13th-note 数学A

Ver3.16（2015-4-26）

第１章 Ver3.31，第２章 Ver3.11，第３章 Ver3.26

はじめに

13th-note 数学Ａは，文部科学省の指導要領（平成 24 年度以降実施）に沿った内容を含む検定外の「高校の教科書」として作られ，ホームページ（http://www.collegium.or.jp/~kutomi/）にて無償公開されています．学ぶ意欲さえあれば，誰でも学ぶことができるように，との意図からです．

また，執筆者と閲覧者がインターネットを介して繋がり，互いの意見を交わすことが出来る関係にあります．

こういった「教科書」の形態は，日本ではあまり見られないことでしょう．

しかし，13th-note 数学Ａが既存の教科書と最も異なる点は，その中身でしょう．13th-note 数学Ａでは，以下の方針を採用しています．

- 13th-note 数学Ａでは全ての問題に，詳細な解答・解説を付ける．
- 新しい数学の概念に関して，通常，教師用にしか載っていない詳細な解説も付ける．

これらは，以下の考えに基づいています．

- 自学自習がしやすい教科書にしたかった．
  （学校等とは関係なく自分で勉強したい人のためでもあり，試験前に教科書を開きながら自学自習する高校生のためでもある）
- 隅々まで読めば読むほど，何か得るものがある教科書にしたかった．
- 大学受験の数学を意識してはいるが，あくまで数学の知識・感覚（新しい数学の概念を吸収するための土壌，とでも言えるでしょうか）を中心に解説している教科書にしたかった．
- 既存の教科書・指導要領に沿わせることより，数学の理解に必要かどうかに基づいて内容の選定・配列することを重視した．

詳細な解説を増やしたことは，一方で，悩みの種にもなりました．というのも，その詳細な解説が，読者の創造力・発想力を妨げないか，と感じたからです．

この点について，私は「詳細な解説を最初に読むか，後で読むか，そもそも読まないか，それは読者が決めればよい．ただ我々は，読者の視点が偏らないよう，最大限の配慮をするのみ」という結論を出し，上記の方針としました．

この教科書の執筆者として，数学の学習について 2 点アドバイスを書いておきます．

(1) 公式そのものよりも，「いつ公式が使えるか」を真っ先に覚えましょう．公式そのものは忘れても調べられます．また，思い出そうとしたり，作ろうとする努力はよい勉強になります．しかし，「いつ使うか」を忘れると，答えを見ない限り何もできません．
(2) 問題を解いて答えが合わないときは，まず，計算ミスを疑いましょう．

また，この 13th-note 数学Ａを作成する際には，TEX という組版ソフトが使われています．TEX のシステムを作られた Donald E. Knuth 氏，それを日本語に委嘱した ASCII Corporation，さらに，（日本の）高校数学に適した記号・強力な描画環境を実現した「LATEX 初等数学プリント作成マクロ emath」作者の大熊一弘氏に，感謝いたします．

最後に，13th-note 数学Aの雰囲気を和らげてくれているみかちゃんフォントの作者にも感謝いたします．
この教科書を手にとった人，一人一人に，「数学も，悪くないな」と思っていただければ，幸いです．

久富 望

凡例

1. 【解答】について

【解答】には，問題の解答だけでなく，さらに理解を深めるためのヒントも書かれていることがあります．問題を解いて解答が一致した後，一応**【解答】**をチェックすることをお勧めします．

2. 問題の種類

【例題 2】 **【例題】**は，主に，直前の定義や内容の確認を兼ねた例題です．
はじめて学ぶ人，復習だが理解が足りないと思う人は，解くのが良いでしょう．
逆に，既に理解がある程度できていると思う人は，飛ばしても良いでしょう．

【練習 3：主要になる「練習」問題】

【練習】は，13th-note 教科書の軸と成る問題群です．
基本的に解くようにしましょう．解いていて疑問など見つかれば，直線の説明，**【例題】**を参照したり，答えをよく理解するようにしましょう．

【暗記 4：ただ解けるだけではいけません】

定義・定理を「知っている」と「使える」は違います．
特に，「反射的にやり方を思い出す」べき内容があります．それが，この暗記問題です．
この暗記問題については「解ける」だけでなく，その解き方・考え方をすぐに頭の中で思い浮かべられるようにするべきです．

【発展 5：さらなる次へのステップ】

発展は，ただ定義や定理が分かるだけでは解けない問題です．
さらに理解を深めたい人，大学入試の数学を意識する人は挑戦し，理解するようにしましょう．

3. 補足

本文中，ところどころに マーク付きの文章があります．このマークのついた文章は，主に，本文とは少し異なる視点から書かれています．理解を深めることに役立つことがあるでしょう．

目次

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 I で用いられることがある．

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π, ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ, ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω

第1章　場合の数と確率

A 場合の数

場合の数 (number of cases) とは「何通りの場合が起こりうるか数える」ことである．

1A.1 場合の数の基礎

起こりうる場合の数を正しく数えるには次のことが必要条件になる．
「数えもらさない」　「同じものを繰り返して数えない」

1. 積の法則

A. 表を用いる

「数えもらさない」「同じものを繰り返して数えない」ための基本的な手段は，表を用いることである．

たとえば，大小 2 個のさいころを投げたときの出る目を表でまとめると，右のようになる．このとき，すべての場合の数は $6 \times 6 = 36$ 通りと分かる．

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
2	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
3	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
5	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
6	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全部で6通り

全部で6通り

【例題 1】 4 種類のカード $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ を用いて 2 枚並べる．ただし，同じカードを繰り返し並べてよいとする．右の表を完成させ，全部で何通りあるか答えなさい．

1 枚目＼2 枚目	A	B		
A	AA	AB		

【解答】
よって，$4 \times 4 =$ **16通り** ある．

1 枚目＼2 枚目	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD

3 枚以上選ぶ並べる場合には表で書き表すことが難しくなるので，樹形図を用いる．

B. 辞書順に並べる

場合の数の問題では，辞書と同じように，アルファベット順，あいうえお順，数字の小さい順などで，結果を並べるとよい．

(例 1) 5 枚のカード

$\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, $\boxed{E}$

のうち 3 枚を使った，A から始まる文字列は，右のように書き出すことができる．その結果，場合の数は $4 \times 3 = 12$ 通りと求められる．

悪いやり方（×）			辞書順並べ（○）			
ABC	AEB	ACD	ABC	ABD	ABE	（←ABで始まる文字列）
ACB	ABE	ADC	ACB	ACD	ACE	（←ACで始まる文字列）
ADE	ABD	AEC	ADB	ADC	ADE	（←ADで始まる文字列）
AED	ADB	ACE	AEB	AEC	AED	（←AEで始まる文字列）

(例 2) 大小 2 つのさいころを振ったとき，出た目を

(大きいさいころの目, 小さいさいころの目)

で表そう（このテキストでは以後，同じとする）．

出た目の和が 6 になる場合を辞書順並べで書き出すと，右図のようになって容易に，5 通りあると分かる．

悪いやり方（×）	辞書順並べ（○）
(1, 5)	(1, 5)
(5, 1)	(2, 4)
(4, 2)	(3, 3)
(2, 4)	(4, 2)
(3, 3)	(5, 1)

上から１，２，３，４，５

【例題 2】

1. 上の (例 1) において，C から始まる文字列を辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．
2. 上の (例 2) において，目の和が 7 になる場合を，辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．
3. $a+b+c=5$ となる自然数 (a, b, c) の組を辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．

【解答】

1. **CAB　CAD　CAE**
CBA　CBD　CBE
CDA　CDB　CDE
CEA　CEB　CED

1. は $4 \times 3 =$ **12通り** ある．
2. は **6通り** ある．
3. は **6通り** ある．

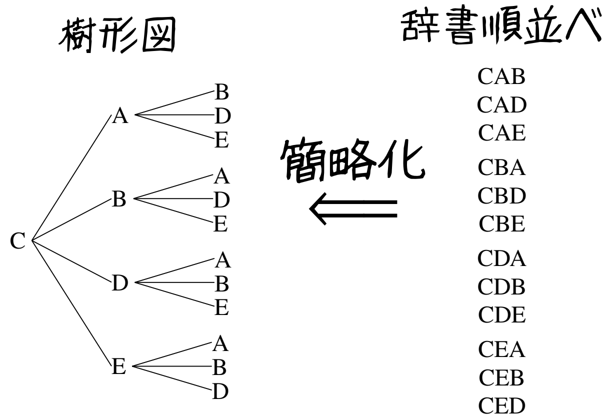
2. **(1, 6)**
(2, 5)
(3, 4)
(4, 3)
(5, 2)
(6, 1)

3. (a, b, c)
=(1, 1, 3),
(1, 2, 2),
(1, 3, 1),
(2, 1, 2),
(2, 2, 1),
(3, 1, 1)

C.　樹形図

辞書順並べを少し簡略化した書き方が，**樹形図** (tree diagram) である．

たとえば，前ページ左下の (1) の問題を樹形図で書き出すと，右のようになる．



D.　積の法則

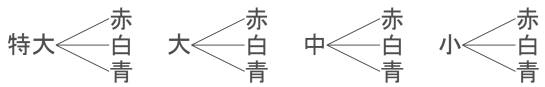
前ページの樹形図において，○<△▲▽ という形が 4 回現われることが分かる．これは，「2 番目の文字は 4 種類あり，2 番目の文字がどんな場合でも，3 番目の文字は 3 種類ある」ことを意味しており，場合の数は $3 \times 4 = 12$ 通りとなる．

【例題 3】

1. A 社のかばんには，特大，大，中，小の 4 種類あり，いずれも，赤，白，青の 3 色から選べるという．樹形図を書いて，何種類のかばんがあるか答えなさい．
2. 1 から 4 の数字を用いた，2 桁の数字を樹形図で書き出し，何通りあるか答えなさい．

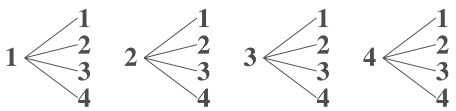
【解答】

1. (大きさ – 色) で樹形図を書けば，以下のようになる．



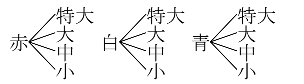
全部で $4 \times 3 =$ **12通り** ある．

2. (十の位 – 一の位) で樹形図を書けば，以下のようになる．



全部で $4 \times 4 =$ **16通り** ある．

◀ 樹形図によるまとめ方は複数ある．たとえば，(色, 大きさ) の順で書けば，以下のような樹形図を書くことができる．



積の法則

2 つの事柄 A，B について，A の起こり方が a 通り，A がどんな場合でも，B の起こり方が b 通りあるとする．このとき

A と B がともに起こる場合は $a \times b$ 通り

ある．このことを**積の法則** (multiplication law) という．

【練習 4：積の法則〜その１〜】

(1) 男子が 5 人，女子が 4 人のクラスから，男女一人ずつを選ぶ方法は何通りあるか.

(2) 1 から 9 までの数字を用いた，2 桁の数は何通りあるか.

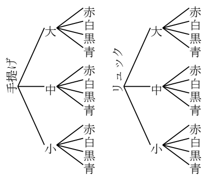
(3) B 社のかばんには，手提げとリュックの 2 種類があり，大きさは大中小の 3 種類から赤，白，黒，青の 4 色から選べるという．何種類のかばんがあるか.

【解答】

(1) 5 人のうちどの男子を選んでも，女子の選び方は 4 通りあるので，$5\times4=$ **20通り** と求められる.

(2) 10 の位は 9 通り，10 の位がいくつであっても，1 の位は 9 通りある．つまり，$9\times9=$ **81通り** である.

(3) かばんは 2 種類あり，どちらの場合でも大きさは 3 種類あり，さらに，どの場合も色は 4 種類ずつある．つまり，$4\times3\times2=$ **24 通り**ある.

◀ 

積の法則を用いるかどうかわからないときは，樹形図をイメージしよう.

E. 正の約数の個数

積の法則 (p.3) の応用例として，12 の約数について考えよう．$12=2^2\times3$ であるので，12 の約数は[*1]

$2^0\times3^0$，$2^0\times3^1$，　$2^1\times3^0$，$2^1\times3^1$，　$2^2\times3^0$，$2^2\times3^1$

ですべてとなる．これを樹形図にすれば，次のようになり，$3\times2=6$ 個の約数があるとわかる.

$2^0 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\end{matrix}\right.$　$2^1 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\end{matrix}\right.$　$2^2 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\end{matrix}\right.$

また，12 の約数の和は，$(2^0+2^1+2^2)\times(3^0+3^1)=(1+2+4)\times(1+3)=7\times4=28$ で計算できる．これは，次の等式から分かる.

$$\begin{aligned}&\boxed{2^0}\times3^0+\boxed{2^0}\times3^1+\boxed{2^1}\times3^0+\boxed{2^1}\times3^1+\boxed{2^2}\times3^0+\boxed{2^2}\times3^1\\=\ &\boxed{2^0}\times(3^0+3^1)+\boxed{2^1}\times(3^0+3^1)+\boxed{2^2}\times(3^0+3^1)\\=\ &(2^0+2^1+2^2)\times(3^0+3^1)\end{aligned}$$

←(3^0+3^1)を共通因数と見て因数分解した

【発展 5：正の約数の個数】

上のやり方を参考に，288 の約数の個数を求めよ．また，約数の和を求めよ.

【解答】　$288=2^5\times3^2$ である．よって，288 の約数は

◀ 素因数分解した

$2^0 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right.$　$2^1 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right.$　$2^2 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right.$　$2^3 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right.$　$2^4 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right.$　$2^5 \left\langle \begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\end{matrix}\right.$

よって，約数の個数は $6\times3=$ **18個** ある．また，約数の和は

$(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5)\times(3^0+3^1+3^2)$

$=(1+2+4+8+16+32)\times(1+3+9)=63*13=\mathbf{819}$

◀ 慣れたら，素因数分解の指数部を見るだけで，$(5+1)\times(2+1)=18$ と計算できる.

[*1] $2^0=1$, $3^0=1$．どんな数も 0 乗は 1 である.

2. 集合と場合の数

A. 操作の結果を集合で表す

たとえば，大きさの異なる立方体のさいころ 2 個を振って「目の和が 5 になる場合」について，次のように書くことができる．

「目の和が 5 になる場合」の集合 A は，$A = \{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$ であり，$n(A) = 4$ である．

【例題 6】 大小 2 個のさいころを投げるとき，以下の集合の要素を書き出し，(4) の問いに答えよ．

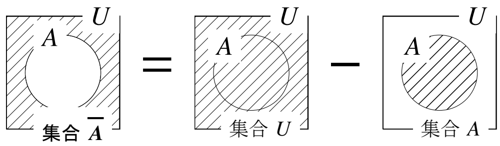
1. 出た目の和が 10 になる場合の集合 B
2. 出た目の差が 4 になる場合の集合 C
3. 出た目の積が 12 になる場合の集合 D
4. $n(B),\ n(C),\ n(D)$ はいくらか.

【解答】

1. $\boldsymbol{B = \{(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)\}}$
2. $\boldsymbol{C = \{(6,\ 2),\ (5,\ 1),\ (2,\ 6),\ (1,\ 5)\}}$
3. $\boldsymbol{D = \{(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)\}}$
4. $\boldsymbol{n(B) = 3,\ n(C) = 4,\ n(D) = 4}$

◀「差」とは「2 つの値の違い」なので，(5, 1), (1, 5) の差はいずれも 4.

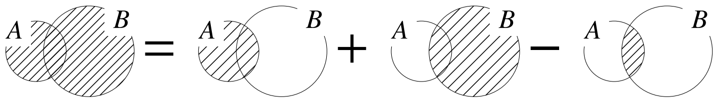
B. 場合の数と集合の要素の個数



場合の数を集合を用いて考えれば，『集合の要素の個数』で学ぶ次の法則を用いることができる．

『補集合の要素の個数』

$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$



『包含と排除の原理』

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$A \cap B = \emptyset$ のとき，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ となる．これは『和の法則』とも呼ばれる．

【例題 7】 大きさは大中小の 3 種類，赤，白，黒，青の 4 色がある D 社のかばんを買いにいったところ，大きいかばんと，黒のかばんは気に入らなかったが，他は気に入った．大きなかばんの集合を A，黒いかばんの集合を B とするとき，以下の問に答えよ．

1. $n(A),\ n(B),\ n(A \cap B)$ の値をそれぞれ求めよ.
2. 気に入らなかったかばんは何通りか.
3. 気に入ったかばんは何通りか.

【解答】

1. $\boldsymbol{n(A) = 4,\ n(B) = 3,\ n(A \cap B) = 1}$
2. 気に入らなかったかばんは $A \cup B$ に一致するので
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 3 - 1 = 6$ から **6通り**.
3. D 社のかばんは全部で $4 \times 3 = 12$ 通りある．(2) 以外のかばんの種類なので，$12 - 6 =$ **6通り** ある.

◀ $A \cap B$「大きくて黒いかばんの集合」，そのようなかばんは 1 つしかない

C. 場合分け

【例題 8】 大小 2 個のさいころを投げたとき，出た目の和が 5 の倍数となるのは次の場合がある．

- 「出た目の和が 5 になる場合」これは $\boxed{\text{ア}}$ 通りある
- 「出た目の和が $\boxed{\text{イ}}$ になる場合」これは $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある

この場合分けから，出た目の和が 5 の倍数となる場合は $\boxed{\text{エ}}$ 通りあるとわかる．

【解答】 ア：(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) の **4** 通りある． イ：**10**
ウ：(4, 6), (5, 5), (6, 4) の **3** 通りある． エ：$4 + 3 = \mathbf{7}$

出た目の和が 5 となる場合を A，出た目の和が 10 となる場合を B とすれば，$A \cap B = \emptyset$ であるので，（出た目の和が 5 の倍数となる場合の数）$= n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ である．

【練習 9：場合の数における集合】

1 から 50 までが書かれたカード 50 枚の中から，無作為に 1 枚引く．引いたカードが

2 の倍数である場合の集合を Z_2，3 の倍数である場合の集合を Z_3

また，すべての場合の集合を U とする．つまり，$n(U) = 50$ である．

(1) $n(Z_2)$, $n(Z_3)$, $n(Z_2 \cap Z_3)$ の値を求めなさい．

(2) 「奇数である場合の集合」を A,「6 の倍数である場合の集合」を B,「2 または 3 で割り切れる場合の集合」を C とする．それぞれ一致するものを選びなさい．

① Z_2 ② Z_3 ③ $\overline{Z_2}$ ④ $\overline{Z_3}$ ⑤ $Z_2 \cap Z_3$ ⑥ $Z_2 \cup Z_3$

(3) $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ をそれぞれ答えなさい．

【解答】

(1) たとえば「1 を引いた場合」を「1」と表せば

$$Z_2 = \{2,\ 4,\ 6, \cdots,\ 50\ (= 2 \times 25)\}$$
$$Z_3 = \{3,\ 6,\ 9, \cdots,\ 48\ (= 3 \times 16)\}$$
$$Z_2 \cap Z_3 = \{6,\ 12,\ 18, \cdots,\ 48\ (= 6 \times 8)\}$$

なので，$\mathbf{n(Z_2) = 25}$, $\mathbf{n(Z_3) = 16}$, $\mathbf{n(Z_2 \cap Z_3) = 8}$

(2) A は **③**，B は **⑤**，C は **⑥**

(3) $n(A) = n(\overline{Z_2}) = \mathbf{25}$，$n(B) = n(Z_2 \cap Z_3) = \mathbf{8}$

$n(C) = n(Z_2 \cup Z_3) = 25 + 16 - 8 = \mathbf{33}$

【練習 10：場合分けと積の法則】

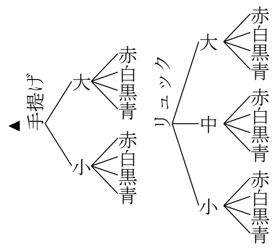
(1) 1 から 5 までの数字を用いてできる 2 桁以下の数は何通りあるか.

(2) C 社のかばんには，手提げは大中の 2 種類，リュックは大中小の 3 種類あり，どの種類も赤，白，黒，青の 4 色から選べるという．何種類のかばんがあるか.

【解答】

(1) 2 桁の数は $5 \times 5 = 25$ 通り，1 桁の数は 5 通りある.
つまり，全部で $25 + 5 =$ **30通り** の数がある.

(2) 手提げは 2×4 通り，リュックは，3×4 通りある.
よって，全部で $4 \times 2 + 4 \times 3 =$ **20 種類**ある.

◀ 

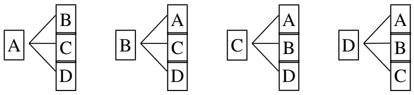
3. 「重複を許す」，「順列と組合せ」

A. 「重複を許す」とは

同じ操作を繰り返してもよいことを「重複を許す」という.

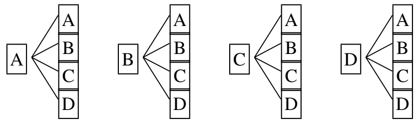
たとえば，4 種類のカード $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ を用いて 2 枚の列を作るとき

「重複を許さない」ならば



$4 \times 3 = 12$ 通りの並べ方がある.

「重複を許す」ならば



$4 \times 4 = 16$ 通りの並べ方がある.

【例題 11】

1. 1 から 5 までの数字を用いて，2 桁の数字を作ろうと思う.
   (a) 重複を許して作るなら，何通りできるか.
   (b) 重複がないよう作るなら，何通りできるか.

2. 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ を並べてできる 2 桁の整数は何通りあるか.

【解答】

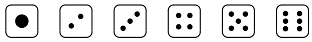
1. (a) 10 の位は 5 通り，そのいずれの場合も，1 の位は 5 通りあるので，$5 \times 5 =$ **25通り**
   (b) 10 の位は 5 通り，そのいずれの場合も，1 の位は 4 通りあるので，$5 \times 4 =$ **20通り**

◀ (b) において，1 の位は，10 の位と同じ数を入れることができない

2. 10 の位は 6 通り，そのいずれの場合も，1 の位は 5 通りあるので，$6 \times 5 =$ **30通り**

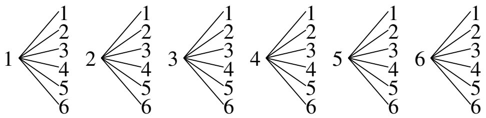
◀ 10 の位に置いたカードを，1 の位に置くことはできない

B. 「順列」とは，「組合せ」とは



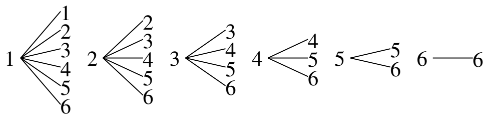
たとえば，さいころを 2 回投げた場合の目の出方は，次の 2 通りの方法でまとめることができる.

a) 1 回目と 2 回目を区別する場合
1 回目－2 回目の順に樹形図を書けば，次のようになる.



この場合は，試行順に結果を列挙した**順列** (permutation) を考えている.

b) 1 回目と 2 回目を区別しない場合
小さい目－大きい目の順で樹形図を書けば，次のようになる.



この場合は，試行した結果の**組合せ** (combination) を考えている.

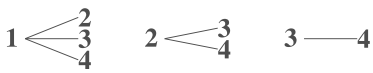
順列か組合せのいずれで考える問題なのか，注意して樹形図を書こう.

【例題 12】 1，2，3，4 の数字が書いてある 4 枚のカードがある．次の試行について，それぞれ樹形図を用いてすべて書き出し，何通りあるか答えよ.　1　2　3　4

1. 続けて 2 枚引く場合のカードの順列
2. 続けて 2 枚引いたときの，カードの組合せ

【解答】

1.  $4 \times 3 = \mathbf{12}$**通り**

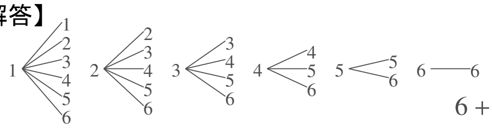
2.  $3 + 2 + 1 = \mathbf{6}$**通り**

◀ (2) は，§1A.3『組合せ』において学ぶことを用い，${}_4C_2 = 6$ 通りとも求められる.

【練習 13：さいころの区別】

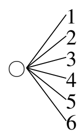
(1) 見た目がまったく同じ 2 個のさいころを同時に振るとき，目の出方は何通りあるか.
(2) 大きさが異なる 2 個のさいころを振るとき，目の出方は何通りあるか.

【解答】

(1) 
$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \mathbf{21}$**通り**

(2) 大きいさいころは 6 通り．そのいずれの場合も，小さいさいころが 6 通りあるので，$6 \times 6 = \mathbf{36}$**通り**

◀ 右のような樹形図が 6 つ書ける.（○には 1 から 6 が入る）



【練習 14：足して 5 になる数】

(1) 足して 5 になるような 2 つの自然数の組をすべて求めよ.
(2) $x + y = 5$ になるような，2 つの自然数 x, y の解をすべて求めよ.

【解答】

(1) **1 と 4**，**2 と 3** の 2 組
(2) $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \mathbf{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)}$

◀ 2 つの数字の組合せを考えている

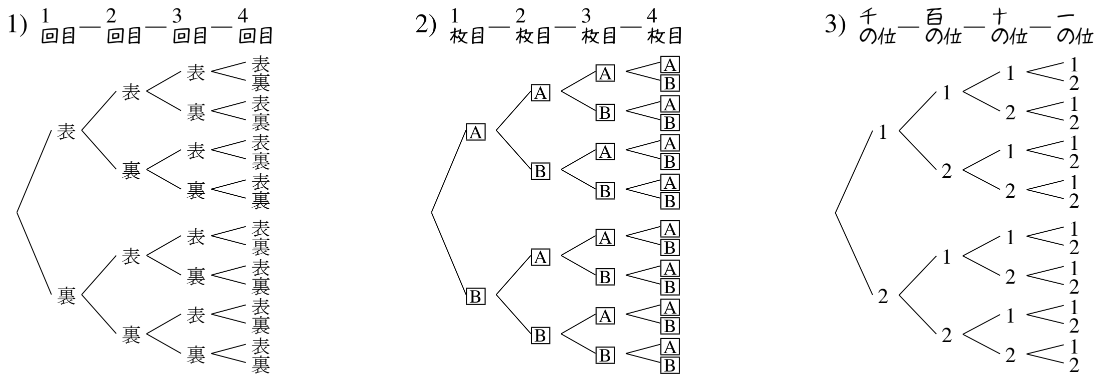
◀ 2 つの数字を x, y で区別した結果として順列を考えている

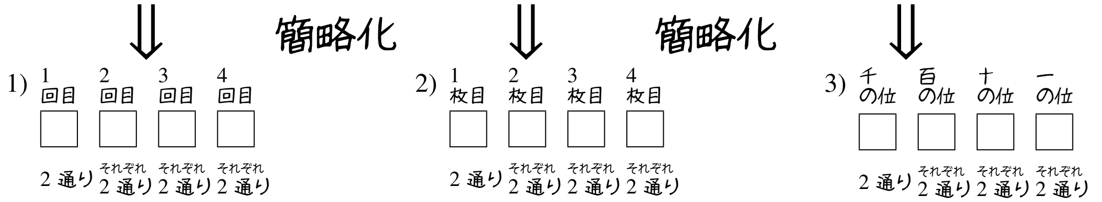
1. 重複順列

A. 重複順列とは

同じことを繰り返してできる順列のことを**重複順列**(ちょうふく) (permutation with repetitions) という．
次の問題について，それぞれ樹形図を書いて，何通りあるか考えてみよう．

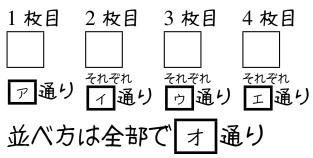
1) 表と裏があるコインを 4 回振るときの，出た目の順列は何通りあるか.
2) $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ の 2 枚から 1 枚引いて記録し，元に戻す操作を 4 回行ったとき，引いたカードの順列
3) 1 か 2 のみで作ることのできる，4 桁の整数





結果，いずれも $2\times2\times2\times2=16$ 通りと分かる.

【例題 15】 $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ の 3 枚のカードから 1 枚引いて記録し，元に戻す操作を 4 回行った．右の $\boxed{\quad}$ にあてはまる数字を答えよ.



【解答】 ア : **3**，イ : **3**，ウ : **3**，エ : **3**，オ : $3\times3\times3\times3=\mathbf{81}$

重複順列

n 通りの可能性のある操作を，r 回繰り返したときに得られる順列を重複順列といい，その場合の数は $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{ 回}}=n^r$ 通りである.

【練習 16：重複順列】

(1) 表と裏があるコインを 6 回振るときの，出た目の順列は何通りあるか．

(2) $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$ の 4 枚のカードから，1 枚引いて元に戻す操作を 3 回行ったとき，引いたカードの順列は何通りあるか．

(3) 5 人 1 組のグループ 3 組から，リーダーを 1 人ずつ選ぶ方法は何通りあるか．

(4) 1, 2, 3 のみを用いた，4 桁以下の整数は何通りあるか．

【解答】

(1)

1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	6 回目
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り

よって，$2\times2\times2\times2\times2\times2$

$= 2^6 =$ **64通り**

(2)

1 枚目	2 枚目	3 枚目
$\square$	$\square$	$\square$
4 通り	それぞれ 4 通り	それぞれ 4 通り

よって，$4^3 =$ **64通り**

(3)

1 組目	2 組目	3 組目
$\square$	$\square$	$\square$
5 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 5 通り

よって，$5^3 =$ **125通り**

(4) 4 桁の数は $3^4 = 81$ 通り，3 桁の数は $3^3 = 27$ 通り，
2 桁の数は $3^2 = 9$ 通り，1 桁の数は $3^1 = 3$ 通り
あるので，全部で $81 + 27 + 9 + 3 =$ **120通り** ある．

◀ $3^4 = 9 \times 9 = 81$ で計算するとよい．

B. 重複順列に置き換えられる問題

たとえば，集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ の部分集合は，何通りあるか考えてみよう．

A の部分集合には，$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\emptyset$, $\{1, 2, 3, 4\}$ などがあるが，これらを，右図の方法で順列に対応させることができる．結局

「A の部分集合を挙げる」
$\Longleftrightarrow$「○か×を 4 回並べる」

ことは 1 対 1 に対応し，「A の部分集合の数」と「○か×を 4 回並べる重複順列の場合の数」は一致する．つまり，A の部分集合は $2^4 = 16$ 通りあると求められる．

$\{1, 2\}$	$\Longleftrightarrow$	○	○	×	×
$\{1, 3\}$	$\Longleftrightarrow$	○	×	○	×
$\{2, 3, 4\}$	$\Longleftrightarrow$	×	○	○	○
$\emptyset$	$\Longleftrightarrow$	×	×	×	×
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\Longleftrightarrow$	○	○	○	○
Aの部分集合	$\Longleftrightarrow$	1の有無	2の有無	3の有無	4の有無

【例題 17】 集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ の部分集合は何通りあるか．

【解答】 X の部分集合を挙げることは，○か×を 5 回並べることに置き換えられるので，部分集合は $2^5 =$ **32通り** ある．

2. 順列 ${}_n\mathrm{P}_r$

A. 繰り返しのない順列

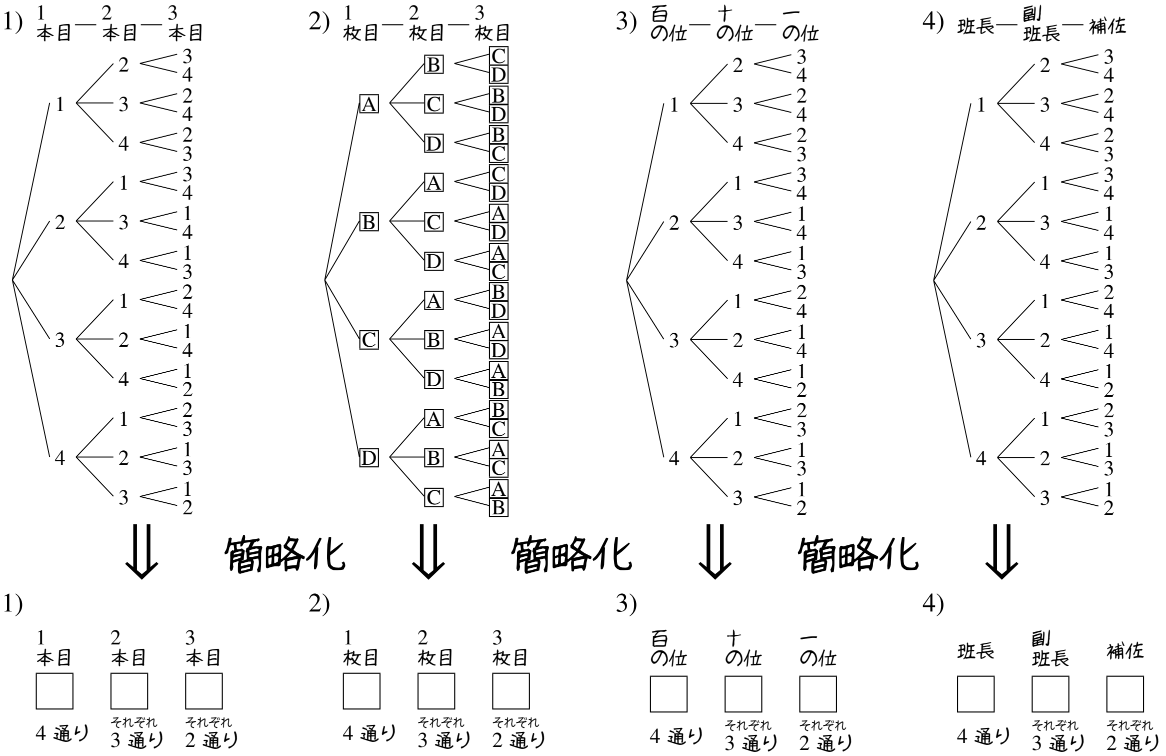
次の 2 つの問題について，樹形図を書いて，何通りあるか考えてみよう．

1) 1, 2, 3, 4 が書いてある 4 本の旗のうち，3 本を用いた旗の並べ方は何通りあるか.

