掛け算・割り算は、九九が使えないため難しい。

1. 余りの判定法の証明

倍数と余りの判定法のみまとめ

自然数 n について、倍数と余りの判定が以下のようにできる。

- (1) • 「 $n \div 2$ の余り」 = 「 $(n$ の一の位) $\div 2$ の余り」
 • 「 $n \div 4$ の余り」 = 「 $(n$ の下 2 桁) $\div 4$ の余り」
 • 「 $n \div 8$ の余り」 = 「 $(n$ の下 3 桁) $\div 8$ の余り」
- (2) • 「 $n \div 5$ の余り」 = 「 $(n$ の一の位) $\div 5$ の余り」
 • 「 $n \div 25$ の余り」 = 「 $(n$ の下 2 桁) $\div 25$ の余り」
- (3) • 「 $n \div 3$ の余り」 = 「 $(n$ の全ての位の和) $\div 3$ の余り」
 • 「 $n \div 9$ の余り」 = 「 $(n$ の全ての位の和) $\div 9$ の余り」

A. 『2,4,8,5,25 で割ったときの余り』の証明

自然数 n の一の位を a ，下 2 桁を b ，下 3 桁を c とし，それぞれ $n = 10A + a$ ， $n = 100B + b$ ， $n = 1000C + c$ とおく (A, B, C は整数)。

$\text{mod } 2$ において， $n = 10A + a \equiv 0 + a = a$ より，「 $n \div 2$ の余り」 = 「 $(n$ の一の位) $\div 2$ の余り」は示された。

$\text{mod } 4$ において， $n = 100B + b \equiv 0 + b = b$ より，「 $n \div 4$ の余り」 = 「 $(n$ の下 2 桁) $\div 4$ の余り」は示された。

$\text{mod } 8$ において， $n = 1000C + c \equiv 0 + c = c$ より，「 $n \div 8$ の余り」 = 「 $(n$ の下 3 桁) $\div 8$ の余り」は示された。

$\text{mod } 5$ において， $n = 10A + a \equiv 0 + a = a$ より，「 $n \div 5$ の余り」 = 「 $(n$ の一の位) $\div 5$ の余り」は示された。

$\text{mod } 25$ において， $n = 100B + b \equiv 0 + b = b$ より，「 $n \div 25$ の余り」 = 「 $(n$ の下 2 桁) $\div 25$ の余り」は示された。

B. 『3,9 で割ったときの余り』の証明

自然数 n は k 桁の数とし，下から第 i 桁を a_i ($0 \leq a_i \leq 9$) とする。すると，

$$n = a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_1$$

である。 $\text{mod } 3$ ， $\text{mod } 9$ のいずれについても， $10 \equiv 1$ であるから

$$n \equiv a_k \cdot 1^{k-1} + a_{k-1} \cdot 1^{k-2} + \cdots + a_3 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 1 + a_1 = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

右辺は n の全ての位の和に一致するから，「 $n \div 3$ の余り」 = 「 $(n$ の全ての位の和) $\div 3$ の余り」，「 $n \div 9$ の余り」 = 「 $(n$ の全ての位の和) $\div 9$ の余り」がいずれも示された。

2. 1次方程式 $ax + by = c$ の整数解を1つ求める別の方法

p.87, 89 で扱った方法には，別のやり方が存在する。たとえば， $60x + 41y = 5$ であれば

$$\begin{aligned} 60x + 41y = 5 &\Leftrightarrow (41 + 19)x + 41y = 5 \\ &\Leftrightarrow 41(x + y) + 19x = 5 \\ &\Leftrightarrow (19 \cdot 2 + 3)(x + y) + 19x = 5 \\ &\Leftrightarrow 19(2x + 2y) + 3(x + y) + 19x = 5 \\ &\Leftrightarrow 19(3x + 2y) + 3(x + y) = 5 \end{aligned}$$

ここで $3x + 2y = A$, $x + y = B$ とおいた $19A + 3B = 5$ には、整数解 $(A, B) = (2, -11)$ が存在する。
 $A = 3x + 2y = 2$, $B = x + y = -11$ を解いて $(x, y) = (24, -35)$ 。

3. ⑨(展) $ax + by = c$ が整数解をもつ条件

A. $ax + by = 1$ が整数解をもつ条件

p.89 の例題で見たように、 $3x + 6y = 1$ のように、 a, b が互いに素でないときは $ax + by = 1$ には整数解が存在しない。これは、逆も成立し、たいていは次の形で述べられる。その証明には、「 b で割った余りは (割り切れる場合を除くと) $b - 1$ 通りしかない」ことが用いられる。

$ax + by = 1$ が整数解をもつ条件

「 a, b が互いに素である」 \iff 「1 次不定方程式 $ax + by = 1$ の整数解が存在する」

(証明) (\Leftarrow) $ax + by = 1$ となる整数 x, y が存在することを示すには、 $ax = b(-y) + 1$ であるから、適当な整数 x を選べば、 ax を b で割った余りが 1 になることを示せばよい。そこで、 $b - 1$ 個の整数 $a, 2a, 3a, \dots, a(b - 1)$ の中に、 b で割った余りが 1 になるものが存在することを示す。

$a, 2a, 3a, \dots, a(b - 1)$ の中で、 b で割った余りが 1 となるものがなかったと仮定する (………… ①)。

まず、 a, b は互いに素なので、 $a, 2a, 3a, \dots, a(b - 1)$ はすべて b で割り切れない。つまり、 b で割った余りは 1 から $b - 1$ のいずれかである。

しかし、 $a, 2a, 3a, \dots, a(b - 1)$ は $b - 1$ 個あるので、この中に余りが 1 のものがないならば、 b で割った余りが等しくなるような la, ma ($b > l > m > 0$) が存在しなければならない。このとき

$$la - ma \text{ が } b \text{ で割り切れる} \Rightarrow la - ma = kb \text{ となる } 0 \text{ でない整数 } k \text{ が存在する}$$

となつて $(l - m)a = kb$ であるが、 $l - m < b$ より^{*18}、 a, b が互いに素であることと矛盾する。

よつて、①は間違っており、 $a, 2a, 3a, \dots, a(b - 1)$ の中で、 b で割った余りが 1 となるものが存在する。それを pa とおき、 pa を b で割った余りを q とすれば、 $pa = qb + 1 \Leftrightarrow ap + b(-q) = 1$ となり、 $ax + by = 1$ の整数解として $(p, -q)$ が存在すると示される。

(\Rightarrow) 対偶「 a, b が最大公約数 $d (\neq 1)$ をもつならば、 $ax + by = 1$ は整数解をもたない」を背理法で示す。仮定より、 $a = dA, b = dB$ とおける (A, B は互いに素な整数) ので、 $ax + by = 1 \Leftrightarrow d(Ax + By) = 1$ である。これを満たす整数解 (x, y) があつたならば、左辺は d の倍数、右辺は d で割って 1 余り矛盾する。よつて、 $ax + by = 1$ が整数解を持たないことが示されて、対偶が示された。

B. $ax + by = c$ が整数解をもつ条件

たとえば、 $6x + 12y = 14$ は各辺を 2 で割って $3x + 6y = 7$ となる。このように、方程式 $ax + by = c$ は、 a, b, c の最大公約数が 1 になるようにできる。

この $3x + 6y = 7$ には整数解はない。 $3(x + 2y) = 7$ と変形でき、 x, y が整数であれば左辺は 3 の倍数となる一方、右辺 3 の倍数にならないからである。

一般に、 $ax + by = c$ について次が成り立つことが、上の証明を応用して示される。

^{*18} 両辺を $l - m$ で割ると $a = \frac{kb}{l - m}$ となるが、 $l - m < b$ より右辺に b の約数が残り、それが a, b の 1 でない公約数となってしまう。

a, b, c の最大公約数が 1 のとき

「 a, b が互いに素」 \iff 「1 次不定方程式 $ax + by = c$ の整数解が存在する」

4. ④⑤ 一次不定方程式の一般解について

A. 1 次不定方程式 $ax + by = c$ の一般解を確認する

次のようにして、1 次不定方程式 $ax + by = c$ の一般解を見分ける方法 (p.94) が示される。

一次不定方程式の一般解の正誤を確かめる

$x = x_0k + x_1, y = y_0k + y_1$ (k は整数) は、次の 2 点を満たしていれば一次不定方程式 $ax + by = c$ の一般解である。ただし、 x_0, x_1, y_0, y_1, a, b はすべて整数であり、 x_0, y_0, a, b は 0 でないとする。

- i. $ax + by = c$ であること。つまり、 $ax + by = a(x_0k + x_1) + b(y_0k + y_1)$ を計算して c になること。
- ii. $|x_0|, |y_0|$ が互いに素であること。

(証明) まず、i. を満たしているので、 $ax + by$ に $x = x_0k + x_1, y = y_0k + y_1$ を代入した式

$$a(x_0k + x_1) + b(y_0k + y_1) = (ax_0 + by_0)k + (ax_1 + by_1)$$

は k に関わらず c に等しい。よって、 $ax_0 + by_0 = 0 \dots\dots\dots$ ②, $ax_1 + by_1 = c \dots\dots\dots$ ③ である。

一方、 $ax + by = c$ を満たす整数解 (p, q) を任意にとる。このとき、適当な実数 l, m が存在し、 $p = x_0l + x_1, q = y_0m + y_1$ と表せる。 (p, q) は解なので

$$\begin{aligned} ap + bq = c &\iff a(x_0l + x_1) + b(y_0m + y_1) = c \\ &\iff ax_0l + by_0m + ax_1 + by_1 = c \\ &\iff -by_0l + by_0m + c = c \text{ (②より } ax_0 = -by_0 \text{ と, ③を代入した)} \\ &\iff by_0(m - l) = 0 \end{aligned}$$

$by_0 \neq 0$ から $m - l = 0$ であり、 $m = l$ と分かる。よって、 $(p, q) = (x_0l + x_1, y_0l + y_1)$ とおける。

あとは、 l が整数でないといけないことを示せばよい。

まず、 l が無理数であれば、 p, q が整数でないことは明らか。 $l = \frac{v}{u}$ と既約分数で表せるとすると、

$p = x_0 \cdot \frac{v}{u} + x_1, q = y_0 \cdot \frac{v}{u} + y_1$ はともに整数なので、 u は x_0, y_0 の公約数でないといけない。しかし、ii. より、 x_0, y_0 の最大公約数は 1。よって、 $u = 1$ であり l は整数である。

以上より、 $ax + by = c$ のどんな整数解も、整数 l を用いて $(x, y) = (x_0l + x_1, y_0l + y_1)$ と表せる。

B. $ax + by = c$ の一般解

互いに素な a, b について、 $ax + by = c$ の解の 1 つが $(x, y) = (x_0, y_0)$ ならば、 $(x, y) = (bk + x_0, -ak + y_0)$ は $ax + by = c$ の一般解になっている。これは、上の確認方法によって確かめることができる。

5. ④展 『10進数から n 進数への変換』の証明

A. n 進法による数の表現

たとえば、 n 進法の整数において、小さい位から $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ だったとしよう ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ はすべて 0 から $n-1$ の整数). このような整数 N は $a_k \cdots a_2 a_1 a_0_{(n)}$ と書かれ

$$N = a_k \cdots a_2 a_1 a_0_{(n)} = a_k \cdot n^k + \cdots + a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0$$

である. たとえば、10進法において、小さい位から 1, 2, 3, 4, 5 である整数 N は次のようになる.

$$N = 12345_{(10)} = 1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^4$$

同じように、 0 と 1 の間の大きさの n 進法的小数において、大きい位から順に a_1, a_2, \dots, a_k だったとしよう (a_1, a_2, \dots, a_k はすべて 0 から $n-1$ の整数). このような小数 N は $0.a_1 a_2 \cdots a_{k(n)}$ と書かれ

$$N = 0.a_1 a_2 \cdots a_{k(n)} = 0 + a_1 \cdot \frac{1}{n} + a_2 \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + a_k \cdot \frac{1}{n^k}$$

である. たとえば、10進法において、小数第1位から順に 9, 8, 7, 6, 5 である小数 N は次のようになる.

$$N = 0.98765_{(10)} = 0 + 9 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10^2} + 7 \cdot \frac{1}{10^3} + 6 \cdot \frac{1}{10^4} + 5 \cdot \frac{1}{10^5}$$

B. 『10進法の整数を n 進法の整数にする方法』の証明

この方法は、結局次のようにまとめられ、数学 B で学ぶ「数学的帰納法」を使って示すことができる.

10進法の整数を n 進法の整数にする方法

整数 N を n で割り、その商を再び n で割ることを、商が n 未満になるまで繰り返す (..... ④). ④が k 回行われ、 i 回目の余りを a_{i-1} ($1 \leq i \leq k$), 最後に残った n より小さな商を a_k とおくと、 $N = a_k \cdots a_2 a_1 a_0_{(n)}$ である.

$$\begin{array}{r} 163_{(10)} = 431_{(6)} \\ 6 \overline{) 163} \\ \underline{6 \dots 1} \\ 4 \dots 3 \end{array}$$

(証明) $A_k = \{N \mid n^k \leq N < n^{k+1}\}$ とおくと、④を k 回行う数と集合 A_k は一致する. 0 以上のすべての k について、 A_k に含まれる全要素が定理を満たすことを、 k についての数学的帰納法を用いて示す.

i) $k=0$ のときは明らか. $k=1$ のとき、 $A_1 \in N$ について、 $N \div n$ の余りが a_0 , 商が a_1 となるので $N = a_1 a_0_{(n)}$ を示せばよいが、 $N \div n = a_1 \cdots a_0$ より $N = a_1 \cdot n + a_0 = a_1 a_0_{(n)}$ となって示された.

ii) $0 \leq l \leq k$ である整数 l に対し、 $A_l \in N$ については、命題が正しいと仮定する (..... ⑤).

このとき、 $A_{k+1} \ni N$ について、④を繰り返した i 回目の余りを a_{i-1} ($1 \leq i \leq k+1$), 最後に残った n より小さな商を a_{k+1} とおくと、 $N = a_{k+1} \cdots a_2 a_1 a_0_{(n)}$ であることを示せばよい.

N を最初に割った商を q , 余りを r とおく. すると、 $r = a_0$ より $N = nq + a_0$ (..... ⑥) である.

また、 $q \in A_k$ であり、最後に残った n より小さな商は N と同じ a_{k+1} , q に対する i 回目の④の余りは、 N に対する $i+1$ 回目の④の余りに等しく a_i .

よって、仮定⑤より $q = a_{k+1} \cdots a_3 a_2 a_1_{(n)} = a_{k+1} \cdot n^k + \cdots + a_3 \cdot n^2 + a_2 \cdot n + a_1$ である. ⑥に代入して

$$\begin{aligned} N &= n(a_{k+1} \cdot n^k + \cdots + a_3 \cdot n^2 + a_2 \cdot n + a_1) + a_0 \\ &= a_{k+1} \cdot n^{k+1} + \cdots + a_3 \cdot n^3 + a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0 = a_{k+1} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0_{(n)} \end{aligned}$$

よって、 $A_{k+1} \ni N$ でも正しい.

以上より、④が何回必要な整数であっても、正しいことが示された.