2) $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ の 4 枚のカードのうち，3 枚を用いてできる順列は何通りあるか.

3) 1 から 4 を重複なく使ってできる，3 桁の整数は何通りあるか.

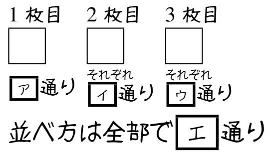
4) 出席番号 1 から 4 の 4 人から，班長，副班長，補佐を決める方法は何通りあるか.



結果，いずれも $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通りと分かる．

特に，1) から 3) の問題はいずれも「4 つの異なるものから，重複なしに 3 つを一列に並べる」操作によって得られる.

【例題 18】 $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$ の 5 枚のカードから 1 枚ずつ引いて記録する操作を 3 回行った．右の $\boxed{}$ にあてはまる数字を答えよ．ただし，一度引いたカードは元に戻さないとする.



【解答】 ア : **5**，イ : **4**，ウ : **3**，エ : $5 \times 4 \times 3 = \mathbf{60}$

【練習 19：順列〜その１〜】

1 から 6 までのカードが 1 枚ずつ，計 6 枚ある．次の順列は何通りあるか．

(1) 2 枚を用いた順列　　(2) 3 枚を用いた順列　　(3) 4 枚を用いた順列

【解答】

(1)

1つ目	2つ目
□	□
6 通り	それぞれ 5 通り

よって，$6 \times 5 =$ **30通り**

(2)

1つ目	2つ目	3つ目
□	□	□
6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り

よって，$6 \times 5 \times 4 =$ **120通り**

(3)

1つ目	2つ目	3つ目	4つ目
□	□	□	□
6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り	それぞれ 3 通り

よって，$6 \times 5 \times 4 \times 3 =$ **360通り**

B. 順列 $_n\mathrm{P}_r$

ここまで学んだ順列の場合の数は，記号 $_n\mathrm{P}_r$ を用いて表されることがある[*2]．

順列 $_n\mathrm{P}_r$ の定義

「n 個の異なるものから r 個を用いて一列に並べる順列」の場合の数を，記号 $_n\mathrm{P}_r$（エヌピーアール）で表す（自然数 n と r は $n \geqq r$ とする）．

1 番目	2 番目	3 番目	……	$r-1$ 番目	r 番目
□	□	□	……	□	□
n 通り	それぞれ $n-1$ 通り	それぞれ $n-2$ 通り	……	それぞれ $n-(r-2)$ 通り	それぞれ $n-(r-1)$ 通り

右上の図から，$_n\mathrm{P}_r$（エヌピーアール）$= \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}_{n\text{ から始まる }r\text{ 個の数の積}}$ で計算できる．

たとえば，p.11 の 1) から 4) はすべて，$_4\mathrm{P}_3$（よんピーさん）$= \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2}_{4\text{ から始まる }3\text{ 個の数の積}} = 24$ である．

【例題 20】

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 個の数字を使ってできる 3 桁の整数は，$_{\boxed{ア}}\mathrm{P}_{\boxed{イ}} = \boxed{ウ}$ 通りある．
2. 5 色の旗を 1 列に並べるときの場合の数は $_{\boxed{エ}}\mathrm{P}_{\boxed{オ}} = \boxed{カ}$ 通りある．

【解答】

1. ア：**6**，イ：**3**，ウ：$_6\mathrm{P}_3 = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}_{6\text{ から始まる }3\text{ 個の数の積}} =$ **120**
2. エ：**5**，オ：**5**，カ：$_5\mathrm{P}_5 = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{1\text{ から }5\text{ までの積}} =$ **120**

[*2] ただし，$_n\mathrm{P}_r$ はあまり有用な記号ではない．応用範囲が狭く，後に学ぶ記号 $_n\mathrm{C}_r$ と混同しやすい．順列の問題は，これまで通り『積の法則』(p.3) で処理するのがよい．

C. 階乗 $n!$

階乗 $n!$ の定義

「異なる n 個すべてを一列に並べる順列」の場合の数を n の**階乗** (factorial) といい，$n!$ で表す．
下の図から，$n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}_{1\text{ から } n \text{ までの自然数の積}}$ となる．

1 番目	2 番目	3 番目	……	$n-1$ 番目	n 番目
$\square$	$\square$	$\square$	……	$\square$	$\square$
n 通り	それぞれ $n-1$ 通り	それぞれ $n-2$ 通り	……	それぞれ 2 通り	それぞれ 1 通り

（例）
$1! = 1$
$2! = 2 \cdot 1 = 2$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

0 を含む順列，階乗は，${}_n\mathrm{P}_0 = 1$, $0! = 1$ と定義される*3.

【例題 21】 ${}_7\mathrm{P}_3$，${}_{10}\mathrm{P}_5$，$6!$，${}_{13}\mathrm{P}_0$ の値を計算せよ.

【解答】 ${}_7\mathrm{P}_3 = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}_{\substack{7\text{ から始まる}\\3\text{ 個の数の積}}} = \mathbf{210}$,　${}_{10}\mathrm{P}_5 = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}_{\substack{10\text{ から始まる}\\5\text{ 個の数の積}}} = \mathbf{30240}$

$6! = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{1\text{ から } 6\text{ までの積}} = \mathbf{720}$,　${}_{13}\mathrm{P}_0 = 1$

……
掛け算の順番に気をつけて，順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ の値を計算しよう．たとえば

$${}_8\mathrm{P}_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 6 \cdot 5 = 336 \cdot 5 = 1680$$
$${}_8\mathrm{P}_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680$$

のように，5 と偶数を利用して計算すると，手間が大きく変わる.

D. 順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ と重複順列

同じものを繰り返し用いるときは重複順列になるため，順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ を用いることはできない.

【例題 22】 7 色の絵の具で 3 つの場所を塗る．次の 2 つの場合について $\boxed{}$ に数字を入れよ.

1. 同じ色を使わず塗る場合は

1つ目	2つ目	3つ目
$\square$	$\square$	$\square$
$\boxed{ア}$通り	それぞれ $\boxed{イ}$通り	それぞれ $\boxed{ウ}$通り

であるから，全部で $\boxed{エ}$ 通りある.

2. 同じ色を使って塗る場合は

1つ目	2つ目	3つ目
$\square$	$\square$	$\square$
$\boxed{オ}$通り	それぞれ $\boxed{カ}$通り	それぞれ $\boxed{キ}$通り

であるから，全部で $\boxed{ク}$ 通りある.

【解答】

*3 直感的には，次の関係からも簡単に確認できる.

$$4! \xrightarrow{\div 4} 3! \xrightarrow{\div 3} 2! \xrightarrow{\div 2} 1! \xrightarrow{\div 1} 0! \qquad {}_n\mathrm{P}_3 \xrightarrow{\div(n-2)} {}_n\mathrm{P}_2 \xrightarrow{\div(n-1)} {}_n\mathrm{P}_1 \xrightarrow{\div n} {}_n\mathrm{P}_0$$

また，「n 個のものから 0 個を用いて並べる」順列も，「異なる 0 個すべてを一列に並べる」順列も，「何も並べない」という 1 通りしか存在しないことから理解することもできる.

1. ア : **7**, イ : **6**, ウ : **5**, エ : $7 \times 6 \times 5 =$ **210**
2. オ : **7**, カ : **7**, キ : **7**, ク : $7 \times 7 \times 7 =$ **343**

E. 順列と和の法則・積の法則

【練習 23：条件を満たす整数の個数～その１～】

(1) 1 から 7 までの数字を重複なく用い，4 桁の数字を作る．

1) 千の位が 5 である整数は何通りか． 2) 5000 以上の整数は何通りか．
3) 一の位が 2 である整数は何通りか． 4) 偶数は何通りか． 5) 奇数は何通りか．

(2) 1 から 7 までの数字を用いて，4 桁の数字を作る．**ただし，同じ数字を繰り返し用いてよい**．

1) 偶数は何通り作れるか． 2) 5 の倍数は何通り作れるか．
3) 6666 より大きな数は何通り作れるか．

【解答】

(1) 1)

千の位	百の位	十の位	一の位
5			
1 通り	6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り

$1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 =$ **120通り**

2)

千の位	百の位	十の位	一の位
5以上			
3 通り	それぞれ 6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り

$3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 =$ **360通り**

◂ 千の位が 5, 6, 7 のいずれかであればよい

3)

千の位	百の位	十の位	一の位
			2
6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り	1 通り

$1 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) =$ **120通り**

4)

千	百	十	一
			2, 4, 6
それぞれ 6 通り			3 通り

⇒

千	百	十	一
			2, 4, 6
それぞれ 6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り	3 通り

$3 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) =$ **360通り**

◂ 一の位が偶数であればよい

◂ 一の位がいくつでも，千の位は 6 通りある

◂ 順列を用いれば $3 \times {}_6P_3$ となる

5) 偶数でなければよいので，$840 - 360 =$ **480通り**．

◂【別解】一の位が奇数であればよいので，5) と同様に考えて $4 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) =$ **480通り**．

(2) 1)

千の位	百の位	十の位	一の位
			2, 4, 6
それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	3 通り

$3 \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) =$ **1029通り**

2)

千の位	百の位	十の位	一の位
			5
それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	1 通り

$1 \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) =$ **343通り**

◂ 一の位が 5 であればよい

3) 6666 より大きい数は，

千の位	百の位	十の位	一の位		
7				←$7 \times 7 \times 7 = 7^3$ 通り	◂ 7000 番台
6	7			←$7 \times 7 = 7^2$ 通り	◂ 6700 番台
6	6	7		←7 通り	◂ 6670 番台
6	6	6	7	←1 通り	◂ 6667

で全てなので，$7^3 + 7^2 + 7 + 1 =$ **400通り**

【練習 24：条件を満たす整数の個数〜その２〜】

0 から 5 までの数字を重複なしに使って，3 桁の数字を作る．

(1) 一の位が 0 のとき，何通りの数字作れるか．　(2) 一の位が 2 のとき，何通りの数字作れるか．

(3) 偶数は何通り作れるか．　(4) 5 の倍数は何通り作れるか．

【解答】

(1)

百の位	十の位	一の位
$\square$	$\square$	$\boxed{0}$
5 通り	それぞれ 4 通り	1 通り

$1 \cdot (5 \cdot 4) =$ **20通り**

(2)

百の位	十の位	一の位
$\square$	$\square$	$\boxed{2}$
0以外の 4 通り	それぞれ 4 通り	1 通り

$1 \cdot (4 \cdot 4) =$ **16通り**

◀ たとえば，百の位が 3 ならば，十の位には 0, 1, 4, 5 の 4 通りを入れることができる．

(3) 1 の位が 0, 2, 4 のいずれかであればよい．

1 の位が 0 のとき，(1) より 20 通り

1 の位が 2 のとき，(2) より 16 通り

1 の位が 4 のとき，(2) と同様にして 16 通り

以上より，$20 + 16 \times 2 =$ **52通り**．

(4) 1 の位が 0, 5 のいずれかであればよい．

1 の位が 0 のとき，(1) より 20 通り

1 の位が 5 のとき，(2) と同様にして 16 通り

以上より，$20 + 16 =$ **36通り**．

【練習 25：色塗りの方法の個数】

右の A、B、C、D、E に、辺の隣り合う 2 ヶ所は色が異なるよう、色を塗る。

(1) 4 色をすべて使い、A、E が同じ色になるよう塗るならば、塗り方は何通りか。

(2) 4 色をすべて使う塗り方は何通りか。

B	D	E
A	C	

【解答】

(1) A、E には 4 通り、B にそれぞれ 3 通り、C にそれぞれ 2 通り、D にそれぞれ 1 通りとなり、$4! =$ **24通り**

(2) A、E が同じ色の時、(1) より 24 通り。A、D が同じ色の時も同様に 24 通り。B、C が同じ色の時、B、E が同じ色の時も 24 通りずつ。よって、$24 \times 4 =$ **96通り**

◀ たとえば A と C が同じ色では、辺の隣り合う 2 ヶ所が同じ色になるなど、問題の条件に適さない。

【練習 26：並べ方に条件のある順列～その１～】

1 から 7 までの 7 つの数を一列に並べる.

(1) 6 と 7 が隣り合うものは何通りあるか.　(2) 5 と 6 と 7 が隣り合うものは何通りあるか.

(3) 両端が 1 と 2 になるものは何通りあるか.

【解答】

(1) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6,\ 7の組}$の順列で 6! 通り．それぞれについて，6, 7 の並び方は 2! 通りあるので，$6!\times 2 =$ **1440通り**.

◀ 具体的には，$\boxed{67}$か$\boxed{76}$

(2) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5,\ 6,\ 7の組}$の順列で 5! 通り．それぞれについて，5, 6, 7 の並び方は，3! 通りあるので，$5!\times 3! =$ **720通り**.

(3) 両端には 1 と 2 の順列を考え 2 通り．それぞれについて，両端でない文字は 5! 通りの並び方があるので，$5!\times 2 =$ **240通り**

◀ 1○○○○○2
2○○○○○1

【発展 27：並べ方に条件のある順列～その２～】

男子 5 人と女子 4 人を一列に並べる.

① 男子は男子で，女子は女子で固まる並べ方は何通りあるか.

② 男子のみ固まる並べ方は何通りあるか.

③ 両端が女子になる並べ方は何通りあるか.

④ どの女子どうしも隣り合わないような並べ方は何通りあるか.

【解答】

① $\boxed{男子5人}$, $\boxed{女子4人}$の順列で 2! 通り.
どちらの場合も，$\boxed{男子5人}$の並び方は 5! 通り，
どちらの場合も，$\boxed{女子4人}$の並び方は 4! 通り，
よって，$2!\times 5!\times 4! =$ **5760通り**.

◀ 具体的には，$\boxed{男子5人}$と$\boxed{女子4人}$のどちらが左か

② $\boxed{女}$, $\boxed{女}$, $\boxed{女}$, $\boxed{女}$, $\boxed{男子の組}$の並び方で 5! 通り.
それぞれについて，$\boxed{男子の組}$の並び方は 5! 通り，
よって，$5!\times 5! =$ **14400通り**.

③ 左端には 4 通りの女子，右端には 3 通りの女子，
それ以外の 7 人が真ん中に並ぶ順列は 7! 通り.
よって，$4\times 3\times 7! =$ **60480通り**.

◀ 順列を用いれば，${}_4P_2\times 7!$

④ まず男子だけを並べる．この並べ方は 5! 通り.
1 人目の女子が入れる場所は 6 ヶ所ある.
いずれの場合も 2 人目の女子が入れる場所は 5 ヶ所，
3 人目の女子は 4 ヶ所，4 人目の女子は 3 ヶ所あるので，
$5!\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 =$ **43200通り**.

◀ ↑のある場所に女子は入れる.
$\boxed{男}\ \boxed{男}\ \boxed{男}\ \boxed{男}\ \boxed{男}$
↑　↑　↑　↑　↑　↑

◀ 順列を用いれば，${}_6P_4$ 通り

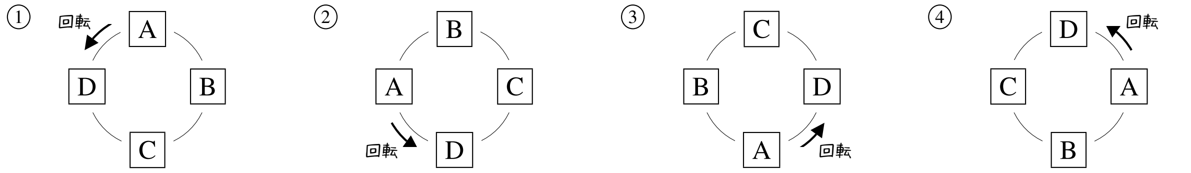
ものを並べる問題で，“隣り合う”ものを考える場合には，その隣り合うものをひとまとめにして考えるとよい.

一方，ものを並べる問題で，3 つ以上のものが“隣り合わない”ものを考える問題では，隣り合ってもよいものを先に並べるとよい場合が多い.

3. 円順列と商の法則

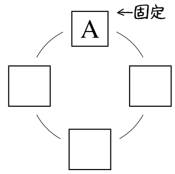
A. 円順列とは

円順列 (circular permutation) とは，複数のものを円形に並べることを意味する．ただし，下の①から④のように，回転させて同じになる場合はすべて同じ並べ方とみなす．



円順列を考えるときは，どれか 1 つを固定して，他を並べればよい．

たとえば，$\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$を円形に並べ方法を考えるとき，どんな円形の並べ方も，回転させて$\boxed{\text{A}}$を一番上の位置にできる．



そこで，$\boxed{\text{A}}$を固定し，他の$\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$を並べればよい．結局，$\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$の 3 つを 3 ヶ所に並べる順列となり，3! で求められる．

以上の結果は，次のようにしてまとめられる．

円順列

「n 個のものを円形に並べた列」のことを，n 個の**円順列** (circular permutation) といい，n 個のものがすべて区別できる場合，$(n-1)!$ 通りの並べ方がある．

円順列の問題では「誰か 1 人を固定」して考えるようにしよう．

【例題 28】

1. 5 人が円形に並ぶ方法は何通りあるか．
2. 6 個の区別できる石を円形に並べるとき，その円順列は何通りあるか．

【解答】

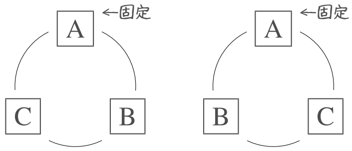
1. 1 人の場所を固定して，他の 4 人を並べればよいので，$4! =$ **24通り**．
2. 1 個の場所を固定して，他の 5 個を並べればよいので，$5! =$ **120通り**．

【例題 29】 円形のテーブルがある．ここに，男子 3 人と女子 3 人が男女交互に座る場合の数を考える．男子のうち 1 人を固定すると，残り 2 人の座り方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある．男子がどのように座っても，女子 3 人の座り方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．よって，求める場合の数は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りと分かる．

【解答】 ア : **2**，イ : $3! =$ **6**，ウ : $2 \times 6 =$ **12**

【例題 30】 $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ の 3 枚による円順列を考える．$\boxed{\text{A}}$ の位置を固定して，作ることのできる円順列をすべて図示しなさい．

【解答】 $\boxed{\text{A}}$ を固定して考えれば，次のようになる．



【練習 31：円順列〜その３〜】

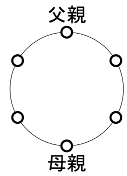
両親と 4 人の子供，計 6 人が円形のテーブルに座る．ただし，回転して一致する座り方は同じとする．

(1) 座り方は全部で何通りか．
(2) 両親が真正面に向かい合う座り方は何通りか．
(3) 両親が隣り合う座り方は何通りか．

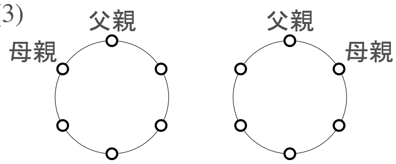
【解答】

(1) 6 人のうち 1 人を固定して考えて，$(6-1)! = 5! =$ **120通り**

(2) 父親の場所を固定すると，母親の場所は右欄外のように 1 通りに決まる．残りの 4 ヶ所に，4 人の子供が入るので，$4! =$ **24通り** になる．



(3)

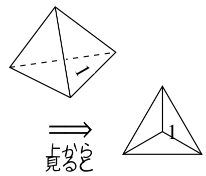


父親の場所を固定する．母親の位置は次の 2 通りがある．いずれの場合も，子供の並び方は 4! 通りあるので，全部で $2 \cdot 4! =$ **48通り** になる．

【発展 32：正四面体の順列】

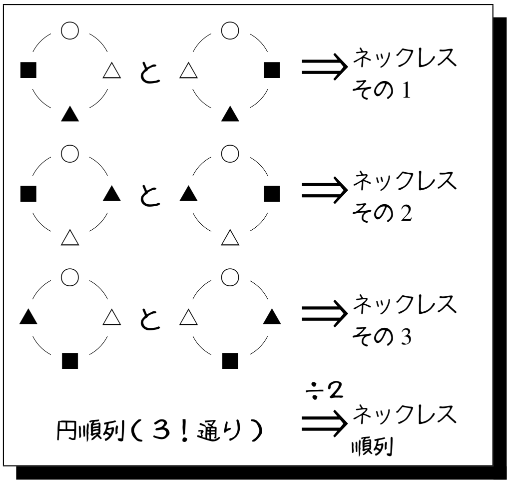
正四面体の 4 つの面に番号を 1 から 4 までつけるとき，番号のつけ方は何通りか．ただし，回転して一致する場合は，同じ番号のつけ方とする．

【解答】 底面の番号を 1 に固定する．これを上から見ると，3 つの場所に 2, 3, 4 の数字を入れる円順列になるので，$(3-1)! = 2! =$ **2通り** ある．

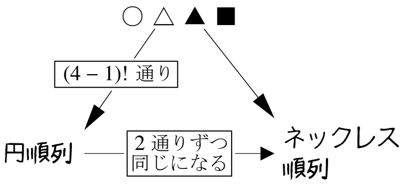


B.　ネックレス順列（数珠順列）

○，△，▲，■の 4 つの石を使ってネックレスを作る方法が何通りあるか考えよう．



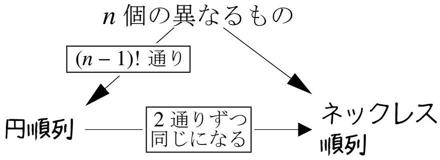
- まず，4 つの石○，△，▲，■を円順列に並べる．これは，$(4-1)!$ 通りである．
- 表裏の関係にある円順列は，同じネックレスになるので，円順列 2 つずつが同じになる．



こうして，$(4-1)! \div 2 = 3$ 通りのネックレスを作ることができると分かる．

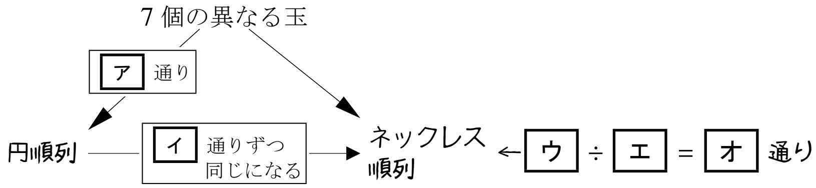
ネックレス順列（数珠順列）

「裏返すことが可能な，n 個のものを円形に並べた列」のことを，n 個の**ネックレス順列** (nacklace permutation) または**数珠**（じゅず）**順列** (beads permutation) といい，n 個（$2 \leqq n$）のものがすべて区別できる場合，$\dfrac{(n-1)!}{2}$ 通りある．



【暗記 33：ネックレス順列と商の法則】

7 個の異なる玉から作る順列について，以下の $\boxed{}$ に適当な値・式を入れなさい．



【解答】　ア : $(7-1)! =$ **6!**（または **720**），イ : **2**,
ウ : **6!**（または **720**），エ : **2**，オ : **360**

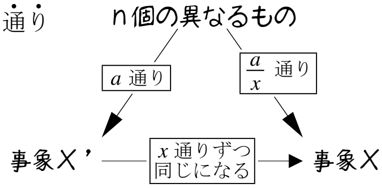
C.　商の法則 〜 同じ結果になるものをまとめる

商の法則

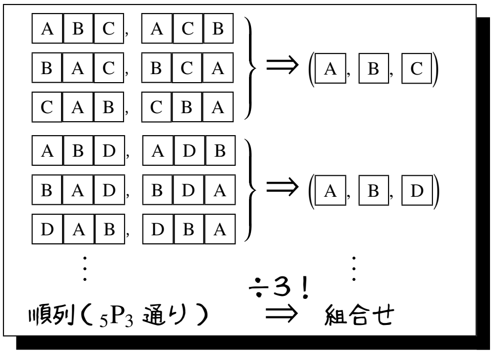
2 つの事象 X’，X について，X’ の起こり方が a 通り，事象 X’ の x 通りずつをまとめて事象 X になるならば

　　事象 X が起こる場合は $\dfrac{a}{x}$ 通り

ある．このことを**商の法則** (division law) という．



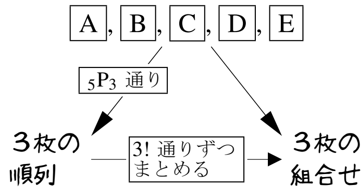
1. 組合せ $_nC_r$



A. 順列と組合せ

「5 枚のカード A, B, C, D, E のうち 3 枚を使った組合せは何通りか」という問題は次の 2 段階に分けて考えることができる.

- A, B, C, D, E の 5 枚のうち 3 枚を使った順列を考えると，$_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$ 通りある.
- 順列としては異なるが，組合せとしては同じになるものが，3! 通りずつある.

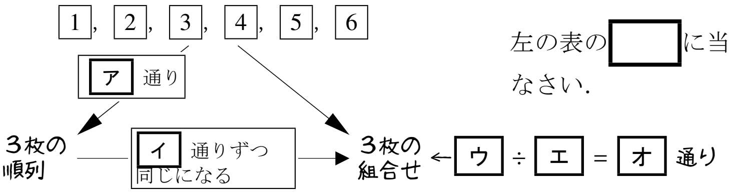


つまり，商の法則から次のように求めることができる.

$$\frac{_5P_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10 \text{ 通り}$$

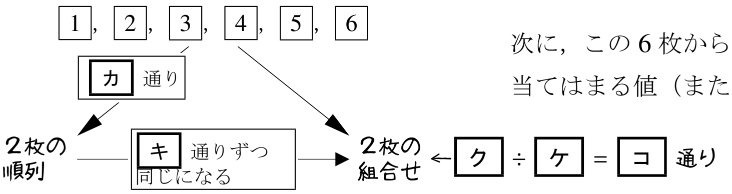
【例題 34】 1, 2, 3, 4, 5, 6 のカードが 1 枚ずつ，計 6 枚ある.

1. 1 2 3 という順列は，組合せとしては 1 3 2 と同じである.
   他に，1 2 3 と同じ組合せになる順列を，辞書順ですべて挙げよ.
2.



左の表の□に当てはまる値（または，式）を答えなさい.

3.



次に，この 6 枚から 2 枚選ぶとき，左の表の□に当てはまる値（または，式）を答えなさい.

【解答】

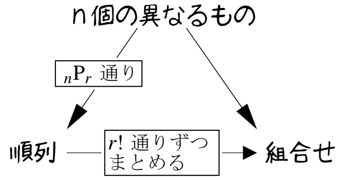
1. **2 1 3**, **2 3 1**, **3 1 2**, **3 2 1**
2. ア : **120**（または $_6P_3$），イ : **6**（または **3!**）
   ウ : **120**（または $_6P_3$），エ : **6**（または **3!**），オ : **20**
3. カ : **30**（または $_6P_2$），キ : **2**（または **2!**）
   ク : **30**（または $_6P_2$），ケ : **2**（または **2!**），コ : **15**

B. 組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$

組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ の定義

「n 個の異なるものから r 個を選ぶ**組合せ** (combination) 」の場合の数を，記号 $\overset{\text{エヌシーアール}}{{}_n\mathrm{C}_r}$ で表し，次で計算できる[*4]（n と r は $n \geqq r$ である正の整数とする）.

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{n\text{ から始まる }r\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から }1\text{ までの積}}} $$



たとえば，「12 人の班から 3 人を選ぶ組合せ」の場合の数は ${}_{12}\mathrm{C}_3$ であり，これは

$$ {}_{12}\mathrm{C}_3 = \frac{\overbrace{12\cdot 11\cdot 10}^{\substack{12\text{ から始まる}\\ 3\text{ 個の数の積}}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{3\text{ から }1\text{ までの積}}} = \frac{\cancel{12}^{\cancel{4}^{2}}\cdot 11\cdot 10}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 2\cdot 11\cdot 10 = 220 $$ と計算できるので，220 通りである.

【例題 35】 ${}_5\mathrm{C}_2$，${}_{10}\mathrm{C}_3$ の値をそれぞれ求めよ.

【解答】 $ {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{\overbrace{5\cdot 4}^{\substack{5\text{ から始まる}\\ 2\text{ 個の数の積}}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{2\text{ から }1\text{ まで}}} = \mathbf{10}$，$ {}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{\overbrace{10\cdot 9\cdot 8}^{\substack{10\text{ から始まる}\\ 3\text{ 個の数の積}}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{3\text{ から }1\text{ まで}}} = \mathbf{120}$

【例題 36】 次の $\boxed{}$ に当てはまる数字を答えなさい.

1. 15 人のクラスから 2 人の委員を選ぶ組合せの場合の数は，${}_{\boxed{ア}}\mathrm{C}_{\boxed{イ}} = \boxed{ウ}$ 通りある.
2. 8 個の異なる石から 4 個の石を選ぶ組合せの場合の数は，${}_{\boxed{エ}}\mathrm{C}_{\boxed{オ}} = \boxed{カ}$ 通りある.
3. 異なるボールが 20 個入った袋から 3 個を選ぶ組合せの場合の数は，${}_{\boxed{キ}}\mathrm{C}_{\boxed{ク}} = \boxed{ケ}$ 通りある.

【解答】

1. ア : **15**，イ : **2**，ウ : ${}_{15}\mathrm{C}_2 = \frac{15\cdot\cancel{14}^{7}}{\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{105}$**通り**
2. エ : **8**，オ : **4**，カ : ${}_8\mathrm{C}_4 = \frac{\cancel{8}^{2}\cdot 7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{70}$**通り**
3. キ : **20**，ク : **3**，ケ : ${}_{20}\mathrm{C}_3 = \frac{20\cdot 19\cdot\cancel{18}^{\cancel{6}^{3}}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{1140}$**通り**

${}_n\mathrm{C}_r$ を計算するときは，約分の方法を工夫するようにしよう.

[*4] 次の等式も成り立つ．ただし，${}_n\mathrm{C}_r$ の値を計算するときには必要がない.

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{n\text{ から始まる }r\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{r(r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から }1\text{ までの積}}} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}^{n\text{ から }1\text{ までの積}}}{\underbrace{r(r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から }1\text{ までの積}}\underbrace{(n-r)(n-r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{n-r\text{ から }1\text{ までの積}}} = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

【練習 37：${}_n\mathrm{C}_r$ の計算練習】

(1) ${}_5\mathrm{C}_2$，${}_{10}\mathrm{C}_3$，${}_{20}\mathrm{C}_2$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) 30 人のクラスの中から，3 人の委員を選ぶ方法は何通りあるか.

(3) 10 個の点から 4 点を選ぶ方法は何通りあるか.

【解答】

(1) ${}_5\mathrm{C}_2 = \dfrac{\overbrace{5\cdot 4}^{\text{5 から始まる 2 個の数の積}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{\text{2 から 1 まで}}} = \mathbf{10}$，${}_{10}\mathrm{C}_3 = \dfrac{\overbrace{10\cdot 9\cdot 8}^{\text{10 から始まる 3 個の数の積}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{\text{3 から 1 まで}}} = \mathbf{120}$，${}_{20}\mathrm{C}_2 = \dfrac{\overbrace{20\cdot 19}^{\text{20 から始まる 2 個の数の積}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{\text{2 から 1 まで}}} = \mathbf{190}$

(2) ${}_{30}\mathrm{C}_3 = \dfrac{\cancel{30}^{10}\cdot 29\cdot \cancel{28}^{14}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = $ **4060通り**

(3) ${}_{10}\mathrm{C}_4 = \dfrac{10\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}^{\cancel{2}}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = $ **210通り**

C. ${}_n\mathrm{C}_0$，${}_n\mathrm{C}_n$ の値

${}_n\mathrm{C}_0$ の値も[*5]，${}_n\mathrm{C}_n$ の値も[*6]，必ず 1 になる．たとえば，${}_{10}\mathrm{C}_0 = 1$，${}_{10}\mathrm{C}_{10} = 1$ である．

D. 等式 ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$

たとえば，10 人の集まりから 7 人を選ぶとき，次のどちらを行ってもよい.

- 選ばれる 7 人を決める，これは ${}_{10}\mathrm{C}_7$ 通りある.
- 選ばれない 3 人を決める，これは ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通りある.

$${}_{10}\mathrm{C}_7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot\cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}}{\cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = {}_{10}\mathrm{C}_3$$

結局，${}_{10}\mathrm{C}_7 = {}_{10}\mathrm{C}_3$ である．これは，右の計算式からも分かり，一般には，${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ が成り立つ[*7].

r が n の半分より大きい値の場合は，${}_n\mathrm{C}_r$ でなく ${}_n\mathrm{C}_{n-r}$ を計算するとよい.

【例題 38】

1. ${}_3\mathrm{C}_0$，${}_4\mathrm{C}_4$ の値をそれぞれ求めよ.
2. ${}_{100}\mathrm{C}_{98} = {}_{100}\mathrm{C}_{\boxed{\text{ア}}} = \boxed{\text{イ}}$
3. ${}_{12}\mathrm{C}_{10}$，${}_{20}\mathrm{C}_{17}$ の値をそれぞれ求めよ.
4. 13 人の中から 9 人を選ぶ方法は何通りか.

【解答】

1. ${}_3\mathrm{C}_0 = \mathbf{1}$，${}_4\mathrm{C}_4 = \mathbf{1}$
2. ア :**2**，イ :${}_{100}\mathrm{C}_2 = \dfrac{100\cdot 99}{2} = \mathbf{4950}$
3. ${}_{12}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 = \dfrac{\cancel{12}^{6}\cdot 11}{\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{66}$，${}_{20}\mathrm{C}_{17} = {}_{20}\mathrm{C}_3 = \dfrac{\cancel{20}^{10}\cdot 19\cdot\cancel{18}^{6}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{1140}$

◀ または，${}_4\mathrm{C}_4 = \dfrac{\overbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}^{\text{4 から始まる 4 個の数の積}}}{\underbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{\text{4 から 1 まで}}} = \mathbf{1}$

[*5] ${}_n\mathrm{C}_0 = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_0}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1$ である．これは，「n 個のものから 0 個を選ぶ」方法は「何も選ばない」という 1 通りしか存在しないことからも理解することができる.

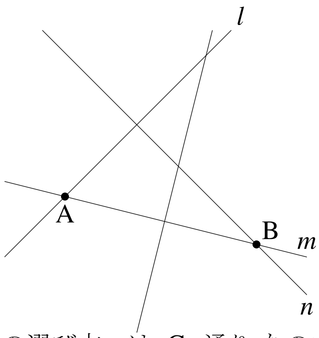
[*6] ${}_n\mathrm{C}_n = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_n}{n!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$ である．これは，「n 個のものから n 個を選ぶ」方法は「すべてを選ぶ」という 1 通りしか存在しないことから理解することができる.

[*7] n 個の異なるものから r 個を選ぶとき，「選ばれる r 個を決める」ことと「選ばれない $n-r$ 個を決めること」は 1 対 1 に対応することからも理解できる.

4. ${}_{13}C_9 = {}_{13}C_4 = \dfrac{13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10}^{5}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} =$ **715通り**

◀ 13 人から 9 人を選ぶことは，13 人から選ばない 4 人を決めることと同じである．

E.　組合せに置き換えられる問題



右図には直線が 4 本，平面上に引かれている．この 4 本の直線が作る交点の数は，組合せを用いて求めることができる．

まず，2 本の直線を選ぶと，交点が 1 つ決まる．たとえば

交点 A を選ぶ $\Leftarrow$ 直線 l, m を選ぶ

逆に，交点を 1 つ選ぶと，交点を作る 2 直線が決まる．

交点 B を選ぶ $\Rightarrow$ 直線 m, n を選ぶ

こうして，「直線の交点の数」=「直線 2 本の選び方」と分かる．「直線 2 本の選び方」は ${}_4C_2$ 通り なので，「直線の交点の数」は 6 点あると求められる．

【例題 39】 平面上に，どの 2 本を選んでも互いに平行でない，8 本の直線が引かれている．ただし，どの 3 本も 1 点で交わらないものとする．

1. この平面上で直線の交点を 1 つ選ぶことは, $\boxed{\text{ア}}$ 本の直線を選ぶことと一致する．よって，この平面上に，直線の交点は $\boxed{\text{イ}}$ 個ある．
2. この平面上で三角形を 1 つ選ぶことは, $\boxed{\text{ウ}}$ 本の直線を選ぶことと一致する．よって，この平面上に，三角形は $\boxed{\text{エ}}$ 個ある．

【解答】

1. ア: **2**，イ: ${}_8C_2 = \dfrac{\cancel{8}^{4} \cdot 7}{\cancel{2}} =$ **28**
2. ウ: **3**，エ: ${}_8C_3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} =$ **56**

◀ 8 本の直線から，交点を決める 2 本を選ぶ組合せ
◀ 8 本の直線から，三角形を決める 3 本を選ぶ組合せ

F.　組合せと和の法則・積の法則

【例題 40】 男子が 5 人，女子が 5 人いる中で，4 人を選ぶ場合の数について以下の問に答えよ．

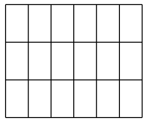
1. 男子から 2 人，女子から 2 人選ぶときの場合の数は何通りか．
2. 男子から 2 人以上選ぶ場合の数は何通りか．

【解答】

1. 男子 2 人の組合せは ${}_5C_2$ 通り，そのどの場合も女子 2 人の組合せが ${}_5C_2$ 通りあるので，${}_5C_2 \cdot {}_5C_2 = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} =$ **100通り**．
   ◀ 『積の法則』(p.3)
2. 男子が 2 人のときは，1. より 100 通り．
   男子を 3 人選ぶときは，女子を 1 人選ぶので
   ${}_5C_3 \cdot {}_5C_1 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \dfrac{5}{1} = 50$ 通り．
   ◀ 『積の法則』(p.3)
   4 人とも男子を選ぶときは ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$ 通り．
   よって，$100 + 50 + 5 =$ **155通り**．
   ◀ 和の法則

【練習 41：四角形・対角線】

(1) 右図のように，横に 4 本，縦に 7 本の直行する平行線が引かれている．この中に長方形はいくつあるか求めよ．



(2) 正十角形の対角線の本数を求めよ．

【解答】

(1) 横 4 本のうちから 2 本，縦 7 本のうちから 2 本をそれぞれ選べば，1 個の長方形が定まる．よって

$${}_4C_2 \cdot {}_7C_2 = \mathbf{126}\text{**個**}$$

(2) 10 個の頂点のうち 2 個を選べば，1 本の対角線か辺が定まる．辺の数は 10 本あるので，これを除いて

$${}_{10}C_2 - 10 = 45 - 10 = \mathbf{35}\text{**本**}$$

◀ 正十角形を実際に書いて考えてみよう

G. 組分けの問題 ～ 組合せと商の法則

【例題 42】 10 人を次のように分ける方法は何通りあるか．

1. 7 人，3 人に分ける．
2. 5 人，3 人，2 人に分ける．

【解答】

1. 10 人から 3 人を選びグループとするのが ${}_{10}C_3$ 通り，
   残った 7 人から 7 人を選んで ${}_7C_7$ 通り，よって

$${}_{10}C_3 \cdot {}_7C_7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = \mathbf{120}\text{**通り**}$$

2. 10 人から 2 人を選びグループとするのが ${}_{10}C_2$ 通り，
   残った 8 人から 3 人を選んで ${}_8C_3$ 通り，
   さらに残った 5 人を 5 人でまとめて ${}_5C_5$ 通り，よって

$${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_3 \cdot {}_5C_5 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = \mathbf{2520}\text{**通り**}$$

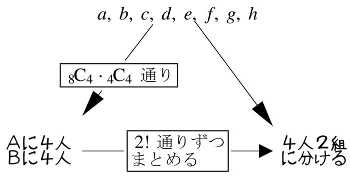
◀ まず 5 人を選び，次に 3 人を選ぶ，という順序で計算しても，同じ結果になるが，計算は複雑になる

組分けの問題においては，人数の少ない組から ${}_nC_r$ を計算するとよい．

たとえば，8 人を組分ける方法として，次の 2 通りを考えてみよう．

1) グループ A に 4 人，グループ B に 4 人に分ける．
8 人から，グループ A の 4 人を選ぶ方法は ${}_8C_4$，残りはそのままグループ B になるので，${}_8C_4 = 70$ 通り．

2) 4 人 2 組に分ける．
8 人を a, b, c, d, e, f, g, h とする．ここで，次の組分け i.，ii. を考えよう．
  i. 初めの 4 人において (a, b, c, d) を選ぶ
  → (a, b, c, d) と (e, f, g, h) の 2 組
  ii. 初めの 4 人において (e, f, g, h) を選ぶ
  → (e, f, g, h) と (a, b, c, d) の 2 組

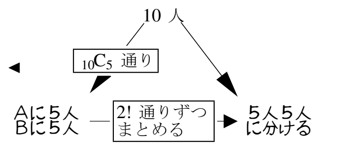


上の i.，ii. の組分けは 1) においては異なる．
しかし 2) においては，i.，ii. の組分けは同じになる．結局，右上の表を書くことができ，商の法則によって ${}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \div 2! = 35$ 通りと求められる．

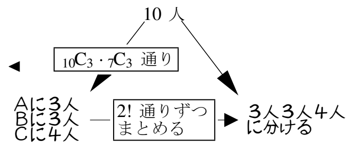
組分けの問題は，「各グループが区別できる場合」を基本に考えるとよい．この場合が，もっとも簡単に計算できるからである．

【練習 43：組分け】
10 人を次のように分ける方法は何通りあるか．
(1) 5 人，5 人に分ける．　(2) 4 人，3 人，3 人に分ける．
(3) 2 人，2 人，2 人，2 人，2 人に分ける．

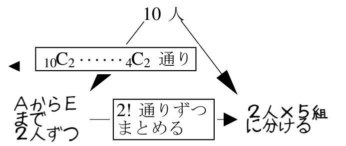
【解答】
(1) 10 人から，A 組として 5 人を選ぶのが ${}_{10}C_5$ 通り，残りは B 組．
A と B の区別をなくすために 2! で割ればよいので
$$\frac{{}_{10}C_5}{2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = \textbf{126通り}$$



(2) 10 人から，A 組として 3 人を選ぶのが ${}_{10}C_3$ 通り，
残りの 7 人から B 組 3 人を選ぶのが ${}_7C_3$ 通り，残りは C 組．
A と B の区別をなくすために 2! で割ればよいので
$$\frac{{}_{10}C_4 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = \textbf{2100通り}$$



(3) A 組から E 組まで 2 人ずつを選ぶのが ${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2$ 通り，
A から E までの区別をなくすために 5! で割って
$$\frac{{}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2}{5!}$$
$$= \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \textbf{945通り}$$

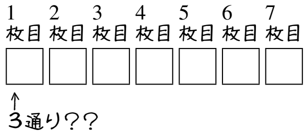


2. 同じものを含むときの順列

A. 同じものを含むときの順列

$\boxed{A}$, $\boxed{A}$, $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{C}$ の 7 枚を 1 列に並べる順列が何通りあるのか考えてみよう．

これを，通常の順列のように考えることはできない．7 枚のカードがあるが，カードは 7 種類ではないからである．



B. 組合せ ${}_nC_r$ を用いて考える

カード置き場を 7 ヶ所用意しておく．

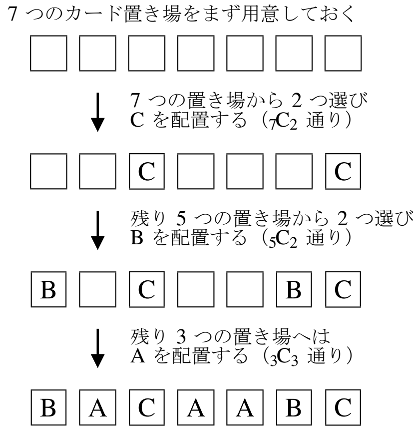
まず，2 枚の $\boxed{C}$ の置き場を選ぶ（${}_7C_2$ 通り）．

いずれの場合も，残りの置き場は 5 ヶ所ある．ここから，2 枚の $\boxed{B}$ の置き場を選ぶ（${}_5C_2$ 通り）．

どの場合でも，残りの置き場は 3 ヶ所あるから，3 枚の $\boxed{A}$ を入れる（${}_3C_3$ 通り）．

以上から，7 枚のカード $\boxed{A}$, $\boxed{A}$, $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{C}$ を 1 列に並べる順列は『積の法則』(p.3) によって，次で計算できる．

$$ {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 $$
$$ = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} \times \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} \times \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 210 \text{ 通り} $$



A の置き場，B の置き場，C の置き場の順で決めてもよいが，${}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$ は計算量が多くなる．一般に，数の少ないものから場所を決めるとよい．

【例題 44】 次の場合の数を，上の方法で求めなさい．

1. 8 つの数字 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 を一列に並べる方法が何通りあるか．
2. 7 つのアルファベット S，C，I，E，N，C，E を一列に並べる方法が何通りあるか．

【解答】

1. 数字を置く場所を 8 つ用意する．
   1 を置く 2 ヶ所は ${}_8C_2$ 通り，2 を置く 3 ヶ所は ${}_6C_3$ 通り，
   残り 3 ヶ所に 3 を置くので，『積の法則』(p.3) より
   $${}_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = \mathbf{560}\text{**通り**}$$
2. S，I，N が 1 つずつ，C と E が 2 つずつなので
   $${}_7C_1 \times {}_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 7\times 6\times 5\times \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 3}{\cancel{2}} = \mathbf{1260}\text{**通り**}$$

C.　商の法則を用いて考える

　まず，$\boxed{A_1}$, $\boxed{A_2}$, $\boxed{A_3}$, $\boxed{B_1}$, $\boxed{B_2}$, $\boxed{C_1}$, $\boxed{C_2}$ の 7 枚を並べる順列を考える．これは，7! 通りある．

　次に，$\boxed{A_1}$, $\boxed{A_2}$, $\boxed{A_3}$ の 3 枚をすべて $\boxed{A}$ に戻す．これによって，3! 通りずつまとめられる．

　さらに，$\boxed{B_1}$, $\boxed{B_2}$ の 2 枚をすべて $\boxed{B}$ に戻す．これによって，2! 通りずつまとめられる．

　最後に，$\boxed{C_1}$, $\boxed{C_2}$ の 2 枚をすべて $\boxed{C}$ に戻す．これによって，2! 通りずつまとめられる．

　以上から，商の法則によって次のように求められる．

$$7! \div 3! \div 2! \div 2! = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$$
$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 210 \text{ 通り}$$

まず $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2$ の 7 枚を並べる

（並べ方は 7! 通りある）

$\boxed{B_2}\ \boxed{A_2}\ \boxed{C_1}\ \boxed{A_3}\ \boxed{A_1}\ \boxed{B_1}\ \boxed{C_2}$

÷3!　↓　A_1, A_2, A_3 の区別をなくす（3! 通りずつまとめる）

$\boxed{B_2}\ \boxed{A}\ \boxed{C_1}\ \boxed{A}\ \boxed{A}\ \boxed{B_1}\ \boxed{C_2}$

÷2!　↓　B_1, B_2 の区別をなくす（2! 通りずつまとめる）

$\boxed{B}\ \boxed{A}\ \boxed{C_1}\ \boxed{A}\ \boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C_2}$

÷2!　↓　C_1, C_2 の区別をなくす（2! 通りずつまとめる）

$\boxed{B}\ \boxed{A}\ \boxed{C}\ \boxed{A}\ \boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}$

【例題 45】 次の場合の数を，上の方法で求めなさい．

1. 8 つの数字 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 を一列に並べる方法が何通りあるか．
2. 7 つのアルファベット S，C，I，E，N，C，E を一列に並べる方法が何通りあるか．

【解答】

1. 1_a，1_b，2_a，2_b，2_c，3_a，3_b，3_c の順列は 8! 通り，
   1_a，1_b の区別をなくすには 2! ずつまとめ，
   2_a，2_b，2_c の区別をなくすには 3! ずつまとめ，
   3_a，3_b，3_c の区別をなくすには 3! ずつまとめることになる．よって，
   商の法則より $\dfrac{8!}{2!3!3!}$ = **560通り** になる．
2. 全部で 7 文字あり，C と E が 2 つずつ，S，I，N が 1 つずつなので
   $\dfrac{7!}{2!2!1!1!1!}$ = **1260通り**

同じものを含む順列の計算

「k 個の同じもの，l 個の同じもの，m 個の同じもの」による順列の総数は

- 「組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いて」${}_{k+l+m}\mathrm{C}_k \times {}_{l+m}\mathrm{C}_l \times {}_m\mathrm{C}_m$ 通りと求められる．
- 「商の法則を用いて」$\dfrac{(k+l+m)!}{k!l!m!}$ 通りと求められる．

これら 2 つの結果は，次のようにして等しいことが分かる．

$${}_{k+l+m}\mathrm{C}_k \times {}_{l+m}\mathrm{C}_l \times {}_m\mathrm{C}_m = \frac{(k+l+m)!}{\cancel{(l+m)!}k!} \times \frac{\cancel{(l+m)!}}{\cancel{m!}l!} \times \frac{\cancel{m!}}{0!m!} = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}$$

どちらのやり方も，4 種類以上のものを含む順列にも応用できる．

上の計算は「なぜそうなるのか」を理解していないと，やり方を忘れてしまいやすい．

【例題 46】 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$ を 1 列に並べる方法を，次の 2 通りで求めたい．

1. 「組合せを用いて求める」

8 つのカード置き場をまず用意しておく

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

↓ 2 ヶ所選んで $\boxed{3}$ を配置（$\boxed{ア}\mathrm{C}\boxed{イ}$ 通り）

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{3}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{3}$

↓ 3 ヶ所選んで $\boxed{2}$ を配置（$\boxed{ウ}\mathrm{C}\boxed{エ}$ 通り）

$\boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

↓ 残りの置き場へは $\boxed{1}$ を配置（$\boxed{オ}\mathrm{C}\boxed{カ}$ 通り）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

以上より，計算式 $\boxed{キ}$ によって $\boxed{ク}$ 通りと求められる．

2. 「商の法則を用いて求める」

まず $1_A, 1_B, 1_C, 2_A, 2_B, 2_C, 3_A, 3_B$ の 8 枚を並べる（並べ方は $\boxed{ケ}$ 通りある）

$\boxed{2_B}\ \boxed{1_B}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2_C}\ \boxed{1_C}\ \boxed{1_A}\ \boxed{2_A}\ \boxed{3_B}$

↓ $1_A, 1_B, 1_C$ の区別をなくす（$\boxed{コ}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2_B}\ \boxed{1}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2_C}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2_A}\ \boxed{3_B}$

↓ $2_A, 2_B, 2_C$ の区別をなくす（$\boxed{サ}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3_B}$

↓ $3_A, 3_B$ の区別をなくす（$\boxed{シ}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

以上より，計算式 $\boxed{ス}$ によって $\boxed{セ}$ 通りと求められる．

【解答】

1. ア, イ : ${}_8\mathrm{C}_2$　　ウ, エ : ${}_6\mathrm{C}_3$　　オ, カ : ${}_3\mathrm{C}_3$

キ, ク : ${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3 = $ **560通り**

2. ケ : **8!**　　コ : **3!**　　サ : **3!**　　シ : **2!**

ス, セ : $\dfrac{\mathbf{8!}}{\mathbf{3!\cdot 3!\cdot 2!}} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)} = $ **560通り**

「組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いて」解く方が仕組みを理解しやすいが，「商の法則を用いて」解く方が計算しやすい．今後このテキストでは，主に「商の法則を用いて」解いて話を進める．

【練習 47：同じものを含む順列～その１～】

(1) a, a, a, b, b を並び替えるとき，何通りの並べ方があるか．

(2) 1, 2, 3 を 2 個ずつ用いてできる 6 桁の整数は何通りあるか．

(3) S，U，U，G，A，K，U，A を並び替えるとき，何通りの並べ方があるか．

【解答】

(1) a を 3 つ，b を 2 つ含む順列であるので $\dfrac{5!}{3!2!} = $ **10通り**

◀ または，${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り

(2) 1, 2, 3 を 2 つずつ含む順列であるので

$$\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1}{(\cancel{2}\cdot 1)\cdot(\cancel{2}\cdot 1)\cdot(\cancel{2}\cdot 1)} = \mathbf{90}\text{通り}$$

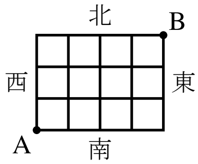
◀ または，${}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 = 90$ 通り

(3) U を 3 つ，A を 2 つ，S，G，K を 1 つずつ含むから

$$\frac{8!}{3!2!1!1!1!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = \mathbf{3360}\text{通り}$$

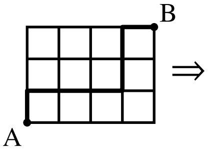
◀ または，${}_8\mathrm{C}_1 \cdot {}_7\mathrm{C}_1 \cdot {}_6\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 = 3360$ 通り

D.　同じものを含む順列の応用 〜 最短経路の数

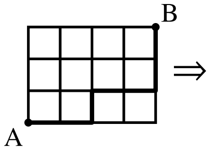


右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路があるとき，A 地点から B 地点への最短経路について考えよう．

ここで，北に 1 区画進むことを↑，東に 1 区画進むことを→で表すとすれば，すべての最短経路を↑と→で表すことができる．



⇒「↑→→→↑↑→」

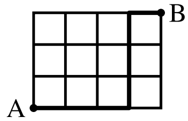


⇒「→→↑→→↑↑」

逆に，右の例のように，「↑ 3 つと→ 4 つが作る順列」を 1 つ決めれば，最短経路はただ 1 つに決まる．こうして，「A から B までの最短経路」は，「↑ 3 つと→ 4 つの順列」と 1 対 1 に対応し

「→→→↑↑↑→」

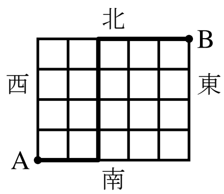
⇓



$\dfrac{7!}{3!4!} = 21$ 通り（または ${}_7C_3 = 21$ 通り）　←『同じものを含む順列の計算』を用いた

と求めることができる．

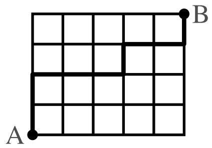
【例題 48】 右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．A 地点から B 地点への最短経路について以下の問に答えよ．



1. A 地点から「↑↑→→→↑→→↑」と進んだときの経路を図示しなさい．
2. 右図の太線のように進んだときの経路を「↑」「→」を用いて表しなさい．
3. A 地点から B 地点まで進むには「↑」へ $\boxed{\text{ア}}$ 回，「→」へ $\boxed{\text{イ}}$ 回進めばよいので，最短経路の場合の数は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りであると分かる．

【解答】

1.

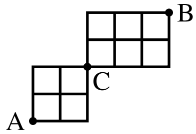


2. →→↑↑↑↑→→→
3. ア : **4**，イ : **5**

　ウ : $\dfrac{9!}{4!5!} = \mathbf{126}$**通り**

◂ または ${}_9C_4 = \mathbf{126}$**通り**

【例題 49】 右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．



1. A から C への最短経路は全部で何通りあるか求めよ．
2. C から B への最短経路は全部で何通りあるか求めよ．
3. A から C を通って B へ進む最短経路は全部で何通りあるか求めよ．

【解答】

1. $\dfrac{4!}{2!2!} = \mathbf{6}$**通り**
2. $\dfrac{5!}{2!3!} = \mathbf{10}$**通り**
3. $6 \times 10 = \mathbf{60}$**通り**

◂ A から C へどのように進んでも（6 通り），それぞれ，C から B へ 10 通り行き方がある．

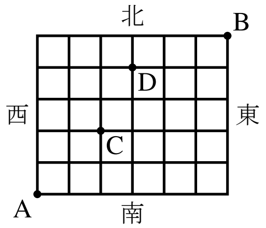
【練習 50：最短経路】

右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．A 地点から B 地点への最短経路について以下の問に答えよ．

(1) 最短経路は全部で何通りあるか求めよ．

(2) C 地点を通る最短経路は何通りあるか．また，D 地点を通る最短経路は何通りあるか，それぞれ求めよ．

(3) C 地点または D 地点を通る最短経路は何通りあるか求めよ．



【解答】

(1) 最短経路の数は，↑ 5 つと→ 6 つの順列の場合の数と一致するので

$\dfrac{11!}{5!6!} = \mathbf{462}$**通り**　　または　${}_{11}C_5 = \mathbf{462}$**通り**

◀『同じものを含む順列』(p.26)

(2) （C 地点を通る最短経路）

A〜C の最短経路の数は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り，

◀ ↑ 2 つ，→ 2 つの順列に一致

それぞれに対し，

◀「それぞれに」あるので積の法則

C〜B の最短経路の数は $\dfrac{7!}{3!4!}$ 通り あるので

◀ ↑ 3 つ，→ 4 つの順列に一致

$\dfrac{4!}{2!2!} \times \dfrac{7!}{3!4!} = 6 \times 35 = \mathbf{210}$**通り**

◀ または，${}_4C_2 \cdot {}_7C_3 = 210$

（D 地点を通る最短経路）

同様にして $\dfrac{7!}{4!3!} \times \dfrac{4!}{1!3!} = 35 \times 4 = \mathbf{140}$**通り**

◀ A から D までは↑ 4 つ，→ 3 つ D から B までは↑ 1 つ，→ 3 つの順列に一致する

(3) 集合 C，D をそれぞれ

C : C 地点を通る最短経路，D : D 地点を通る最短経路

とおくと，求める値は $n(C \cup D)$ である．ここで，$n(C \cap D)$ は，C，D 両地点を通る最短経路の数であり

◀ A から C までは↑ 2 つ，→ 2 つ C から D までは↑ 2 つ，→ 1 つ D から B までは↑ 1 つ，→ 3 つの順列に一致

$$n(C \cap D) = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{2!1!} \times \frac{4!}{1!3!} = 6 \times 3 \times 4 = 72$$

であるから，$n(C \cup D)$，つまり求める最短経路の数は

$$\begin{aligned} n(C \cup D) &= n(C) + n(D) - n(C \cap D) \\ &= 210 + 140 - 72 = \mathbf{278}\text{通り} \end{aligned}$$

E. ㊍㊗ 重複順列の応用問題

【発展 51：同じものを含む円順列】

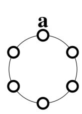
① a を 1 つ，b を 2 つ，c を 3 つ，計 6 つの文字を円形に並べるとき，何通りの並べ方があるか．

② a，b，c をそれぞれ 2 つずつ，計 6 つの文字を円形に並べるとき，何通りの並べ方があるか．

【解答】

① 1 つの a を固定すれば，残りは 2 つの b と 3 つの c の順列になるので

◀

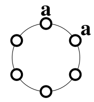


$\dfrac{5!}{2!3!} = \mathbf{10}$**通り**

② 2 つの a の並べ方は次の 3 つの場合に分けられる．

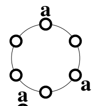
i) 隣り合うタイプ

残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り



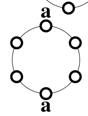
ii) 1 つ間をおくタイプ

残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り

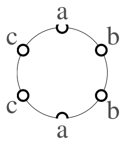


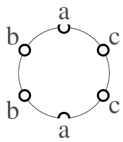
iii) 2 つ間をおくタイプ

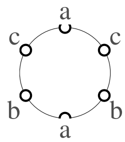
残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り

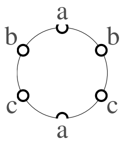


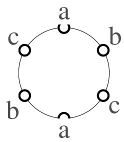
しかし，この 6 通りのうち

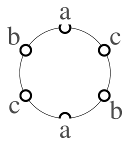
①


②


③


④


⑤


⑥


①と②，③と④も同じものである．よって，4 通りとなる．

以上 i)，ii)，iii) より，$6+6+4=$ **16通り**

【発展 52：同じものを含む順列〜その２〜】

7 つの数字 1，1，1，2，2，3，3 を用いてできる 4 桁の数字を考える．

① 1213 や 2311 のように，3 種類の数字をすべて使ってできる数字は何通りあるか．

② 4 桁の数字は全部で何通りできるか．

【解答】

① 3 種類とも用いた 4 桁の数字は

$$\underbrace{{}_3C_1}_{\substack{1,2,3\\ \text{のうち何を}\\ 2\text{つ使うか}}}\times\underbrace{\frac{4!}{2!1!1!}}_{\substack{2\text{つ}1\text{つ}1\text{つ}\\ \text{の順列}}}=3\times 12=\textbf{36通り}$$

② 1 種類だけ用いた 4 桁の数字はない． ◀ 1 も 2 も 3 も，3 個以下しかない

数字を 2 種類だけ用いた数字は，次の 1)，2) がある．

1) 2 種類の数字を 2 つずつ用いた数 ◀ 1122，1331 など

2 つずつの順列は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通りあり，2 種類の数字の選び方は ${}_3C_2$ 通りあるので

$$\frac{4!}{2!2!}\times{}_3C_2=6\times 3=18\text{ 通り}$$

2) 1 を 3 つ，2 か 3 を 1 つ用いた数 ◀ 2111，1131 など

1 を 3 つ，2 を 1 つ用いた順列は $\dfrac{4!}{3!1!}$ 通り，

1 を 3 つ，3 を 1 つ用いた順列も同様なので

$$\frac{4!}{3!1!}\times 2=4\times 2=8\text{ 通り}$$

よって，数字を 2 種類だけ用いた数は $18+8=26$ 個ある．1) と合わせて，全部で $26+36=$ **62通り** ある．

3. 重複組合せ

A. ○と｜のモデル

次の問題を考えてみよう．

3 種類の果物，りんご，かき，なしを使って，7 個入りの果物かごを作る．
1 つも入らない種類があってもよいとすると，何通りの果物かごができるか．

この問題は,「○と｜のモデル」への置き換えによって解くことができる．7 つの○を 2 つの｜で区切り

一番左の○の数をりんごの数
真ん中の○の数をかきの数
一番右の○の数をなしの数

りんご 2 個，かき 3 個，なし 2 個
$\Longleftrightarrow$ ○○｜○○○｜○○
りんご 4 個，かき 0 個，なし 3 個
$\Longleftrightarrow$ ○○○○｜｜○○○