C. 『10進法の小数を n 進法の小数にする方法』の証明

この方法は、結局次のようにまとめられ、数学 B で学ぶ「数学的帰納法」を使って示すことができる。

10進法の小数を n 進法の小数にする方法

$0 < N < 1$ とする。 N に n を掛け、その答えの整数部分を取り除き、小数部分を再び n で掛けることを、繰り返す (…… ⑦)。 k 回目の ⑦ で取り除かれた整数部分を a_k とおくと、 $N = 0.a_1a_2a_3 \cdots a_k \cdots_{(n)}$ である*19。

$$\begin{array}{r}
 0.296 \quad (0.296_{(10)} = 0.122_{(5)}) \\
 \times \quad 5 \\
 \hline
 \textcircled{1}.480 \\
 \times \quad 5 \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{は無視して掛ける} \\
 \hline
 \textcircled{2}.40 \quad \leftarrow 0.48 \times 5 \\
 \times \quad 5 \quad \leftarrow \textcircled{2} \text{は無視して掛ける} \\
 \hline
 \textcircled{2}.0 \quad \leftarrow 0.4 \times 5
 \end{array}$$

(証明・どんな実数にも n 進法表記ができることは証明無しに用いる)

実数 N に対し、 $N = 0.b_1b_2b_3 \cdots b_k \cdots_{(n)}$ とする (有限小数の場合は、ある程度以上大きな k では $b_k = 0$ とする)。 $a_k = b_k$ であることを示せばよい。

ここで、「⑦を l 回繰り返した時、 N が $b_l.b_{l+1}b_{l+2} \cdots_{(n)}$ となっていること」を数学的帰納法を用いて示す。

(1) $l = 1$ のとき

$$N = 0.b_1b_2 \cdots b_k \cdots_{(n)} = 0 + b_1 \cdot \frac{1}{n} + b_2 \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + b_k \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots$$

であるから、 N に n を掛けると

$$nN = b_1 + b_2 \cdot \frac{1}{n} + b_3 \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + b_k \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \cdots = b_1.b_2b_3 \cdots_{(n)}$$

となり、正しい。

(2) $l = k$ のとき正しいと仮定する。つまり、⑦を k 回繰り返した後、 N が $b_k.b_{k+1}b_{k+2} \cdots_{(n)}$ となっていると仮定する。この小数部分 $0.b_{k+1}b_{k+2} \cdots_{(n)}$ を n 倍すると

$$\begin{aligned}
 n \times 0.b_{k+1}b_{k+2} \cdots_{(n)} &= n \left(0 + b_{k+1} \cdot \frac{1}{n} + b_{k+2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots \right) \\
 &= b_{k+1} + b_{k+2} \cdot \frac{1}{n} + b_{k+3} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots = b_{k+1}.b_{k+2}b_{k+3} \cdots_{(n)}
 \end{aligned}$$

となり、 $l = k + 1$ のときも正しい。

以上より、任意の自然数 k について、⑦を k 回繰り返した時、 N が $b_k.b_{k+1}b_{k+2} \cdots_{(n)}$ となって整数部分は b_k となる。

よって、 k 回繰り返した後に取り除く整数部分が b_k に一致するから、 $a_k = b_k$ が示された。

*19 小数点以降、無限に数が続く数は「無限個の数の和」を表し、無限の扱いについて注意が必要になるが、この場合は問題がない。詳しくは数学 III で学ぶ。

第3章 平面図形



この章では、三角形・四角形・円などの平面図形について成り立つ重要な法則について学ぶ。



3.1 三角形の性質（1）

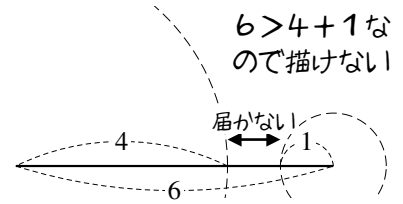
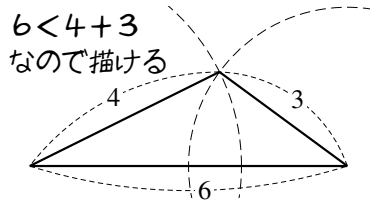


1. 三角形の成立条件

A. 描ける三角形・描けない三角形

3辺が6 cm, 4 cm, 3 cmの三角形は描けるが、3辺が6 cm, 4 cm, 1 cmの三角形を描くことはできない。

一番長い辺（6 cm）を底辺にして書いてみよう。すると、一番長い辺は、他の2辺の和より短くないといけない。



【例題1】 3辺が以下で与えられる三角形が、存在するか、存在しないか、答えなさい。

- a) 5, 3, 3 b) 7, 4, 3 c) 8, 5, 2 d) 9, 6, 4

【解答】

- a) 存在する b) 存在しない c) 存在しない d) 存在する

B. 三角形の成立条件

3辺が a, b, c である三角形が存在する条件は、以下のようにまとめられる。

— 三角形の成立条件 —

3辺が a, b, c である三角形が存在する条件は

$$c < a + b, \quad b < c + a, \quad a < b + c \text{ を全て満たすこと}^{*1}$$

である。特に、 c が一番長い場合は、 $c < a + b$ が成り立てば十分である。

*1 「この3条件を同時に満たす」ことの必要十分条件として「不等式 $|a - b| < c < a + b$ を満たす」ことを考えてもよい。ただし、絶対値が含まれる分、計算は少しややこしいことがある。

【練習 2：三角形の成立する条件】

(1) 3 辺が $x-2, x, x+2$ である三角形を考えよう. 最大辺は **ア** の辺なので, 三角形が存在するには

ア < **イ** でないといけない. これを解いて, **ウ** < x のときに三角形が存在する.

(2) 3 辺が $3, 5, x+1$ である三角形を考えよう. 三角形が成立する条件は,

連立不等式 $\begin{cases} 3 < \text{エ} \\ 5 < \text{オ} \\ x+1 < \text{カ} \end{cases}$ の解であるから, **キ** < x < **ク** のときに三角形が存在する.

(3) 3 辺が $5, x+2, 2x+1$ である三角形が成立するための x の条件を求めよ.

【解答】

(1) 最大辺は $x+2$ (ア) であるから, (ア) $x+2 < (x-2)+x$ (イ) でないといけない. これを解いて

$$x+2 < 2x-2 \Leftrightarrow \text{(ウ)} \underline{4} < x$$

(2) 三角形の成立条件となる連立不等式を解くと

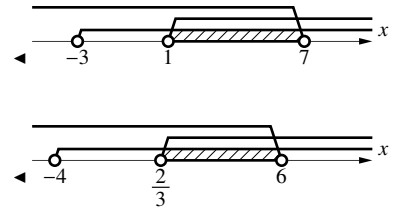
$$\begin{cases} 3 < \underline{5+(x+1)} \text{(エ)} \\ 5 < \underline{(x+1)+3} \text{(オ)} \\ x+1 < \underline{5+3} \text{(カ)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \\ 1 < x \\ x < 7 \end{cases}$$

これらを連立して (キ) $\underline{1} < x < \underline{7}$ (ク) を得る.

(3) 三角形の成立条件となる連立不等式を解くと

$$\begin{cases} 5 < (x+2) + (2x+1) \\ x+2 < (2x+1) + 5 \\ 2x+1 < 5 + (x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < 3x \\ -4 < x \\ x < 6 \end{cases}$$

以上を連立して, $\underline{\frac{2}{3}} < x < \underline{6}$ を得る.



◀ このとき, $x+2$ も $2x+1$ も正であることが確認できる.

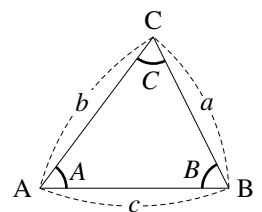
2. 三角形の辺と角の大小関係

$a = BC, b = CA, c = AB$ とする.

たとえば, $A = 45^\circ, B = 60^\circ, c = 6$ を描くと $a < b$ になる.

また, $a = 3, b = 4, c = 6$ の $\triangle ABC$ を描くと, 角の大きさは $A < B < C$ になる.

一般に, 次のような関係が成り立つ.



$\triangle ABC$ について、辺の大小と、向かいの角の大小は、一致する。

$a = BC, b = CA, c = AB$ として考えると、 a, b, c の大小と A, B, C の大小は一致する。

(証明) $a = BC, b = CA$ としたとき、 $a > b \iff A > B$ を示せばよい。

$a < b$ のとき、辺 AC 上に、 $CD = a$ となるよう D をとる。すると

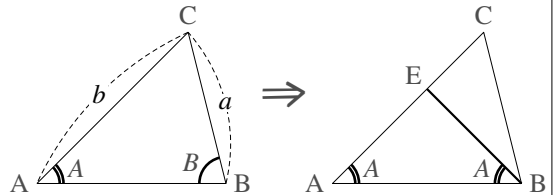
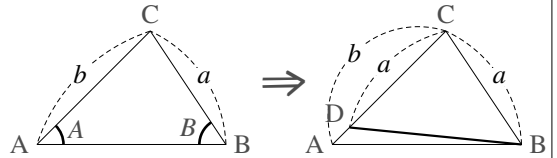
$$B > \angle CBD = \angle CDB = A + \angle DBA > A$$

から、 $A < B$ が示される。

逆に、 $A < B$ であったとする。このとき、 $\angle ABE = A$ となるよう、辺 AC 上に E をとる。すると、 $\triangle EAB$ は二等辺三角形であるから

$$b = AE + EC = BE + EC > CB = a$$

から、 $a < b$ である。



⋮ 上の定理は、定理の内容の分かりやすさに比べると、証明が難しい。

【例題 3】 次の三角形について、一番長い辺・短い辺はそれぞれどこか。

1. $A = 50^\circ, B = 60^\circ$

2. $A = 100^\circ, B = 30^\circ$

3. $B = 45^\circ, C = 40^\circ$

【解答】

1. $C > B > A$ なので、 AB ($= c$) が一番長く、 BC ($= a$) が一番短い
2. $A > C > B$ なので、 BC ($= a$) が一番長く、 AC ($= b$) が一番短い
3. $A > B > C$ なので、 BC ($= a$) が一番長く、 AB ($= c$) が一番短い

◀ $a = BC, b = CA, c = AB$ として考えると、 a, b, c の大小と A, B, C の大小が一致するので分かりやすい。

【発展 4： 辺の大小と角の大小】

辺 BC が最大である $\triangle ABC$ の辺 AB 上に P をとるとき、 $PC < BC$ …… ① を示そう。

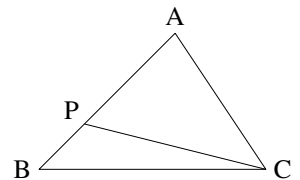
「三角形の辺と角の大小関係」から、①を示すには

$\angle \text{ア} < \angle \text{イ}$ …… ② を示せばよい。ここで、 $\triangle ABC$ においては辺

BC が最大であるので、 $\angle \text{ア} < \angle \text{ウ}$ であるから、

$$\angle \text{イ} - \angle \text{ア} > \angle \text{イ} - \angle \text{エ} = \angle \text{オ} > 0$$

よって、②が成立することが分かったから、よって、①が示せた。 ■



【解答】 $\triangle PBC$ について「三角形の辺と角の大小関係」から、

$$PC < BC \text{ (①)} \iff \angle \text{PBC}_{(\text{ア})} < \angle \text{BPC}_{(\text{イ})} \text{ (②)} \text{ を示せばよい。}$$

辺 BC が $\triangle ABC$ の最大辺なので $\angle PBC < \angle \text{BAC}_{(\text{ウ})}$ が成り立つので

$$\angle \text{BPC} - \angle \text{PBC} > \angle \text{BPC} - \angle \text{BAC}_{(\text{エ})} \text{ …… ③}$$

$\triangle APC$ について、 $\angle \text{BAC} + \angle \text{ACP} = \angle \text{BPC}$ であるから ③ = $\angle \text{ACP}_{(\text{オ})} > 0$

よって、 $\angle \text{BPC} - \angle \text{PBC} > 0 \iff PC < BC$ が示せた。 ■

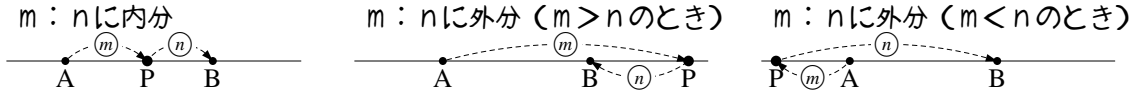
3. 辺の内分・外分

A. 内分とは・外分とは

線分 AB を考え、P を直線 AB 上のどこか (A, B 除く) にとる。

P を線分 AB 内にとるとき「P は線分 AB を内分 (interior division) する」という。線分の長さの比 $AP:PB = m:n$ となるとき「P は線分 AB を $m:n$ に内分する」という。

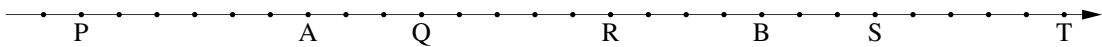
P を線分 AB 外にとるとき「P は線分 AB を外分 (exterior division) する」という。線分の長さの比 $AP:PB = m:n$ となるとき「P は線分 AB を $m:n$ に外分する」という。



上の図のように「A から P へ、P から B へ」の矢印 2 つで考えると、内分も外分も分かりやすい。また、P が線分 AB を 1:1 に内分するとき、P は中点になる。

【例題 5】

以下の目盛りが等間隔であるとき、 に数値を、() に「内」「外」のいずれかを入れよ。

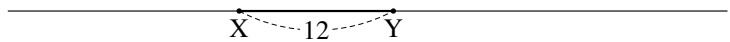


- ・ P は AB を ア : イ に (ウ) 分している
- ・ Q は AB を エ : オ に (カ) 分している
- ・ R は AB を キ : ク に (ケ) 分している
- ・ S は AB を コ : サ に (シ) 分している
- ・ T は AB を ス : セ に (ソ) 分している

【解答】 線分 AB 上にある Q, R は内分、他は外分である。

- $AP = 6, PB = 18$ より、 $6:18 =$ (ア) $\underline{1}:\underline{3}$ (イ) に (ウ) 外 分している
- $AQ = 3, QB = 9$ より、 $3:9 =$ (エ) $\underline{1}:\underline{3}$ (オ) に (カ) 内 分している
- $AR = 8, RB = 4$ より、 $8:4 =$ (キ) $\underline{2}:\underline{1}$ (ク) に (ケ) 内 分している
- $AS = 15, SB = 3$ より、 $15:3 =$ (コ) $\underline{5}:\underline{1}$ (サ) に (シ) 外 分している
- $AT = 20, TB = 8$ より、 $20:8 =$ (ス) $\underline{5}:\underline{2}$ (セ) に (ソ) 外 分している

【例題 6】 右の線分 XY の長さを



12 とし、線分 XY を 1:2 に内分

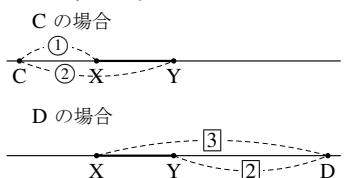
する点を A、5:1 に内分する点を B、1:2 に外分する点を C、3:2 に外分する点を D とする。

1. 点 A, B, C, D のうち、一番左にある点、一番右にある点を答えなさい。
2. XA, XB, XC, XD の長さをそれぞれ求めよ。
3. 比 $XA:AB:BY$ を求めよ。

【解答】

1. 一番左は C、一番右は D。
2. $XA = 12 \times \frac{1}{1+2} = 4, XB = 12 \times \frac{5}{5+1} = 10,$
 C, D は右欄外のようなので $XC = XY = 12, XD = 12 \times \frac{3}{3-2} = 36$
3. $AB = 10 - 4 = 6, BY = 12 - 10 = 2$ より、

◀ A, B は線分 XY 上であり、C, D は次のようになる。



$$XA : AB : BY = 4 : 6 : 2 = 2 : 3 : 1.$$

【暗記】7:3分割された線分の長さ

線分 AB を 3:5 に内分した点を P, 5:1 に内分した点を Q とするとき, 比 AP:PQ:QB を求めよ.

【解答】 $3+5=8$ と $5+1=6$ の最小公倍数は 24 なので,
 $AP:PB=3:5=9:15$, $AQ:QB=5:1=20:4$ と変形して
 $AP:PQ:QB=9:(20-9):4=9:11:4$ と分かる.

◀ **【別解】** $AB=a$ とおくと
 $AP=\frac{3}{3+5}AB=\frac{3}{8}a$
 $AQ=\frac{5}{6}a, PQ=AQ-AP=\frac{11}{24}a$
 $QB=AB-AQ=\frac{1}{6}a$, 後は比を取ればよい.

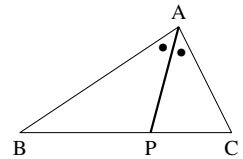
B. 内角の二等分線の定理

三角形の内角を二等分する線は, 以下の性質を持つ.

$\triangle ABC$ について, $\angle A$ を二等分する線と辺 BC が P で交わるとき
 $(\angle BAP = \angle PAC$ のとき), 次が成り立つ.

$$BP : PC = BA : AC$$

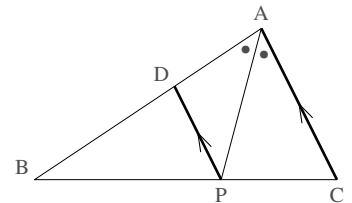
内角の二等分線の定理



「A から P へ」二等分線を引いて, $BA : AC \xrightarrow[\text{代えても同じ}]{AをPに}$ $BP : PC$ と覚えても良い.

(証明) $CA \parallel PD$ となるよう, 辺 AB 上に D をとる. このとき

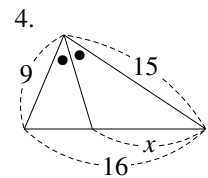
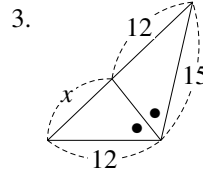
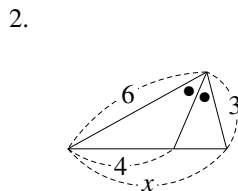
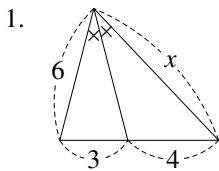
$$\begin{aligned} \angle APD &= \angle PAC && (CA \parallel PD \text{ より}) \\ &= \angle PDA && (AP \text{ は } \angle A \text{ を二等分するから}) \end{aligned}$$



であるから, $\triangle DAP$ は $DA = DP$ …… ① の二等辺三角形. よって

$$\begin{aligned} AB : AC &= DB : DP && (CA \parallel PD \text{ より } \triangle BDP \sim \triangle BAC \text{ であるから}) \\ &= DB : DA && (\text{①から}) \\ &= BP : PC && (CA \parallel PD \text{ より}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

【例題 8】 以下の図について, x の値を求めなさい.



【解答】

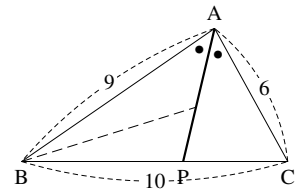
- $6 : x = 3 : 4$ であるから, $x = 8$
- $6 : 3 = 4 : 2$ であるから, $x = 4 + 2 = 6$
- $15 : 12 = 12 : x$ であるから, $12^2 = 15x$ を解いて $x = \frac{48}{5}$
- 底辺は $9 : 15 = 3 : 5$ で内分されるので, $x = 16 \times \frac{5}{3+5} = 10$

◀ $9 : 15 = (16-x) : x$ を解いてもよい.