とすれば,「果物かごの種類の数」と「○ 7 つと｜ 2 つの順列」
は一致する．よって,「果物かごの種類の数」は,『同じものを含む順列』(p.26) によって $\dfrac{9!}{7!2!} = 36$ 通りあると分かる（または，${}_9C_2 = 36$ 通り）．

【例題 53】 8 個の区別しないアメを 3 人に分ける．1 個もアメをもらえない人がいてもよいとする．
1. 上の○と｜のモデルにおいて「○○｜○○｜○○○○」と対応する分け方は,
   A が $\boxed{ア}$ 個，B が $\boxed{イ}$ 個，C が $\boxed{ウ}$ 個である．
2. 上の○と｜のモデルにおいて「｜○○○○｜○○○○」と対応する分け方は,
   A が $\boxed{エ}$ 個，B が $\boxed{オ}$ 個，C が $\boxed{カ}$ 個である．
3. A が 3 個，B が 5 個，C が 0 個のときを，○と｜のモデルで表せ．
4. アメの分け方は何通りあるか．

【解答】
1. ア : **2**，イ : **2**，ウ : **4**
2. エ : **0**，オ : **4**，カ : **4**
3. **○○○｜○○○○○｜**
4. ○ 8 つと｜ 2 つの順列に一致するので，$\dfrac{10!}{8!2!} = \mathbf{45}$**通り**

重複組合せ

n 種類のものを，重複を許して組み合わせて，r 個にすることを，**重複組合せ**（ちょうふく）(combination with repetitions) という．組合せに選ばれない種類があってもよいならば，r 個の○と，$n-1$ 個の｜を用いた「○と｜のモデル」を用いて，場合の数を求められる．

B. すべての種類を含む重複組合せ（資源配分）

重複組合せにおいて，すべての種類が 1 つは選ばれないといけない場合を考えよう．

3 種類の果物，りんご，かき，なしを使って，7 個入りの果物かごを作る．
どの種類も最低 1 個含めるとすると，何通りの果物かごができるか．

この問題は，次のように考えればよい．

(A) はじめに，りんご，かき，なしを 1 個ずつ入れる．
(B) 次に，りんご，かき，なしを，合わせて 4 個入れる．このときは，1 つも入らない種類があってもよい．

(A) の入れ方は 1 通りしかないので，(B) の入れ方が何通りであるか求めればよい．
(B) の入れ方は，○ 4 つと｜ 2 つの順列を考えればよいので

$\dfrac{6!}{4!2!} = 15$ 通り　　または　${}_6C_2 = 15$ 通り

(B) が ○○｜○｜○ のとき
りんご 2 個，かき 1 個，なし 1 個
(A) と合わせて
りんご 3 個，かき 2 個，なし 2 個

(B) が ｜○○○｜○ のとき
りんご 0 個，かき 3 個，なし 1 個
(A) と合わせて
りんご 1 個，かき 4 個，なし 2 個

【例題 54】 8 個の区別しないアメを 3 人に分ける．どの人も最低 1 個はアメをもらう場合，分け方は何通りあるか．

【解答】 まず，3 人に 1 個ずつアメを配る．残りの 5 個のアメを 3 人に配る方法は，「○ 5 つ，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{7!}{5!2!} = $ **21通り**

C. 整数問題への応用

○と｜のモデルを用いて，「$x + y + z = 7$ となる 0 以上の整数の組 (x, y, z) の個数」を求めることができる．○ 7 個と｜ 2 つを横一列に並べ

一番左の○の数を x の値
真ん中の○の数を y の値
一番右の○の数を z の値

$x = 2, y = 3, z = 2$
$\Longleftrightarrow$ ○○｜○○○｜○○
$x = 4, y = 0, z = 3$
$\Longleftrightarrow$ ○○○○｜｜○○○

とすれば，「(x, y, z) の組」と「○ 7 個と｜ 2 つの順列」は 1 対 1 に対応する．つまり，$\dfrac{9!}{2!7!} = 36$ 通り．

【例題 55】

1. $x + y + z = 12$ を満たす 0 以上の整数の解 (x, y, z) の個数を求めよ．
2. $a + b + c + d = 10$ を満たす 0 以上の整数の解 (a, b, c, d) の個数を求めよ．

【解答】

1. 「(x, y, z) の組」と「○ 12 個と｜ 2 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{14!}{12!2!} = \frac{\cancel{14}^{7} \cdot 13}{\cancel{2}} = \mathbf{91}\text{通り}$$

2. 「(a, b, c, d) の組」と「○ 10 個と｜ 3 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{13!}{10!3!} = \frac{13 \cdot \cancel{12}^{\cancel{4}^{2}} \cdot 11}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \mathbf{286}\text{通り}$$

◀ $x = 2, y = 2, z = 8$
⇔ ○○｜○○｜○○○○○○○○
$x = 5, y = 0, z = 7$
⇔ ○○○○○｜｜○○○○○○○

◀ $a = 4, b = 2, c = 3, d = 1$
⇔ ○○○○｜○○｜○○○｜○
$p = 3, q = 1, r = 4, s = 2$
⇔ ○○○｜○｜○○○○｜○○

【練習 56：重複組合せと不定方程式[*8]】

(1) 10 個のボールを 3 つの箱に配分する．

　1) すべての箱に少なくとも 1 個のボールを入れる方法は何通りあるか．

　2) 1 個も入っていない箱があってもよいとすると，配分の方法は何通りあるか．

(2) $p+q+r+s=15$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ の数を求めよ．

【解答】

(1) 1) はじめに 1 個ずつのボールを箱に入れ，残りの 7 つを 3 箱に分ければよい．これは「○ 7 つ，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{9!}{7!2!}=$ **36通り**

2) 「○ 10 個，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{12!}{10!2!}=$ **66通り**

(2) 「$(p,\ q,\ r,\ s)$ の組」と「○ 15 個と｜ 3 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{18!}{15!3!}=\frac{\cancel{18}^{3}\cdot 17\cdot 16}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=$$ **816通り**

◀ $p=2,\ q=2,\ r=3,\ s=8$
⇔ ○○｜○○｜○○○｜○○○○○○○○
$p=5,\ q=0,\ r=4,\ s=6$
⇔ ○○○○○｜｜○○○○｜○○○○○○

D. 発展　○と｜のモデルの応用

【発展 57：整数問題～その１～】

$p+q+r+s=15$ を満たす自然数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ の数を求めよ．

【解答】　$P+Q+R+S=11$ を満たす 0 以上の整数の組 $(P,\ Q,\ R,\ S)$ の個数に等しい．

その個数は「○ 11 個と｜ 3 つの順列」の場合の数と一致するので

$$\frac{14!}{11!3!}=\frac{14\cdot 13\cdot \cancel{12}^{2}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=$$ **364通り**

◀ $p=P+1,\ q=Q+1,\ r=R+1,\ s=S+1$ とすればよい．

◀ $P=1,\ Q=1,\ R=2,\ S=7$
⇔ ○｜○｜○○｜○○○○○○○
このとき，$(p,\ q,\ r,\ s)=(2,\ 2,\ 3,\ 8)$
$P=4,\ Q=0,\ R=3,\ S=4$
⇔ ○○○○｜｜○○○｜○○○○
このとき，$(p,\ q,\ r,\ s)=(5,\ 1,\ 4,\ 5)$

【発展 58：整数問題～その２～】

$p+q+r\leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r)$ の数を求めよ．

【解答】　$p+q+r\leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r)$ は，次のようにして，$p+q+r+s=10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ に一致する．

$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 0)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 0,\ 10)$

$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 1)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 1,\ 9)$

$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 2)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 2,\ 8)$

$(p.\ q,\ r)=(2,\ 2,\ 4)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(2,\ 2,\ 4,\ 2)$

よって，○ 10 個と｜ 3 個の順列に等しいので，$\dfrac{13!}{10!3!}=$ **286通り**

◀ これに気づかなければ，次のように地道に解くことになる．
$p+q+r=10$ を満たす組の個数は，○ 10 個と｜ 2 個の順列に等しいので，$\dfrac{12!}{10!2!}$ 通り，
$p+q+r=9$ を満たす組の個数は・・・と順に考えれば

$$\frac{12!}{10!2!}+\frac{11!}{9!2!}+\frac{10!}{8!2!}+\cdots+\frac{3!}{1!2!}+\frac{2!}{0!2!}=$$ **286通り**

[*8] 一般に，整数係数の多項式を 0 とおいた（連立）方程式のうち，整数解のみを求めることを不定方程式を解くという．

B 確率

1B.1 確率の基礎

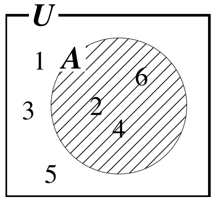
1. 確率とは何か

中学で学んだように,「さいころを 1 個振って偶数の目が出る確率」は $\dfrac{1}{2}$ であった．このことを詳しく考えてみよう.

A. 確率 ー 1 回あたり何回起こるのか

「さいころを 1 個振った」結果, ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ のいずれかが起こる.
これを集合のように書き出し，U で表すと

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$,　$n(U) = 6$



となる．このうち,「偶数の目が出る」場合を A で表わすと

$A = \{2,\ 4,\ 6\}$,　$n(A) = 3$

となる．**大数**(たいすう)**の法則** (law of large numbers) *[9]によって

「6 回のうち平均 3 回が，A のどれかになる」

$\iff$「1 回あたり $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ 回が，A のどれかになる」

と考えることができ，この $\dfrac{1}{2}$ が確率を表わしている.

【例題 59】 上の例において,「出た目が 3 の倍数である」場合を B とする.

- 上のように，B を集合で表わすと，$B =$ $\boxed{\text{ア}}$ となり，$n(B) =$ $\boxed{\text{イ}}$ である.
- 大数の法則によって，6 回のうち平均 $\boxed{\text{ウ}}$ 回，B が起こる.
  言いかえると，1 回あたり $\boxed{\text{エ}}$ 回，B は起こる．この $\boxed{\text{エ}}$ が，B の確率である.

【解答】 ア : **{3, 6}**，イ : **2**，ウ : **2**，エ : $\dfrac{2}{6} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

*[9] 起こり得る可能性が等しい N 通りの内の、x 通りの起こることを X とすると「N 回のうち平均 x 回が、X のどれかになる」ことが大数の法則である。これはチェビシェフの不等式を利用して証明されるが、高校数学の範囲を超えるので、ここでは省略する。

B. 試行・事象・同様に確からしい

「さいころを 1 個振る」のように，同じ条件で繰り返すことができる操作などを**試行** (trial) といい，試行して起こる事柄を**事象** (event) という．前ページの例では，「⚀が出る」「偶数の目が出る」などが事象になる．また，すべての事象をまとめて**全事象** (whole event) という．前の例では，U が全事象である[*10]．

前ページの例ではさいころにいかさまがないので，全事象 U はすべて等しい可能性で起こる．このことを，U は**同様に確からしい** (equally likely) という．

【例題 60】 「コイン 1 枚を投げる」試行 X において，表が出る可能性と裏が出る可能性は等しいとする．次の $\boxed{}$ に適する数字・言葉を入れなさい．

- 試行 X の全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，どの事象も同様に $\boxed{\text{イ}}$．
- $\boxed{\text{ウ}}$ の法則から，表が出る事象は，平均して $\boxed{\text{ア}}$ 回の X につき $\boxed{\text{エ}}$ 回起こる．つまり，1 回あたり $\boxed{\text{オ}}$ 回起こる．

【解答】 ア : **2**，イ : 確からしい，ウ : 大数，エ : **1**，オ : $\dfrac{1}{2}$

C. 確率の定義

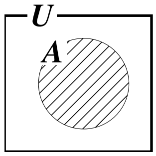
「事象 A の**確率** (probability) 」はしばしば $P(A)$ で表わされ[*11]，次で定義される．

集合と確率

全事象 U が同様に確からしいとき

$$（事象 A の確率）= \frac{事象 A の場合の数}{全事象 U の場合の数} \quad \left(記号で表わすと，P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}\right)$$

と定義する．$0 \leqq P(A) \leqq 1$ であり，大数の法則を認めると，事象 A の確率は「試行 1 回あたり A は何回起こるか」の値を表す．



D. 試行を無作為に行う

選び方にいっさい意図を加えずランダムに選ぶことを「**無作為に** (randamly, at randam) 選ぶ」ともいう．無作為に選んで起こる結果はすべて同じ可能性で起こり，同様に確からしいと考えてよい．

【例題 61】 「7 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ から無作為に 1 枚選ぶ」試行を X とする．

- 試行 X の全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「奇数を選ぶ」事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{イ}}$ 通りあるから，$\boxed{\text{ウ}}$ の確率で起こる．
- 「3 の倍数を選ぶ」事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{エ}}$ 通りあるから，$\boxed{\text{オ}}$ の確率で起こる．

【解答】 ア : **7**，イ : **4**，ウ : $\dfrac{4}{7}$，エ : **2**，オ : $\dfrac{2}{7}$

[*10] ここで，「全事象」と「全事象の集合」がどちらも U で書かれている．このように，事象と，それを表わす集合には同じ文字を用い，特に区別しない．

[*11] P は，"probability"の頭文字を表わす．

高校で学ぶ確率の問題において，断りがない限りは以下のことが仮定されている．

- さいころにいかさまやいびつはなく，どの目も出る可能性は等しい．
- ものを並べる，選ぶ，くじを引くなどは，無作為に行っているとする．
- コインの表と裏の出る確率は等しく，「コインが立つ」などの可能性は考えない．
- 「大数の法則」は正しいと考える．

E. 「場合の数」と確率

確率の計算のために，順列 ${}_n\mathrm{P}_r$，階乗 $n!$，組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ などを用いることがある．

約分を上手に使おう．たとえば，全事象が $5!$ 通り，事象 A が $4!$ 通りならば

（うまいやり方）

A の確率は $\dfrac{4!}{5!} = \dfrac{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \dfrac{1}{5}$

（計算が大変な例）$5! = 120$，$4! = 24$

なので，確率は $\dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$

【練習 62：「場合の数」と確率〜その１〜】

(1) 「無作為に 6 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ を横一列に並べる」試行を X とする．

- X の全事象は「$\boxed{ア}$ の階乗」通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「$\boxed{6}$ が右端になる」事象は「$\boxed{イ}$ の階乗」通りあるから，確率は $\boxed{ウ}$ になる．
- 「$\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ が隣り合う」事象は「$\boxed{エ}!\times 2!$」通りあるから，確率は $\boxed{オ}$ になる．

(2) 試行 X：「出席番号 1 番から 13 番までの 13 人から 3 人を選ぶ」について

- 試行 X の全事象は ${}_{\boxed{カ}}\mathrm{C}_{\boxed{キ}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「1 番が選ばれる」事象は ${}_{\boxed{ク}}\mathrm{C}_{\boxed{ケ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{コ}$ である．
- 「2 が選ばれない」事象は ${}_{\boxed{サ}}\mathrm{C}_{\boxed{シ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{ス}$ である．

【解答】

(1)
- 全事象は $_{(ア)}\underline{\mathbf{6}}$ の階乗．
- $\boxed{6}$ 以外を 1 列に並べ $_{(イ)}\underline{\mathbf{5}}!$ 通り，$\dfrac{5!}{6!} = \dfrac{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{6\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}}_{(ウ)}$
- $\boxed{1,2\text{ の組}}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ の順列で $_{(エ)}\underline{\mathbf{5}}!$ 通り，1,2 の並べ方は 2! 通りあるので $\dfrac{5!\times 2!}{6!} = \dfrac{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times \cancel{2}}{\cancel{6}^{3}\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}_{(オ)}$

(2)
- 全事象は $_{(カ)}\underline{\mathbf{13}}\,\mathrm{C}\,\underline{\mathbf{3}}_{(キ)} = \dfrac{13\cdot \cancel{12}^{2}\cdot 11}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}} = 13\cdot 22$
- 1 番以外の 12 人から 2 人を選ぶことになり

◀1 番の他に，あと 2 人選ぶ

$_{(ク)}\underline{\mathbf{12}}\,\mathrm{C}\,\underline{\mathbf{2}}_{(ケ)} = \dfrac{\cancel{12}^{6}\cdot 11}{\cancel{2}} = 66$ 通りあり，$\dfrac{\cancel{66}^{3}}{13\cdot \cancel{22}} = \underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{13}}}_{(コ)}$

- 2 番以外の 12 人から 3 人を選べばよいので

$_{(サ)}\underline{\mathbf{12}}\,\mathrm{C}\,\underline{\mathbf{3}}_{(シ)} = \dfrac{\cancel{12}^{2}\cdot 11\cdot 10}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}} = 22\cdot 10$ 通りあり，$\dfrac{\cancel{22}\cdot 10}{13\cdot \cancel{22}} = \underline{\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{13}}}_{(ス)}$

上のように，${}_{13}\mathrm{C}_3 = 13\cdot 22$ のようにしておくと，約分などが簡単にできる．

【練習 63：「場合の数」と確率～その２～】

両親と子供 4 人が円形のテーブルに座る.

(1) 両親が向かい合う確率を求めよ.　　(2) 両親が隣り合う確率を求めよ.

【解答】　全事象は，6 人の円順列なので 5! 通りである.

(1) 父親を固定すると，母親の場所は決まり，子供の並び方は 4! 通りある.
よって $\dfrac{4!}{5!} = \dfrac{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{5\cdot\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

(2) 父親を固定すると，母親の場所は両隣の 2 通り，子供の並び方は 4! 通りある．よって $\dfrac{2\times 4!}{5!} = \dfrac{2\times\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{5\cdot\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

2. 同様に確からしい

全事象として含まれる事象一つ一つを，**根元事象** (fundamental event) と言う．根元事象はすべて，同様に確からしいように選ばれないといけない.

A. 「同様に確からしい」全事象

同じ大きさ・形のコイン 2 枚を振ったときの全事象は，次の 4 通りである.

表 ─ 表　←「2枚とも表」
表 ─ 裏　←「表1枚，裏1枚」
裏 ─ 表　←「表1枚，裏1枚」
裏 ─ 裏　←「2枚とも裏」

$\}$ ←見た目は同じになる.

全事象を 3 通り（「表 2 枚」「表 1 枚，裏 1 枚」「裏 2 枚」）としてはいけない.「表 1 枚，裏 1 枚」は,「表 2 枚」や「裏 2 枚」と可能性が違う.

【例題 64】

1. 3 枚のコインを振る試行を考える.
   - 全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる.
   - 3 枚とも表になる事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{イ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である.
   - 表が 2 枚となる事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{エ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{オ}}$ である.
2. 試行 X :「同じ大きさの赤 4 個，青 3 個，白 2 個の玉を含む袋から，無作為に 1 個選ぶ」,
   事象 R :「赤い玉を選ぶ」, B :「青い玉を選ぶ」とする.
   - 試行 X の全事象は $\boxed{\text{カ}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる.
   - 事象 R は $\boxed{\text{カ}}$ 通りのうち $\boxed{\text{キ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ク}}$ である.
   - 事象 B は $\boxed{\text{カ}}$ 通りのうち $\boxed{\text{ケ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{コ}}$ である.

【解答】

1. ア : $2^3 = \mathbf{8}$, イ : **1**, ウ : $\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$, エ : **3**, オ : $\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$
2. カ : **9**, キ : **4**, ク : $\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$, ケ : **3**, コ : $\dfrac{3}{9} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

◀ 全事象を「赤を選ぶ」「青を選ぶ」「白を選ぶ」の 3 通りとしてはいけない．これでは，全事象が同様に確からしくない.

B. さいころ 2 個を振るときの「同様に確からしい」全事象

さいころ 2 個を振るときの全事象は，36 通りとして考えないといけない．つまり，⚃⚂ と ⚂⚃ は区別して考える．下に見るように，区別しないと全事象が同様に確からしくならない．

⚀ から ⚅ まであるさいころ 2 個を振るとき，⚂，⚃ が出る確率

・1 回目と 2 回目を区別した場合

1回目＼2回目	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
⚁	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
⚂	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
⚃	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
⚄	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
⚅	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全事象は $6^2 = 36$ 通り．⚂，⚃ が一つずつになるのは 2 通りだから，確率は $\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

・1 回目と 2 回目を区別しない場合

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1, 1					
⚁	1, 2	2, 2				
⚂	1, 3	2, 3	3, 3			
⚃	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
⚄	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
⚅	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

根元事象が同様に確からしくない．

（例えば，⚂⚃ の可能性と ⚀⚀ の可能性は異なる）

【例題 65】

1. 2 個の大きさの違うさいころを振って，和が 5 になる確率を求めよ．
2. 2 個の同じさいころを振って，積が 12 になる確率を求めよ．

【解答】

1. 目の和は次のようになる．

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

よって，$\dfrac{4}{36} = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

2. 目の積は次のようになる．

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	4	6	8	10	12
⚂	3	6	9	12	15	18
⚃	4	8	12	16	20	24
⚄	5	10	15	20	25	30
⚅	6	12	18	24	30	36

よって，$\dfrac{4}{36} = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

さいころ 2 個の確率については，必ず，上のような 6×6 の表を書いて考えよう．

【練習 66：3 個のさいころを振る】

同じ大きさの 3 個のさいころを振るとき，次の確率に答えよ．

(1) 3 個の目の和が 18 になる確率　　(2) 3 個とも同じ目になる確率

【解答】 全事象は $6^3 = 216$ 通りある．

1. 和が 18 になるのは，(6 , 6 , 6) の 1 通りであるから，$\boldsymbol{\dfrac{1}{216}}$
2. (1, 1, 1) から (6 , 6 , 6) までの 6 通りがあるので，$\dfrac{6}{216} = \boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$

C. 順列・組合せと「同様に確からしい」全事象

(I) 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から **1 枚選び元に戻す**．この操作を **2 回繰り返した**とき，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ を選ぶ 1 枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

1 枚目＼2 枚目	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
$\boxed{2}$	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全事象は $6^2 = 36$ 通り．$\boxed{3}$, $\boxed{4}$が 1 枚ずつになるのは 2 通りだから，確率は $\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$	1, 1					
$\boxed{2}$	1, 2	2, 2				
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3	3, 3			
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

根元事象が同様に確からしく**ない**．

（例えば，$\boxed{1}\boxed{2}$の可能性と$\boxed{1}\boxed{1}$の可能性は異なる）

(II) 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から **2 枚を選ぶ**とき，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ を選ぶ 1 枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

1 枚目＼2 枚目	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$		2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
$\boxed{2}$	1, 2		3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3		4, 3	5, 3	6, 3
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4		5, 4	6, 4
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5		6, 5
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	

全事象は $6 \times 5 = 30$ 通り（$= {}_6P_2$）

$\boxed{3}$, $\boxed{4}$が 1 枚ずつになるのは 2 通り（$= {}_2P_2$）

だから，確率は $\dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$						
$\boxed{2}$	1, 2					
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3				
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4			
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5		
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	

全事象は ${}_6C_2 = 15$ 通り

$\boxed{3}$, $\boxed{4}$が 1 枚ずつになるのは 1 通り（$= {}_2C_2$）

だから，確率は $\dfrac{1}{15}$

【例題 67】 箱の中に 9 個のボールがあり，ボールにはそれぞれ，1 から 9 まで書かれている．

1. ボール 1 個を選んで番号を記録し，ボールを元に戻すとき，次の確率を求めよ．
   (a) 3 と 4 を 1 回ずつ記録した　　(b) 2 回とも 3 を記録した
2. ボールを 2 個選ぶとき，次の確率を求めよ．
   (a) 3 と 4 を 1 個ずつ選んだ　　(b) 2 個とも 3 を選んだ

【解答】

1. 全事象は $9 \times 9 = 81$ 通りある．
   (a) 3, 4 の場合と，4, 3 の場合があるので，$\boldsymbol{\dfrac{2}{81}}$
   (b) 3, 3 の 1 通りしかないので $\boldsymbol{\dfrac{1}{81}}$
2. (a) （順列で全事象を考えた場合）全事象は $9 \times 8 = 72$ 通りある．
   3, 4 の場合と，4, 3 の場合があるので，$\dfrac{2}{72} = \boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$
   （組合せで全事象を考えた場合）全事象は ${}_9C_2 = 36$ 通りある．3, 4 の 1 通りであるので，$\boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$

◀ 1 個目に選ぶボールは 9 通り，2 個目に選ぶボールは 8 通りある，のように考えるとよい．

(b) 3, 3 になることはないので，確率は **0**

全事象についての注意

全事象をつくる根元事象は，一つの決め方に定まるとは限らないが，次に注意する必要がある．
- 根元事象がすべて同様に確からしくなるよう，考えなければならない．
- 根元事象を「順列」で考えたならば以後も「順列」で考え，根元事象を「組合せ」で考えたならば以後も「組合せ」で考えないといけない．

【練習 68：同様に確からしい】

a, a, a, b, b, c, c の 7 つの文字を一列に並べる．以下の確率を求めなさい．

(1) b が両端になる確率　　(2) 2 つの c が隣り合う確率

【解答】　すべての並び方は $\dfrac{7!}{3!2!2!} = \dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3\cdot2}}{\cancel{3\cdot2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 210$ 通り．

(1) 両端以外に a, a, a, c, c を並べる $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$ 通りなので $\dfrac{10}{210} = \mathbf{\dfrac{1}{21}}$.

(2) a, a, a, b, b, cc の 6 つを並べて $\dfrac{6!}{3!2!} = 60$ 通りなので $\dfrac{60}{210} = \mathbf{\dfrac{2}{7}}$.

（別解）$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ の異なる 7 つを並べて 7! 通り

(1) 両端は b_1, b_2 の並び替えで 2! 通り，他は 5! 通りなので $\dfrac{5!2!}{7!} = \mathbf{\dfrac{1}{21}}$.

(2) c を 1 つにまとめて 6! 通り，c の順序で 2! 通りなので $\dfrac{6!2!}{7!} = \mathbf{\dfrac{2}{7}}$.

【発展 69：確率の発展問題〜その１〜】

赤，青，黄のカードが 5 枚ずつあり，それぞれ，1 から 5 の数字が 1 つずつ書かれている．この 15 枚の中から 3 枚を任意に選ぶとき，以下の確率を求めよ．

① 3 枚とも同じ色になる　　② 3 枚の色がすべて異なる

③ 3 枚の数字がすべて異なる　　④ 3 枚の数字も色もすべて異なる

【解答】　すべての選び方は ${}_{15}C_3 = 5\cdot7\cdot13$ 通りある．

① どの色を選ぶかで 3 通り，どの数字を選ぶかで ${}_5C_3 = 10$ 通りあるので，
$\dfrac{3\cdot\cancel{10}^{2}}{\cancel{5}\cdot7\cdot13} = \mathbf{\dfrac{6}{91}}$.

② 色の選び方は 1 通り，数字はそれぞれ 5 通りずつあるので，
$\dfrac{\cancel{5}\cdot5\cdot5}{\cancel{5}\cdot7\cdot13} = \mathbf{\dfrac{25}{91}}$.

③ 数字の選び方は ${}_5C_3 = 10$ 通り，それぞれの数字がどの色であったかで 3 通りずつあるので，$\dfrac{\cancel{10}^{2}\cdot3^3}{\cancel{5}\cdot7\cdot13} = \mathbf{\dfrac{54}{91}}$.

④ 色の選び方は 1 通り，赤の数字が 5 通り，青の数字が 4 通り，黄の数字が 3 通りあるので，$\dfrac{\cancel{5}\cdot4\cdot3}{\cancel{5}\cdot7\cdot13} = \mathbf{\dfrac{12}{91}}$.

◀（別解）カードの順列で考えると全事象は $15\cdot14\cdot13$ 通りあり

① $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot3}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^{7}\cdot13} = \mathbf{\dfrac{6}{91}}$
(2 枚目は 1 枚目と同じ色
以下，3 枚目の条件は省略)

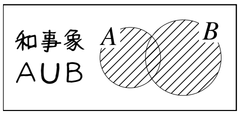
② $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{10}^{5}\cdot5}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^{7}\cdot13} = \mathbf{\dfrac{25}{91}}$
(2 枚目は 1 枚目と違う色)

③ $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{12}^{6}\cdot9}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^{7}\cdot13} = \mathbf{\dfrac{54}{91}}$
(2 枚目は 1 枚目と違う数)

④ $\dfrac{\cancel{15}\cdot\cancel{8}^{4}\cdot3}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}^{7}\cdot13} = \mathbf{\dfrac{12}{91}}$
(2 枚目は 1 枚目と数も色も違う)

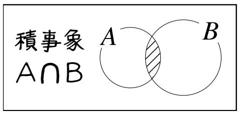
1. 和事象・積事象・排反

A. 和事象とは



事象 A, B があるとき，「A または B が起きる」という事象を**和事象** (sum event) といい，$A \cup B$（∪：または）で表す．∪ は集合における「または」と同じ記号である．

B. 積事象とは



また，「A も B も起こる」という事象を**積事象** (product event) といい[*12]，$A \cap B$（∩：かつ）で表す．∩ は集合における「かつ」と同じ記号である．

【例題 70】 ジョーカーを除いた 52 枚のトランプから 1 枚を選ぶ．選んだカードが赤（ハートかダイヤ）である事象を R，絵札である事象を P，ハートの 1 桁である事象を H_1 とする．また，すべての場合の集合を U とする．つまり，$n(U) = 52$ である．

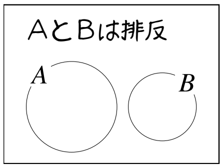
1. A :「R と P の積事象」，B :「R と H_1 の和事象」，C :「P と H_1 の和事象」に一致するものを
   ① $R \cap P$　② $R \cup P$　③ $R \cap H_1$　④ $R \cup H_1$　⑤ $P \cap H_1$　⑥ $P \cup H_1$　から選びなさい．
2. 場合の数 $n(R)$, $n(P)$, $n(H_1)$ をそれぞれ答えなさい．
3. 確率 $P(R)$, $P(P)$, $P(H_1)$ をそれぞれ答えなさい．

【解答】

1. 積事象は ∩ だから A は①，和事象は ∪ だから B は④，C は⑥
2. ハート・ダイヤは合計 26 枚あるので $\boldsymbol{n(R) = 26}$,
   絵札は $3 \times 4 = 12$ 枚あるので $\boldsymbol{n(P) = 12}$,
   ハートの 1 桁は 9 枚あるので $\boldsymbol{n(H_1) = 9}$.
3. $n(U) = 52$ より，$P(R) = \dfrac{26}{52} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$P(P) = \dfrac{12}{52} = \boldsymbol{\dfrac{3}{13}}$，$P(H_1) = \boldsymbol{\dfrac{9}{52}}$.

◀ たとえば，$P(R) = \dfrac{n(R)}{n(U)}$ である．

C. 排反とは



2 つの事象 A, B が同時に起こらないとき，A, B は（互いに）**排反**（はいはん） (exclusive) であるという．A, B が排反であることは，積事象 $A \cap B$ が空集合であることと一致し，ベン図は右図のようになる．その結果，和事象 $A \cup B$ は次で計算できる．

確率の加法定理

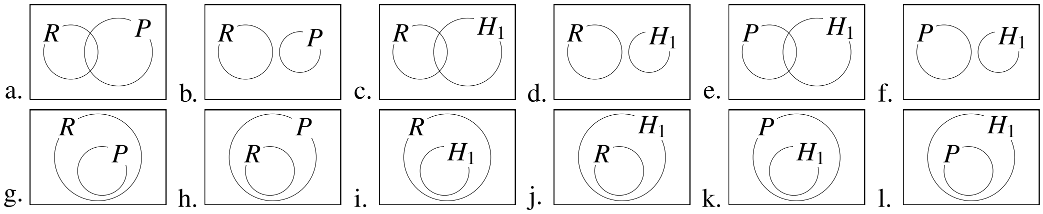
2 つの事象 A, B が排反であれば，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ なので，次の**確率の加法定理**が成り立つ．

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

[*12] なぜ「積事象」と呼ぶのかは，次節で学ぶ．

【例題 71】　前ページの【例題 70】の試行について考える．

1. 以下の中から，正しいベン図を **3 つ**答えなさい．



2. R, P, H_1 の中から，互いに排反な 2 つの事象を答えなさい．
3. 確率 $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ をそれぞれ答えなさい．

【解答】

1. R, P については a. が正しく，$R \supset H_1$ から i. が正しく，
$P \cap H_1 = \emptyset$ から f. が正しい．よって，答えは **a, f, i.**
2. 共通部分がない，**P と H_1 が排反**である．
3. A は「絵札のハート・ダイヤ」の 6 枚なので，$P(A) = \dfrac{6}{52} = \boldsymbol{\dfrac{3}{26}}$,
ベン図 i. から $B = R$ と分かるので，$P(B) = P(R) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$,
$P(C) = P(P) + P(H_1) = \dfrac{3}{13} + \dfrac{9}{52} = \boldsymbol{\dfrac{21}{52}}$.

◀ 一般に，$R \supset N$ ならば，
$R \cup N = R$, $R \cap N = N$ である．

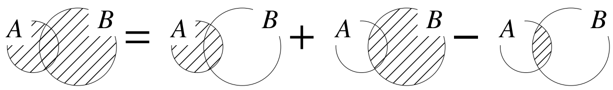
D.　排反でない和事象の確率

排反でない和事象の確率

A と B が排反でないとき，和事象 $A \cup B$ の確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

で計算できる．



【例題 72】　A，B，C，⋯，I の 9 人から，3 人を選ぶ．

1. A が選ばれる確率を求めよ．
2. B が選ばれる確率を求めよ．
3. A も B も選ばれる確率を求めよ．
4. A または B が選ばれる確率を求めよ．

【解答】　全事象は，${}_9C_3 = \dfrac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 12 \cdot 7$ 通りある．

1. A 以外の 8 人から 2 人選ぶことができ，$\dfrac{{}_8C_2}{12 \cdot 7} = \dfrac{\cancel{4} \cdot \cancel{7}}{\cancel{12}^3 \cdot \cancel{7}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$
2. 1. と同様にして，$\dfrac{{}_8C_2}{12 \cdot 7} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$.
3. A，B 以外の 7 人から 1 人選ぶことができ，$\dfrac{{}_{\cancel{7}}C_1}{12 \cdot 7} = \dfrac{\cancel{7}}{12 \cdot \cancel{7}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$
4. 1.，2.，3. から，$\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{4+4-1}{12} = \boldsymbol{\dfrac{7}{12}}$

2. 余事象

A. 余事象とは何か

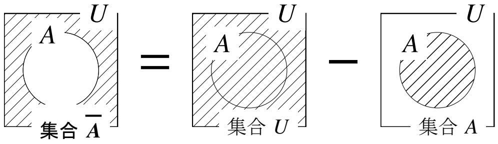
事象 A に対して，A が起こらない事象を A の**余事象** (complementary event) といい，$\overline{A}$ で表す.

余事象の確率

A の余事象 $\overline{A}$ について，$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$ から

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

が成り立つと分かる.



【例題 73】 2 個のさいころを振るとき

- 2 個の出た目が同じになる確率は $\boxed{ア}$ である.
- 2 個の出た目が異なる目になる事象は，同じになる事象の $\boxed{イ}$ なので，出た目が異なる確率は $1 - \boxed{ア} = \boxed{ウ}$ である.

【解答】 ア : 全事象は 6^2 通り，同じ目が出るのは 6 通りなので，$\dfrac{6}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

イ : 余事象， ウ : $1 - \dfrac{1}{6} = \mathbf{\dfrac{5}{6}}$

B. 「少なくとも 1 つ」の確率

たとえば，10 本の中に 3 本の当りが入っているくじがある．ここから 3 本を引いて，「少なくとも 1 本当たる確率」を考えよう．この試行では，次のいずれかが起こる.

- 3 本とも当たる
- 2 本だけ当たる
- 1 本だけ当たる
- 1 本も当たらない

（3 本とも当たる・2 本だけ当たる・1 本だけ当たる）これらすべてが『少なくとも 1 本当たる確率』

「少なくとも 1 本当たる」とは，「1 本も当たらない」の余事象と分かる.

「1 本も当たらない」確率は $\dfrac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{7}{12}$ であるから，求める確率は $1 - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5}{12}$ と分かる[*13].

【例題 74】 3 枚のコインを振るとき，「少なくとも 1 枚表になる」事象は，「$\boxed{ア}$」の余事象になる.

「$\boxed{ア}$」の確率は $\boxed{イ}$ であるから，「少なくとも 1 枚表になる」確率は $\boxed{ウ}$ である.

【解答】 ア :全てが裏になる（表が 0 枚である）

イ : 全事象は $2^3 = 8$ 通りなので，$\mathbf{\dfrac{1}{8}}$， ウ : $1 - \dfrac{1}{8} = \mathbf{\dfrac{7}{8}}$

[*13] 別解として，「3 本とも当たる」「2 本だけ当たる」「1 本だけ当たる」確率をすべて足し合わせても求められるが，答えを出すまでの計算がとても多くなる.

【練習 75：余事象】

(1) 5 個の赤，4 個の白が入った袋から 3 個を選ぶとき，少なくとも 1 個赤が含まれる確率を求めよ．

(2) 5 人の子供がいる家族に，男の子も女の子もいる確率はいくらか．ただし，男の子も女の子も同じ確率で生まれるものとする*14．

【解答】

(1) 「すべて白になる」の余事象なので

$$1-\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=1-\frac{4}{\frac{\cancel{9}^3\cdot\cancel{8}^4\cdot 7}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}}=1-\frac{\cancel{4}}{3\cdot\cancel{4}\cdot 7}=1-\frac{1}{21}=\boldsymbol{\frac{20}{21}}$$

(2) 全事象は $2^5=32$ 通り，すべて男の子である確率は $\frac{1}{32}$，すべて女の子である確率は $\frac{1}{32}$，余事象を考えて，$1-2\times\frac{1}{32}=\boldsymbol{\frac{15}{16}}$.

【発展 76：余事象・加法定理】

1 枚の 100 円玉が 1 枚，4 枚の 10 円玉，5 枚の 1 円玉，合計 10 枚の中から無作為に 3 枚を選ぶ．
「100 円玉が 1 枚含まれる」事象を A，「10 円玉が 2 枚以上含まれる」事象を B とする．

1. 事象 C「合計金額が 100 円以下」，事象 D「合計金額が 20 円以上」に一致するものを
   ① $\overline{A}$　② $\overline{B}$　③ $A\cap B$　④ $A\cup B$　からそれぞれ選びなさい．
2. 確率 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$，$P(D)$ を求めなさい．

【解答】

1. 事象 C は①，事象 D は④
2. 全事象は ${}_{10}C_3=120$ 通り．

$P(A)$　100 円玉 1 枚と，100 円玉以外の 9 枚から 2 枚を選んだ場合になるから $P(A)=\frac{{}_9C_2}{120}=\frac{\cancel{9}^3\cdot\cancel{4}}{\cancel{120}^{10}}=\boldsymbol{\frac{3}{10}}$

$P(B)$　「10 円玉が 2 枚」の確率は $\frac{{}_4C_2\cdot{}_6C_1}{120}=\frac{\cancel{6}\cdot\cancel{6}^3}{\cancel{120}\,\cancel{20}^{10}}=\frac{3}{10}$，「10 円玉が 3 枚」の確率は $\frac{{}_4C_3}{120}=\frac{1}{30}$ である．

10 円玉「2 枚」「3 枚」は排反なので $\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{10}{30}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

$P(C)$　$=P(\overline{A})=1-\frac{3}{10}=\boldsymbol{\frac{7}{10}}$

$P(D)$　$=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ であり，$A\cap B$ は「100 円玉 1 枚と 10 円玉 2 枚」の確率 $\frac{{}_1C_1\cdot{}_4C_2}{120}=\frac{1}{20}$ であるから

$$P(D)=\frac{3}{10}+\frac{1}{3}-\frac{1}{20}=\frac{18+20-3}{60}=\frac{35}{60}=\boldsymbol{\frac{7}{12}}$$

*14 数学の問題では，このように書いていなくても，同じ確率で生まれると仮定することが多い．しかし，実際にそうであるかどうかは，諸説ある．

C. 確率についての「ド・モルガンの法則」

『ド・モルガンの法則』(p.15)$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ は，確率においても用いられることがある．

ド・モルガンの法則（確率版）

どんな事象 A，B に関しても，次の**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) が成り立つ．

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right), \qquad P\left(\overline{A \cap B}\right) = P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$$

【例題 77】 ある試行において，$P(A) = 0.4$，$P(B) = 0.5$，$P(A \cap B) = 0.2$ のとき，次の値を求めよ．

1. $P\left(\overline{A \cap B}\right)$　　2. $P(A \cup B)$　　3. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

【解答】

1. $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = \mathbf{0.8}$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.2 = \mathbf{0.7}$
3. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = \mathbf{0.3}$

1B.3 確率の木と独立・従属

複数の試行を行う場合には，樹形図に似た「確率の木」が有効である．

1. 乗法定理と確率の木

A. 確率の乗法定理

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個入った袋から 1 個を玉を取り出し，コイン 1 枚を振る．

コイン1枚を振る　表は $\frac{1}{2}$，裏は $\frac{1}{2}$ $\Longrightarrow$ 赤4個，白3個から1個取り出す　赤は $\frac{4}{7}$，白は $\frac{3}{7}$

このとき「表が出て，白い玉を選ぶ確率」を考えると

表が出るのは，1回につき $\frac{1}{2}$ 回 $\Longrightarrow$ そのうち白が出るのは，1回につき $\frac{3}{7}$ 回

$\Longleftrightarrow$ $\frac{1}{2}$ 回につき $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$ 回

であるから，「表が出て，白い玉を選ぶ確率」は $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{14}$ となる．

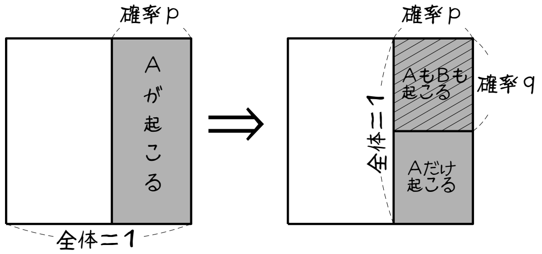
【例題 78】 上の例において，「裏が出て，赤い玉を選ぶ確率」を求めなさい．

【解答】 裏は $\dfrac{1}{2}$，赤い玉は $\dfrac{4}{7}$ の確率なので，$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{7} = \mathbf{\dfrac{2}{7}}$.

確率の乗法定理

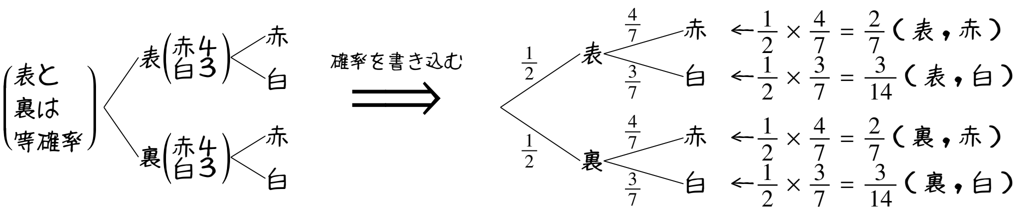
2 つの試行 X, Y を行い
- X の結果，事象 A が起こる確率を p
- （事象 A が起きた後に）
  Y の結果，事象 B が起こる確率を q

とするとき，事象 A, B がともに起こる確率は pq で与えられる．これを**確率の乗法定理**という．



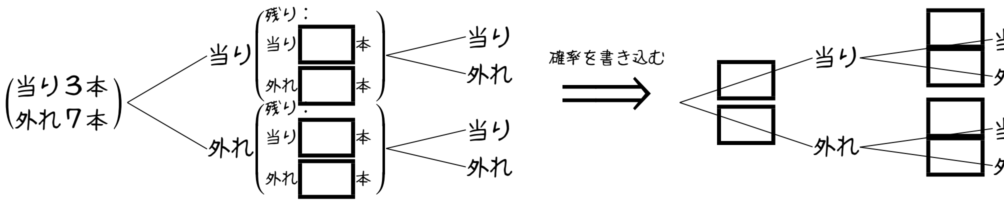
B. 確率の木とは

上で考えた試行は，次のようにまとめられる．



右上のような，樹形図に確率を書き込んだまとめ方を，**確率の木**（probability tree）という．

【例題 79】 当たりが 3 本，外れが 7 本入った箱から，2 回くじを引く．ただし，一度引いたくじは元に戻さない．以下の $\boxed{}$ に，適当な数値を答え，問いに答えよ．

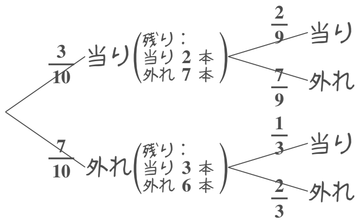


1. 2 回とも当たる確率を求めよ．
2. 2 回とも外れる確率を求めよ．

【解答】

確率の木は右のようになる．

1. $\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{10}^{5}}\times\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{9}^{3}}=\mathbf{\dfrac{1}{15}}$
2. $\dfrac{7}{\cancel{10}^{5}}\times\dfrac{\cancel{2}}{3}=\mathbf{\dfrac{7}{15}}$



◂ 2 回とも赤，白，青はそれぞれ排反なので，足すだけでよい．

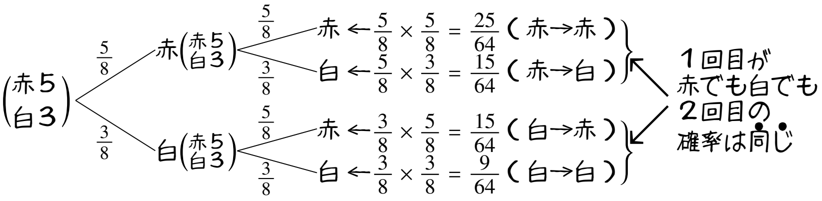
2. 独立試行・従属試行

A. 独立試行とは

試行 X の結果が試行 Y の結果に影響しないとき，X, Y は**独立** (independent) であるという．

たとえば、「赤が 5 個，白が 3 個」入った袋から，1 個を選んで元に戻す試行を，2 回繰り返したとき，右のような確率の木にまとめられ、1 回目の試行の結果が 2 回目に影響しない．

つまり，この例の 1 回目と 2 回目の試行は独立である。

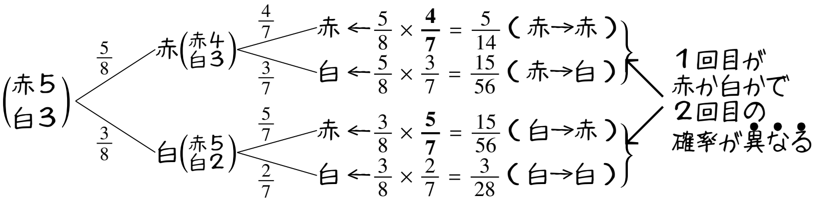


B. 従属試行と条件付き確率

試行 X の結果が試行 Y の結果に影響するとき，X, Y は**従属** (dependent) であるという．

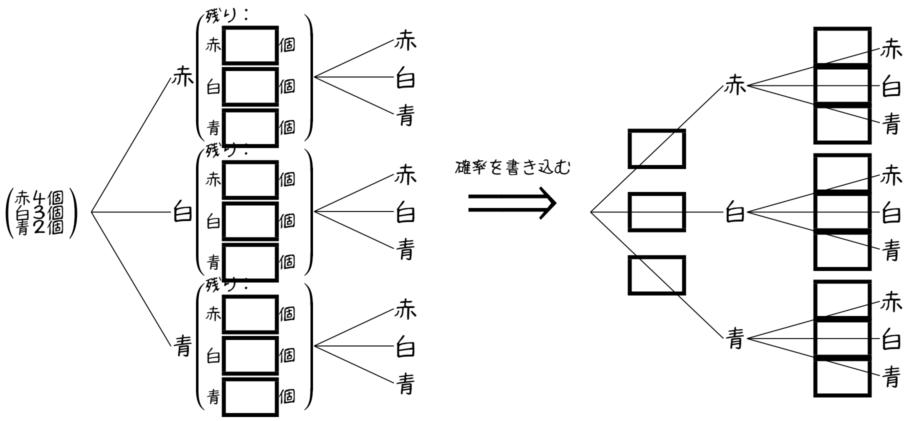
たとえば,「赤球が 5 個，白球が 3 個」入った袋から，1 個を選んで元に戻さない試行を，2 回繰り返したとき，右の確率の木のようにまとめられ，1 回目の試行の結果が 2 回目に影響する．

一例として，2 回目が赤である確率は、1 回目が赤の場合は $\frac{4}{7}$、白の場合は $\frac{5}{7}$、と異なっている。つまり，この例の 1 回目と 2 回目の試行は従属である。



【練習 80：確率の木と独立・従属】

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個，青い玉が 2 個入った袋がある．取り出した玉は元に戻さないで，2 回玉を取り出すことをまとめるとき，以下の $\boxed{}$ に，適当な数値を答え，問いに答えよ．



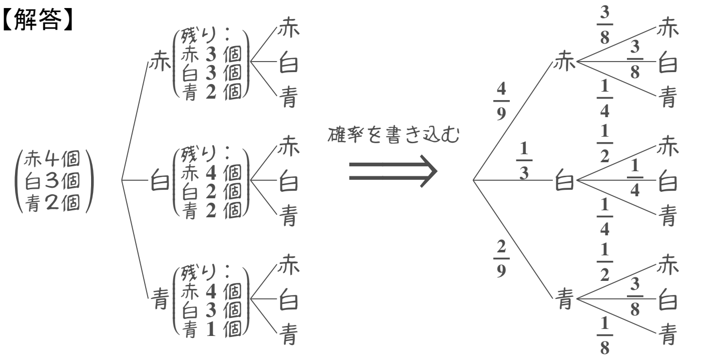
(1) 玉を取り出す 1 回目と 2 回目は，独立か，従属か.

(2) 2 回目が青である確率を「1 回目が白」と「1 回目が青」のそれぞれについて求めよ.

(3) 2 回とも赤である確率を求めよ.

(4) 2 回とも同じ色である確率を求めよ.

【解答】



(1) 1 回目の色によって 2 回目の確率が異なるので，**従属**である．

(2) 「白→青」で 2 回目が青である確率は $\mathbf{\frac{1}{4}}$，同様に「青→青」から $\mathbf{\frac{1}{8}}$。

(3) $\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}^{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{8}^{2}} = \mathbf{\frac{1}{6}}$

(4) 2 回とも白である確率は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

2 回とも青である確率は $\frac{\cancel{2}}{9} \times \frac{1}{\cancel{8}^{4}} = \frac{1}{36}$

(3) と合わせて $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{6+3+1}{36} = \mathbf{\frac{5}{18}}$

【練習 81：独立・従属】

(1) A 工場では部品 P，Q，R を使って品物を作る．各部品には色違いがあり，P は 2 個に 1 個が白，Q は 3 個に 1 個が白，R は 4 個に 1 個が白であり，他はすべて黒である．

(a) 真っ白な品物ができる確率を求めよ．

(b) 部品が 1 つだけ白い品物ができる確率を求めよ．

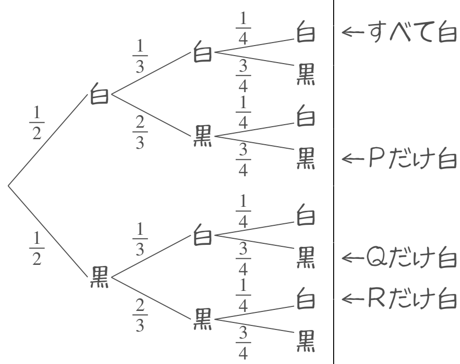
(2) B 工場では，100 個に 1 個不良品が作られてしまう．さらに，不良品を機械がチェックするとき，不良品は必ず見つけ出せるものの，100 回に 1 回，良品を不良品と誤って判断することがある．

(a) 機械が「良品」とチェックする確率を求めよ．

(b) 「良品」が「不良品」と判断されてしまう確率を求めよ．

【解答】

(1) 確率の木にまとめると，右のようになる．



(a) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{24}}$

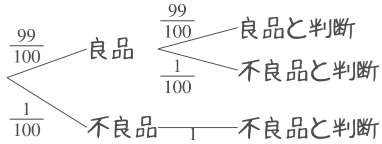
(b) P だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{24}$

Q だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{24}$

R だけ白は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{24}$

であるから，$\frac{6+3+2}{24} = \mathbf{\frac{11}{24}}$.

(2) 確率の木にまとめると，右のようになる．



(a) $\frac{99}{100} \times \frac{99}{100} = \mathbf{\frac{9801}{10000}}$

(b) $\frac{99}{100} \times \frac{1}{100} = \mathbf{\frac{99}{10000}}$

C. 「全事象による解き方」と「乗法定理による解き方」

たとえば,「赤 4 個,白 3 個を含む袋から 2 個取り出すとき,赤が 2 個になる確率」は,次の 2 通りの求め方がある.

(I) 全事象による解き方

- 全事象は「赤 4 個,白 3 個の合計 7 個から 2 個選ぶ」を考えて,${}_7C_2 = 21$ 通り
- 赤 2 個になる場合は「赤 4 個から取り出す 2 個を選ぶ」を考えて,${}_4C_2 = 6$ 通り

つまり,$\dfrac{6}{21} = \dfrac{2}{7}$ になる.

(II) 乗法定理による解き方

- 1 個ずつ 2 回,順に取り出すと考える.
- 1 回目が赤である確率は $\dfrac{4}{7}$
- 2 回目も赤である確率は,「赤 3 個,白 3 個」が残りなので $\dfrac{1}{2}$

つまり,$\dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{7}$ になる.

自分のやりやすいやり方で解けばよいが,どちらの解き方も理解しているのが最も良い.

【例題 82】 10 本のうち 3 本が当たりであるくじ A と,20 本のうち 3 本が当たりであるくじ B がある.

1. すべてのくじを区別すれば,全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通り,どちらも当たる事象は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある.よって,どちらも当たる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ と求められる.
2. 一方,くじ A が当たる確率は $\boxed{\text{エ}}$,くじ B が当たる確率は $\boxed{\text{オ}}$ であるから,どちらも当たる確率は $\boxed{\text{カ}}$ という式から,やはり $\boxed{\text{ウ}}$ と求められる.

【解答】

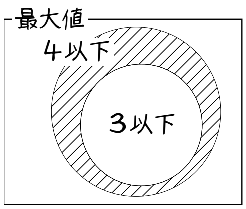
1. 全事象は $10 \times 20 = \underline{\mathbf{200}}_{(\text{ア})}$ 通り,両方当たる引き方は $3 \times 3 = \underline{\mathbf{9}}_{(\text{イ})}$ 通りあるから,$\dfrac{3 \times 3}{10 \times 20} = \underline{\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{200}}}_{(\text{ウ})}$
2. 1 つめの当たる確率は $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}}_{(\text{エ})}$,2 つめの当たる確率は $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}}_{(\text{オ})}$,2 つの事象は独立であるから $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} \times \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}}_{(\text{カ})} = \dfrac{9}{200}$

D. 発展 さいころの出た目の最大値

例として,さいころ 3 つを振って,出た目の最大値が 4 である確率を考えよう.このとき

- 「3 つのさいころの最大値が 4 である確率」を求めることは難しい.
- 「3 つのさいころの最大値が 4 以下である確率」は簡単に計算できる.

  なぜなら,3 つとも 1,2,3,4 のどれかであればよいので,$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$ である.



「最大値が 4」の確率は,「最大値が 4 以下であるが,3 以下ではない」確率になる.結局,「最大値が 4」の確率は $\left(\dfrac{4}{6}\right)^3 - \left(\dfrac{3}{6}\right)^3 = \dfrac{4^3 - 3^3}{6^3} = \dfrac{64-27}{216} = \dfrac{37}{216}$ と分かる.

【発展 83：さいころの出た目の最大・最小】

3 個のさいころを投げる試行について，以下の問いに答えよ．

① 「出た目の最大値が 3 になる」確率を求めよ．

② 「出た目の最小値が 3 になる」確率を求めよ．

【解答】

① 「最大値が 3 以下」の確率 $\left(\frac{3}{6}\right)^3$ から「最大値が 2 以下」の確率 $\left(\frac{2}{6}\right)^3$ を引けばよいので $\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{3^3-2^3}{6^3}=\frac{27-8}{216}=\mathbf{\frac{19}{216}}$.

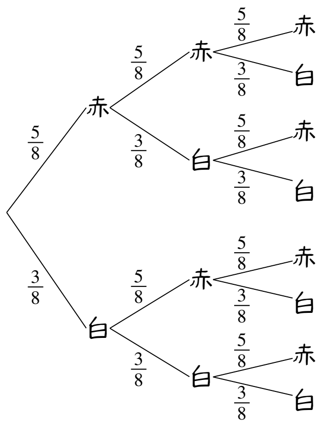
② 「最小値が 3 以上」の確率 $\left(\frac{4}{6}\right)^3$ から「最小値が 4 以上」の確率 $\left(\frac{3}{6}\right)^3$ を引けばよいので $\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{4^3-3^3}{6^3}=\frac{64-27}{216}=\mathbf{\frac{37}{216}}$.

3. 反復試行 ～ 独立な試行の繰り返し

A. 反復試行とは

互いに独立な同じ試行を複数回行うことを，**反復試行**（はんぷく）(repeated trials) という．

赤い玉が 5 個，白い玉が 3 個入った袋がある．取り出した玉は元に戻し，3 回玉を取り出すことは，右のようにまとめられる．



←確率は $\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\left(\frac{5}{8}\right)^3$

←確率は $\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}=\left(\frac{5}{8}\right)^2\times\left(\frac{3}{8}\right)$

←確率は $\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=\left(\frac{5}{8}\right)^2\times\left(\frac{3}{8}\right)$

⋮

B. 反復試行の確率

例として，「さいころを 5 回振る」試行を考え，「5 回のうち 2 回だけ 1 が出る」確率を求めよう．

1 が出た場合を○，出なかった場合を×で表すと，たとえば次のようになればよい．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
○	×	○	×	×

←○は $\frac{1}{6}$ の確率で，×は $\frac{5}{6}$ の確率で起こる．

この確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ で計算できる．また，次のような場合でもよい．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
×	○	○	×	×	←確率は $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$
×	×	○	○	×	←確率は $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$
		⋮			↑↑↑ すべて同じ確率

5ヶ所から ○ を2つ選べばよい
そのような選び方は ${}_5C_2$ 通り

こうして，$\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ が ${}_5C_2$ 通りあると分かるので，求める確率は次のようになる．

$${}_5C_2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\cancel{10}^{5}\times\frac{1}{36}\times\frac{125}{\cancel{216}^{108}}=\frac{625}{3888}$$

【例題 84】 さいころを 5 回振って「5 回のうちちょうど 4 回だけ 1 が出る」確率を求めなさい.

【解答】 上と同じように○×で表わすと，次のようになる.

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
×	○	○	○	○	←確率は$\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)^1$
○	×	○	○	○	←確率は$\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)^1$
		⋮			

5ヶ所から ○ を4つ選べばよい
そのような選び方は ${}_5\mathrm{C}_4$ 通り

よって，$ {}_5\mathrm{C}_4\times\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)=5\times\frac{1}{1296}\times\frac{5}{6}=\mathbf{\frac{25}{7776}}$

反復試行

試行 X を n 回繰り返し，確率 p の事象 A がちょうど k 回成り立つ確率は

$${}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}$$

で求められる（A が起きない確率は $1-p$，A が起きない回数は $n-k$ であることに注意）.

【練習 85：反復試行】

(1) 当たる確率が $\frac{1}{10}$ のくじを 5 回引く．そのうちちょうど 3 回当たる確率を求めよ.

(2) さいころ 1 個を 6 回振って，5 以上がちょうど 3 回出る確率を求めよ.

(3) 赤 3 個，青 2 個の合計 5 個のボールが入った袋から，玉を 1 個取り出し，色を記録してから元に戻す．これを 5 回繰り返すとき，以下の確率を求めよ.

（a）赤がちょうど 3 回出る　（b）赤がちょうど 2 回出る　（c）白が 4 回以上出る

【解答】

(1) $ {}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(\frac{9}{10}\right)^2=\cancel{10}\times\frac{9^2}{\cancel{10^5}\,10^4}=\mathbf{\frac{81}{10000}}$

◀ 当たらない確率は $1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$ である

(2) 5 以上が出る確率は $\frac{1}{3}$，出ない確率は $\frac{2}{3}$ であるから

$ {}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}\times\frac{2^3}{3^6}=20\times\frac{8}{729}=\mathbf{\frac{160}{729}}$

◀ 3^6 は $9\times9\times9$ と考えて計算するとよい.

(3) 5 回とも，赤が出る確率は $\frac{3}{5}$，出ない確率は $\frac{2}{5}$ である.