【練習 9 : 内角の二等分線】

右の $\triangle ABC$ について、次の問いに答えよ。

- (1) BP , PC の長さを求めよ。
- (2) $\angle B$ の二等分線と AP の交点を Q とする。 $AQ : QP$ を求めよ。
- (3) $\angle C$ の二等分線と AP の交点を R とする。 $AR : RP$ を求めよ。



【解答】

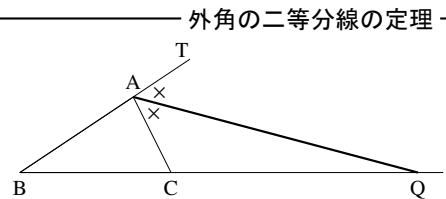
- (1) $BP : PC = BA : AC = 9 : 6 = 3 : 2$ なので、
 $BP = BC \times \frac{3}{3+2} = 6$, $PC = BC \times \frac{2}{3+2} = 4$
- (2) $AQ : QP = AB : BP = 9 : 6 = 3 : 2$
- (3) $AR : RP = AC : CP = 6 : 4 = 3 : 2$

◀ Q と R は一致し内心と呼ばれる。
 詳しくは p.121 を参照のこと。

C. 外角の二等分線の定理

$\triangle ABC$ について、 $\angle A$ の外角を二等分する線と辺 BC が Q で交わるとき ($\angle CAQ = \angle QAT$ のとき)、次が成立する。

$$BQ : QC = BA : AC$$



「A から Q へ」二等分線を引いて、 $BA : AC \xrightarrow[\text{代えても同じ}]{A \text{ を } Q \text{ に}} BQ : QC$ と覚えても良い。

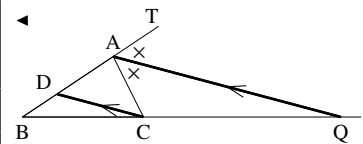
【発展 10 : 外角の二等分線の定理の証明】

「外角の二等分線の定理」を証明せよ。

- 【解答】 $QA \parallel CD$ となるよう、辺 AB 上に D をとる。このとき
- $$\begin{aligned} \angle ACD &= \angle QAC \quad (QA \parallel CD \text{ より}) \\ &= \angle QAT \quad (AQ \text{ は } \angle A \text{ の外角を二等分するから}) \\ &= \angle CDA \quad (QA \parallel CD \text{ より}) \end{aligned}$$

であるから、 $\triangle CAD$ は $AC = AD$ …… ① の二等辺三角形。よって

$$\begin{aligned} AB : AC &= AB : AD \quad (\text{①より}) \\ &= QB : QC \quad (CA \parallel PD \text{ より}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

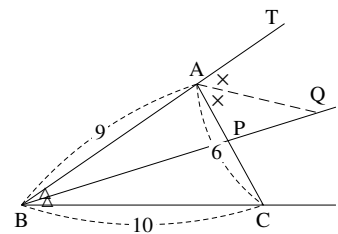


(別解) として、直線 AB 上に、 $CA \parallel QD$ となるよう D をとる、などの補助線でも証明できる。

【練習 11 : 内角・外角の二等分線】

右の $\triangle ABC$ について、次の問いに答えよ。

- (1) AP , PC の長さを求めよ。
- (2) AQ は $\angle A$ の外角の二等分線である。 $BQ : QP$ を求めよ。
- (3) $\angle C$ の外角の二等分線と直線 BP の交点を R とする。 $BR : RP$ を求めよ。



【解答】

- (1) $AP : PC = AB : BC = 9 : 10$ なので、

$$BP = AC \times \frac{9}{9+10} = \frac{54}{19}, \quad PC = AC \times \frac{10}{9+10} = \frac{60}{19}$$

$$(2) BQ : QP = BA : AP = 9^1 : \frac{54}{19} = 19 : 6$$

$$(3) BR : RP = BC : CP = 10^1 : \frac{60}{19} = 19 : 6$$

◀ Q と R は一致し傍心と呼ばれる。
詳しくは p.128 を参照のこと。

3.2 円の性質 (1) ~ 円の弦・接線

次に学ぶ内心・外心の準備として、円の弦・接線について学ぶ。

A. 円と直線の共有点

円と直線の関係は、共有点の個数によって右の表のようにまとめられる。

| 円と直線の関係 | 交わっている | 接している | 離れている |
|---------|--------|-------|-------|
| | | | |
| 共有点の個数 | 2 個 | 1 個 | 0 個 |

B. 円の弦—共有点が2つのとき

円は、弦の垂直二等分線について線対称であり、次のことが成り立つ。

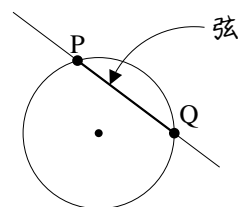
【練習 12 : 弦の垂直二等分線】

円 O と直線 PQ が右のように交わっているとす。

(1) 暗記 以下の に当てはまる言葉を答えなさい。

- 弦 PQ の垂直二等分線は、必ず円の を通る。
- 逆に、円の中心を通り弦 PQ に垂直な線は、PQ の を通る。
- また、円の中心と弦 PQ の中点を通る直線は、弦 PQ と する。

(2) 上の b), c) を示しなさい*2。



【解答】

(1) ア : 中心, イ : 中点, ウ : 直交

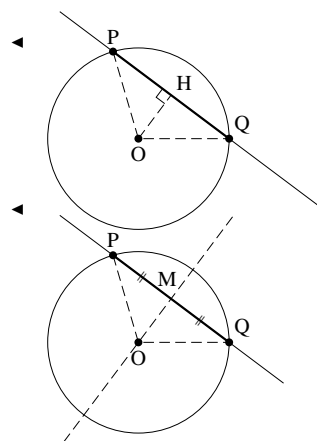
(2) b) O から PQ へ垂線を引き、その足を H とする。

直角三角形 $\triangle OPH$ と $\triangle OQH$ について、OM は共通、 $OP = OQ$ であるから、斜辺ともう 1 辺が等しいので $\triangle OPH \equiv \triangle OQH$ である。つまり、 $PH = HQ$ であるから、垂線 PH は弦 PQ の中点を通る。

c) PQ の中点を M とする。

$\triangle OPM$ と $\triangle OQM$ について、OM は共通、 $OP = OQ$, $PM = MQ$ より 3 辺が等しいので $\triangle OPM \equiv \triangle OQM$, つまり $\angle OMP = \angle OMQ$ であり、どちらも 90° である。

よって、OM は PQ の垂直二等分線になっている。

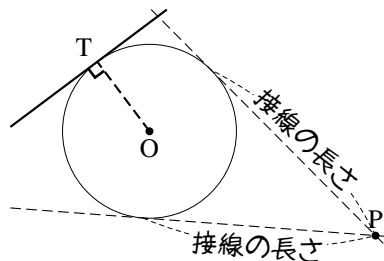


C. 円の接線—共有点が1つのとき

円の接線

円とその接線について、次のことが成り立つ。

1. 円 O と直線が接点 T で接しているとき、線分 OT は接線と垂直に交わる。
2. 円外の点 P から円へ接線を引くとき、 P から接点までの距離を接線の長さという。 P からの接線は2本引けるが、どちらの接線の長さも等しい。

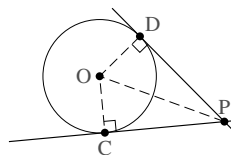


(1. の証明) 接線と OT が垂直に交わらないと仮定し (…… ①), 背理法で示す。

O から接線へ垂線を引き、その足を H とする。 H と T は異なるので、 H は円周より外側にある。つまり、 $OT > OH$ であるが、直角三角形 OTH について斜辺 OH が一番長くないことになり、矛盾である。よって、仮定①は誤りであり、接線と OT は垂直に交わる。 ■

(2. の証明) 右図において、 $PC = PD$ を示せばよい。

$\triangle POC$ と $\triangle POD$ について、 $\angle POC = \angle POD = 90^\circ$ 、 PO は共通、 $OC = OD$ から直角三角形の斜辺と他の1辺が等しいと分かるので、 $\triangle POC \cong \triangle POD$ になる。よって、 $PC = PD$ が示された。 ■



直観的には、上の図の直線 OP について線対称であるから、接線の長さは等しい。

【練習 13 : 円と直線】

中心が O である半径 2 の円へ、 $OP = 5$ となる P から接線を 2 本引き、接点を A, B とする。

- (1) AB と OP の交点を C とする。 $\triangle OAP$ と合同な三角形を 1 つ、相似な三角形を 4 つ答えよ。
(ただし、三角形の頂点は、 A, B, C, O, P のいずれかのみを考える)
- (2) AC, OC の長さをそれぞれ求めよ。

【解答】

- (1) OP 共通、 $OA = OB, PA = PB$ から、合同な三角形は $\triangle OBP$ 。

相似な三角形は、すべて、2角が等しいことから導かれ

直角と $\angle APC$ 共通から $\triangle OAP \sim \triangle ACP$,

直角と $\angle AOC$ 共通から $\triangle OAP \sim \triangle OCA$,

直角と $\angle OPA = \angle BPC$ から $\triangle OAP \sim \triangle BCP$,

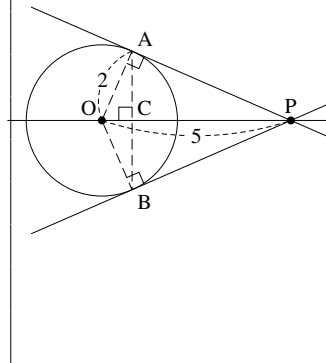
直角と $\angle AOP = \angle COB$ から $\triangle OAP \sim \triangle OCB$ 。

- (2) $\triangle OAP$ について、三平方の定理より $PA = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

$\triangle OAP \sim \triangle OCA$ において、 $PO : AO = 5 : 2$ であるから

$$AC = PA \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \sqrt{21}, \quad OC = OA \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}.$$

◀ 図は必ず描こう。



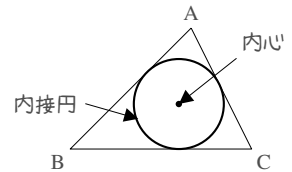
円の中心と接点を結ぶと、円の半径と、直角が図の中に現れる。

*2 なお、a) は次のようにして証明できる。「 PQ の垂直二等分線は、 P からも Q からも等間隔にある点の集まりであるが、 $OP = OQ = (\text{円の半径})$ であるから、 O は PQ の垂直二等分線上にある。」

1. 三角形の内心

A. 内心とは

三角形の3つの辺すべてに接する円を、その三角形の**内接円** (inscribed circle) といい、内接円の中心を**内心** (inner center) という

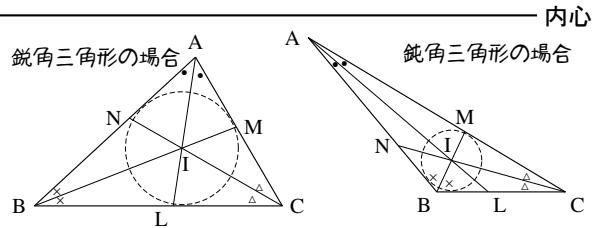


B. 三角形の内心～角の二等分線の交点

たとえば、辺 AC から辺 BC からも等距離にあるのは、 $\angle C$ の二等分線上の点である。同じように考えると、3辺から等距離にある三角形の内心は、角の二等分線によって決まる。

$\triangle ABC$ の3本の角の二等分線 AL, BM, CN について、次のことが成り立つ。

AL, BM, CN は必ず1点で交わり、その交点は三角形の内心 I に一致する。



一般に、内接円と辺の接点は L, M, N のいずれにも一致しないので注意すること。
($\triangle ABC$ が二等辺三角形のときにだけ、一致することがある)

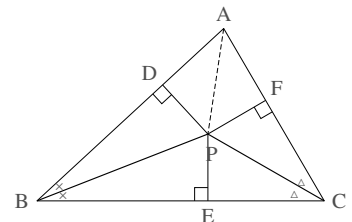
(証明) $\angle B, \angle C$ の二等分線の交点を P とおく。また、P から辺 AB, 辺 BC, 辺 CA へ垂線 PD, PE, PF をそれぞれ引く。

まず、 $\triangle PBD \equiv \triangle PBE$ である (PB 共通, $\angle PBD = \angle PBE$ から斜辺と1角が等しい直角三角形になる) から $PD = PE$ …… ① とわかる。

同様に、 $\triangle PCE \equiv \triangle PCF$ から、 $PE = PF$ …… ② である。

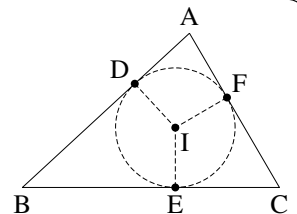
$\triangle PAD$ と $\triangle PAF$ について PA 共通, ①, ②から $PD = PF$ から斜辺と他の1辺が等しい直角三角形と分かるので $\triangle PAD \equiv \triangle PAF$ 。つまり、 $\angle PAD = \angle PAF$ となって AP は $\angle A$ の二等分線と分かる。

以上より、3本の角の二等分線は1点 P で交わり、①, ②から P はどの辺からも等距離にあるとわかるので、三角形の内心 I と P は一致していることがわかる。



【例題 14】 $\triangle ABC$ の内心を I とし、内接円と辺 AB, BC, CA の接点をそれぞれ D, E, F とする。ただし、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形でないとする。

- 図の中にある直角を、3ヶ所答えなさい。
- 図の中にある長さの等しい線分を、3組答えなさい。
ただし、 $ID = IE = IF$ を除く。
- 直線 AI 上に点 D はあるか、ないか。また、直線 IF 上に点 B はあるか、ないか。

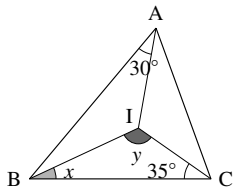


【解答】

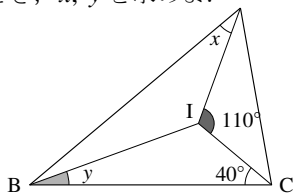
- $ID \perp AB, IE \perp BC, IF \perp CA$
- $AD = AF, BD = BE, CE = CF$
- 直線 AI 上に点 D はない。また、直線 IF 上に点 B はない。

【例題 15】 I が $\triangle ABC$ の内心であるとき、 x, y を求めよ.

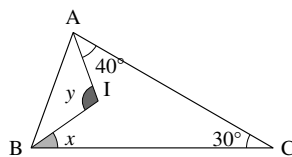
1.



2.



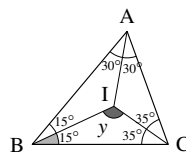
3.



【解答】

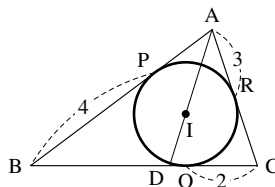
- $\triangle ABC$ について、 $2(30^\circ + x + 35^\circ) = 180^\circ$ であるから $x = 25^\circ$ 、 $\triangle IBC$ について、 $25^\circ + y + 35^\circ = 180^\circ$ であるから $y = 120^\circ$.
- $\triangle IAC$ について、 $110^\circ + x + 40^\circ = 180^\circ$ であるから $x = 30^\circ$ 。 $\triangle ABC$ について、 $2(30^\circ + y + 40^\circ) = 180^\circ$ であるから $y = 20^\circ$,
- $\triangle ABC$ について、 $2(40^\circ + x) + 30^\circ = 180^\circ$ であるから $x = 35^\circ$ 、 $\triangle IAB$ について、 $y + 40^\circ + 35^\circ = 180^\circ$ であるから $y = 105^\circ$.

◀ 1. の場合、結局次のようになる。



【例題 16】 右の図において、 P, Q, R は内接円と辺の接点であり、 D は直線 AI 上にある。

- 3 辺の長さを全て求めよ。
- BD の長さを求めよ。
- $AI : ID$ を求めよ。



【解答】

- $AP = AR = 3$, $BQ = BP = 4$, $CR = CQ = 2$ であるから、 $AB = 7$, $BC = 6$, $CA = 5$.
- AD は $\angle A$ の二等分線であるから、 $BD : DC = BA : AC = 7 : 5$ となり、 $BD = 6 \times \frac{7}{7+5} = \frac{7}{2}$.
- BI は $\angle B$ の二等分線であるから、 $AI : ID = AB : BD = 7 : \frac{7}{2} = 2 : 1$.