（a）$ {}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}^2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\,\frac{3^3\cdot 2^2}{\cancel{5^5}\,5^4}=\frac{2\cdot 27\cdot 4}{625}=\mathbf{\frac{216}{625}}$

（b）$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}^2}{\cancel{2}}\,\frac{3^2\cdot 2^3}{\cancel{5^5}\,5^4}=\frac{2\cdot 9\cdot 8}{625}=\mathbf{\frac{144}{625}}$

（c）白が 4 回、または 5 回出れば良い。

白が 5 回出るのは $\left(\frac{2}{5}\right)^5=\frac{32}{5^5}$

白が 4 回出るのは ${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{240}{5^5}$

◀ 白が 5 回でる場合の分母が 5^5 のため、約分しない。

求める確率は $\frac{240}{5^5}+\frac{32}{5^5}=\mathbf{\frac{272}{3125}}$

C. 反復試行の応用

【例題 86】 コイン 1 枚を振って表か裏か記録していき，表が出た回数が 4 回になるまで振り続ける．

1. コインを 4 回振って終わる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．
2. 5 回で終わるのは，4 回目までに表がちょうど $\boxed{\text{イ}}$ 回出て，5 回目が表になる場合である．よって，その確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．
3. 6 回で終わるのは，5 回目までに表がちょうど $\boxed{\text{エ}}$ 回出て，6 回目が表になる場合である．よって，確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．
4. 7 回で終わる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

【解答】

1. **ア**：$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \mathbf{\dfrac{1}{16}}$
2. **イ**：**3**，　**ウ**：4 回目までに表が 3 回出る確率は ${}_4C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)$，
   さらに 5 回目で表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ であるから
   ${}_4C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2} = \cancel{4}\times\dfrac{1}{\cancel{2^5}\,2^3} = \mathbf{\dfrac{1}{8}}$
3. **エ**：**3**，　**オ**：5 回目までに表が 3 回出る確率は ${}_5C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$，
   さらに 6 回目で表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ であるから
   ${}_5C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{2} = \cancel{10}\,5\times\dfrac{1}{\cancel{2^6}\,2^5} = \mathbf{\dfrac{5}{32}}$
4. **カ**：${}_6C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}\times\dfrac{1}{\cancel{2^7}\,2^5} = \mathbf{\dfrac{5}{32}}$

【練習 87：反復試行の応用】

さいころ 1 つを振り，1 か 2 が出たら +3 点，他が出たら −2 点になるゲームを考える．

(1) このゲームを 3 回繰り返し，4 点である確率を求めよ．

(2) このゲームを 5 回繰り返し，0 点である確率を求めよ．

【解答】 +3 になる確率は $\dfrac{1}{3}$，−2 になる確率は $\dfrac{2}{3}$ である．

(1) +3 が 2 回，−2 が 1 回出ればよいので

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3^3}\,3^2} = \mathbf{\frac{2}{9}}.$$

◀ 結局，何回+3 になるかで，最終得点が決まる．

(2) +3 が 2 回，−2 が 3 回出ればよいので

$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10\cdot\frac{2^3}{3^5} = \mathbf{\frac{80}{243}}.$$

◀ +3 が 2 回出ればよいことは，次の式からも計算できる．
+3 が x 回とすると，得点は $3x + (-2)(5-x) = 5x - 10$ 点，
$5x - 10 = 0$ を解いて $x = 2$．

D. 発展 反復試行で複数の事象を考える

さいころを 6 回振って，そのうち 1 がちょうど 2 回，5 以上がちょうど 2 回出る確率を考えてみよう．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	
1	1	5か6	5か6	他	他	←確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
1	1	5か6	他	5か6	他	←確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
			⋮			↑ ↑ ↑ すべて同じ確率

6ヶ所に「1」を2つ，
「5か6」を2つ，「他」を2つ並べる
そのような並べ方は $\frac{6!}{2!2!2!}$ 通り

この結果，次の式で計算できる．

$$\frac{6!}{2!2!2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot2\cdot\cancel{2}}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{3}}{\cancel{6^2}^{\,6}\cdot2^2\cdot\cancel{3^2}^{\,3}}=\frac{5}{72}$$

【発展 88：3 つ以上の事象がある反復試行】

1. さいころを 4 回振って，1 がちょうど 1 回，2 がちょうど 1 回出る確率を求めよ．
2. さいころを 6 回振って，1 も 2 も 3 も 2 回ずつ出る確率を求めよ．

【解答】

1. 1 が 1 回 $\left(\text{確率 }\frac{1}{6}\right)$，2 が 1 回 $\left(\text{確率 }\frac{1}{6}\right)$，他が 2 回 $\left(\text{確率 }\frac{2}{3}\right)$ 出ればよいので

$$\frac{4!}{1!1!2!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{\cancel{4}^{\,2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{2^2}{\cancel{6}\cdot\cancel{6}^{\,3}\cdot3^2}=\mathbf{\frac{4}{27}}$$

2. $$\frac{6!}{2!2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3\cdot2}}{\cancel{2\cdot2}\cdot2\cdot\cancel{6^6}^{\,6^4}}=\mathbf{\frac{5}{2592}}$$

4. 条件付き確率 〜 従属な試行どうしの関係

A. 条件付き確率とは

事象 A, B があり、「A が起こった条件の下、B が起こる確率」を記号 $P_A(B)$ で表し、**条件付き確率** (conditional probability) という。

たとえば、右の表のようにまとめられるクラス内の 40 人から、1 人を無作為に選ぶとき、事象 A, B を以下とする。

A : 選ばれた人に兄弟がいる

B : 選ばれた人に姉妹がいる

		兄弟		計
		いる (A)	いない	
姉妹	いる (B)	4	7	11
	いない	11	18	29
計		15	25	40

このとき、$P_A(B)$ とは「選ばれた人に兄弟がいたとき、その人に姉妹がいる確率」である。「兄弟がいる」のは 15 人、そのうち姉妹もいるのは 4 人であるから、$P_A(B) = \dfrac{4}{15}$ と分かる。

また、$P_{\overline{A}}(B)$ は、「選ばれた人に兄弟がいないとき、その人に姉妹がいる確率」である。「兄弟がいない」のは 25 人、そのうち姉妹がいるのは 7 人であるから、$P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{7}{25}$ と分かる。

【例題 89】 上の例において、次の条件付き確率を求めなさい。

1. $P_A(\overline{B})$　2. $P_{\overline{A}}(\overline{B})$　3. $P_B(A)$　4. $P_B(\overline{A})$　5. $P_{\overline{B}}(\overline{A})$

【解答】

1. A は 15 人、そのうち $\overline{B}$ は 11 人であるから $\boldsymbol{P_A(\overline{B}) = \dfrac{11}{15}}$
2. $\overline{A}$ は 25 人、そのうち $\overline{B}$ は 18 人であるから $\boldsymbol{P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{18}{25}}$
3. B は 11 人、そのうち A は 4 人であるから $\boldsymbol{P_B(A) = \dfrac{4}{11}}$
4. B は 11 人、そのうち $\overline{A}$ は 7 人であるから $\boldsymbol{P_B(\overline{A}) = \dfrac{7}{11}}$
5. $\overline{B}$ は 29 人、そのうち $\overline{A}$ は 18 人であるから $\boldsymbol{P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \dfrac{18}{29}}$

条件付き確率の定義

全事象 U が同様に確からしいとき、「A が起こった条件の下、B が起こる条件付き確率」$P_A(B)$ を

$$P_A(B) = \frac{\text{事象 } A \text{ も } B \text{ も起こる場合の数}}{\text{事象 } A \text{ が起こる場合の数}} = \frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

で定義する。ここで、$n(A)$ は事象 A の場合の数を表す。

また、A が起こる確率 $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}$ であるから

$$P_A(B) = \frac{\frac{n(A\cap B)}{n(U)}}{\frac{n(A)}{n(U)}} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$ とも定義できる。

		A		計
		起こる	起こらない	
B	起こる	$n(A\cap B)$	$n(\overline{A}\cap B)$	$n(B)$
	起こらない	$n(A\cap\overline{B})$	$n(\overline{A}\cap\overline{B})$	$n(\overline{B})$
計		$n(A)$	$n(\overline{A})$	$n(U)$

↓↓↓すべての値を $n(U)$ で割る↓↓↓

		A		計
		起こる	起こらない	
B	起こる	$P(A\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B)$
	起こらない	$P(A\cap\overline{B})$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$	$P(\overline{B})$
計		$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

【例題 90】 ある試験は、受験生のうち 60% が男子であった。また、合格した男子は受験生全体の 40% 合格した女子は受験生全体の 30% になった。

1. 右の表の空欄を、全体に対する割合ですべて埋めなさい。
2. 受験生から 1 人を無作為に選び、男子である事象を A、合格者である事象を B とするとき、次の条件付き確率を求めよ。

(a) $P_A(B)$　(b) $P_B(A)$　(c) $P_{\overline{A}}(B)$　(d) $P_{\overline{B}}(\overline{A})$

	合格	不合格	計
男子			0.6
女子			
計			1

【解答】

1. 問題文から左下になり、残りの空欄を埋めて右下のようになる。

	合格	不合格	計
男子	0.4		0.6
女子	0.3		
計			1

$\Rightarrow$

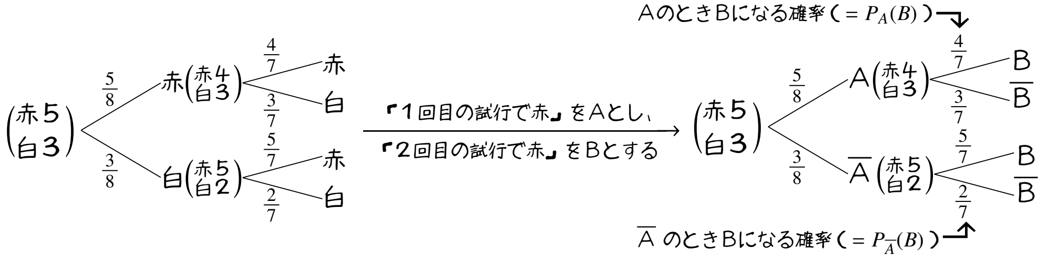
	合格	不合格	計
男子	**0.4**	**0.2**	0.6
女子	**0.3**	**0.1**	**0.4**
計	**0.7**	**0.3**	1

2. (a) $P_A(B) = \dfrac{0.4}{0.6} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$　(b) $P_B(A) = \dfrac{0.4}{0.7} = \mathbf{\dfrac{4}{7}}$

(c) $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{0.3}{0.4} = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$　(d) $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \dfrac{0.1}{0.3} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

B. 確率の木と条件付き確率

p.48 で学んだように、「赤球が 5 個，白球が 3 個」入った袋から 1 個を選んで元に戻さない試行を，2 回繰り返したとき，確率の木にまとめると左下のようになる．さらに、「1 回目の試行で赤が出る」事象を A、「2 回目の試行で赤が出る」事象を B とすると、左下のように確率の木を書き換えられる。



たとえば、$P_A(B)$ は「1 回目は赤であった（A）ときに、2 回目は赤（B）である」であり $\dfrac{4}{7}$ である。

また、$P_{\overline{A}}(B)$ は「1 回目は赤でない（$\overline{A}$）ときに、2 回目は赤（B）である」であり $\dfrac{5}{7}$ である。

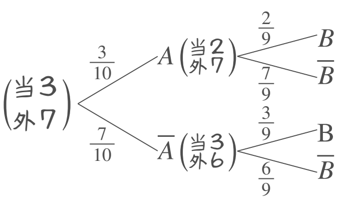
【例題 91】 当たりが 3 本、外れが 7 本入ったくじがあり、2 人が順にくじを引く。
1 人目が当たりである事象を A、2 人目が当たりである事象を B とするとき、以下の条件付き確率を求めなさい。ただし、一度引いたくじは元に戻さない。

1. $P_A(B)$　2. $P_A(\overline{B})$　3. $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

【解答】 確率の木は右のようになる。

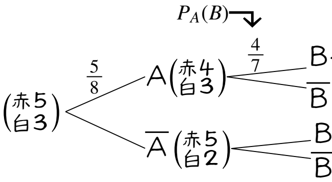
1. $\boldsymbol{P_A(B) = \dfrac{2}{9}}$　2. $\boldsymbol{P_A(\overline{B}) = \dfrac{7}{9}}$

3. $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{6}{9} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$



C. 乗法定理と条件付き確率

p.56 の例において、事象 $A \cap B$、つまり「1 回目も 2 回目も赤」となる確率 $P(A \cap B)$ は乗法定理から $\dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7}$ と求められるが、これは $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ を意味する。さらに、この式は条件付き確率の定義と同値である。



B←1回目も2回目も赤の確率 $= \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7}$

$P(A \cap B)$　　$P(A)$　$P_A(B)$

つまり、$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

（条件付き確率の定義の式と同値な式）

乗法定理と条件付き確率

条件付き確率の定義 $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $\Leftrightarrow$ 乗法定理 $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

特に、事象 A と B が独立ならば，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ となる（$P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B)$ であるため）。

【例題 92】 事象 A, B について、$P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.1$ であるとき、条件付き確率 $P_A(B)$, $P_B(A)$ を求めなさい。

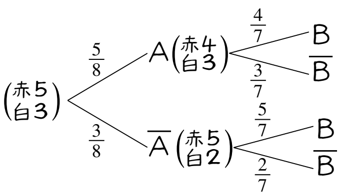
【解答】 $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.1}{0.4} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

$P_B(A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)} = \dfrac{0.1}{0.3} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

◀ $P(B \cap A) = P(A \cap B)$

D. いろいろな条件付き確率

p.56 の例において、確率 $P_B(A)$、つまり「2 回目が赤のとき、1 回目が赤であった確率」を求めてみよう。これは、$\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ で計算できる。



2 人とも当たる確率 $P(B)$ は「赤→赤」「白→赤」と引く確率の和であり、前者は $\dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7}$、後者は $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{7}$ である。

一方、「赤→赤」と引く確率 $P(A \cap B) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7}$ である。

以上から $P_B(A) = \dfrac{\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}}{\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}} = \dfrac{5 \times 4}{5 \times 4 + 3 \times 5} = \dfrac{4}{7}$ となる。

分母分子に56を掛けて複分数を無くした

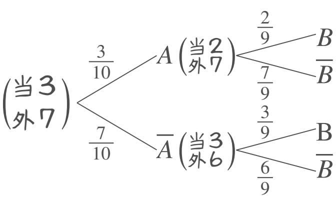
【練習 93：条件付き確率】

当たりが 3 本、外れが 7 本入ったくじがあり、2 人が順にくじを引く。選んでくじは元に戻さない。2 人目が当たったとき、1 人目も当たっていた確率を求めよ。

【解答】 2 人とも当たる場合のうち

1 人目も当たる確率は $\dfrac{3}{10} \times \dfrac{2}{9}$、

1 人目は外れた確率は $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{3}{9}$



◀ 結局、$\dfrac{(2\text{ 人とも当たった})}{(2\text{ 人目が当たった})}$ の確率を求めればよい。

である。よって、求める確率は

$$\frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}}{\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}}=\frac{3\cdot 2}{3\cdot 2+7\cdot 3}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

【練習 94：原因の確率】

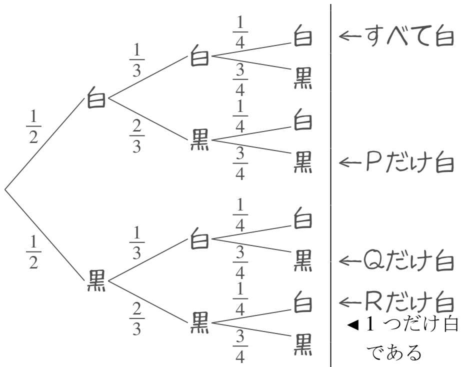
(1) A 工場では部品 P，Q，R を使って品物を作る．各部品には色違いがあり，P は 2 個に 1 個が白，Q は 3 個に 1 個が白，R は 4 個に 1 個が白であり，他はすべて黒である．

（a）部品が 1 つだけ白い品物があるとき、白い原因が部品 P である確率を求めよ。

（b）部品が 1 つだけ黒い品物があるとき、白い原因が部品 R である確率を求めよ。

(2) B 工場では，100 個に 1 個不良品が作られてしまう．さらに，不良品を機械がチェックするとき，不良品は必ず見つけ出せるものの，100 回に 1 回，良品を不良品と誤って判断することがある．機械が「不良品」と判断した中に，「良品」が含まれている確率を求めよ．

【解答】



(1) 確率の木にまとめると，右のようになる．

（a）P だけ白は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{24}$

Q だけ白は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{24}$

R だけ白は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{24}$

であるから $\dfrac{\frac{6}{24}}{\frac{6}{24}+\frac{3}{24}+\frac{2}{24}}=\mathbf{\frac{6}{11}}$.

◀ 1 つだけ白は上の 3 パターンの和である

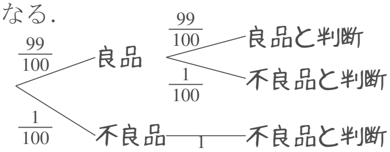
（b）P だけ黒は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$

Q だけ黒は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{24}$

R だけ黒は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{24}$

であるから、$\dfrac{\frac{2}{24}}{\frac{1}{24}+\frac{2}{24}+\frac{2}{24}}=\mathbf{\frac{2}{5}}$

(2) 確率の木にまとめると，右のようになる．



機械が「不良品」と判断するのは

実際は良品だった場合が

$\frac{99}{100}\times\frac{1}{100}=\frac{99}{10000}$

◀ 良品を良品と判断する場合の余事象と考え、$1-\frac{99}{100}\times\frac{99}{100}=\frac{199}{10000}$ でもよい。

もともと不良品だった場合が $\frac{1}{100}$ である．

つまり，$\dfrac{\frac{99}{10000}}{\frac{1}{100}+\frac{99}{10000}}=\mathbf{\frac{99}{199}}$

第2章　整数の性質と不定方程式

この章では，まず，約数・倍数を負の数にも広げて定義しなおし，整数の性質について学ぶ．その後，ユークリッドの互除法を学び，それを応用して 1 次不定方程式の解法を学ぶ．最後に，n 進法という新しい数の表し方を学ぶ．

2.1 約数と倍数

1. 約数と倍数

高校数学では，約数・倍数が負の数であってもよい.

A. （負の数も含めた）約数と倍数

たとえば，$15 \div 5 = 3$，つまり $15 = 5 \times 3$ から，15 は 5 の倍数，5 は 15 の約数である.
同様に，$(-15) \div 5 = -3$，つまり $-15 = 5 \times (-3)$ から，-15 は 5 の倍数，5 は -15 の約数と考えられる.

5 の倍数は，$\cdots, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \cdots$ である．つまり，0 や負の整数でもよい.
15 の約数は，$-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15$ となる．つまり，負の整数でもよい.

割り切れる・倍数・約数

2 つの整数 a, b があって，$a = bk$ となる整数 k があるならば，a は b で**割り切れる** (devisible) といい，a は b の**倍数** (multiple)，b は a の**約数** (devisor) であるという．ただし，0 の倍数・約数は考えない.

【例題 1】 以下の中から，4 の倍数を全て選びなさい．また，36 の約数を全て選びなさい.

$-3,\ 8,\ -13,\ 18,\ -23,\ 28,\ 0,\ 1,\ -1$

【解答】 4 の倍数は $0, \pm 4, \pm 8, \cdots$ なので，**8, 28, 0**
$36 \div 0$ はなし，$36 \div 1 = 36$, $36 \div (-1) = -36$ は割り切れていることに注意して，**36 の約数は -3, 18, 1, -1**.

【練習 2：約数と倍数の拡張】

次のうち，正しい文章をすべて選べ.

a. 0 は，どんな数の倍数でもある.
b. 100 以下の 10 の倍数は 10 個である.
c. 4 の正の約数は 3 つあり，負の約数も 3 つある.

【解答】

a. どんな数も 0 倍して 0 なので，正しい.
b. 10 の倍数は，$100, 90, \cdots, 10, 0, -10, -20, \cdots$ となって，10 個より多く，間違っている.

◂ 倍数は負でもよいことに注意.

c. 4 の約数は $1, 2, 4, -1, -2, -4$ であり，正と負は 3 個ずつある.

◂ 一般に，正の約数と負の約数は必ず同数ある.

以上より，正しいものは **a, c**.

B.　倍数の性質の証明

たとえば「a は 7 の倍数である」ことは「$a = 7k$（k は整数)」と言い換えられ，証明などに利用できる．

（例） 命題「整数 a, b が 7 の倍数ならば，$3a + 2b$ も 7 の倍数である」を示せ．

（解） 仮定「整数 a, b が 7 の倍数」より $a = 7k$, $b = 7l$ とおける（k, l は整数)．すると，$3a + 2b = 21k + 14l = 7(3k + 2l)$．$3k + 2l$ は整数より，$3a + 2b$ は 7 の倍数であると示された．

【例題 3】 次の $\boxed{}$ に適当な式・言葉を入れて，証明を完成させなさい．

1. 命題「整数 a, b が 4 の倍数ならば $5a - 2b$ は 4 の倍数である」を示せ．
   (証明) 整数 a, b が 4 の倍数なので $a = 4k$, $b = 4l$ とおける (k, l は $\boxed{\text{ア}}$)．すると, $5a-2b = \boxed{\text{イ}}$．
   $\boxed{\text{ウ}}$ は整数なので，$5a - 2b$ は 4 の倍数であると示された．
2. 命題「$a + b$, $a - b$ が 4 の倍数ならば a, b は偶数である」を示せ．
   (証明）$a + b$, $a - b$ が 4 の倍数なので $a + b = \boxed{\text{エ}}$, $a - b = \boxed{\text{オ}}$ とおける（k, l は整数)．連立方程式 $\begin{cases} a + b = \boxed{\text{エ}} \\ a - b = \boxed{\text{オ}} \end{cases}$ を解くと，$a = \boxed{\text{カ}}$, $b = \boxed{\text{キ}}$ である．$\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ は整数なので，a, b は偶数であると示された．

【解答】

1. a, b が 4 の倍数なので $a = 4k$, $b = 4l$ とおける（k, l は $\underline{\textbf{整数}}_{(ア)}$)．すると，$5a - 2b = 20k - 8l = \underline{\mathbf{4(5k - 2l)}}_{(イ)}$．$_{(ウ)}\underline{\mathbf{5k - 2l}}$ は整数なので，$5a - 2b$ は 4 の倍数であることが示された．
2. $a + b$, $a - b$ が 4 の倍数なので $a + b = \underline{\mathbf{4k}}_{(エ)}$, $a - b = \underline{\mathbf{4l}}_{(オ)}$ とおける（k, l は整数)．すると

$$\begin{array}{rl} & a + b = 4k \\ +) & a - b = 4l \\ \hline & 2a \quad = 4(k + l) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & a + b = 4k \\ -) & a - b = 4l \\ \hline & 2b = 4(k - l) \end{array}$$

なので，$a = \underline{\mathbf{2(k + l)}}_{(カ)}$, $b = \underline{\mathbf{2(k - l)}}_{(キ)}$ である．$_{(ク)}\underline{\mathbf{k + l}}$, $\underline{\mathbf{k - l}}_{(ケ)}$ は整数なので，a, b は偶数であると示された．

【練習 4：倍数であることの証明】

(1) a, b が 5 の倍数ならば，$4a + 2b$ は 10 の倍数であることを示せ．

(2) a, b が 3 の倍数ならば，$a^2 - 3b$ が 9 の倍数であることを示せ．

【解答】

(1) $a = 5k$, $b = 5l$ とおく（k, l は整数）と，$4a + 2b = 20k + 10l = 10(2k + l)$ である．$2k + l$ は整数なので，$4a + 2b$ は 10 の倍数であると示された．

(2) $a = 3k$, $b = 3l$ とおく（k, l は整数）と，$a^2 - 3b = 9k^2 - 9l = 9(k^2 - l)$ である．$k^2 - l$ は整数なので，$a^2 - 3b$ は 9 の倍数であると示された．

2. いくつかの倍数の判定法

A. 2 の倍数，5 の倍数

2 の倍数，5 の倍数は，一の位から判定できる．

たとえば，一の位が 2 の倍数である 124，−648，23990，は 2 の倍数であり，一の位が 5 の倍数である 485，23990，−83025 は 5 の倍数である．

$12\underbrace{4}_{\text{下1桁の 4 は2の倍数}}$ ←2の倍数→ $2399\underbrace{0}_{\text{下1桁の 0 は2の倍数}}$

$2399\underbrace{0}_{\text{下1桁の 0 は5の倍数}}$ ←5の倍数→ $-8302\underbrace{5}_{\text{下1桁の 5 は5の倍数}}$

B. 4 の倍数，8 の倍数，25 の倍数

4 の倍数，25 の倍数は，下 2 桁から判定できる．

たとえば，下 2 桁が 4 の倍数である 124,−648 23900 は 4 の倍数であり，下 2 桁が 25 の倍数である 475, 23900,−83025 は 25 の倍数である．

また，8 の倍数は下 3 桁から判定できる[*1]．たとえば，567008, −456784 は 8 の倍数である．

$1\underbrace{24}_{\text{下2桁の 24 は4の倍数}}$ ←4の倍数→ $239\underbrace{00}_{\text{下2桁の 00 は4の倍数}}$

$239\underbrace{00}_{\text{下2桁の 00 は25の倍数}}$ ←25の倍数→ $-830\underbrace{25}_{\text{下2桁の 25 は25の倍数}}$

$567\underbrace{008}_{\text{下3桁の 008 は8の倍数}}$ ←8の倍数→ $-456\underbrace{784}_{\text{下3桁の 784 は8の倍数}}$

【例題 5】 2 の倍数，4 の倍数，8 の倍数，5 の倍数，25 の倍数をそれぞれ選び，全て答えなさい．

a) 5784　b) 8975　c) −134654　d) −4500　e) 35468004　f) 1234567890

【解答】 下 1 桁が 2 の倍数である，**a), c), d), e), f) が 2 の倍数**，下 1 桁が 5 の倍数である，**b), d), f) が 5 の倍数**．

下 2 桁を 4 で割ると，a) $84 \div 4 = 21$ で割り切れる，b) は余る，c) $54 \div 4$ は余る，d)，e) は割り切れる，f) $90 \div 4$ は余る．**4 の倍数は a), d), e)**．

下 2 桁を 25 で割ると，a) は余る，b) $75 \div 25 = 3$，c) は余る，d) $0 \div 25 = 0$，e) は余る，f) $90 \div 25$ は余る．**25 の倍数は b), d)**．

下 3 桁を 8 で割ると，a) $784 \div 8 = 98$ で割り切れる，b)，c) は余る，d) $500 \div 8$ は余る，e)，f) も余る．**8 の倍数は a)**．

◀ 実際には，4 の倍数である a)，d)，e) の中から探せばよい．

2 の倍数，5 の倍数，4 の倍数，25 の倍数，8 の倍数の判定法

- 整数 n について「n が 2 の倍数」 $\Longleftrightarrow$ 「n の一の位が 2 の倍数（0, 2, 4, 6, 8）」
- 整数 n について「n が 5 の倍数」 $\Longleftrightarrow$ 「n の一の位が 5 の倍数（0, 5）」
- 整数 n について「n が 4 の倍数」 $\Longleftrightarrow$ 「n の下 2 桁が 4 の倍数（00, 04, 08, 12, $\cdots$, 96）」
- 整数 n について「n が 25 の倍数」 $\Longleftrightarrow$ 「n の下 2 桁が 25 の倍数（00, 25, 50, 75）」
- 整数 n について「n が 8 の倍数」 $\Longleftrightarrow$ 「n の下 3 桁が 8 の倍数（000, 008, 016, $\cdots$, 992）」

C. 3 の倍数，9 の倍数

3 の倍数や 9 の倍数は，すべての位の数字を足して判定できる．

[*1] $2^3 = 8$ であるため．同様に，$5^3 = 125$ の倍数は下 3 桁だけ調べればよく，$2^4 = 16$ の倍数は下 4 桁だけ調べればよい．

たとえば，$3+4+6+5=18$ は 3 でも 9 でも割り切れるので，-3465, 3465 は 3 の倍数でも 9 の倍数でもある．

$3465, -3465$ ←3の倍数&9の倍数
$3+4+6+5=18$ は3の倍数&9の倍数

たとえば，$1+2+4+5=12$ は 3 の倍数であるが 9 の倍数でないので，-1245, 1245 は 3 の倍数であるが 9 の倍数でない．

$1245, -1245$ ←3の倍数
$1+2+4+5=12$ は3の倍数（9で割れない）

たとえば，$8+7+4+4=22$ は 3 の倍数でも 9 の倍数でもないので，-8744, 8744 は 3 の倍数でも 9 の倍数でもない．

$8744, -8744$
$8+7+4+4=22$ は3でも9でも割れない

【例題 6】 123456，-111111111 は 3 の倍数か，9 の倍数か．

【解答】 $1+2+3+4+5+6=21$ は 3 の倍数だが 9 の倍数でない，つまり **123456 は 3 の倍数だが 9 の倍数でない**．
-111111111 は各位の和が 9 になり，**3 の倍数でも 9 の倍数でもある**．

3 の倍数・9 の倍数の判定法

- 整数 n について「n が 3 の倍数」 $\iff$ 「n のすべての位の和が 3 の倍数」
- 整数 n について「n が 9 の倍数」 $\iff$ 「n のすべての位の和が 9 の倍数」

【練習 7：倍数の判定法のまとめ】

次の条件を満たすよう，□に当てはまる数をすべて答えよ．

(1) 987□が 2 の倍数　(2) 987□が 5 の倍数　(3) 987□が 4 の倍数
(4) 123□5 が 9 の倍数　(5) 11□11 が 3 の倍数　(6) 25□2 が 9 の倍数

【解答】

(1) **□ = 0, 2, 4, 6, 8**.　(2) **□ = 0, 5**.
(3) 下 2 桁 7□が 4 の倍数ならよいので，**□ = 2, 6**.
(4) $1+2+3+□+5=11+□$ が 9 の倍数となるのは，**□ = 7**.
(5) $1+1+□+1+1=4+□$ が 3 の倍数となるのは，**□ = 2, 5, 8**.
(6) $2+5+□+2=9+□$ が 9 の倍数となるのは，**□ = 0, 9**.

D.　倍数の判定法の証明〜その１〜

2 の倍数に，2 の倍数を足しても引いても，やはり 2 の倍数である．

これは，2 以外の倍数でも成り立つ．この事実を用いて，倍数の判定法を証明しよう．

（問）2 の倍数の判定法，5 の倍数の判定法を示せ．
（証明）整数 n の一の位が a ならば $n=10A+a$ (……… ①) と表せる（A は整数）．
$10A$ は 2 の倍数なので，①より a が 2 の倍数ならば n は 2 の倍数，
$10A$ は 5 の倍数なので，①より a が 5 の倍数ならば n は 5 の倍数である．
逆に[*2]，①から $a=n-10A$ (……… ②) である．
$10A$ は 2 の倍数なので，②より n が 2 の倍数ならば a は 2 の倍数，
$10A$ は 5 の倍数なので，②より n が 5 の倍数ならば a は 5 の倍数である．

[*2] この行以降は，「また，①から $a=n-10A$ なので，逆も同様にして正しい」でもよい．

【練習 8：倍数の判定法の証明〜その１〜】

(1) 整数 n の下 2 桁が a ならば，整数 A を用い $n = 100A + a$ と表せる．これを用いて，4 の倍数，25 の倍数の判定法を証明しなさい．

(2) 8 の倍数の判定法を証明しなさい．

【解答】

(1) $n = 100A + a$ (········ ①)（A は整数）について

100A は 4 の倍数なので，①より a が 4 の倍数ならば n は 4 の倍数，

100A は 25 の倍数なので，①より a が 25 の倍数ならば n は 25 の倍数．

また，$a = n - 100A$ について，

100A は 4 の倍数なので，n が 4 の倍数ならば a は 4 の倍数，

100A は 25 の倍数なので，n が 25 の倍数ならば a は 25 の倍数である．

◀ この行以降は「また，①から $a = n - 100A$ なので，逆も同様にして正しい．」でもよい．

(2) 整数 n の下 3 桁が a ならば $n = 1000A + a$ (········ ②) と表せる（A は整数）．1000A は 8 の倍数なので，②より a が 8 の倍数ならば n は 8 の倍数である．

逆に，$a = n - 1000A$ について，1000A は 8 の倍数なので，n が 8 の倍数ならば a は 8 の倍数である．

E. 倍数の判定法の証明〜その２〜

（問）3 桁の整数について，3 の倍数の判定法を示せ．

（証明）3 桁の整数 n は，0 から 9 の整数 a, b, c を用いて $n = 100a + 10b + c$ と表せる．すると

$$n = (99a + a) + (9b + b) + c = 99a + 9b + a + b + c = 3(33a + 3b) + (a + b + c) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$3(33a + 3b)$ は 3 の倍数なので，③より各位の和 $a + b + c$ が 3 の倍数ならば n も 3 の倍数である．

逆に[*3]，③から $a + b + c = n - 9(11a + b)$ (········ ④) である．

$9(11a + b)$ は 3 の倍数なので，④より n が 3 の倍数ならば各位の和 $a + b + c$ も 3 の倍数であり，

以上から，n が 3 の倍数であることと，各位の和 $a + b + c$ が 3 の倍数であることは同値である．

【発展 9：倍数の判定法の証明〜その２〜】

4 桁の整数について，9 の倍数の判定法を証明しなさい．

【解答】 4 桁の整数 n は，0 から 9 の整数 a, b, c, d を用いて $n = 1000a + 100b + 10c + d$ と表せる．すると

$$\begin{aligned} n &= (999a + a) + (99b + b) + (9c + c) + d \\ &= 9(111a + 11b + c) + (a + b + c + d) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

$9(111a + 11b + c)$ は 9 の倍数なので，①より各位の和 $a + b + c + d$ が 9 の倍数ならば n も 9 の倍数である．

逆に，①から $a + b + c + d = n - 9(111a + 11b + c)$ なので，n が 9 の倍数ならば $a + b + c + d$ は 9 の倍数である．

[*3] 「また，③から $a + b + c = n - 9(11a + b)$ なので，逆も同様にして正しい」でもよい．

3. 約数の性質～素因数分解・約数の個数

「504 の約数の個数」は，時間さえかければ小学生でも求められる．しかし，ここで学ぶ方法を使うと，ずっと速く求められ，整数の性質の理解も深まる．

A. 素数

2 以上の自然数 p の正の約数が 1, p だけの時，p を**素数** (prime number) という．1 は素数ではない*4.