C. 内接円の半径を求める

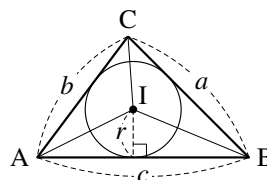
内接円の半径を求めるには、数学 I(p.132) で学ぶ次の公式を用いる。

三角形の面積 S は、内接円の半径 r を用いて

$$S = \triangle BCI + \triangle CAI + \triangle ABI = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

と表すことができる。ここで a, b, c は各辺の長さを表す。

三角形の内接円と面積の関係



この公式は、必要なときに導くことができれば十分である。ただし、三角形とその内接円を見たら「三角形の面積は計算できる」と連想できるようにしよう。

【練習 17 : 内心と内接円の性質】

$AB = 7, AC = 8$ である $\triangle ABC$ の点 A から辺 BC へ垂線 AH を引くと、 $AH = 4\sqrt{3}$ であったという。また、内心を I とし、直線 AI と辺 BC の交点を D とする。

- (1) 内接円の半径 r を求めよ。 (2) 線分 BD の長さを求めよ。 (3) 線分 AI の長さを求めよ。

【解答】

(1) 三平方の定理より $BH = \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = 1, CH = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$ であるから、 $BC = 1 + 4 = 5$ になる。よって

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times 5 \times 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} r \times (7 + 8 + 5) \\ &\Leftrightarrow 10\sqrt{3} = 10r \quad \therefore r = \sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) AD は $\angle A$ の二等分線であるから、 $BD : DC = BA : AC = 7 : 8$ となり、
 $BD = 5 \times \frac{7}{7+8} = \frac{7}{3}$ 。

(3) $DH = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$ であるから、 $\triangle ADH$ に三平方の定理を用いると、

$$AD = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{16 + 432}{9}} = \frac{8\sqrt{7}}{3}.$$

一方、 BI は $\angle B$ の二等分線なので、 $AI : ID = AB : BD = 7 : \frac{7}{3} = 3 : 1$ 。

$$\text{よって、} AI = \frac{8\sqrt{7}}{3} \times \frac{3}{3+1} = 2\sqrt{7}.$$

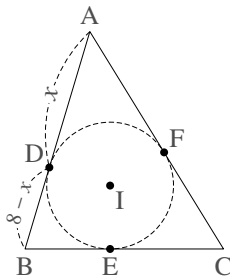
【暗記 18 : 接線の長さ】

$AB = 8, BC = 7, CA = 9$ である $\triangle ABC$ の内接円が、辺 AB, BC, CA と D, E, F で接している。このとき、 AD の長さを求めよ。

【解答】 $AD = x$ とおくと、接線の長さが等しいので $AF = x$ 。

また、 $DB = 8 - x, FC = 9 - x$ であり、接線の長さが等しいから $BE = 8 - x, CE = 9 - x$ 。

ここで、 $BC = 7$ であるから $(8 - x) + (9 - x) = 7$ 、これを解いて $x = 5$ 、つまり $AD = 5$ 。



◀【別解】 $AD = AF = x, BE = BD = y, CF = CE = z$ とおくと

$$\begin{cases} x + y = AB = 8 & \dots\dots ① \\ y + z = BC = 7 & \dots\dots ② \\ z + x = CA = 9 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

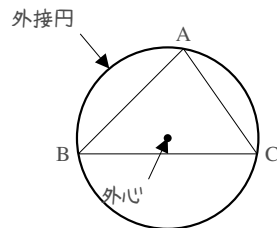
である。① + ② + ③ より $2(x + y + z) = 24 \Leftrightarrow x + y + z = 12 \dots\dots ④$ 。

④ - ② から $x = AD = 5$ 。

2. 三角形の外心

A. 外心とは

三角形の 3 つの頂点を通る円を、その三角形の外接円 (circumscribed circle) といい、外接円の中心を外心 (circumcenter) という。



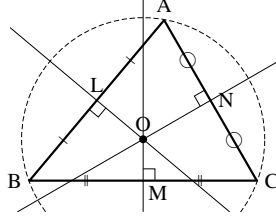
B. 三角形の外心～垂直二等分線の交点

辺の垂直二等分線上のどの点も、その両側の頂点からの距離が等しい。そのため、三角形の外心は辺の垂直二等分線によって決まる。

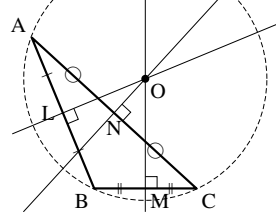
$\triangle ABC$ の 3 本の垂直二等分線について、次のことが成り立つ。

- ・ 3 本は必ず 1 点で交わり、その交点は三角形の外心 O に一致する。

鋭角三角形の場合



鈍角三角形の場合

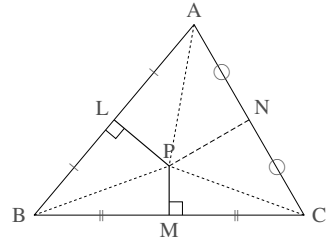


外心

(証明) 辺 AB の垂直二等分線、辺 BC の垂直二等分線の交点を P とおく。 $\triangle PAL$ と $\triangle PBL$ は PL 共通、 $AL = LB$ 、 $\angle PLA = \angle PLB = 90^\circ$ から 2 辺とその間の角が等しい。よって、 $\triangle PAL \equiv \triangle PBL$ であるから、 $AL = BL$ 。同様に $\triangle PBM \equiv \triangle PCM$ から $BL = CL$ 。

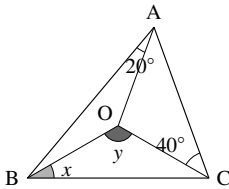
$\triangle PAN$ と $\triangle PCN$ について、 PN 共通、 $AN = NC$ 、 $PA = PC$ から 3 辺が等しいので $\triangle PAN \equiv \triangle PCN$ になる。よって $\angle PNA = \angle PNC$ となり、 $\angle PNA = \angle PNC = 90^\circ$ である。つまり、 PN は辺 AC の垂直二等分線に一致し、3 本の垂直二等分線は 1 点 P で交わる。

さらに、 $PA = PB = PC$ から P は $\triangle ABC$ の外心に一致する。 ■

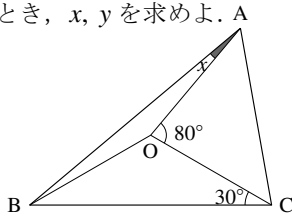


【例題 19】 O が $\triangle ABC$ の外心であるとき、 x, y を求めよ。A

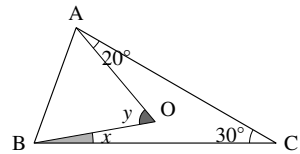
1.



2.



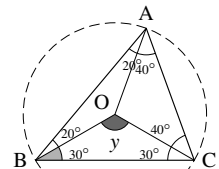
3.



【解答】

- $OA = OC$ より $\angle OAC = 40^\circ$ 、 $OA = OB$ より $\angle OBA = 20^\circ$ 、 $OB = OC$ より $\angle OCB = x$ になる。
 $\triangle ABC$ について、 $2(20^\circ + x + 40^\circ) = 180^\circ$ であるから $x = 30^\circ$ 、 $\triangle OBC$ について、 $y + 2 \times 30^\circ = 180^\circ$ であるから $y = 120^\circ$ 。
- $\triangle OAC$ について、 $80^\circ + 2\angle OAC = 180^\circ$ であるから $\angle OAC = \angle OCA = 50^\circ$ 。
よって、 $\triangle ABC$ について、 $2(x + 30^\circ + 50^\circ) = 180^\circ$ であるから $x = 10^\circ$ 。
- $\triangle OAC$ について、 $OA = OC$ より $\angle OCA = 20^\circ$ 、よって、 $x = \angle OCB = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ$ 。 $\triangle ABC$ について、 $2(\angle OAB + 10^\circ + 20^\circ) = 180^\circ$ であるから $\angle OAB = 60^\circ$ であるから、 $y = 60^\circ$ 。

◀ 1. の場合、結局次のようになる。



◀ (別解) 円周角の定理より、 $y = 2\angle ACB = 60^\circ$ 。

… 外心を含む問題では、必ず外接円を書き込むようにしましょう。

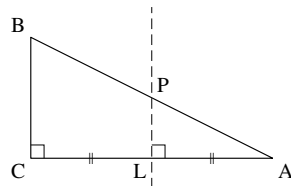
C. 直角三角形の外心

【暗記 20：直角三角形の外心】

$\angle C = 90^\circ$ の直角三角形において、辺 CA 、 CB の二等分線は辺 AB の中点を通ることを示せ。

【解答】 辺 CA の中点を L とし、辺 CA の垂直二等分線と辺 AB の交点を P とする。 $\angle ALP = \angle ACB = 90^\circ$ より $LP \parallel CB$ であるから、 $AP : PB = AL : LC = 1 : 1$ 、よって P は辺 AB の中点である。

同様に、辺 CB の中点を M 、辺 CB の垂直二等分線と辺 AB の交点を Q とすると、 $MQ \parallel CA$ から Q も辺 AB の中点になる。



直角三角形の外心

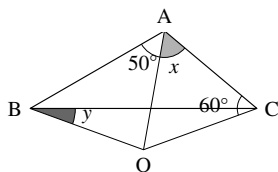
直角三角形の外心は、斜辺の中点に一致する。結果、外接円の半径は斜辺の半分に一致する。

D. 鈍角三角形の外心

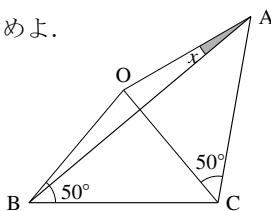
鈍角三角形の外心は、必ず三角形の外になる。詳しくは『円周角の定理の逆』(p.132) で学ぶ。

【例題 21】 O が $\triangle ABC$ の外心であるとき、 x, y を求めよ。

1.



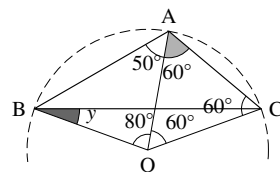
2.



【解答】 $\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OCA$ がすべて二等辺三角形であるから

- $\triangle OAC$ について、 $x = \angle OCA = 60^\circ$ 、 $\angle AOC = 60^\circ$ 。また、 $\triangle OAB$ について、 $\angle OAB = 50^\circ$ なので $\angle AOB = 80^\circ$ 、よって $\angle BOC = 140^\circ$ であり、 $\triangle OBC$ を考えて $y = \frac{1}{2}(180^\circ - 140^\circ) = 20^\circ$ になる。
- $\triangle OAC$ について、 $\angle AOC = 180^\circ - 50^\circ \times 2 = 80^\circ$ 、 $\triangle OBC$ についても $\angle BOC = 80^\circ$ 、よって $\angle AOB = 160^\circ$ であり、 $\triangle OAB$ を考えて、 $x = 10^\circ$ 。

◀ 1. の場合、結局次のようになる。



E. 外接円の半径を求める

外接円の半径を求めるには、数学 I で学ぶ**正弦定理** (sine theorem) を用いる。

正弦定理

$\triangle ABC$ の外接円の半径 R について $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ が成り立つ。



ただし、直角三角形の場合は外接円の半径は斜辺の半分に一致し、正弦定理は必要ない。

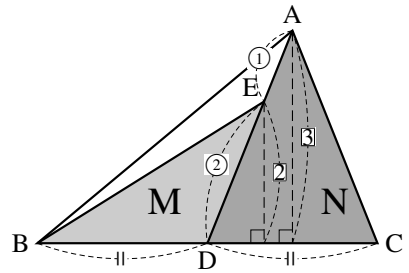
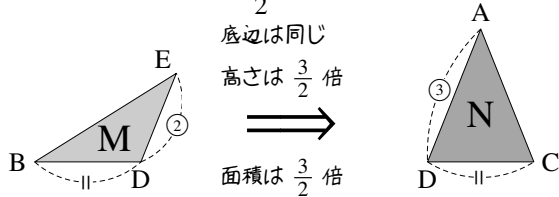
3. 三角形の重心

A. 2つの三角形の面積比

面積比を求めるときには、どこを底辺におくかが重要である。

まず、右の三角形 M, N の面積比を考えてみよう。

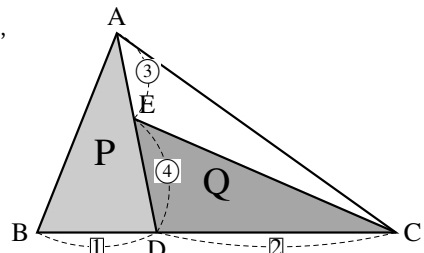
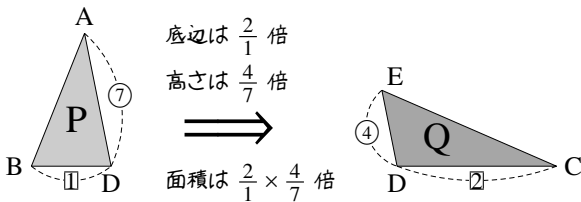
M の底辺を BD, N の底辺を CD とおけば、M, N の底辺の長さは等しく、M の高さの $\frac{3}{2}$ 倍が、N の高さになる。



つまり、M の面積を $\frac{3}{2}$ 倍すると N の面積に等しいと分かるから、M, N の面積比は 2 : 3 である。

次に、右の三角形 P, Q の面積比を考えてみよう。P の底辺を BD,

Q の底辺を CD とすると、次のようにまとめることができる。



P の面積を $\frac{2}{1} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{7}$ 倍すると Q の面積に等しいと分かるから、P, Q の面積比は 8 : 7 である。

【練習 22 : 平面図形の線分の比】

$\square ABCD$ において、辺 BC 上に E を、辺 CD 上に F をとり、 $BE : EC = 1 : 2$, $DF : FC = 2 : 1$ とする (\square は「平行四辺形」を表す)。

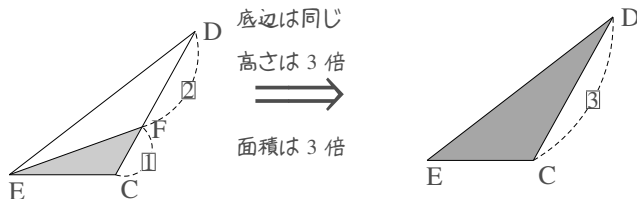
(1) $\triangle FEC$ と $\triangle DEC$ の面積比を求めよ。

(2) $\triangle FBC$ と $\triangle DEC$ の面積比を求めよ。

(3) $\triangle FEC$ と $\square ABCD$ の面積比を求めよ。

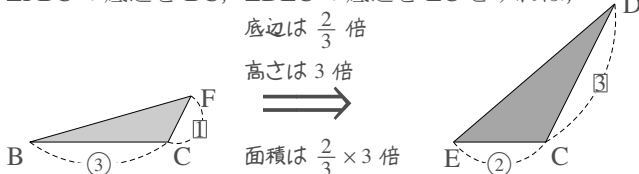
【解答】

(1) 問題文を図示すれば、右欄外のようになる。底辺を EC とすれば



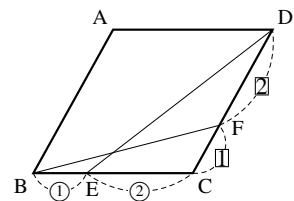
なので、面積比は 1 : 3 である。

(2) $\triangle FBC$ の底辺を BC, $\triangle DEC$ の底辺を EC とすれば、



なので、面積比は 1 : 2 である。

◀ DC と EC を底辺と考えた場合は、高さが等しくなる。



◀ $\triangle FBC$ の底辺を FC, $\triangle DEC$ の底辺を DC としてもよい。

$$(3) \quad \begin{aligned} \triangle FEC &\xrightarrow{3 \text{ 倍}} \triangle DEC && ((2) \text{ より}) \\ &\xrightarrow{\frac{3}{2} \text{ 倍}} \triangle DBC && \left(\begin{array}{l} \text{底辺を EC, BC にとれば, 底} \\ \text{辺は } \frac{3}{2} \text{ 倍, 高さは等しい} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{2 \text{ 倍}} \square ABCD \end{aligned}$$

よって $\triangle FEC$ の $3 \times \frac{3}{2} \times 2 = 9$ 倍が $\square ABCD$ の面積になるので, $\triangle FEC$ と $\square ABCD$ の面積比は **1 : 9** である.

$$\begin{aligned} \triangle FEC &\xrightarrow{\frac{3}{2} \text{ 倍}} \triangle FBC \\ &\xrightarrow{3 \text{ 倍}} \triangle DBC \\ &\xrightarrow{2 \text{ 倍}} \square ABCD \end{aligned}$$

でもよい.

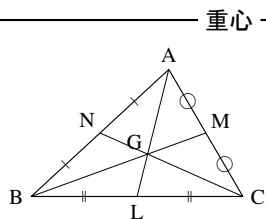
B. 三角形の重心～中線の交点

三角形の面積は, 中線によって二等分される.

そして, 3 本の中線は 1 点で交わる. これを**重心** (centroid, barycenter) という*3.

$\triangle ABC$ の 3 本の中線 AL , BM , CN について, 次のことが成り立つ.

- (1) AL , BM , CN は必ず 1 点で交わり, その交点は三角形の重心 G に一致する.
- (2) $AG : GL = 2 : 1$, $BG : GM = 2 : 1$, $CG : GN = 2 : 1$ である.



(証明) まず, AL と BM の交点を P , AL と CN の交点を Q とおき, P と Q が一致することを示す.

AL の中点を R とする. $\triangle ALC$ について中点連結定理から

$MR \parallel BC \dots\dots ①$, $RM : LC = 1 : 2 \dots\dots ②$ になる.

①より, 二角相等から $\triangle MRP \simeq \triangle BLP$ であるので

$$RP : PL = RM : BL = 1 : 2 \quad (① \text{ と } BL = LC \text{ より}) \quad \dots\dots ③$$

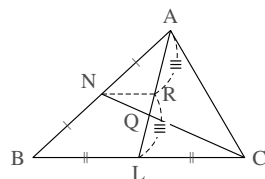
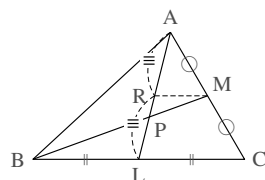
である. 次に, $\triangle ABL$ について中点連結定理から $NR \parallel BC \dots\dots ④$, $NR :$

$BL = 1 : 2 \dots\dots ⑤$ である. ④から $\triangle NRQ \simeq \triangle CLQ$ であるので, やはり

$RQ : QL = 1 : 2$ になる. ③とあわせて, P と Q は一致することが分かる.

つまり, AL , BM , CN は 1 点で交わる. これを G とおくと, ④, ③から

$$GL = AL \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}AL \text{ と分かるので, } AG : GL = 2 : 1 \text{ と分かる.}$$



⋮ 重心についての別証明が, p.146 にある.

【練習 23 : 重心と面積比～その 1～】

$\triangle ABC = S$ とするとき, $\triangle AGB$, $\triangle BGC$, $\triangle CGA$ をそれぞれ S を用いて表わせ.

【解答】 直線 AG と BC の交点を M とする.

$$BM = MC, \quad AG : GM = 2 : 1 \text{ より, } \triangle AGB = \frac{2}{3} \triangle ABM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{3} S,$$

$$\triangle AGC = \frac{2}{3} \triangle ACM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{3} S \text{ である.}$$

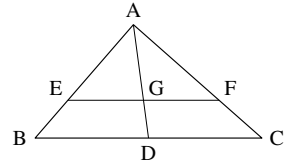
$$\text{また, } \triangle BGC = S - \frac{1}{3} S - \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} S \text{ である.}$$

*3 直感的には, 重さの中心, つり合いの中心が重心である. たとえば, 重さが一樣な三角形の板を重心で支えると, 板は地面に平行になってつり合う.

【練習 24：重心と面積比～その 2～】

$\triangle ABC$ の重心を G とし、直線 AG と辺 BC の交点を D とする。また、 G を通り BC に平行な直線が、辺 AB 、 AC と交わる点を E 、 F とする。

- (1) 相似な三角形の組を 3 組答え、その相似比を答えなさい。
- (2) 四角形 $EBDG$ と $\triangle ABC$ の面積比を答えよ。



【解答】

- (1) $EF \parallel BC$ から $\triangle AEG \sim \triangle ABD$, $\triangle AGF \sim \triangle ADC$, $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ であり、 $AG : AD = 2 : 3$ から、相似比はすべて $2 : 3$ 。
- (2) $\triangle ABC = S$ とおくと、 $\triangle ABD = \frac{1}{2}S$ 。 $\triangle ABD : \triangle AEG = 3^2 : 2^2$ より、 $\triangle AEG = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2}S = \frac{2}{9}S$ であるから、四角形 $EBDG = \frac{1}{2}S - \frac{2}{9}S = \frac{5}{18}S$ 。 よって、四角形 $EBDG : \triangle ABC = \frac{5}{18}S : S = 5 : 18$ 。

4. 三角形の三心と五心

A. 三角形の三心

重心・内心・外心をまとめて、三角形の三心という。

【暗記 25：三角形の三心】

次の にあてはまる適当な言葉・文字を答えよ。

1. $\triangle ABC$ の内心 I は 3 本の の交点である。 I は , , からの距離がすべて等しい。
2. $\triangle ABC$ の外心 O は 3 本の の交点である。 O は , , からの距離がすべて等しい。
3. $\triangle ABC$ の重心 G は 3 本の の交点であり、 G は を する点である。

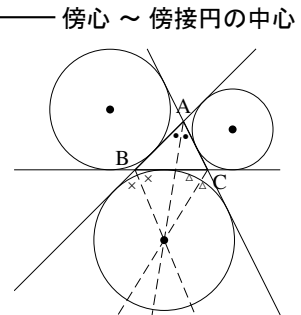
【解答】

1. ア：角の二等分線、イ：辺 AB 、ウ：辺 BC 、エ：辺 CA
2. オ：辺の垂直二等分線、カ：点 A 、キ：点 B 、ク：点 C
3. ケ：中線、コ：2 : 1 に内分

B. 三角形の傍心 ~ 傍接円の中心

$\triangle ABC$ について、直線 AB 、 BC 、 CA のすべてに接する円は、 $\triangle ABC$ の外側に 3 つ存在し、これを傍接円 (escribed circle) という。また、傍接円の中心を傍心 (excenter) という。

そして、 $\angle B$ の外角の二等分線、 $\angle C$ の外角の二等分線と、 $\angle A$ の (内角の) 二等分線は必ず 1 点で交わり、それは傍心の 1 つに一致する。また、 A 、 B 、 C を入れ替えて考えれば、他の傍心のいずれかに一致する。



証明は p.146 を参照のこと。

C. 垂心

垂心

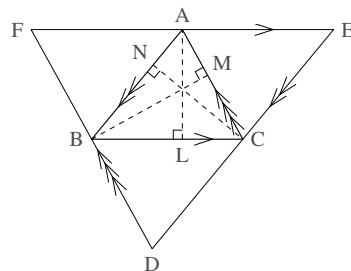
$\triangle ABC$ の 3 本の垂線は必ず 1 点で交わる. その交点を垂心 (orthocenter) という.

(証明) (別証明が p.134 にもある)

$AB \parallel ED, BC \parallel FE, CA \parallel DF$ であり, $\triangle ABC$ に外接する $\triangle DEF$ を, 右図のように作る. また, 点 A, B, C から下ろした垂線の足を, それぞれ L, M, N とおく.

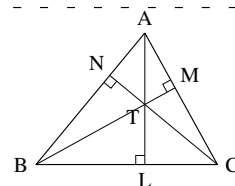
四角形 $ABCE, ACBF$ は平行四辺形になるので $BC = AE, BC = AF$ と分かり, A は線分 EF の中点である. さらに, $\angle EAL = \angle ALB = 90^\circ$ から, 線分 AL は線分 EF の垂直二等分線になる.

同様に, 線分 BM は線分 DF の垂直二等分線, 線分 CN は線分 DE の垂直二等分線になっている. $\triangle DEF$ の 3 本の垂直二等分線は外心で交わるから, AL, BM, CN は 1 点で交わる.



【例題 26】 右図の三角形について次の問いに答えよ.

- 右図に相似な三角形を全て書き出さない.
(ただし, 補助線を引かないものとする)
- $\angle CAL = 25^\circ, \angle ABM = 20^\circ$ のとき, $\angle TCL$ を求めよ.



【解答】

- $\triangle ABM \sim \triangle ACN \sim \triangle BTL \sim \triangle CTM,$
 $\triangle BCN \sim \triangle BAL \sim \triangle ATN \sim \triangle CTL,$
 $\triangle CAL \sim \triangle CBM \sim \triangle BTL \sim \triangle ATM$ の 3 組ある.
- $\triangle ABM \sim \triangle ACN$ より $\angle ACN = \angle ABM = 20^\circ$ なので, $\triangle ACL$ に着目すれば, $\angle TCL = 90^\circ - 20^\circ - 25^\circ = 45^\circ$.

D. 三角形の五心

三角形の五心

どんな三角形も次の性質を持ち, 重心・内心・外心・垂心・傍心をまとめて三角形の五心という.

- 3 本の中線は 1 点で交わり, それは重心に一致し, 重心は中線を $2:1$ に内分する.
- 3 本の角の二等分線は 1 点で交わり, それは内接円の中心である内心に一致する.
- 3 本の垂直二等分線は 1 点で交わり, それは外接円の中心である外心に一致する.
- 3 本の垂線は 1 点で交わり, それは垂心と定義される.
- 2 本の外角の二等分線と, 残り 1 角の内角の二等分線は 1 点で交わり, それは傍接円の中心である傍心に一致する.

1. 円に内接している四角形

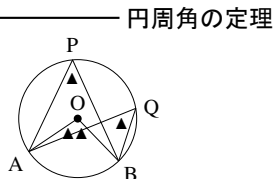
A. 円周角の定理について

中学校で学んだ円周角の定理は、次のように表すことができる。

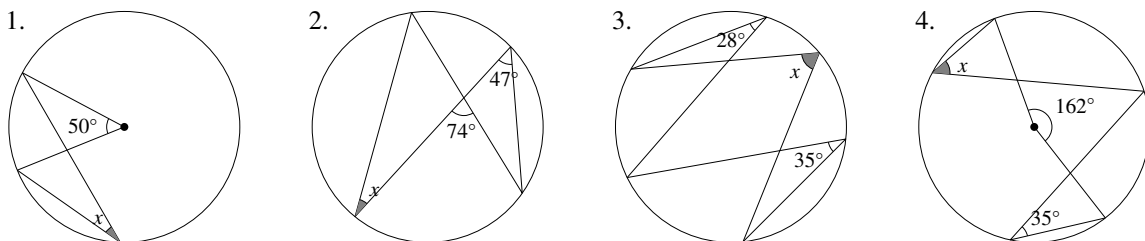
中心が O である円の円周上に、 A, B, P が固定されているとき

(1) $\angle AOB = 2\angle APB$ である。

(2) P を含む側の弧 \widehat{AB} 上に Q をとるとき、 $\angle APB = \angle AQB$ である。



【例題 27】 以下の図について、 x, y を求めよ。



【解答】

1. $2x = 50$ より $x = 25^\circ$

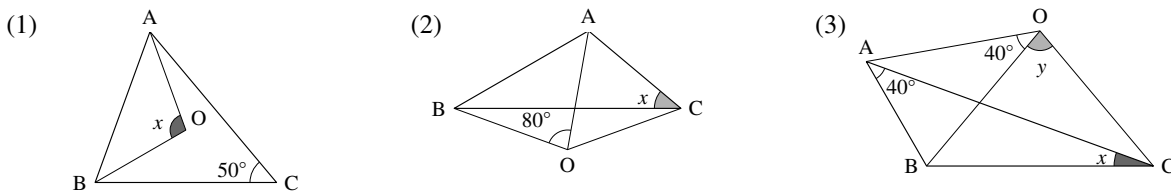
2. $x + 47^\circ = 74^\circ$ より $x = 27^\circ$

3. $28^\circ + 35^\circ = x$ より $x = 63^\circ$

4. $2x + 2 \times 35^\circ = 162^\circ$ より $x = 46^\circ$

【練習 28 : 外心と円周角の定理】

O が $\triangle ABC$ の外心であるとき、 x を求めよ。



【解答】

(1) $x = 2\angle ACB = 100^\circ$

(2) $2x = \angle AOB = 80^\circ$ から $x = 40^\circ$

(3) $2x = 2\angle AOB = 40^\circ$ から $x = 20^\circ$, $y = 2\angle BAC = 80^\circ$

… 外心が与えられた場合は、図に外接円を書き込むようにしましょう。

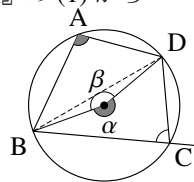
B. 円に内接する四角形の性質～四角形の対角の和

四角形 ABCD が円に内接しているとき、右のように α, β をおくと、『円周角の定理』の(1)から

A は右図の $\frac{1}{2}\alpha$ と等しく、C は右図の $\frac{1}{2}\beta$ と等しい。

よって、 $A + C = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^\circ$ とわかる。

また、変形して $A = 180^\circ - C$ となるので、A は角 C の外角に等しい。



円に内接する四角形の対角

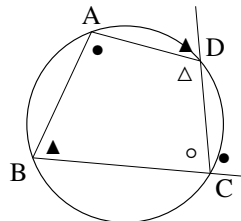
円に内接する四角形において、以下が成立する。

- 向かい合う角（対角）どうしを足すと 180° になる。つまり

$$A + C = 180^\circ, \quad B + D = 180^\circ$$

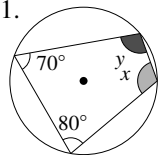
- どの角も、向かいの頂点の外角に等しい、たとえば

$$A = (\angle C \text{ の外角}) = \bullet, \quad B = (\angle D \text{ の外角}) = \blacktriangle$$

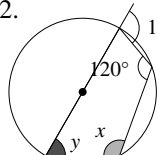


【例題 29】 以下の図について、 x, y を求めよ。

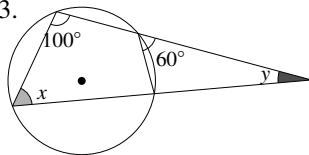
1.



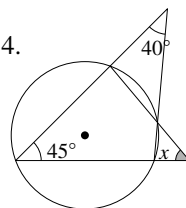
2.



3.



4.



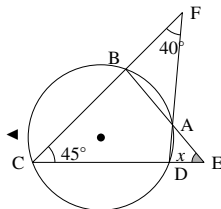
【解答】

1. $x = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ, \quad y = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

2. $x = 110^\circ, \quad y = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

3. $x = 60^\circ, \quad y = 180^\circ - 100^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

4. 右のように A から F までとると、 $\triangle FCD$ から $\angle FDE = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ$,
 $\angle DAE = \angle C = 45^\circ$ なので、 $x = 180^\circ - 85^\circ - 45^\circ = 50^\circ$

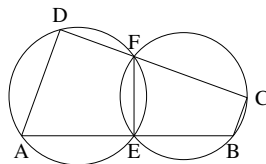


【練習 30 : 円に内接する四角形】

右図において、 $AD \parallel BC$ を示せ。

ただし、D, F, C は一直線上にあり、

A, E, B も一直線上にあるとする。



【解答】 辺 BC を C の方へ伸ばし、伸ばした線上に G をとる。

四角形 ADFE は円に内接するので、 $\angle D = \angle FEB$ 、四角形 FEBC は円に内接するので、 $\angle FEB = \angle FCG$ であるから、 $\angle D = \angle FCG$ になる。つまり、錯角が等しいから、 $AD \parallel BC$ になる。

◀ 別解として、以下を示してもよい。

- $\angle D + \angle C = 180^\circ$
- $\angle A = \angle B$ の外角
- $\angle A + \angle B = 180^\circ$

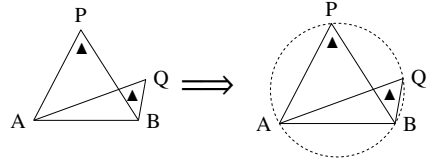
2. 四角形が円に内接する条件

前ページで学んだことは逆も成立し、そのまま四角形が円に内接する条件となる。

A. 円周角の定理の逆

円周角の定理の(2)は「(仮定) P を含む側の弧 \widehat{AB} 上に Q がある \Rightarrow (結論) $\angle APB = \angle AQB$ 」となるが、この命題は逆も成立する。

P, Q は線分 AB に対して同じ側にあり、
 $\angle APB = \angle AQB$ であったとする。
 このとき、A, B, P, Q は同一円周上にある*4。
 (四角形 ABPQ は円に内接する)



円周角の定理の逆

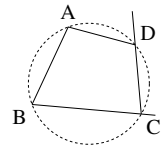
(証明) は p.149 を参照のこと。

B. 「四角形の対角の和」の逆

『円に内接する四角形の対角』(p.131) も逆が成立する。

次のいずれかが成り立てば、四角形 ABCD は円に内接し (4 点 A, B, C, D は同一円周上にあり)、他の 3 つも成り立つ。

- $\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$ (対角の和が 180°)
- $\angle A = \angle C$ の外角, $\angle B = \angle D$ の外角 (対角の外角と等しい)

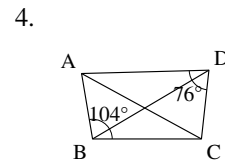
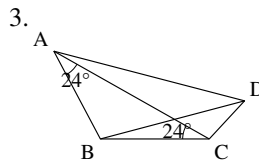
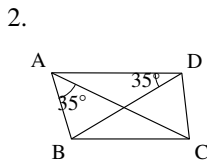
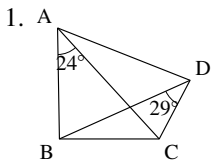


四角形が内接する条件 (4 点が同一円周上にある)

(証明) は p.149 を参照のこと。

【例題 31】

次の四角形のうち、円に内接するものを 1 つ選べ。



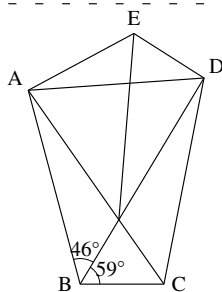
【解答】 円に内接するのは 4.

1. 円周角の定理の逆が不成立
2. 等しい角は円周角の定理の逆に対応しない
3. 2. と同じ
4. 「四角形の対角の和」の逆が成り立つ

*4 「A, B, P, Q は同じ一つの円の周上にある」という意味

【例題 32】

- $\angle ACD = 46^\circ$ のとき、円に内接する四角形はどれか。また、その根拠を答えよ。
- $\angle AED = 134^\circ$ のとき、円に内接する四角形はどれか。また、その根拠を答えよ。
- AC と BD の交点を F とする。四角形 ABCD, 四角形 AFDE がどちらも円に内接するとき、 59° に等しい角をすべて求めよ。ただし、右図に補助線を引かずに得られる角のみを答えること。



【解答】

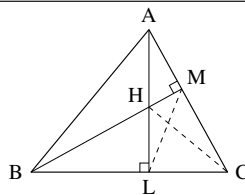
- 円周角の定理の逆により、四角形 ABCD が円に内接する。
- 四角形の対角の和の逆により、四角形 ABDE が円に内接する。
- 四角形 ABCD が円に内接するから $\angle DAC = \angle DBC = 59^\circ$, 四角形 AFDE が円に内接するから $\angle DAC = \angle DBF = 59^\circ$, よって、 59° に等しいのは $\angle DAC, \angle DEF$ の2つ。

◀ $\angle DAC$ は $\angle DAF$ でもよい。

【練習 33 : 四角形の円接】

$\triangle ABC$ の A, B から垂線 AL, BM を引き、交点を H とする。

- A, B, C, H, L, M のいずれかを頂点とする四角形のうち、円に内接するもの2つを答えなさい。
- $\angle CAL = 15^\circ, \angle ABM = 25^\circ$ のとき、 $\angle ALM, \angle HCL$ の大きさを求めよ。



【解答】

- $\angle CMH + \angle CLH = 180^\circ$ から、C, M, H, L は同一円周上にある。
また、 $\angle AMB = \angle ALB$ から、A, M, L, B は同一円周上にある。
- 四角形 AMLB について、円周角の定理より $\angle ALM = \angle ABM = 25^\circ$ 。
また、 $\angle HCL = \angle HML = \angle BAL$ である。 $\triangle ABM$ に着目して、 $\angle BAL = 90^\circ - 15^\circ - 25^\circ = 50^\circ$ であるから、 $\angle HCL = 50^\circ$ 。

◀ 『円周角の定理の逆』(p.132)
 ▶ 『四角形の対角の和の逆』(p.132)
 ▶ 順に、四角形 CMHL, 四角形 AMLB について、円周角の定理を用いた)



直角が向かい合う四角形を見たら、円に内接することを連想できるようにしよう。

【暗記 34 : 円周角の定理の逆】

線分 AB があり、線分 AB を直径とする円の円周を K とする。以下の に「内部」「周上」「外部」のいずれかを入れよ。

- $\angle APB$ が鋭角ならば、P は K の にある。
- $\angle APB$ が直角ならば、P は K の にある。
- $\angle APB$ が鈍角ならば、P は K の にある。

【解答】 ア：外部， イ：周上， ウ：内部

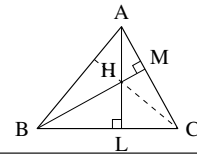


上の3点の証明は p.149 を参照のこと。

【練習 35 : 垂心についての別証明】

$\triangle ABC$ の A, B から垂線 AL, BM を引き、交点を H とする。

- (1) $\angle HCL = \angle LAB$ を証明せよ。
 (2) 直線 CH と辺 AB の交点を N とする。 $CN \perp AB$ を示せ。