B. 素因数分解

2 以上の自然数を，素数だけの積で表すことを**素因数分解** (prime factorization) と言い，n の素因数分解に含まれる素数を n の**素因数** (prime factor) と言う．たとえば，$24 = 2^3 \cdot 3$ と素因数分解でき，24 の素因数は 2, 3 である．どんな数の素因数分解も，必ず 1 通りに定まる．

素因数分解をするには，右のように割り算をしていくとよい．

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 75 \\ \hline 5 & 15 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$24 = 2^3 \times 3$　　$75 = 5^2 \times 3$

【例題 10】 42, 60, 72 を素因数分解しなさい．

【解答】 $\mathbf{42 = 2 \times 3 \times 7}$, $\mathbf{60 = 2^2 \times 3 \times 5}$, $\mathbf{72 = 2^3 \times 3^2}$

C. 素因数分解と倍数

素因数の指数から，倍数かどうかを考えよう．

たとえば，$24 = 2^3 \cdot 3$ と素因数分解できる．

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ や $672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ のように，2 の指数が 3 以上で 3 の指数が 1 以上の数は，24 の倍数である．

一方，$36 = 2^2 \cdot 3^2$，$320 = 2^6 \cdot 5$ などの数は，24 の倍数でない．

$$\begin{array}{rcl|ll} 24 = & 2^3 \cdot 3 & & & \\ 72 = & 2^3 \cdot 3 & \cdot 3 & \leftarrow & \text{24の倍数} \\ 672 = & 2^3 \cdot 3 & \cdot 2^2 \cdot 7 & \leftarrow & \text{24の倍数} \\ 36 = & 2^2 \cdot 3 & \cdot 3 & \leftarrow & \text{2が足りない} \\ 320 = & 2^3 & \cdot 2^3 \cdot 5 & \leftarrow & \text{3が足りない} \end{array}$$

【例題 11】 5 つの数 $2^5 \cdot 3^2$,　$2^3 \cdot 3 \cdot 5$,　$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$,　$2^4 \cdot 3 \cdot 7$,　2^5 の中から，24 の倍数，21 の倍数をすべて選びなさい．

【解答】 $24 = 2^3 \cdot 3$ なので，24 の倍数は，2 の指数が 3 以上，3 の指数が 1 以上ならよい．つまり，24 の倍数は $\mathbf{2^5 \cdot 3^2}$, $\mathbf{2^3 \cdot 3 \cdot 5}$, $\mathbf{2^4 \cdot 3 \cdot 7}$.
$21 = 3 \cdot 7$ なので，21 の倍数は，3 の指数と 7 の指数が 1 以上ならよい．つまり，21 の倍数は $\mathbf{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7}$, $\mathbf{2^4 \cdot 3 \cdot 7}$.

*4 1 を素数にしてしまうと，素因数分解が無限通りにできてしまう．「素数とは，正の約数が 2 個の数」と覚えてもよい．

D. 素因数分解と約数

約数かどうかも，指数の値からも判断できる．

たとえば, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ と素因数分解できる．$8 = 2^3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ のように, $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ ($a = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ b = 0,\ 1,\ 2,\ c = 0,\ 1$) は，504 の約数である．

一方，$48 = 2^4 \cdot 3$，$49 = 7^2$ のような数は，504 の約数でない．

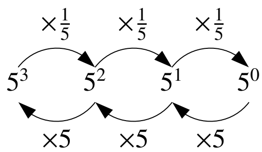
504	=	2^3	$\cdot 3^2$	$\cdot 7$	
8	=	2^3			←504の約数
12	=	2^2	$\cdot 3$		←504の約数
42	=	2	$\cdot 3$	$\cdot 7$	←504の約数
48	=	2^4	$\cdot 3$		←2が多い
49	=			7^2	←7が多い

【例題 12】 5 つの数 $2^5 \cdot 3^2$,　$2^3 \cdot 3 \cdot 5$,　$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$,　$2^4 \cdot 3 \cdot 7$,　2^5 の中から，504 の約数，672 の約数をすべて選びなさい．

【解答】 $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ なので，504 の約数は，2 の指数が 3 以下，3 の指数が 2 以下，7 の指数が 1 以下に限る．つまり，504 の約数は $\mathbf{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7}$.
$672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ なので，672 の約数は，2 の指数が 5 以下，3 の指数が 1 以下，7 の指数が 1 以下ならよい．つまり，672 の約数は $\mathbf{2^4 \cdot 3 \cdot 7,\ 2^5}$.

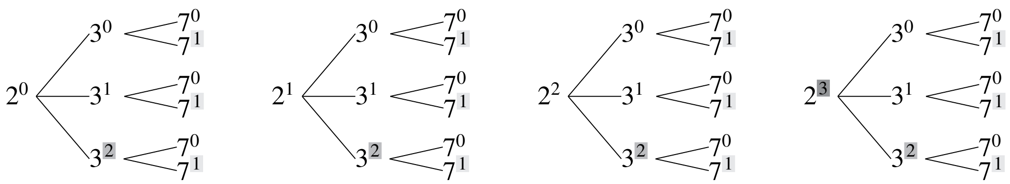
E. 0 乗

0 でないどんな数も，0 乗を 1 と定める．これは，右のような規則から定められる．



F. 正の約数の個数

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ の正の約数は，次のような樹形図で表せる．



2 の指数は 3 + 1 種類，3 の指数は 2 + 1 種類，7 の指数は 1 + 1 種類ある．結果，約数の個数は $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$ 個になる．

「指数部分に 1 ずつ足して掛け合わせると，正の約数の個数になる」と理解するとよい．

正の約数の個数

n を 2 以上の自然数とする．

(1) n の素因数分解が $n = p^a$ ならば，n の正の約数は $a + 1$ 個である．

(2) n の素因数分解が $n = p^a q^b$ ならば，n の正の約数は $(a + 1)(b + 1)$ 個である．

(3) n の素因数分解が $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$ ならば，n の正の約数は $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_m + 1)$ 個である．

【例題 13】 次の整数の，正の約数の個数を求めよ．

1. 200　2. 294　3. 396　4. 288

【解答】

1.
$$\begin{array}{r|l} 2 & 200 \\ 2 & 100 \\ 2 & 50 \\ 5 & 25 \\ & 5 \end{array}$$
$200 = 2^3 \cdot 5^2$ より

$(3+1)(2+1)$

$= 4 \cdot 3 = $ **12個**

2.
$$\begin{array}{r|l} 2 & 294 \\ 3 & 147 \\ 7 & 49 \\ & 7 \end{array}$$
$294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$ より

$(1+1)(1+1)(2+1)$

$= 2 \cdot 2 \cdot 3 = $ **12個**

3.
$$\begin{array}{r|l} 2 & 396 \\ 2 & 198 \\ 3 & 99 \\ 3 & 33 \\ & 11 \end{array}$$
$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$ より

$(2+1)(2+1)(1+1)$

$= 3 \cdot 3 \cdot 2 = $ **18個**

4.
$$\begin{array}{r|l} 2 & 288 \\ 2 & 144 \\ 2 & 72 \\ 6 & 36 \\ & 6 \end{array}$$
$288 = 2^3 \cdot (2 \cdot 3)^2$

$= 2^5 \cdot 3^2$ より

$(5+1)(2+1)$

$= 6 \cdot 3 = $ **18個**

【練習 14：約数の個数から，元の数を求める〜その１〜】

自然数 n は，素因数として 2 と 3 を持っている．

(1) 正の約数の個数が 9 個であるような，n の値を全て求めよ．

(2) 正の約数の個数が 10 個であるような，n の値を全て求めよ．

(3) 正の約数の個数が 12 個であるような，n の値を全て求めよ．

【解答】

(1) $9 = 3 \cdot 3$ なので，約数の個数は $(\boxed{2}+1)(\boxed{2}+1)$ 個と求められなければならない．つまり，$n = 2^{\boxed{2}} \cdot 3^{\boxed{2}} = $ **36**.

◀ $n = p^8$ でも正の約数は $8+1=9$ 個だが，素因数を 2 種類持つことができない．

(2) $10 = 2 \cdot 5$ なので，約数の個数は $(\boxed{1}+1)(\boxed{4}+1)$ 個と求められなければならない．つまり，$n = 2^{\boxed{1}} \cdot 3^{\boxed{4}}$, $3^{\boxed{1}} \cdot 2^{\boxed{4}}$ のどちらかであり，$\boldsymbol{n = 162,\ 48}$.

(3) $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ なので，約数の個数は $(1+1)(5+1)$ 個か，$(2+1)(3+1)$ 個と求められなければならない．つまり，$n = 2 \cdot 3^5$, $3 \cdot 2^5$, $2^2 \cdot 3^3$, $3^2 \cdot 2^3$ のどれかであり，$\boldsymbol{n = 486,\ 96,\ 108,\ 72}$.

◀ $(1+1)(5+1)$ 個なら $n = 2 \cdot 3^5$, $3 \cdot 2^5$, $(2+1)(3+1)$ 個なら $n = 2^2 \cdot 3^3$, $3^2 \cdot 2^3$

【発展 15：約数の個数から，元の数を求める〜その２〜】

① 50 以下の自然数 n のうち，正の約数の個数が 6 個であるものを全て求めよ．

② 200 以下の奇数 n のうち，正の約数の個数が 8 個であるものを全て求めよ．

【解答】

① 素因数が 1 種類の時，$n = 2^5$, 3^5, $\cdots$ のどれかである．$n \leqq 50$ より，$n = 2^5 = 32$ のみ適する．

素因数が 2 種類の時，$6 = 3 \cdot 2 = (\boxed{2}+1)(\boxed{1}+1)$ より $n = p^{\boxed{2}} q^{\boxed{1}}$ とおける．

i) $p = 2$ のとき，$n = 4q$ より $q = 3, 5, 7, 11$ が適するが，$q = 13$ のとき $n = 2^2 \cdot 13 = 52 > 50$ より不適．

ii) $p = 3$ のとき，$n = 9q$ より $q = 2, 5$ が適するが，$q = 7$ のとき $n = 3^2 \cdot 7 = 63 > 50$ より不適．

iii) $p=5$ のとき，$q=2$ のとき $n=5^2\cdot 2=50$ より適し，他は不適.

iv) $p>5$ ではすべて $n>50$ となる.

以上より，$n=2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ 2^2\cdot 7,\ 2^2\cdot 11,\ 3^2\cdot 2,\ 3^2\cdot 5,\ 5^2\cdot 2$，

つまり $\boldsymbol{n=12,\ 20,\ 28,\ 44,\ 18,\ 45,\ 50}$.

② 素因数が 1 種類の時，n は奇数より $n=3^7,\ 5^7,\ \cdots$ のどれかである. $n\leqq 200$ より，すべて不適.

素因数が 2 種類の時，$8=4\cdot 2=(3+1)(1+1)$ より $n=p^3q$ とおける.

i) $p=2$ ならば n は偶数となって不適.

ii) $p=3$ のとき，$n=27q$ より $q=5,\ 7$ が適するが，$q=11$ のとき $n=3^3\cdot 11=297>200$ より $q\geqq 11$ では不適.

iii) $p=5$ のとき，$q=3$ のとき $n=5^3\cdot 3=375>200$ より不適.

iv) $p>5$ では $p^3>200$ となり不適.

素因数が 3 種類の時，$8=2\cdot 2\cdot 2=(1+1)(1+1)(1+1)$ より $n=pqr\ (p<q<r)$ とおける.

i) $p=3,\ q=5$ のとき，$n=15r$ より $r=7,\ 11,\ 13$ は適するが，$r=17$ のとき $n=15\cdot 17=255>200$ より $r\geqq 17$ では適さない.

ii) $p=3,\ q=7$ のとき，$r=11$ のとき $n=231>200$ より不適.

iii) $p>3$ では，最小でも $n=5\cdot 7\cdot 11=385>200$ より不適.

以上より，$n=3^3\cdot 5,\ 3^3\cdot 7,\ 3\cdot 5\cdot 7,\ 3\cdot 5\cdot 11,\ 3\cdot 5\cdot 13$ より $\boldsymbol{n=135,\ 189,\ 105,\ 165,\ 195}$.

4. 最大公約数と最小公倍数

A. 公倍数・最小公倍数

自然数 48 は，6 の倍数でも 8 の倍数でもあるから，48 を 6, 8 の公倍数といった.

同様に，整数 m が，a の倍数でも b の倍数でもあるとき，m を $a,\ b$ の**公倍数** (common multiple) という. たとえば，−48 も 6, 8 の公倍数である．また，**最小公倍数** (least common multiple) [*5]は最小の正の公倍数と定める．6, 8 の最小公倍数はやはり 24 である.

B. 公約数・最大公約数

整数 $a,\ b$ について，整数 d が a の約数でも b の約数でもあるとき，d を $a,\ b$ の**公約数** (common devisor) といい，最大の公約数を**最大公約数** (greatest common devisor) という[*6].

たとえば，6, 8 の公約数は 2, 1, −1, −2 であり，最大公約数は 2 である.

【例題 16】

1. −42，− 24，− 10，2，12，63 の中から，2 と 3 の公倍数，3 と 7 の公倍数をすべて選べ.
2. −12, −7, −3, 2, 9, 14 の中から，18 と 24 の公約数，42 と 56 の公約数をすべて選べ.

【解答】

*5 しばしば，頭文字をとって"lcm"と略される．また，2 数 $a,\ b$ の最小公倍数を $\mathrm{lcm}(a,\ b)$ と表すこともある.

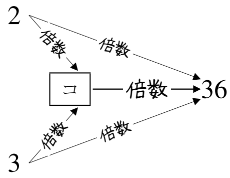
*6 しばしば，頭文字をとって"gcd"と略される．また，2 数 $a,\ b$ の最大公約数を $\mathrm{gcd}(a,\ b)$ と表すこともある.

1. 2 と 3 の公倍数は **−42, −24, 12**，3 と 7 の公倍数は **−42, 63**
2. 18 と 24 の公約数は **−3, 2**，42 と 56 の公約数は **−7, 2, 14**

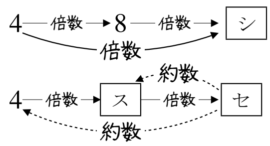
C.　約数と倍数の関係

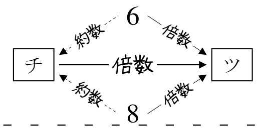
1. 「ある数」の約数を掛け合わせても，やっぱりもとの「ある数」の約数になる．
2. 「ある数」の倍数の倍数は，やっぱりもとの「ある数」の倍数になる．

【例題 17】　次の文章から正しい言葉を選び，$\boxed{}$ に適する値を入れなさい．



1. ・36 は 2 でも 3 でも $\left\{\begin{array}{c}\text{割りきれる}\\ \text{割りきれない}\end{array}\right\}$ ので，
   $2 \times 3 = \boxed{\text{コ}}$ でも $\left\{\begin{array}{c}\text{割りきれる}\\ \text{割りきれない}\end{array}\right\}$．
   ・60 は 3 でも 5 でも $\left\{\begin{array}{c}\text{割りきれる}\\ \text{割りきれない}\end{array}\right\}$ ので，$3 \times 5 = \boxed{\text{サ}}$ でも $\left\{\begin{array}{c}\text{割りきれる}\\ \text{割りきれない}\end{array}\right\}$．
2. ・8 は 4 の倍数，24 は 8 の倍数．だから，$\boxed{\text{シ}}$ も 4 の倍数になる．
   ・4 を 3 倍すると $\boxed{\text{ス}}$，さらに 3 倍すると $\boxed{\text{セ}}$ で，
   $\boxed{\text{ソ}}$ も $\boxed{\text{タ}}$ も 4 の倍数になる．
   ・6 と 8 の最大公約数は $\boxed{\text{チ}}$，6 と 8 の最小公倍数は $\boxed{\text{ツ}}$．
   最小公倍数は，最大公約数の $\left\{\begin{array}{c}\text{倍数}\\ \text{約数}\end{array}\right\}$ になっている．





【解答】

1. ・36 は 2 でも 3 でも**割り切れる**ので，$2 \times 3 = \underline{\mathbf{6}}_{(\text{コ})}$ でも**割り切れる**．
   ・60 は 3 でも 5 でも**割り切れる**ので，$3 \times 5 = \underline{\mathbf{15}}_{(\text{サ})}$ でも**割り切れる**．
2. ・8 は 4 の倍数，24 は 8 の倍数．だから，$_{(\text{シ})}\underline{\mathbf{24}}$ も 4 の倍数になる．
   ・4 を 3 倍すると $\underline{\mathbf{12}}_{(\text{ス})}$，さらに 3 倍すると $\underline{\mathbf{36}}_{(\text{セ})}$ で，$_{(\text{ソ})}\underline{\mathbf{12}}$ も $\underline{\mathbf{36}}_{(\text{タ})}$ も 4 の倍数になる．
   ・6 と 8 の最大公約数は $\underline{\mathbf{2}}_{(\text{チ})}$，6 と 8 の最小公倍数は $\underline{\mathbf{24}}_{(\text{ツ})}$，最小公倍数は，最大公約数の**倍数**になっている．

D.　互いに素

整数 a, b について，a, b の最大公約数が 1 のとき，**a, b は互いに素** (relatively prime) という．

【例題 18】　次のうち，互いに素な 2 数の組をすべて答えなさい．

a) 14, 21　　b) 23, 25　　c) 16, 35　　d) 45, 51

【解答】　a) は最大公約数 7，d) は最大公約数 3．互いに素は **b), c)**．

E. 素因数分解と最小公倍数

たとえば，168 と 252 の公倍数を考えよう．それぞれ素因数分解して，右のようになる．

168 と 252 の公倍数は 2^3 の倍数でないといけない．そうでないと，2^3 を含む 168 の，倍数にならない．

168 と 252 の公倍数は 3^2 の倍数でないといけない．そうでないと，3^2 を含む 252 の，倍数にならない．

公倍数は 2^3, 2^4, $\cdots$ が必要　公倍数は 3^2, 3^3, $\cdots$ が必要　公倍数は 7, 7^2, $\cdots$ が必要

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$
$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

→ $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ が最小公倍数

7 についても同様に考えて，168 と 252 の最小公倍数は $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ と分かる．

【例題 19】 次の $\boxed{}$ に当てはまる，もっともふさわしい数値を答えなさい．

495 と 297 は，素因数分解すると $495 = \boxed{ア}$, $297 = \boxed{イ}$ となる．

まず，495 と 297 の公倍数は $3^{\boxed{ウ}}$ の倍数でないといけない．そうでないと，$\boxed{エ}$ の倍数にならない．

また，495 と 297 の公倍数は $5^{\boxed{オ}}$ の倍数でないといけない．そうでないと，$\boxed{カ}$ の倍数にならない．

同様に，495 と 297 の公倍数は $11^{\boxed{キ}}$ の倍数でないといけない．

以上から，495 と 297 の最小公倍数は，$3^{\boxed{ク}} \cdot 5^{\boxed{ケ}} \cdot 11^{\boxed{コ}}$ であると分かる．

【解答】 ア : $495 = \mathbf{3^2 \cdot 5 \cdot 11}$，イ : $297 = \mathbf{3^3 \cdot 11}$，
ウ : **3**，エ : **297**，オ : **1**，カ : **495**，キ : **1**
ク : **3**，ケ : **1**，コ : **1**

◀ 495 の倍数は 3^2 を含み，297 の倍数は 3^3 を含む．そのため，公倍数は 3^3 の倍数でないと，297 の倍数にならない．

F. 素因数分解と最大公約数

たとえば，168 と 252 の公約数について考えよう．それぞれ素因数分解して，右のようになる．

168 と 252 のどちらの約数にもなるには，2^0, 2^1, 2^2 しか含んではいけない．たとえば，2^3 を含む数は 252 の約数にならない．

同様に，168 と 252 の公約数は，3^0, 3^1 しか含まない．たとえば，3^2 を含む数は 168 の約数にならない．

公約数は 2^0, 2^1, 2^2 のみ含む　公約数は 3^0, 3^1 のみ含む　公約数は 7^0, 7^1 のみ含む

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$
$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

→ $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ が最大公約数

7 についても同様に考えて，168 と 252 の最大公約数は $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ と分かる．

大きな数，たとえば 6179 と 2923 の最大公約数を求めるには p.87 で学ぶユークリッドの互除法を用いる．

【例題 20】 次の $\boxed{}$ に当てはまる，もっともふさわしい数値を答えなさい．

495 と 297 は，素因数分解すると $495 = \boxed{ア}$，$297 = \boxed{イ}$ となる．

まず，495 と 297 の公約数は，3 の指数が $\boxed{ウ}$ のいずれかでないといけない．

また，495 と 297 の公約数は，5 の指数が $\boxed{エ}$ のいずれかでないといけない．

同様に，495 と 297 の公約数は，11 の指数が $\boxed{オ}$ のいずれかでないといけない．

以上から，495 と 297 の最大公約数は，$3^{\boxed{カ}} \cdot 5^{\boxed{キ}} \cdot 11^{\boxed{ク}}$ であると分かる．

【解答】 ア : $495 = \mathbf{3^2 \cdot 5 \cdot 11}$，イ : $297 = \mathbf{3^3 \cdot 11}$，
ウ : **0, 1, 2**，エ : **0**，オ : **0, 1**，
カ : **2**，キ : **0**，ク : **1**

◀ 495 の倍数は 3^2 を含み，297 の倍数は 3^3 を含む．そのため，公約数は 3^3 を含んではいけない．

【練習 21：素因数分解と最小公倍数・最大公約数】

(1) 252 と 168 をそれぞれ素因数分解しなさい．

(2) 252 と 168 の最小公倍数を求めよ．答えは素因数分解された形でよい．

(3) 252 と 168 の最大公約数と，正の公約数の個数を求めよ．最大公約数は素因数分解された形でよい．

(4) 252，168，240 の最小公倍数と最大公約数を求めよ．答えは素因数分解された形でよい．

【解答】

(1) $\mathbf{252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7,\ 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7}$

(2) 公倍数は，2 の指数は 3 以上，3 の指数は 2 以上，7 の指数は 1 以上と分かり，**最小公倍数は** $\mathbf{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7}$.

(3) 公約数は，2 の指数は 2 以下，3 の指数は 1 以下，7 の指数は 1 以下と分かり，**最大公約数は** $\mathbf{2^2 \cdot 3 \cdot 7}$．正の公約数は，$2^2 \cdot 3 \cdot 7$ の正の約数なので，$(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) =$ **12個**.

◀『正の約数の個数』(p.66)

(4) $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ から
公倍数は，2 の指数は 4 以上，3 の指数は 2 以上，5 と 7 の指数は 1 以上となるので**最小公倍数は** $\mathbf{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$．公約数は，2 の指数は 2 以下，3 の指数は 1 以下となり，**最大公約数は** $\mathbf{2^2 \cdot 3}$.

【練習 22：最小公倍数からの逆算】

150 と n の最小公倍数が 900 であるような，自然数 n の値を全て求めよ．

【解答】 $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$，$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ である．$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ とおく．
2 の指数について，1 と a のうち最大が 2 となるので，$a = 2$.
3 の指数について，1 と b のうち最大が 2 となるので，$b = 2$.
5 の指数について，2 と c のうち最大が 2 となるので，$c = 0$，1，2.
以上より，$n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$，$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$，$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 =$ **36, 180, 900**

5. 約数と倍数に関する種々の問題

A. 2 数の最大公約数・最小公倍数の性質

たとえば，$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ と $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ について，下のようにまとめられる．

ここから，まず最大公約数 $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ と分かる．これを g とおくと，最小公倍数は $g \cdot 2 \cdot 3 = 6g$ になる．

また，$168 \cdot 252$ は最大公約数・最小公倍数の積 $g \cdot 6g$ に等しいと分かる．

最小公倍数 $= g \cdot 2 \cdot 3$

$$168 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 = 2g$$
$$252 = \underbrace{2^2 \cdot 3 \cdot 7}_{\text{最大公約数}(=g\text{とおく})} \cdot 3 = 3g$$

2 数の最小公倍数・最大公約数の性質

$a,\ b$ を自然数とする．2 数 $a,\ b$ の最大公約数を g，最小公倍数を d とする．

1. $a = gA,\ b = gB$ としたとき，2 数 $a,\ b$ の最小公倍数 $d = gAB$ である．
2. $gd = ab$ である．つまり，2 数 $a,\ b$ の最小公倍数・最大公約数の積は，積 ab に等しい．

（証明）最大公約数の定義より $a = gA,\ b = gB$ について，$A,\ B$ は互いに素である．
互いに素な 2 数 $A,\ B$ の最小公倍数は AB なので，$gA,\ gB$ の最小公倍数は gAB であり，$a,\ b$ の最小公倍数は $d = gAB$ となり 1. が示された．
2 数の最小公倍数・最大公約数の積は $g \times (gAB) = gA \times gB = ab$ となるので 2. も示された．

B. 最大公約数・最小公倍数からもとの 2 数を求める

上の性質を用いて，次のような問題を解くことができる．

（問）最小公倍数が 630，最大公約数が 14 となる 2 つの自然数 $a,\ b$ $(a < b)$ の組をすべて求めよ．
（解）最大公約数が 14 なので，$a = 14A,\ b = 14B$（$A,\ B$ は互いに素で $A < B$）とおけて，最小公倍数は $14AB$ になる．よって $14AB = 630$ から $AB = 45$．
$A < B$ より $(A,\ B) = (1,\ 45),\ (3,\ 15),\ (5,\ 9)$ であるが，$A,\ B$ は互いに素より $(A,\ B) = (3,\ 15)$ は不適．
$a = 14A,\ b = 14B$ より，$(a,\ b) = (14,\ 630),\ (70,\ 126)$ が満たす．

【例題 23】 次の条件を満たす自然数 $a,\ b$ をすべて求めよ．ただし，$a < b$ とする．

1. 最大公約数 6，最小公倍数 120
2. 最大公約数 4，最小公倍数 240

【解答】

1. 最大公約数が 6 なので，$a = 6A,\ b = 6B$（$A,\ B$ は互いに素で $A < B$）とおけて，最小公倍数は $6AB$ になる．よって $6AB = 120$ から $AB = 20$．
   $A < B$ より $(A,\ B) = (1,\ 20),\ (2,\ 10),\ (4,\ 5)$ であるが，$A,\ B$ は互いに素より $(A,\ B) = (1,\ 20),\ (4,\ 5)$ のみ適する．
   よって，$\boldsymbol{(a,\ b) = (6,\ 120),\ (24,\ 30)}$ が満たす．
2. 最大公約数が 4 なので，$a = 4A,\ b = 4B$（$A,\ B$ は互いに素で $A < B$）とおけて，最小公倍数は $4AB$ になる．よって $4AB = 240$ から $AB = 60$．
   $A < B$ より $(A,\ B) = (1,\ 60),\ (2,\ 30),\ (3,\ 20),\ (4,\ 15),\ (5,\ 12),\ (6,\ 10)$ であるが，$A,\ B$ は互いに素より，適するのは，

◀ $(A,\ B) = (1,\ 20)$ のとき，
$a = 6,\ b = 6 \cdot 20 = 120$.
$(A,\ B) = (4,\ 5)$ のとき，
$a = 6 \cdot 4 = 24,\ b = 6 \cdot 5 = 30$.

$(A,\ B) = (1,\ 60),\ (3,\ 20),\ (4,\ 15),\ (5,\ 12)$.

よって，$\boldsymbol{(a,\ b) = (4,\ 240),\ (12,\ 80),\ (16,\ 60),\ (20,\ 48)}$.

C. 2 数の和や差と，最大公約数・最小公倍数

【練習 24：2 数の和や差】

次の条件を満たす自然数 $a,\ b$ をすべて求めよ．ただし，$a < b$ とする．

(1) 最大公約数が 6，和が 48　　(2) 最大公約数が 8，差が 24，$b < 50$

【解答】

(1) 最大公約数が 6 なので，$a = 6A,\ b = 6B$（$A,\ B$ は互いに素で $A < B$）とおける．和が 48 なので $6A + 6B = 48 \Leftrightarrow A + B = 8$.

$A < B$ より $(A,\ B) = (1,\ 7),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5)$ であるが，$A,\ B$ は互いに素より $(A,\ B) = (1,\ 7),\ (3,\ 5)$ のみ適する．

以上より，$\boldsymbol{(a,\ b) = (6,\ 42),\ (18,\ 30)}$ が満たす.

◀ $(A,\ B) = (1,\ 7)$ のとき，$a = 6,\ b = 6 \cdot 7 = 42$.
$(A,\ B) = (3,\ 5)$ のとき，$a = 6 \cdot 3 = 18,\ b = 6 \cdot 5 = 30$.

(2) 最大公約数が 8 なので，$a = 8A,\ b = 8B$（$A,\ B$ は互いに素で $A < B$）とおける．差が 24 なので $8B - 8A = 24 \Leftrightarrow B - A = 3$.

$b < 50$ より $8B < 50 \Leftrightarrow B < \dfrac{25}{4} = 6.25$ より

$(A,\ B) = (1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6)$ であるが，$A,\ B$ は互いに素より，適するのは，$(A,\ B) = (1,\ 4),\ (2,\ 5)$.

よって，$\boldsymbol{(a,\ b) = (8,\ 32),\ (16,\ 40)}$.

D. 互いに素な整数の個数

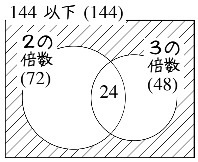
（問）144 以下の自然数のうち，144 と互いに素な数の個数を求めなさい．

（解）$144 = 2^4 \cdot 3^2$ から，144 と 1 以外の公約数をもつ数は 2 の倍数か 3 の倍数である．144 以下の自然数のうち

2 の倍数は $144 \div 2 = 72$ 個，3 の倍数は $144 \div 3 = 48$ 個あり，

2 の倍数でも 3 の倍数でもある 6 の倍数は，$144 \div 6 = 24$ 個ある．

以上より，互いに素な数の個数は $144 - (72 + 48 - 24) = 48$ 個.

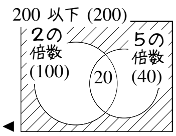


【例題 25】

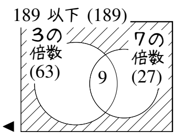
1. 200 以下の自然数のうち，200 と互いに素な数の個数を求めよ．
2. 189 以下の自然数のうち，189 と互いに素な数の個数を求めよ．

【解答】

1. $200 = 2^3 \cdot 5^2$ から，200 と 1 以外の公約数をもつ数は 2 の倍数か 5 の倍数である．200 以下の自然数のうち，
   2 の倍数は $200 \div 2 = 100$ 個，5 の倍数は $200 \div 5 = 40$ 個，
   2 の倍数でも 5 の倍数でもある 10 の倍数は $200 \div 10 = 20$ 個ある．
   以上より，互いに素な数の個数は $200 - (100 + 40 - 20) =$ **80個**.



2. $189 = 3^3 \cdot 7$ から，189 と 1 以外の公約数をもつ数は 3 の倍数か 7 の倍数である．189 以下の自然数のうち，
   3 の倍数は $189 \div 3 = 63$ 個，7 の倍数は $189 \div 7 = 27$ 個，
   3 の倍数でも 7 の倍数でもある 21 の倍数は $189 \div 21 = 9$ 個ある．
   以上より，互いに素な数の個数は $189 - (63 + 27 - 9) =$ **108個**.