【解答】

- (1) $\angle CMH + \angle CLH = 180^\circ$ から、四角形 $CMHL$ は同一円周上にある。また、
 $\angle AMB = \angle ALB$ から、四角形 $AMLB$ は同一円周上にあるので
 $\angle HCL = \angle HML$ (四角形 $CMHL$ について、円周角の定理より)
 $= \angle BAL$ (四角形 $AMLB$ について、円周角の定理より)
 (2) (1) より $\angle HCL = \angle LAB$, 対頂角より $\angle AHN = \angle CHL$ から、2角が等しい
 ので $\triangle AHN \cong \triangle CHL$, よって、 $\angle ANH = \angle CLH = 90^\circ$. ■

【練習 36 : 垂心と内心】

鋭角三角形 ABC の各頂点から、垂線 AL, BM, CN を引く。 $\triangle ABC$ の垂心が、 $\triangle LMN$ の内心であることを示せ。

【解答】 NT, LT, MT がすべて、 $\triangle LMN$ の内角二等分線になることを示せばよい。

まず、 $\angle ANT + \angle AMT = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ であるから、四角形 $ANTM$ は円に内接する。同様にして、四角形 $BNTL, CMTL$ も円に内接する。また、
 $\angle AMB = \angle ALB = 90^\circ$ から四角形 $AMLB$ は円に内接する。同様にして、四角形 $BNMC, CLNA$ も円に内接する。以上より、

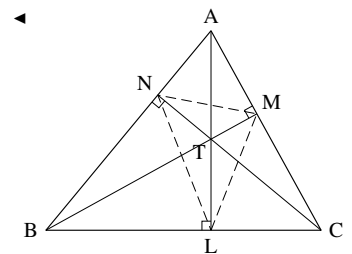
$$\begin{aligned} \angle MNT &= \angle MAT && \text{(四角形 } ANTM \text{ について、円周角の定理より)} \\ &= \angle LBT && \text{(四角形 } AMLB \text{ について、円周角の定理より)} \\ &= \angle TML && \text{(四角形 } BNTL \text{ について、円周角の定理より)} \end{aligned}$$

であるから、 NT は $\angle LNM$ の二等分線になる。また

$$\begin{aligned} \angle NLT &= \angle NBT && \text{(四角形 } BNTL \text{ について、円周角の定理より)} \\ &= \angle MCT && \text{(四角形 } BMNC \text{ について、円周角の定理より)} \\ &= \angle MLT && \text{(四角形 } CMTL \text{ について、円周角の定理より)} \\ \angle LMT &= \angle LCT && \text{(四角形 } CMTL \text{ について、円周角の定理より)} \\ &= \angle NAT && \text{(四角形 } CLNA \text{ について、円周角の定理より)} \\ &= \angle NMT && \text{(四角形 } ANTM \text{ について、円周角の定理より)} \end{aligned}$$

であるから、 LT, MT は $\angle NLM, \angle LMN$ の二等分線になる。よって、 T は $\triangle LMN$ の内心である。

◀ 実際には、このうち 2 つを示せば十分である。



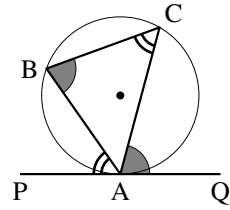
3. 接弦定理

接弦定理

$\triangle ABC$ が円に内接し、 A で円に接する直線 PQ が引いてある。
このとき、次が成り立つ。

$$\angle BAP = \angle BCA, \quad \angle CAQ = \angle CBA$$

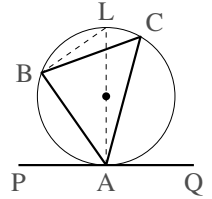
これを、**接弦定理**という。



(証明・鋭角のとき) 直線 AO と円周の交点を L とし、直径 AL を考える。

円周角の定理より $\angle ABL = 90^\circ$ であるから、 $\triangle ABL$ について
 $\angle BLA + \angle BAL = 90^\circ \dots\dots\dots \textcircled{1}$ である。よって

$$\begin{aligned} \angle BAP &= 90^\circ - \angle BAL = \angle BLA \quad (\textcircled{1} \text{より}) \\ &= \angle BCA \quad (\text{円周角の定理より}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

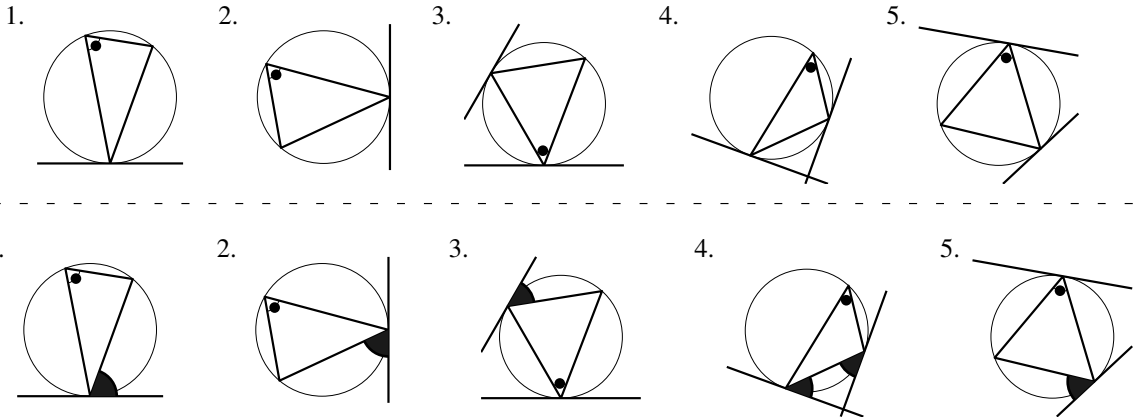


左右を逆に考えれば、 $\angle CAQ = \angle CBA$ も同様に示される。

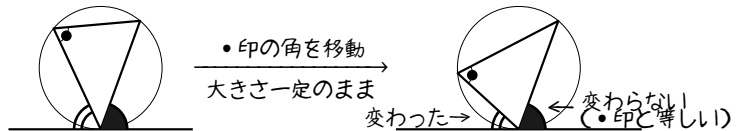
(証明・鈍角のとき) $\angle CBA$ が鈍角の場合を示す。 $\angle BCA$ は鋭角なので $\angle BAP = \angle BCA$ であり

$$\begin{aligned} \angle CBA &= 180^\circ - \angle BCA - \angle BAC \quad (\triangle ABC \text{ の内角の和は } 180^\circ) \\ &= 180^\circ - \angle BAP - \angle BAC = \angle CAQ \quad \blacksquare \end{aligned}$$

【例題 37】 以下の図において、接弦定理によって・印と等しい角をすべて選べ。



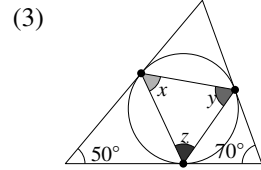
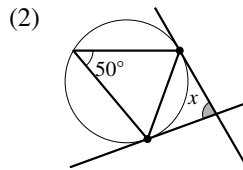
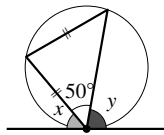
右のように、・印の角を一定に移動しても、大きさの変わらない側の角が・印と等しいと理解するとよい。

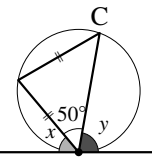


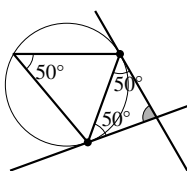
【練習 38：接弦定理～その 1～】

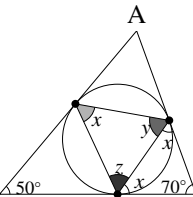
右の図中の ● はすべて、円と直線の接点である。

それぞれ、 x, y, z を求めよ。



(1)  二等辺三角形から $\angle C = 50^\circ$
接弦定理より $x = \angle C = 50^\circ$
 $y = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$

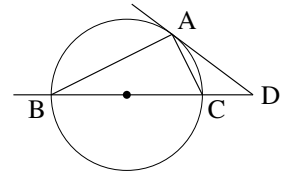
(2)  接弦定理より、2ヶ所が 50° に等しい。よって
 $x = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$

(3)  接弦定理より、2ヶ所が x に等しい。よって
 $x = (180^\circ - 70^\circ) \div 2 = 55^\circ$
同様にして $y = (180^\circ - 50^\circ) \div 2 = 65^\circ$
 $\angle A = 60^\circ$ に注意して、同様に $z = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$.

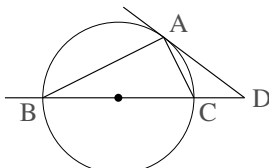
【練習 39：接弦定理～その 2～】

右図において、線分 BC は円の直径、直線 DA は円の接線である。以下の問いに答えなさい。

- (1) $\angle ABC = 20^\circ$ のとき、 $\angle D$ の大きさを求めよ。
(2) $AC = CD = 1$ のとき、 $\angle ABC$ と円の直径を求めよ。



【解答】 まず、 BC が直径なので $\angle BAC = 90^\circ$ である。

- (1)  接弦定理より $\angle DAC = 20^\circ$,
 $\angle ACB = 180^\circ - (90^\circ + 20^\circ) = 70^\circ$
よって、 $\triangle ACD$ について、
 $\angle D = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$
- (2) $\angle ABC = x$ とおくと $\angle DAC = x$, $\angle D = x$ であるから、 $\angle ACB = 2x$ になる。
 $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$ に代入して、 $x + 2x = 90^\circ$, つまり $x = 30^\circ$
また、 $\triangle ABC$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形になり、 $AC = 1$ より、 $BC = 2$ が円の直径になる。

◀ 三角形の 2 角の和は、他の 1 角の外角に等しい。

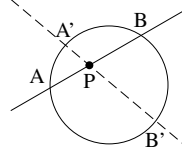
4. 方べきの定理

A. 方べきの定理とは

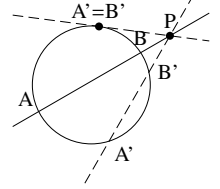
円 C と、1 点 P がある。ただし、 P は C の円周上にないとする。

ここで、 P を通る直線 l を考え、 C の円周と l の交点を A, B とする。方べきの定理とは、 l をどのように引いても、 $PA \cdot PB$ が同じ値になることを言う。

P が円周の中にあるとき



P が円周の外にあるとき

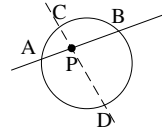


B. P が円周の中にあるとき

方べきの定理 (P が円周の中にあるとき)

弦 AB と弦 CD が、円の中の P で交わっているとき

- $\triangle PAD \sim \triangle PCB$ であり
- $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つ (方べきの定理).



【暗記 40 : 方べきの定理～その 1～】

上の定理を証明せよ。

【解答】 $\triangle PAD$ と $\triangle PCB$ について、円周角の定理より $\angle PAD = \angle PCB$, $\angle PDA = \angle PBC$ であるので、2 角が等しいから $\triangle PAD \sim \triangle PCB$ になる。よって、
 $PA : PC = PD : PB \Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$

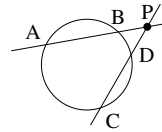
◀ $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ を示しても良い。

C. P が円周の外にあるとき

方べきの定理 (P が円周の外にあるとき)

弦 AB と弦 CD が、円の中の P で交わっているとき

- $\triangle PAD \sim \triangle PCB$ であり
- $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つ (方べきの定理).



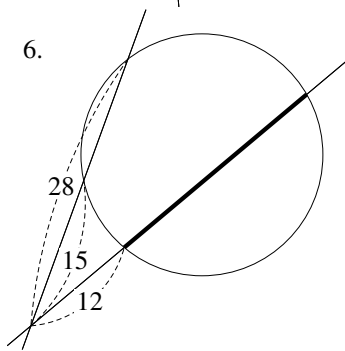
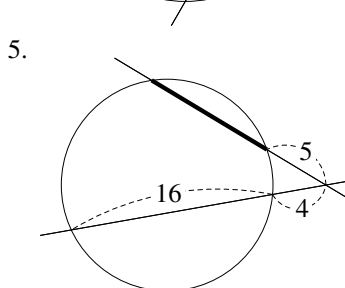
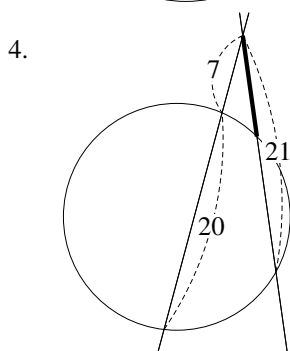
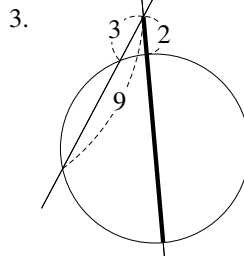
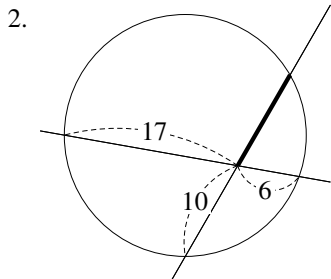
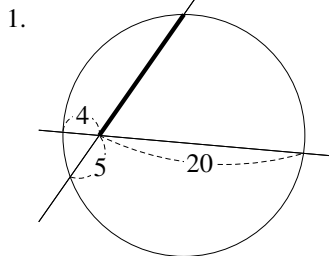
【暗記 41 : 方べきの定理～その 2～】

上の定理を証明せよ。

【解答】 $\triangle PAD$ と $\triangle PCB$ について、 $\angle P$ は共通、円周角の定理より $\angle PAD = \angle PCB$ であるので、2 角が等しいから $\triangle PAD \sim \triangle PCB$ になる。よって、
 $PA : PC = PD : PB \Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$

◀ $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ を示しても良い。この場合、四角形 $ABCD$ が円に内接することを用いる。

【例題 42】 以下の図において、太線の長さを求めよ。



【解答】 いずれも、求める長さを x とおく。

1. $4 \cdot 20^4 = 8x$ より、 $x = 16$.

2. $17 \cdot 6^3 = 10^5 x$ より、 $x = \frac{51}{5}$.

3. $3 \cdot 9 = 2x$ より、 $x = \frac{27}{2}$.

4. $7 \cdot (20 + 7) = 21^3 x$ より、 $x = 9$.

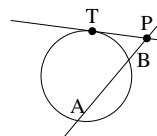
5. $(16 + 4)^4 \cdot 4 = (x + 5) \cdot 8$ より、 $x = 16 - 5 = 11$.

6. $28^7 \cdot 15^5 = 12^8 \cdot (x + 12)$ より、 $x = 35 - 12 = 23$.

D. 円周外の点 P から、接線を引いたとき

方べきの定理 (P から接線を引いたとき)

接点が T である接線が、弦 AB と点 P で交わっているとき



- $\triangle PAT \sim \triangle PTB$ であり
- $PA \cdot PB = PT^2$ が成り立つ (方べきの定理).

【暗記 43: 方べきの定理~その3~】

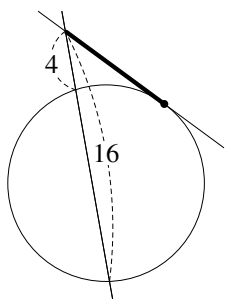
上の定理を証明せよ。

【解答】 $\triangle PAT$ と $\triangle PTB$ について、 $\angle P$ は共通、接弦定理より $\angle PAT = \angle PTB$ であるので、2角が等しいから $\triangle PAT \sim \triangle PTB$ になる。よって $PA : PT = PT : PB \Leftrightarrow PA \cdot PB = PT^2$

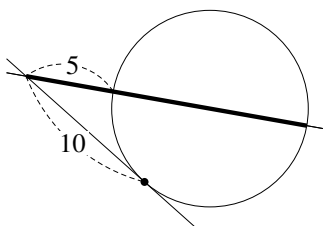
【練習 44：接線を引いたときの方べきの定理】

以下の図において、太線の長さを求めよ。ただし、図の中の“・”は接点とする。

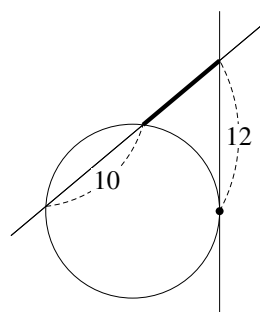
(1)



(2)



(3)



【解答】 求める長さを x とする。

(1) $16 \cdot 4 = x^2$ より, $x = \sqrt{64} = 8$

(2) $5 \cdot x = 10^2$ より, $x = 20$

(3) $x(x + 10) = 12^2 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 144 = 0$.

これを解いて $x = 8, -18$ なので, $x = 8$.



方べきの定理においては、一方の点のみが円周上にあることに注意しよう。

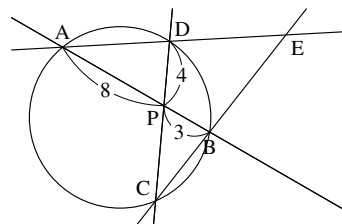
【練習 45：方べきの定理のまとめ】

右の図について、以下の問いに答えよ。

(1) CP の長さを求めよ。

(2) 図中の相似な三角形を 2 組答え、それぞれの相似比も答えよ。

(3) $DE = 10$ とするとき、BC の長さを求めよ。



【解答】

(1) 方べきの定理より $8 \cdot 3 = 4 \cdot CP$ なので, $CP = 6$

(2) $\triangle PAD \sim \triangle PCB$, 相似比は $PD : PB = 4 : 3$

$\triangle EAB \sim \triangle ECD$, 相似比は $AB : CD = 11 : 10$

(3) $BC = x$ とおく。

$\triangle EAB \sim \triangle ECD$, $DE = 10$ より $BE = 10 \times \frac{11}{10} = 11$

$\triangle PAD \sim \triangle PCB$, $BC = x$ より $AD = \frac{4}{3}x$

よって、方べきの定理より

$$10 \left(10 + \frac{4}{3}x \right) = 11(11 + x) \Leftrightarrow 100 + \frac{40}{3}x = 121 + 11x$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{3}x = 21 \therefore x = 21^3 \cdot \frac{3}{7} = 9$$

◀ 【別解】 $EA : EC = 11 : 10$ より
 $\left(10 + \frac{4}{3}x \right) : (11 + x) = 11 : 10$
 これを解いて $x = 9$.



方べきの定理と、それを示すために用いた三角形の相似は、セットにして理解しよう。上の【練習】のように、相似を使わないと解けない問題も存在する。

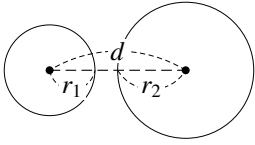
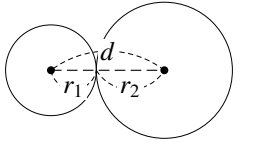
5. 2円の性質

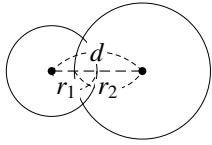
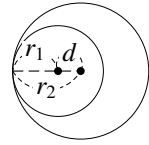
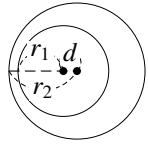
A. 2円の位置関係

2円の位置関係は、2円の半径と中心間の距離で決まり、以下の5つの状態しかない。

2円の位置関係

2円の半径を r_1, r_2 ($r_1 < r_2$)、中心間の距離を d とすると、以下のようになる。

| | | |
|---------------|---|---|
| 2円の図 |  |  |
| 2円の位置関係 | 離れている | 外接している |
| 2円の共有点の個数 | 0個 | 1個 (外接) |
| 2円の中心間の距離 d | $r_2 + r_1 < d$ | $d = r_2 + r_1$ |

| | | |
|---|---|--|
|  |  |  |
| 交わっている | 内接している | 一方が他方を含む |
| 2個 | 1個 (内接) | 0個 |
| $r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1$ | $d = r_2 - r_1$ | $d < r_2 - r_1$ |

円が複数個あるときは、まず、中心間を線で結んだ図を描こう。そのうえで、上のような条件を考えるとよい。

【例題 46】 2点 A, B があり、中心が A で半径 3 の円 C_1 と、中心が B で半径 5 の円 C_2 がある。以下のそれぞれの場合について、 C_1 と C_2 の位置関係を答えよ。

1. $AB = 9$

2. $AB = 5$

3. $AB = 2$

4. $AB = 1$

【解答】 円 C_1 の中心 (0, 0) を O とすると、 $OA = 5 + 3 = 8$ のとき 2円は外接、 $OA = 5 - 3 = 2$ のとき 2円は内接であるので、

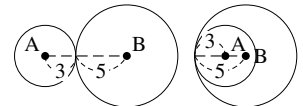
- $8 < OA$ のとき 2円は離れている
- $2 < OA < 8$ のとき 2円は交わっている
- $OA < 2$ のとき C_2 が C_1 を含む

1. 2円は離れている.

2. 2円は交わっている.

3. 2円は内接している.

4. C_2 が C_1 を含む.



B. 2円の共通接線

2つの円にどちらも接する接線を2円の共通接線と言い、2円の位置関係によって本数が異なる。

2円の共通接線

| 本数 | 4本*5 | 3本 | 2本 | 1本 | 0本 |
|-----------|-------|--------|--------|--------|----------|
| 2円と共通接線の図 | | | | | |
| 2円の位置関係 | 離れている | 外接している | 交わっている | 内接している | 一方が他方を含む |
| 共通外接線 | 2本 | 2本 | 2本 | 1本 | 0本 |
| 共通内接線 | 2本 | 1本 | 0本 | 0本 | 0本 |

【例題 47】 2点 A, B があり、中心が A で半径 3 の円 C_1 と、中心が B で半径 5 の円 C_2 がある。以下の場合について、共通接線の本数を答えよ。

1. $AB = 9$ 2. $AB = 5$ 3. $AB = 2$ 4. $AB = 1$

【解答】 前ページの答えを利用して

1. 2円は離れているので **4本**。 2. 2円は交わっているので **2本**。
3. 2円は内接しているので **1本**。 4. C_2 が C_1 を含むので **0本**。

【暗記 48：共通接線の長さ】

O_1 が中心で半径 1 の円 C_1 と、 O_2 が中心で半径 2 の円 C_2 があり、 $O_1O_2 = 4$ とする。

1. 2円の共通外接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ A_1, A_2 で接するとき、線分 A_1A_2 の長さを求めよ。
2. 2円の共通内接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ B_1, B_2 で接するとき、線分 B_1B_2 の長さを求めよ。

【解答】

1. O_1 から O_2A_2 へ下ろした垂線の足を H とすると

$$A_1A_2 = O_1H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2}$$

である。 $O_1O_2 = 4$, $O_2H = A_2O_2 - A_2H = 2 - 1 = 1$ なので

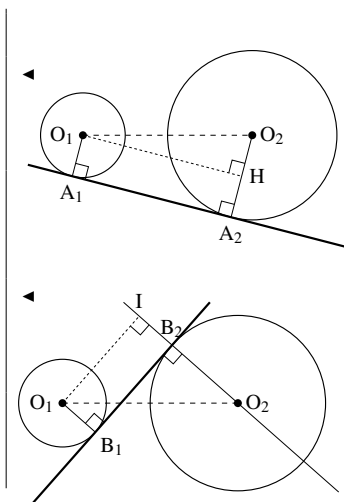
$$A_1A_2 = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

2. O_1 から直線 O_2B_2 へ下ろした垂線の足を I とすると

$$B_1B_2 = O_1I = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2I^2}$$

である。 $O_1O_2 = 4$, $O_2I = O_2B_2 + B_1O_1 = 2 + 1 = 3$ なので

$$B_1B_2 = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

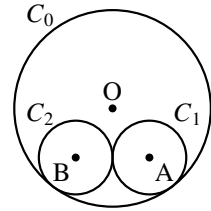


上の問題の 2. の別解として、 O_1O_2 と B_1B_2 の交点を C とし、 $\triangle O_1B_1C \sim \triangle O_2B_2C$ と三平方の定理を用いても解くことが出来る。ただし、計算が多少ややこしい。

【練習 49：複数の円を含む図形】

半径 8 の円 C_0 に、半径 3 の円 C_1, C_2 が右図のように内接している。それぞれの中心を O, A, B とする。

- (1) AB, OA の長さをそれぞれ求めよ。
 (2) C_0 に内接し、 C_1, C_2 の両方に外接する円のうち、大きい方の円 C_3 の半径を求めよ。



【解答】

(1) 図より明らかに、 $AB = 6$ 。また、直線 OA を右欄外の図のように引いて、 $OA = 8 - 3 = 5$ 。

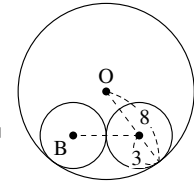
(2) 円 C_3 の中心を P 、半径を x とする。

AB の中点を M とすると、 M は直線 PO 上にあり、 $PM \perp AB$ になる。
 $\triangle OAM$ は直角三角形なので

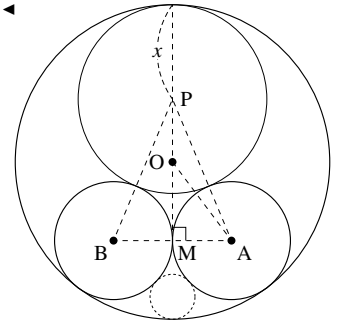
$$5^2 = 3^2 + OM^2 \quad \therefore OM = 4$$

また、円 C_3 が円 C_0 と内接することから $PO = 8 - x$ なので、 $\triangle PAM$ について

$$\begin{aligned} PA^2 &= (PO + OM)^2 + MA^2 \\ \Leftrightarrow (x + 3)^2 &= \{(8 - x) + 4\}^2 + 3^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 &= 144 - 24x + x^2 + 9 \\ \Leftrightarrow 6x &= 144 - 24x \quad \therefore x = \frac{24}{5} \end{aligned}$$



円が接しているときは円の中心と接点を結ぶ習慣をつけよう



ちなみに、下に小さい円も書ける。こちらの円の半径は $\frac{8}{7}$ になる。



1. メネラウスの定理

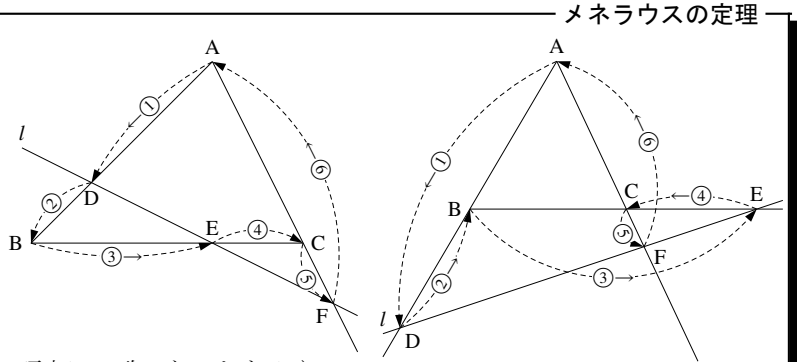
A. メネラウスの定理とは

$\triangle ABC$ と直線 l を考える.

l が直線 AB , BC , CA と交わる点を D , E , F とするとき、次の式が成り立つ.

$$\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} \cdot \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{4}} \cdot \frac{\textcircled{5}}{\textcircled{6}} = 1$$

(ただし、 D , E , F は $\triangle ABC$ の頂点に一致しないとする.)



メネラウスの定理

(証明) C を通り直線 l に平行な直線と、直線 AB の交点を K とする. このとき、 $CK \parallel l$ より

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BD}{DK}, \quad \frac{CF}{FA} = \frac{KD}{DA} \text{ となる. よって, } \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BD}{DK} \cdot \frac{KD}{DA} = 1$$

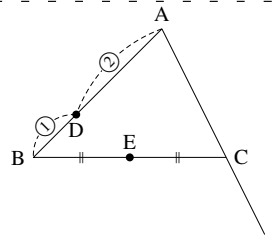


この定理を使うには、上図の矢印のように、線でなぞって考えると良い.

このとき、線でなぞるのは、 A から始めなくても、 B からでも、 C からでもよい. 実際に、次のどちらの等式も成り立つからである.

$$B \text{ から始めた場合} \rightarrow \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{4}} \cdot \frac{\textcircled{5}}{\textcircled{6}} \cdot \frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} = 1, \quad C \text{ から始めた場合} \rightarrow \frac{\textcircled{5}}{\textcircled{6}} \cdot \frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} \cdot \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{4}} = 1$$

【例題 50】 $\triangle ABC$ があり、辺 AB を $2:1$ に内分する点を D 、辺 BC の中点を E とする. 直線 DE と直線 AC の交点を F とするとき、 $\frac{CF}{FA}$ を求めよ.
また、 $AC:CF$ を求めよ.



【解答】 $\triangle ABC$ と直線 DE について、メネラウスの定理より

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

$$\text{よって, } \frac{CF}{FA} = \frac{1}{2}$$

$$\text{また, } AC:CF = 1:1$$

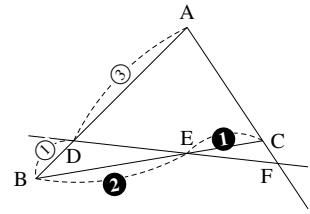
◀ $AD:DB = 2:1$ と $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{1}$ は同じことを表わしている.

◀ 両辺を $\frac{1}{2}$ 倍した

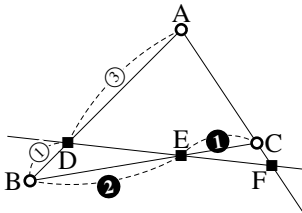
◀ 詳しく書けば、 $\frac{CF}{FA} = \frac{1}{2}$ より、 $CF = k$, $FA = 2k$ とおけるので $AC = k$ になるから $1:1$.

B. 三角形と1本の直線を定める

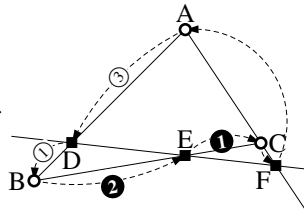
右の図にメネラウスの定理を使うと、次のように、2通りの等式を考えることができる。



(I) $\triangle ABC$ と直線 DEF で考えた場合



○は三角形の頂点
■は直線と辺の交点



Aから始めて

Ⓐ → ■ → ① → ■ → ② → ■ → Ⓐ

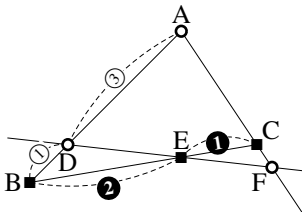
$$\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

よって、 $\frac{CF}{FA} = \frac{1}{6}$ になり、

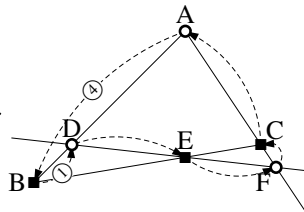
$$CF : FA = 1 : 6$$

$$AC : CF = 5 : 1$$

(II) $\triangle ADF$ と直線 BC で考えた場合



○は三角形の頂点
■は直線と辺の交点



Aから始めて

Ⓐ → ■ → ① → ■ → ② → ■ → Ⓐ

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{DE}{EF} \cdot \frac{FC}{CA} = 1$$

このように、どの三角形と直線で考えるかによって、異なる式を作ることが出来る。



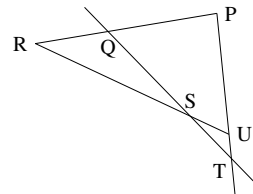
問題を解く際は、上のことに注意して「とりあえずやってみる」とよい。

【練習 51：メネラウスの定理】

右図において、 $PQ : QR = 3 : 2$ 、 $PU : UT = 4 : 1$ である。

以下の問いに答えよ。

- (1) $RS : SU$ を求めよ。
- (2) $QS : ST$ を求めよ。



【解答】

(1) $\triangle PRU$ と直線 QT についてメネラウスの定理を考えれば

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{RS}{SU} \cdot \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{RS}{SU} = \frac{10}{3}$$

よって、 $RS : SU = 10 : 3$ 。

(2) $\triangle PQT$ と直線 RU についてメネラウスの定理を考えれば

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{QS}{ST} \cdot \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{QS}{ST} = \frac{8}{5}$$

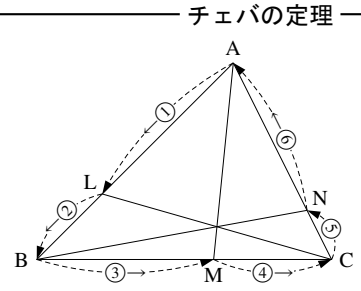
よって、 $QS : ST = 8 : 5$ 。

2. チェバの定理

$\triangle ABC$ の辺 AB, BC, CA 上に L, M, N がある. ここで, 直線 AM, BN, CL が 1 点で交わるならば, 次の式が成り立つ.

$$\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} \cdot \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{4}} \cdot \frac{\textcircled{5}}{\textcircled{6}} = 1$$

(ただし, L, M, N は $\triangle ABC$ の頂点に一致しないとする.)



チェバの定理

(証明) AM, BN, CL が交わる 1 点を K とする. $\triangle ABM$ と直線 LC についてメネラウスの定理を用いると

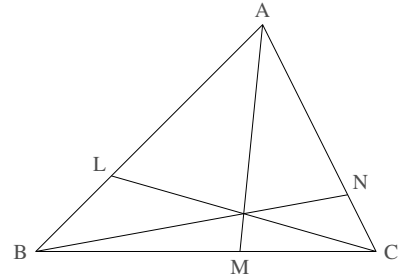
$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BC}{CM} \cdot \frac{MK}{KA} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle AMN$ と直線 BN についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AK}{KM} \cdot \frac{MB}{BC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の左辺どうし, 右辺どうしを掛け合わせると

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BC}{CM} \cdot \frac{MK}{KA} \cdot \frac{AK}{KM} \cdot \frac{MB}{BC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AL}{LB} \cdot \frac{MB}{CM} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 \quad \blacksquare$$

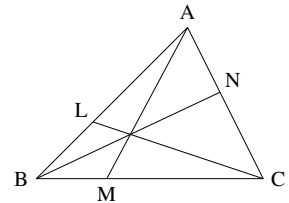


… チェバの定理も線でなぞると考えやすい. また, A でなく, B や C から始めてもよい.

【練習 52 : メネラウスの定理・チェバの定理】

右図の三角形において, L は辺 AB を $5:3$ に内分し, N は辺 AC を $3:4$ に内分し, 線分 AM, BN, CL は 1 点 G で交わっている.

- (1) $BM:MC$ を求めよ. (2) $AG:GM$ を求めよ.
 (3) $BG:GN$ を求めよ. (4) $CG:GL$ を求めよ.



【解答】

- (1) チェバの定理より $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{4}{3} = 1$ より,
 $\frac{BM}{MC} = \frac{9}{20}$ なので, $BM:MC = 9:20$
 (2) $\triangle ABM$ と直線 LC についてメネラウスの定理を考えれば
 $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BC}{CM} \cdot \frac{MG}{GA} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \cdot \frac{29}{20^4} \cdot \frac{NG}{GA} = 1 \Leftrightarrow \frac{MG}{GA} = \frac{12}{29}$ なので,
 $AG:GM = 29:12$
 (3) $\triangle ABN$ と直線 LC についてメネラウスの定理を考えれば
 $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BG}{GN} \cdot \frac{NC}{CA} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \cdot \frac{BG}{GN} \cdot \frac{4}{7} = 1 \Leftrightarrow \frac{BG}{GN} = \frac{21}{20}$ なので,
 $BG:GN = 21:20$
 (4) $\triangle ACL$ と直線 BN についてメネラウスの定理を考えれば
 $\frac{AB}{BL} \cdot \frac{LG}{GC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{3} \cdot \frac{LG}{GC} \cdot \frac{4}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{LG}{GC} = \frac{9}{32}$ なので,
 $CG:GL = 32:9$

◀ $\triangle ACM$ と直線 BM についてメネラウスの定理を考えても, 解くことが出来る.

◀ $\triangle BCN$ と直線 AM についてメネラウスの定理を考えても, 解くことが出来る.

◀ $\triangle CLB$ と直線 AM についてメネラウスの定理を考えても, 解くことが出来る.

【発展 53：重心と面積比～重心についての別証明】

△ABC の中線 BM, CN の交点を P とする. △ABC の面積を S とすると, △BCM = ア である.

ここで, $BM : BP = 1 : k$ とおくと, △BPC = イ になる.

同様に, △BPA = ウ であり, N は AB の中点であるから

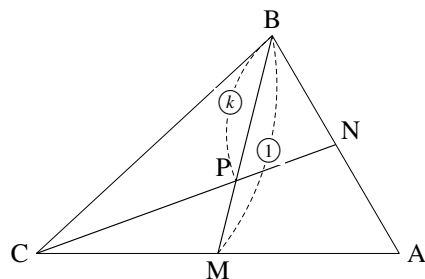
△BPN = エ になる. ここで,

$$\triangle BCN = \triangle BPC + \triangle BPN \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = \text{イ} + \text{エ}$$

になるから, $k = \text{オ}$ である.

よって, $BP : PM = \text{カ} : \text{キ}$ と分かる.

BC の中点を L, BM と AL の交点を P' とすると, 同様に $BP' : P'M = \text{カ} : \text{キ}$ であるから P と P' は一致し, これが重心である.



【解答】 底辺が △ABC の半分だから, $\triangle BCM = \frac{S}{2}$ (ア) であり, △BPC の底

辺を BP と見れば, $\triangle BPC = k\triangle BCM = \frac{k}{2}S$ (イ) になる.

同様に, $\triangle BPA = k\triangle BAM = \frac{k}{2}S$ (ウ) であり, △BPN の底辺を BN と見

れば, $\triangle BPN = \frac{1}{2}\triangle BPA = \frac{k}{4}S$ (エ) になる. ここで

$$\begin{aligned} \triangle BCN = \triangle BPC + \triangle BPN &\Leftrightarrow \frac{1}{2}S = \frac{k}{2}S + \frac{k}{4}S = \frac{3k}{4}S \\ &\Leftrightarrow 2 = 3k \quad \therefore k = \frac{2}{3} \text{ (オ)} \end{aligned}$$

よって, $BP : PM = \frac{2}{3} : \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \text{カ} \underline{2} : \text{キ} \underline{1}$ と分かる.

◀ CM を底辺に見る

【発展 54：傍心と傍接円】

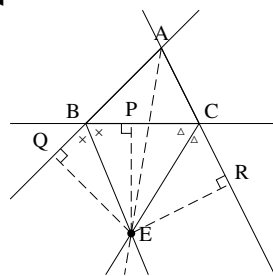
△ABC について, ∠B の外角の二等分線, ∠C の外角の二等分線の交点を E とする. 直線 AE は, ∠A の二等分線になることを示せ. また, E が傍心の一つになっていることを示せ.

【解答】 E から辺 BC, 直線 AB, AC へ引いた垂線の足を, それぞれ P, Q, R とする.

直角三角形 △EQB と △EPB について, EB 共通, ∠EBQ = ∠EBP より, 斜辺と 1 角が等しいから △EQB ≅ △EPB となって EQ = EP …… ①.

同様に, △ERC ≅ △EPC から ER = EP …… ② である.

直角三角形 △EAQ と △EAR について, EA 共通, ①, ② より EQ = ER であるから, △EAQ ≅ △EAR になる. よって, ∠EAQ = ∠EAR と分かるので, EA は ∠A の二等分線に一致することが示された.

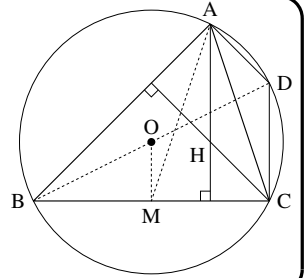


また、①、②から $EP = EQ = ER$ であるので、E を中心に AB, BC, CA と交わる円を描けることも示されている。 ■

【発展 55：オイラー線～外心・重心・垂線を通る線】

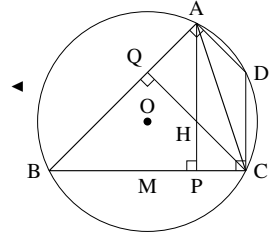
鋭角三角形 ABC があり、外心を O、垂心を H、重心を G とする。また、辺 BC の中点を M とし、D を線分 BD が外接円の直径となるようにとる。

- ① 四角形 ADCH は平行四辺形であることを示せ。
- ② $AH = 2OM$ を示せ。
- ③ 3点 H, G, O は同一直線上にある（この直線をオイラー線 (Euler's line) という）ことを示し、 $HG : GO$ を求めよ。

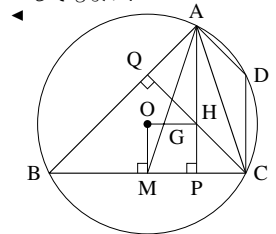


【解答】 A, C から下ろした垂線の足を、それぞれ P, Q とする。

- ① BD は直径であるから、 $\angle DCB = 90^\circ$ になる。よって $\angle APB = \angle DCB = 90^\circ$ から同位角が等しいので、 $AP \parallel DC$ 。
同様に、 $\angle DAB = \angle CQB = 90^\circ$ から $CQ \parallel DA$ であり、向かい合う 2 組の辺が平行なので、四角形 ADCH は平行四辺形である。
- ② $BO = OD, BM = MC$ から中点連結定理より $2OM = DC$ 。さらに、 $\square ADCH$ について $AH = DC$ が成り立つから、 $AH = 2OM$ となる。
- ③ $\angle AGH = \angle MGO$ を示せばよい。
 $\triangle AHG$ と $\triangle MOG$ について、まず、G が重心であるから $AG : GM = 2 : 1$ である。これと②を合わせて、 $AH : OM = AG : GM = 2 : 1$ が成り立つ。また、AP も OM も辺 BC と垂直に交わるから $AP \parallel OM$ であり、 $\angle HAG = \angle OMG$ が分かる。つまり、2 辺の比とその間の角が等しいから $\triangle AHG \sim \triangle MOG$ である。
よって、 $\angle HGA = \angle OGM$ であるから、O, G, H は同一直線上にあると分かる。さらに、相似比から $HG : GO = 2 : 1$ である。



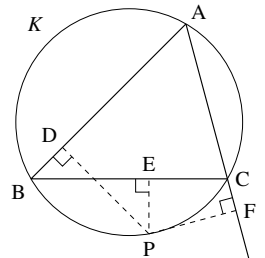
◀ (別解) $\triangle BOM \sim \triangle BDC$ と、相似比が 1 : 2 であることを直接示してもよい。



【発展 56：シムソン線】

$\triangle ABC$ と外接円 K を考える。A を含まない弧 \widehat{BC} 上に P をとり、P から直線 AB, BC, CA へ引いた垂線の足を D, E, F とする。ただし、線分 AP が円 K の直径でないように、P をとる。

- ① A, B, C, D, E, F, P のいずれかを頂点とする四角形のうち、円に内接するものは 4 つある。そのうち 1 つは四角形 ABPC であるが、他の 3 つを答えなさい。
- ② D か F の一方は $\triangle ABC$ の辺上にあり、他方は辺上にないことを示せ。
- ③ 3点 D, E, F は同一直線上にあることを示せ（この直線をシムソン線 (Simson line) という）。



【解答】

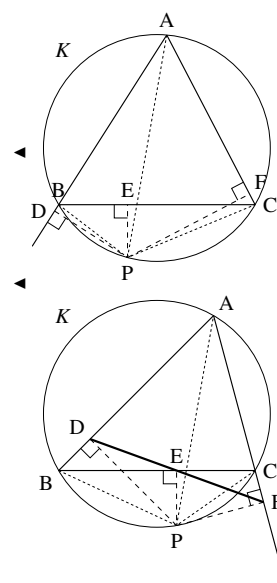
- ① 四角形 ADPF ($\angle ADP + \angle AFP = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ より)
四角形 BDEP ($\angle BDP = \angle BEP = 90^\circ$ より)
四角形 CEPF ($\angle PEC + \angle PFC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ より)
- ② $\angle PBA < 90^\circ$ のとき D は辺 AB 上にある。このとき、 $\angle PBA + \angle PCA = 180^\circ$

から $\angle PCA > 90^\circ$ となり, F は辺 AC 上にはないと分かる.

AP は直径でないので, $\angle PBA = 90^\circ$ にはならない.

$\angle PBA > 90^\circ$ のとき D は辺 AB 上にない. このとき, $\angle PBA + \angle PCA = 180^\circ$ から $\angle PCA < 90^\circ$ になって, F は辺 AC 上にはあると分かる.

以上より, 題意は示された.



③ $\angle DEB = \angle CEF$ であることを示せばよい. まず, 四角形 BDEP, 四角形 CEPF は円に内接するので,

$\angle DEB = \angle DPB, \angle CEF = \angle CPF \dots\dots \textcircled{1}$ である. 一方,

四角形 ABPC が円に内接するので $\angle BAC + \angle BPD + \angle DPC = 180^\circ$,

四角形 ADPF が円に内接するので $\angle BAC + \angle DPC + \angle CPF = 180^\circ$ である.

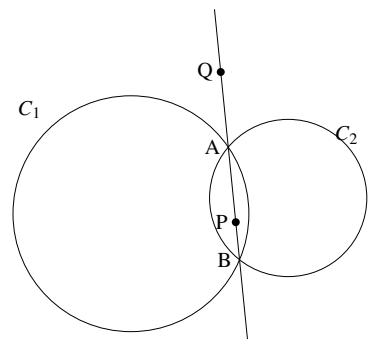
よって, $\angle BPD = 180^\circ - \angle BAC - \angle DPC = \angle CPF$ とわかる.

これと①を合わせて $\angle DEB = \angle CEF$ であるから, D, E, F は同一直線上にあることは示された.

【発展 57 : 総合問題】

円 C_1 と C_2 が 2 点 A, B と交わっている. 直線 AB 上のうち, 線分 AB 上に P を, 線分 AB の外に Q をとる.

① P を通り, 直線 AB とは異なる直線 l を引き, l と円 C_1 の 2 交点を D, E とし, l と円 C_2 の 2 交点を F, G とする. このとき, $PD \cdot PE = PF \cdot PG$ を示せ.



② Q を通り円 C_1 と 2 点 K, L で交わる直線 m_1 を引き, Q を通り円 C_2 と 2 点 M, N で交わる直線 m_2 を引く. このとき, K, L, M, N は同一円周上にあることを示せ. ただし, 直線 AB, m_1 , m_2 はすべて異なる直線とする.

【解答】

① 円 C_1 について方べきの定理を用いると $PA \cdot PB = PD \cdot PE$, 円 C_2 について方べきの定理を用いると $PA \cdot PB = PF \cdot PG$ である. よって, $PD \cdot PE = PF \cdot PG$ が示された.

② K, L, M, N を右図のようにとる.

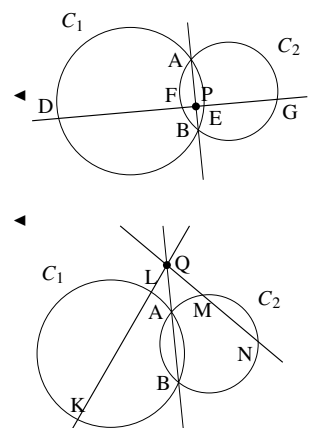
円 C_1 について方べきの定理を用いると $QA \cdot QB = QK \cdot QL$,

円 C_2 について方べきの定理を用いると $QA \cdot QB = QM \cdot QN$

である. よって, $QK \cdot QL = QM \cdot QN$ と分かり,

$QK : QN = QM : QL \dots\dots \textcircled{1}$ が成り立つ.

$\triangle QKM$ と $\triangle QNL$ について, $\angle Q$ は共通, ①から 2 辺の比とその間の角が等しいので, $\triangle QKM \sim \triangle QNL$ である. よって, $\angle QKM = \angle QNL$ となるから, 四角形 KLMN について, $\angle N$ は向かい合う角の外角に等しいので円に内接する.



◀ (別解)「方べきの定理の逆」が成り立つ (13th-note では扱わない) ことを用いれば, $QK \cdot QL = QM \cdot QN$ から直接, K, L, M, N が同一円周上にあると導かれる.



1. 「四角形が円に内接する条件」の証明

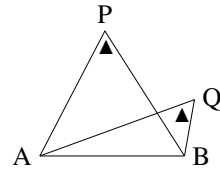
A. 「円周角の定理の逆」の証明

「円周角の定理の逆」は、次の命題の一部として示される。

$\triangle ABP$ の外接円を K とし、 P, Q は線分 AB に対して同じ側にあるとき、次が成立する。

- $\angle APB < \angle AQB$ ならば、 Q は K の内部にある。
- $\angle APB = \angle AQB$ ならば、 Q は K の周上にある。
- $\angle APB > \angle AQB$ ならば、 Q は K の外部にある。

円周角の定理の逆（拡張）



直線 BQ と円周 K の交点のうち、 B でない点を R とする。円と直線は最大2点でしか交わらないので、 R はただ1点に定まる。また、円周角の定理より、 $\angle ARB = \angle APB$ が成り立つ。

(I) $\angle APB < \angle AQB$ のとき、 Q が K の内部になかったと仮定する。

もし、 Q が K の周上にあるならば、 Q は R と一致するので $\angle APB = \angle AQB$ となるがこれは矛盾。

もし、 Q が K の外部にあるならば、 $\triangle QAR$ について、 $\angle AQB + \angle QAR = \angle ARB$ となるので、 $\angle AQB < \angle ARB = \angle APB$ となって矛盾。

つまり、 Q は K の内部にないという仮定は誤っているから、背理法によって、 Q は K の内部にあることが示された。

(II) $\angle APB = \angle AQB$ のとき、 Q が K の周上になかったと仮定する。

もし、 Q が K の内部にあるならば、 $\triangle QAR$ について、 $\angle AQB = \angle ARB + \angle QAR$ となるので、 $\angle AQB > \angle ARB = \angle APB$ となって矛盾。

Q が K の外部にあるならば、(I) と同様にして $\angle AQB < \angle APB$ となって矛盾。

つまり、背理法によって Q は K の周上にある。

(III) $\angle APB > \angle AQB$ のとき、 Q が K の外部になかったと仮定する。

Q が K の内部にあるならば、(II) と同様にして $\angle AQB > \angle APB$ となって矛盾。

Q が K の周上にあるならば、(I) と同様にして $\angle AQB = \angle APB$ となって矛盾。

つまり、背理法によって Q は K の外部にある。



ここで、 $\angle APB = 90^\circ$ とすれば、p.133 の【練習：円周角の定理の逆】の解答の証明になる。

B. 「四角形の対角の和の逆」の証明

B を含まない弧 \widehat{AC} 上に、 P をとる。ただし、 P は直線 CD 上にないとする。

すると、 $\angle B + \angle D = 180^\circ$ 、 $\angle B = (\angle D \text{ の外角})$ のどちらの公式も、 $\angle APB = \angle ADB$ という条件に一致する。

ここで「円周角の定理の逆」を用いれば、 D が $\triangle APB$ の外接円周上にあると示されるので、「四角形の対角の和の逆」は示されたことになる。

索引

- 10 進数, 100
- 10 進法, 100
- 2 進数, 100
- 2 進法, 101
- 3 進数, 100
- 3 進法, 100

- n 進数, 100

- 余り, 74

- 一般解, 91

- n 進法, 100
- 円順列, 17

- オイラー線, 147

- 解
 - 不定方程式, 87
- 階乗, 13
- 外心, 123
- 外接円, 123
- 外分, 116
- 確率, 36
- 確率の加法定理, 42
- 確率の木, 47

- 組合せ, 8, 21

- 合同式, 80
- 公倍数, 67
- 公約数, 67
- 根元事象, 38

- 最小公倍数, 67

- 最大公約数, 67

- 試行, 36
- 事象, 36
- シムソン線, 147
- 重心, 127
- 従属, 48
- 樹形図, 3
- 数珠順列, 19
- 順列, 8, 12
- 商, 74
- 条件付き確率, 55
- 商の法則, 19

- 垂心, 129

- 正弦定理, 125
- 積事象, 42
- 積の法則, 3
- 接弦定理, 135
- 接線
 - 共通接線, 141
- 接線の長さ, 120
- 全事象, 36

- 素因数, 64
- 素因数分解, 64
- 素数, 64

- 大数の法則, 35
- 代入, 81
- 互いに素, 68

- 重複組合せ, 32
- 重複試行, 51

- 重複順列, 9

- 同様に確からしい, 36
- 独立, 48
- ド・モルガンの法則 (確率版), 46

- 内心, 118, 121
- 内接円, 121
- 内分, 116

- ネックレス順列, 19

- 場合の数, 1
- 倍数, 59
- 排反, 42
- 反復試行, 51

- 不定方程式, 87
 - 1 次, 87

- 法, 80
- 傍心, 119, 128
- 傍接円, 128
- 方べきの定理, 137

- 無作為に, 36

- 約数, 59

- ユークリッドの互除法, 85

- 余事象, 44

- 和事象, 42
- 割り切れる, 59