【発展 26：互いに素な数の個数】

① 120 以下の自然数のうち，120 と互いに素な数の個数を求めなさい．

② 135 以下の正の偶数のうち，135 と互いに素な数の個数を求めなさい．

【解答】

① $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ から，120 と公約数をもち互いに素でない数は 2 の倍数か 3 の倍数か 5 の倍数である．

右のベン図を考えて，120 以下の自然数のうち，2 の倍数は $120 \div 2 = 60$ 個，3 の倍数は $120 \div 3 = 40$ 個，5 の倍数は $120 \div 5 = 24$ 個，

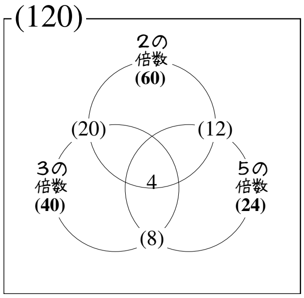
2 の倍数でも 3 の倍数でもある 6 の倍数は $120 \div 6 = 20$ 個，

2 の倍数でも 5 の倍数でもある 10 の倍数は $120 \div 10 = 12$ 個，

3 の倍数でも 5 の倍数でもある 15 の倍数は $120 \div 15 = 8$ 個，

2 でも 3 でも 5 でも割れる 30 の倍数は $120 \div 30 = 4$ 個ある．

以上より，120 と公約数のある数は $60 + 40 + 24 - 20 - 12 - 8 + 4 = 88$ 個であり，互いに素な数の個数は $120 - 88 =$ **32 個**である．



◀『包含と排除の関係（3 集合版）』

② $135 = 3^3 \cdot 5$ であるから，135 と互いに素でない数は 3 の倍数か 5 の倍

数である．

135 以下の自然数のうち 3 の倍数は $135 \div 3 = 45$ 個あり，そのうち偶数は最後の 135 を除いた 44 個の半数，22 個である．

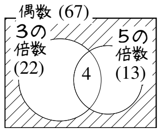
◀3 の倍数を小さい順に並べると，奇数と偶数が交互に現れる．

同様に，5 の倍数の自然数は $135 \div 5 = 27$ 個あり，そのうち偶数は $(27 - 1) \div 2 = 13$ 個．

15 の倍数である偶数は $(135 \div 15 - 1) \div 2 = 4$ 個．

135 以下の偶数は $(135 - 1) \div 2 = 67$ 個あるので，このうち 135 と互いに素な数は $67 - (22 + 13 - 4) =$ **36** 個．

◀



E. $n!$ の素因数の個数

たとえば，100 の階乗 $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 100$ は 2 で何回割り切れるか，次のようにして求められる．

1 から 100 のうち，2 で割れる数は，$100 \div 2 = 50$ 個ある．

もう一度 2 で割れる数は，1 から 100 の 4 の倍数であり，$100 \div 4 = 25$ 個ある．

さらにもう一度，2 で割れる数は 8 の倍数であり，100 までには $100 \div 8 = 12 \cdots 4$ から 12 個ある．

これを繰り返して 16 の倍数は $100 \div 16 = 6 \cdots 4$ から 6 個，32 の倍数は $100 \div 32 = 3 \cdots 4$ から 3 個，64 の倍数は $100 \div 64 = 1 \cdots 36$ から 1 個ある．

合計，$50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ 個である．

これらは，次のようにまとめられる．ただし，○は素因数 2 が含まれることを表す．

100! =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	···	29	30	31	32	···	63	64	65	66	···	96	97	98	99	100
2の倍数→		○		○		○		○		○		○		○		○		○			○		○			○		○		○		○		○
4の倍数→				○				○				○				○			···				○	···		○			···	○				○
8の倍数→								○								○							○			○				○				
16の倍数→																○							○	···		○			···	○				
32の倍数→																							○			○				○				
64の倍数→																										○								

【暗記 27：$n!$ の素因数】

1. 100! を素因数分解すると，素因数 3 は何個含まれるか．
2. 100! を計算すると，末尾に 0 が何個並ぶだろうか．

【解答】

1. 100 以下の自然数のうち 3 の倍数は $100 \div 3 = 33 \cdots 1$ から 33 個，
   3^2 の倍数は $100 \div 3^2 = 11 \cdots 1$ から 11 個，
   3^3 の倍数は $100 \div 3^3 = 3 \cdots 19$ から 3 個，
   3^4 の倍数は $100 \div 3^4 = 1 \cdots 19$ から 1 個，
   3^5 の倍数はないので，$33 + 11 + 3 + 1 =$ **48個** と求められる．
2. 100! が 10 で割れる回数を求めればよいが，2 で割れる回数は 5 で割れる回数より多いので，100! が 5 で何回割れるか，求めればよい．
   100 以下の自然数のうち 5 の倍数は $100 \div 5 = 20$ 個，5^2 の倍数は $100 \div 5^2 = 4$ 個，5^3 の倍数はないので，$20 + 4 =$ **24個** と求められる．

2.2 商と余り

1. 余り

A. 負の数の商と余り

$\div 5$ による余りは，負の数であっても，0, 1, 2, 3, 4 のみと定める．

たとえば，$43 \div 5$ は商 8，余り 3 であり $43 = 5 \times 8 + 3$ と表せた．

$(-43) \div 5$ の場合は，右のように考えて $-43 = 5 \times (-9) + 2$ となるので，商は -9，余りは 2 である．

$43 \div 5$ の余りは？

$$\Longrightarrow \begin{cases} 43 = 5 \times 9 - 2 & \leftarrow \text{余りが}-2\text{なので不適} \\ \mathbf{43 = 5 \times 8 + 3} & \leftarrow \text{余りは}3 \\ 43 = 5 \times 7 + 8 & \leftarrow \text{余りが}8\text{なので不適} \end{cases}$$

$(-43) \div 5$ の余りは？

$$\Longrightarrow \begin{cases} -43 = 5 \times (-7) - 8 & \leftarrow \text{余りが}-8\text{なので不適} \\ -43 = 5 \times (-8) - 3 & \leftarrow \text{余りが}-3\text{なので不適} \\ \mathbf{-43 = 5 \times (-9) + 2} & \leftarrow \text{余りは}2 \end{cases}$$

負の数を割る割り算の余り

整数 A を自然数 m で割る[*7]とき，余りは 0, 1, 2, $\cdots$, $m-1$ のいずれかとなるよう定める．
つまり，割り算 $A \div m$ において，等式 $A = mk + r$（r は 0, 1, 2, $\cdots$, $m-1$ のいずれか）を満たす整数 k を商，r を余りと定める．このとき，どんな割り算も商と余りがただ 1 つに定まる．

【例題 28】

1. 次の $\boxed{}$ に，割り算の商と余りを入れなさい．
   (a) $26 \div 5$ の商と余りは？→ $26 = 5 \times \boxed{ア} + \boxed{イ}$ から商は $\boxed{ア}$，余り $\boxed{イ}$
   (b) $(-26) \div 5$ の商と余りは？→ $-26 = 5 \times \boxed{ウ} + \boxed{エ}$ から商は $\boxed{ウ}$，余り $\boxed{エ}$
2. $34 \div 5$，$(-34) \div 5$，$7 \div 6$，$(-7) \div 6$ の商と余りを答えなさい．

【解答】

1. (a) $26 = 5 \times \underline{\mathbf{5}}_{(ア)} + \underline{\mathbf{1}}_{(イ)}$　(b) $-26 = 5 \times \underline{\mathbf{-6}}_{(ウ)} + \underline{\mathbf{4}}_{(エ)}$
2. $34 = 5 \times 6 + 4$ より，**商は 6**，**余りは 4**．
   $-34 = 5 \times (-7) + 1$ より，**商は -7**，**余りは 1**．
   $7 = 6 \times 1 + 1$ より，**商は 1**，**余りは 1**．
   $-7 = 6 \times (-2) + 5$ より，**商は -2**，**余りは 5**．

[*7] 負の数 m や 0 で割ったときの余りは考えない．

B.　倍数と余りの判定法

倍数と余りの判定法のまとめ

自然数 n について[*8]，倍数と余りの判定が以下のようにできる．

(1)
- 「$n \div 2$ の余り」=「(n の一の位) $\div 2$ の余り」
- 「$n \div 4$ の余り」=「(n の下 2 桁) $\div 4$ の余り」
- 「$n \div 8$ の余り」=「(n の下 3 桁) $\div 8$ の余り」

(2)
- 「$n \div 5$ の余り」=「(n の一の位) $\div 5$ の余り」
- 「$n \div 25$ の余り」=「(n の下 2 桁) $\div 25$ の余り」

(3)
- 「$n \div 3$ の余り」=「(n の全ての位の和) $\div 3$ の余り」
- 「$n \div 9$ の余り」=「(n の全ての位の和) $\div 9$ の余り」

（証明）『余りの判定法の証明』(p.110) を参照のこと．

【例題 29】 次の割り算の余りをそれぞれ求めよ（商は求めなくて良い）．

a) $245 \div 2$　b) $2314 \div 4$　c) $87654321 \div 4$　d) $192837465 \div 8$　e) $6789 \div 5$

f) $123401 \div 25$　g) $12345 \div 3$　h) $1234567 \div 9$

【解答】

a) 1 の位について $5 \div 2$ は余り 1 なので，**余り 1**.

b) 下 2 桁について $14 \div 4$ は余り 2 なので，**余り 2**.

c) 下 2 桁について $21 \div 4$ は余り 1 なので，**余り 1**.

d) 下 3 桁について $465 \div 8$ は余り 1 なので，**余り 1**.

e) 下 1 桁について $9 \div 5$ は余り 4 なので，**余り 4**.

f) 下 2 桁について $01 \div 25$ は余り 1 なので，**余り 1**.

g) $(1+2+3+4+5=15) \div 3 = 15 \div 3$ は余り 0 なので，**余り 0**.　◀ 全ての位を足した.

h) $(1+2+3+4+5+6+7) \div 9 = 28 \div 9$ は余り 1 なので，**余り 1**.　◀ 全ての位を足した.

[*8] この判定法は，n が負の数でも注意すれば使える．たとえば「−344 を 5 で割った余り」は「**−4** を 5 で割った余り」(4 ではない) になり，余り 1 である．
　同様に「−3576 を 9 で割った余り」も，$3+5+7+6=21$ より「**−21** を 9 で割った余り」に等しく 6 になる．

2. 余りと文字式

A. 余りの立式（1）～文字式の利用

たとえば，a が「3 で割って 1 余る整数」ならば，$a = 3k + 1$（k は整数）とおける．

（例）3 で割って，整数 a は 1 余り，整数 b は 2 余るならば，$2a+5$, $4a+3b$ を 3 で割った余りを求めよ．

（解）$a = 3k + 1$, $b = 3l + 2$（k, l は整数）とおける．　←aの商をk，bの商をlとおいた．

$2a + 5 = 2(3k + 1) + 5 = 6k + 7 = 3(2k + 2) + 1$ なので，$2a + 5$ を 3 で割った余りは 1.

$$\begin{aligned} 4a - 3b &= 4(3k + 1) - 3(3l + 2) = 12k + 4 - 9l - 6 \\ &= 12k - 9l - 2 \\ &= 3(4k - 3l - 1) + 1 \end{aligned}$$

←$(-2) = 3 \cdot (-1) + 1$ に注意（−2÷3は商−1，余り1）．

$4a + 3b$ を 3 で割った余りは 1.

a, b では商を異なる文字，k, l とおいていることに注意しよう．

【例題 30】 5 で割って，整数 a は 1 余り，整数 b は 2 余るとする．次の数を 5 で割った余りを求めよ．

1) $2a + 1$　　2) $5b - 2$　　3) $2a + 3b$　　4) $2a - 4b$　　5) $a^2 - b^2$

【解答】 $a = 5k + 1$, $b = 5l + 2$（k, l は整数）とおける．

◀ a の商を k，b の商を l とおいた．a, b の商が一致するか分からないので，別の文字をおいた．

1. $2a + 1 = 2(5k + 1) + 1 = 10k + 3 = 5 \cdot 2k + 3$ なので，**余りは 3**.
2. $5b - 2 = 5(5l + 2) - 2 = 25l + 8 = 5(5l + 1) + 3$ なので，**余りは 3**.
3. $2a + 3b = 2(5k + 1) + 3(5l + 2) = 10k + 15l + 8 = 5(2k + 3l + 1) + 3$ なので，**余りは 3**.
4. $2a - 4b = 2(5k + 1) - 4(5l + 2) = 10k - 20l - 6 = 5(2k - 4l - 2) + 4$ なので，**余りは 4**.

◀ $-6 = 5 \cdot (-2) + 4$

5. $$\begin{aligned} a^2 - b^2 = (5k + 1)^2 - (5l + 2)^2 &= 25k^2 + 10k + 1 - 25l^2 - 20l - 4 \\ &= 5(5k^2 + 2k - 5l^2 - 4l) - 3 \\ &= 5(5k^2 + 2k - 5l^2 - 4l - 1) + 2 \end{aligned}$$

◀ $-3 = 5 \cdot (-1) + 2$

よって，**余りは 2**.

このタイプの問題には，p.84 で学ぶように，別解が存在する．

余りが分かる数の立式～その 1～

a が「p で割って r 余る整数」ならば，$a = pk + r$（k は整数）とおける．

B. 余りを用いた証明（1）～文字式の利用

たとえば，どんな整数も 2 で割った余りは 0 か 1 であり，$2k$, $2k + 1$（k は整数）の形をしている．

また，どんな整数も 3 で割った余りは 0 か 1 か 2 であり，$3k$, $3k + 1$, $3k + 2$（k は整数）の形をしてい

る[*9]ため，次のような証明ができる．

次の問題には，p.84 で学ぶように，別解が存在する．

【例題 31】 $\boxed{}$ に適する式を入れ，整数 n について，n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを示せ．
どんな整数 n も $n = 3k,\ 3k+1,\ 3k+2$（k は整数）のいずれかである．
i) $n = 3k$ のとき，$n^2 = 3 \cdot \boxed{ア}$ であり，$\boxed{ア}$ は整数なので余り 0.
ii) $n = 3k+1$ のとき，$n^2 = 3 \cdot \boxed{イ} + 1$ であり，$\boxed{イ}$ は整数なので余り 1.
iii) $n = 3k+2$ のとき，$n^2 = 3 \cdot \boxed{ウ} + 1$ であり，$\boxed{ウ}$ は整数なので余り 1.
以上より，どんな整数 n についても，n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 のいずれかである．

【解答】 どんな整数 n も $n = 3k,\ 3k+1,\ 3k+2$（k は整数）のいずれか．
i) $n = 3k$ のとき，$n^2 = 9k^2 = 3 \cdot \underline{\boldsymbol{3k^2}}_{(ア)}$ であり，$3k^2$ は整数なので余り 0.
ii) $n = 3k+1$ のとき，$n^2 = 9k^2+6k+1 = 3(\underline{\boldsymbol{3k^2+2k}}_{(イ)})+1$ であり，$3k^2+2k$ は整数なので余り 1.
iii) $n = 3k+2$ のとき，$n^2 = 9k^2+12k+4 = 3(\underline{\boldsymbol{3k^2+4k+1}}_{(ウ)})+1$ であり，$3k^2+4k+1$ は整数なので余り 1.
以上より，どんな整数 n についても，n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 のいずれかである．

【練習 32：余りを用いた証明〜文字式の利用〜その１〜】
(1) どんな整数 n についても，$n(n+3)$ が偶数であることを示しなさい．
(2) どんな整数 n についても，n^3+2n+3 は 3 の倍数であることを示せ．

【解答】
(1) どんな整数 n も $n = 2k,\ 2k+1$（k は整数）のいずれかである．
　i) $n = 2k$ のとき，$n(n+3) = 2k(2k+3) = 2k(2k+3)$ となり，$k(2k+3)$ は整数なので $n(n+3)$ は偶数である．
　ii) $n = 2k+1$ のとき，$n(n+3) = (2k+1)(2k+4) = 2(2k+1)(k+2)$ となり，$(2k+1)(k+2)$ は整数なので $n(n+3)$ は偶数である．
　以上 i)，ii) より，$n(n+3)$ は必ず偶数である．
(2) どんな整数 n も，$n = 3k,\ 3k+1,\ 3k+2$（k は整数）のいずれかである．
　i) $n = 3k$ のとき，$n^3+2n+3 = (3k)^3+6k+3 = 3(9k^3+2k+1)$ であり，$9k^3+2k+1$ は整数なので 3 の倍数．
　ii) $n = 3k+1$ のとき

$$\begin{aligned} n^3+2n+3 &= (27k^3+27k^2+9k+1)+(6k+2)+3 \\ &= 27k^3+27k^2+15k+6 = 3(9k^3+9k^2+5k+2) \end{aligned}$$

　となり，$9k^3+9k^2+5k+2$ は整数なので 3 の倍数である．

◀ $n = 3k,\ 3k \pm 1$（k は整数）のいずれかである，でもよい．

[*9] または，余りは $0, \pm 1$ だと思い，「どんな整数も $3k,\ 3k \pm 1$（k は整数）の形をしている」としてもよい．証明も簡潔になる．

iii) $n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned}n^3+2n+3 &= (27k^3+54k^2+36k+8)+(6k+4)+3\\ &= 27k^3+54k^2+42k+15 = 3(9k^3+18k^2+14k+5)\end{aligned}$$

となり，$9k^3+18k^2+14k+5$ は整数なので 3 の倍数である．

以上 i)，ii)，iii) より，n^3+2n+3 が 3 の倍数であることが示された．

◀ $n=3k-1$ とした場合は

$$\begin{aligned}&n^3+2n+3\\ =&(27k^3-27k^2+9k-1)\\ &\quad+(6k-2)+3\\ =&3(9k^3-9k^2+5k)\end{aligned}$$

余りによる分類〜その１〜

p を 2 以上の自然数とする．どんな整数も，pk, $pk+1$, $pk+2$, $\cdots$，$pk+(p-1)$（k は整数）のいずれかの形をしている．

【練習 33：余りを用いた証明〜文字式の利用〜その２〜】

(1) どんな整数 n についても，n^2-5n が偶数であることを示しなさい．

(2) 整数 n が 3 で割り切れないならば，$3n^2-2$ を 9 で割った余りは 1 であることを示せ．

【解答】

(1) どんな整数 n も，$n=2k$, $2k+1$（k は整数）のいずれかである．

i) $n=2k$ のとき，$n^2-5n=(2k)^2-5\cdot 2k=4k^2-10k=2(2k^2-5k)$ となり，$2k^2-5k$ は整数なので n^2-5n は偶数である．

ii) $n=2k+1$ のとき，$n^2-5n=(2k+1)^2-5\cdot(2k+1)=4k^2+4k+1-10k-5=4k^2-6k-4=2(2k^2-3k-2)$ となり，$2k^2-3k-2$ は整数なので n^2-5n は偶数である．

以上 i)，ii) より，n^2-5n は偶数であることが示された．

(2) 3 で割り切れない整数 n は，$n=3k+1$, $3k+2$（k は整数）のいずれかである．

◀ $n=3k\pm1$（k は整数）とおいてもよく，この方が計算は簡単になる．

i) $n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned}3n^2-2 &= 3(3k+1)^2-2\\ &= 3(9k^2+6k+1)-2\\ &= 27k^2+18k+1 = 9(3k^2+2k)+1\end{aligned}$$

$3k^2+2k$ は整数なので，$3n^2-2$ を 9 で割った余りは 1 である．

ii) $n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned}3n^2-2 &= 3(3k+2)^2-2\\ &= 3(9k^2+12k+4)-2\\ &= 27k^2+36k+10 = 9(3k^2+4k+1)+1\end{aligned}$$

$3k^2+4k+1$ は整数なので，$3n^2-2$ を 9 で割った余りは 1 である．

以上 i)，ii) より，$3n^2-2$ を 9 で割った余りは 1 であると示された．

C.　連続する 2 数の積

連続する 2 つの整数，たとえば 12, 13 は，必ずどちらかが偶数であるから，積 $12\cdot 13$ は偶数である．

つまり，連続する 2 つの整数の積，たとえば $n(n+1)$ は必ず偶数になると分かる（n は整数とする）．

【暗記 34：連続する 2 数の積〜その１〜】
n は奇数とする．このとき，$n^2 - 1$ は 8 の倍数であることを示せ．

【解答】　奇数 n は，$n = 2k + 1$ とおける（k は整数）．計算すると

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$$

となる．$k(k + 1)$ は連続する 2 数の積なので偶数となるから，$4k(k + 1)$ は 8 の倍数である．よって $n^2 - 1$ が 8 の倍数であると示された．

【練習 35：文字式を利用した証明〜その１〜】
3 で割って 1 余る数を n とする．$n^2 + n - 2$ は 18 の倍数であることを示せ．

【解答】　3 で割って 1 余る数 n は，$n = 3k + 1$ とおける（k は整数）．

$$\begin{aligned} n^2 + n - 2 &= (3k + 1)^2 + (3k + 1) - 2 \\ &= 9k^2 + 6k + 1 + 3k + 1 - 2 = 9k(k + 1) \end{aligned}$$

となる．$k(k + 1)$ は連続する 2 数の積なので偶数となるから，$9k(k + 1)$ は 18 の倍数である．よって $n^2 + n - 2$ が 18 の倍数であると示された．

D.　連続する 3 数の積

連続する 3 つの整数，たとえば 11, 12, 13 は，必ず偶数を含むが，さらに，3 の倍数も必ず含むので，積 $11 \cdot 12 \cdot 13$ は 2 でも 3 でも割れて 6 の倍数である．これは，順に並べた整数の列 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, $\cdots$ において，3 つ毎に 3 の倍数が現れるためである．

この事実から，連続する 3 数の積，たとえば $n(n + 1)(n + 2)$ は，偶数にも 3 の倍数にもなり，必ず 6 の倍数になると分かる（n は整数とする）．

【暗記 36：文字式を利用した証明〜その３〜】
n は整数とする．$n^3 - n$ は 6 の倍数であることを示せ．

【解答】　$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$ である．これは，連続する 3 つの整数 $n - 1$, n, $n + 1$ の積であるから，必ず 6 の倍数である．

◀ 因数分解した

【練習 37：文字式を利用した証明〜その４〜】
連続する 3 つの偶数の積は，必ず 48 の倍数であることを示せ．

【解答】　連続する 3 つの偶数は，$2k$, $2k + 2$, $2k + 4$ とおける（k は整数）．これらの積は

$$2k(2k + 2)(2k + 4) = 2k \cdot 2(k + 1) \cdot 2(k + 2) = 8k(k + 1)(k + 2)$$

となる．ここで，$k(k + 1)(k + 2)$ は連続する 3 数の積なので 6 の倍数となるから，$8k(k + 1)(k + 2)$ は $8 \cdot 6 = 48$ の倍数である．よって，連続する 3 つの偶数の積 $2k(2k + 2)(2k + 4)$ が 48 の倍数であると示された．

3. 合同式

A. 合同式とは何か

たとえば，$41 \div 7$，$34 \div 7$ は共に余りが 6 で等しい．これを $41 \equiv 34 \pmod 7$ と表し，**合同式** (cougruence equation) という．mod7 で考えると，明らかに次のことが成り立つ．

$$41 \equiv 34 \equiv 27 \equiv 20 \equiv 13 \equiv 6$$ ←7ずつ引いても，ずっと合同のまま（余りは変わらない）

$$-36 \equiv -29 \equiv -22 \equiv -15 \equiv -8 \equiv -1 \equiv 6$$ ←7ずつ足しても，ずっと合同のまま（余りは変わらない）

【例題 38】 次の $\boxed{\quad}$ に，**1 桁の**正の数・負の数を入れなさい．

1. mod5 において，$18 \equiv 13 \equiv \boxed{\quad} \equiv 3 \equiv \boxed{\quad} \equiv \boxed{\quad} \equiv -12$
2. mod8 において，$18 \equiv 10 \equiv \boxed{\quad} \equiv \boxed{\quad} \equiv -14$
3. mod11 において，$-18 \equiv \boxed{\quad} \equiv \boxed{\quad} \equiv 15$

【解答】

1. 5 ずつ引いていき，$18 \equiv 13 \equiv \mathbf{8} \equiv 3 \equiv \mathbf{-2} \equiv \mathbf{-7} \equiv -12$.
2. 8 ずつ引いていき，$18 \equiv 10 \equiv \mathbf{2} \equiv \mathbf{-6} \equiv -14$.
3. 11 ずつ足していき，$-18 \equiv \mathbf{-7} \equiv \mathbf{4} \equiv 15$.

合同式の定義

整数 a, b と自然数 p について，$a \div p$ の余りと $b \div p$ の余りが等しいとき，a, b は **p を法として合同である** (congruent modulo p) と言い，$a \equiv b \pmod p$ と表す．
また，$a \equiv b \pmod p$ を言い換えて，$a - b$ が p の倍数になるとも言える．

B. 合同式の和・差・積

たとえば，$a \div 10$ の余りが 1 ならば，$(a+3) \div 10$ の余りは 4 である．

また，$21 \div 10$ は余り 1，$42 \div 10$ は余り 2 であり，$(21+42) \div 10$ の余りは $1+2=3$ になっている．

合同式で表すと右のようになり，同じ事が引き算・掛け算でも成り立つ．

mod10 において，
$a \equiv 1 \Rightarrow a+3 \equiv 1+3 = 4$

$$\begin{array}{rr} & 21 \equiv 1 \\ +) & 42 \equiv 2 \\ \hline & 21+42 \equiv 1+2 \end{array}$$

合同式の和・差・積

a, b, c, d, p を整数とする．合同式には次の性質がある．

$$\bmod p \text{ において，} a \equiv b,\ c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} (1)\ a+c \equiv b+d & \leftarrow \text{左辺同士，右辺同士足しても合同} \\ (2)\ a-c \equiv b-d & \leftarrow \text{左辺同士，右辺同士引いても合同} \\ (3)\ ac \equiv bd & \leftarrow \text{左辺同士，右辺同士掛けても合同} \\ (4)\ a^c \equiv b^c & \leftarrow \text{左辺，右辺を同じ累乗しても合同} \end{cases}$$

（証明）$a \equiv b$，$c \equiv d \pmod p$ より，$a = kp + b$, $c = lp + d$（k, l は整数）とおける．

(1) $a + c = (kp + b) + (lp + d) = (k + l)p + b + d$ なので $a + c \equiv b + d \pmod p$,

(2) $a - c = (kp + b) - (lp + d) = (k - l)p + b - d$ なので $a - c \equiv b - d \pmod p$,

(3) $ac = (kp + b)(lp + d) = klp^2 + dkp + blp + bd = (klp + dk + bl)p + bd$ なので $ac \equiv bd \pmod p$.

(4) $a^c = aaa \cdots a \equiv bbb \cdots b = b^c$

C. 合同式の計算

たとえば，mod5 において $a \equiv 2$, $b \equiv 1$ のとき，(1) より $a + b \equiv 2 + 1$ であり，$a + b \equiv 3$ と分かる．

結局，以下のようにして，「合同式でも**代入**ができる」と分かる．

(1) **（文字式の「代入」）**

$a = 2$, $b = 1$ のとき

$$\begin{aligned} a+b &= 2+1 = 3 \\ a-b &= 2-1 = 1 \\ ab &= 2 \times 1 = 2 \\ 2a+3b &= 2 \times 2 + 3 \times 1 = 7 \\ a^4 &= 2^4 = 16 \end{aligned}$$

(2) **（合同式の「代入」）**

mod5 において $a \equiv 2$, $b \equiv 1$ のとき

$$\begin{aligned} a+b &\equiv 2+1 = 3 && \leftarrow (1)\text{を利用} \\ a-b &\equiv 2-1 = 1 && \leftarrow (2)\text{を利用} \\ ab &\equiv 2 \times 1 = 2 && \leftarrow (3)\text{を利用} \\ 2a+3b &\equiv 2 \times 2 + 3 \times 1 = 7 \equiv 2 \\ a^4 &\equiv 2^4 = 16 \equiv 1 && \leftarrow (4)\text{を利用} \end{aligned}$$

【例題 39】 mod9 で考える．$a \equiv 3$, $b \equiv 2$ のとき，以下の値を計算しなさい．

1. $a + 2b$　　2. $3a - b$　　3. $2a + 3b$　　4. $2a - 4b$　　5. $a^2 - b^2$

【解答】

1. $a + 2b \equiv 3 + 2 \cdot 2 = \mathbf{7}$
2. $3a - b \equiv 3 \cdot 3 - 2 = \mathbf{7}$
3. $2a + 3b \equiv 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \equiv \mathbf{3}$
4. $2a - 4b \equiv 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -2 \equiv \mathbf{7}$
5. $a^2 - b^2 \equiv 3^2 - 2^2 = \mathbf{5}$

◀ mod9 より $-2 \equiv -2 + 9 = 7$

D.　余りの立式（２）〜合同式の利用

たとえば，a が「3 で割って 1 余る整数」ならば，$a \equiv 1 \pmod 3$ とおける．

p.78 と同じ問題を，合同式を用いて解いてみよう．

（例）3 で割って，整数 a は 1 余り，整数 b は 2 余るならば，$2a+5$, $4a-3b$ を 3 で割った余りを求めよ．

（解）mod3 で考える．$a \equiv 1$, $b \equiv 2$ であるから

$2a+5$ の余りは，$2a+5 \equiv 2\cdot1+5=7\equiv1$ より，余り 1.

$4a-3b$ の余りは，$4a-3b \equiv 4\cdot1-3\cdot2=-2\equiv1$ より，余り 1.

【例題 40】　a は 5 で割って余り 1，b は 5 で割って余り 2 とする．次の数を 5 で割った余りを求めよ．

1) $2a+1$　　2) $5b-2$　　3) $3a+2b$　　4) $5a-2b$　　5) $a-2b$　　6) $3a-2b$

【解答】　mod5 で考える．$a \equiv 1$, $b \equiv 2$ であるから

1. $2a+1 \equiv 2\cdot1+1=3$，よって**余り 3**.
2. $5b-2 \equiv 5\cdot2-2=8\equiv3$，よって**余り 3**.
3. $3a+2b \equiv 3\cdot1+2\cdot2=7\equiv2$，よって**余り 2**.
4. $5a-2b \equiv 5\cdot1-2\cdot2=1$，よって**余り 1**.
5. $a-2b \equiv 1-2\cdot2=-3\equiv2$，よって**余り 2**.
6. $3a-2b \equiv 3\cdot1-2\cdot2=-1\equiv4$，よって**余り 4**.

余りが分かる数の立式〜その２〜

a が「p で割って r 余る整数」ならば，$a \equiv r \pmod p$ とおける．

【例題 41】　n を 5 で割って 2 余る数とするとき，n^2+n+1 も 5 で割って 2 余ることを示せ．

【解答】　mod5 で考える．$n \equiv 2$ から，$n^2+n+1 \equiv 2^2+2+1=7\equiv2$ となって示された．

E.　余りを用いた証明（２）〜合同式の利用

どんな整数も，3 で割った余りは 0, 1, 2 のどれかである．合同法で言い換えると次のようになる．

「mod3 で考えて，整数 n は $n \equiv 0,\ 1,\ 2$ のいずれかである．」

この考え方を利用して，p.78 の例題を次のように解くことができる．

【暗記 42：余りを用いた証明〜合同式の利用〜その１〜】

整数 n について，n^2 を 3 で割った余りは，0 か 1 であることを示せ．

【解答】　mod3 で考えて，整数 n は $n \equiv 0,\ 1,\ 2$ のいずれかである．

1. $n \equiv 0$ のとき，$n^2 \equiv 0^2 = 0$　　2. $n \equiv 1$ のとき，$n^2 \equiv 1^2 = 1$

3. $n \equiv 2$ のとき，$n^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 1$

以上より，n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．

◀【別解】mod 3 で考えて $n \equiv 0, \pm1$ なので，$n^2 \equiv 0^2$, $(-1)^2 = 0,\ 1$，つまり n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1.

【練習 43：余りを用いた証明〜合同式の利用〜その２〜】

整数 n について，n^2 を 5 で割った余りは，0 か 1 か 4 であることを示せ.

【解答】 mod5 で考えて，整数 n は $n \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のいずれかである.

(1) $n \equiv 0$ のとき，$n^2 \equiv 0^2 = 0$　(2) $n \equiv 1$ のとき，$n^2 \equiv 1^2 = 1$

(3) $n \equiv 2$ のとき，$n^2 \equiv 2^2 = 4$　(4) $n \equiv 3$ のとき，$n^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 4$

(5) $n \equiv 4$ のとき，$n^2 \equiv 4^2 = 16 \equiv 1$

以上より，n^2 を 5 で割った余りは 0 か 1 か 4 である.

◀ $n \equiv 0, \pm1, \pm2$ のいずれか，とすると，証明はより簡潔にできる.

余りによる分類〜その２〜

p を 2 以上の自然数とする．どんな整数 a も，$a \equiv 0,\ 1,\ \cdots,\ p-1 \pmod p$ のいずれかである.

【練習 44：余りを用いた証明〜合同式の利用〜その３〜】

どんな整数 n についても，$n(n+2)(n+4)$ は 3 の倍数であることを示せ.

【解答】 mod3 で考えて，整数 n は $n \equiv 0,\ 1,\ 2$ のいずれかである.

(1) $n \equiv 0$ のとき，$n(n+2)(n+4) \equiv 0 \cdot 2 \cdot 4 = 0$

(2) $n \equiv 1$ のとき，$n(n+2)(n+4) \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15 \equiv 0$

(3) $n \equiv 2$ のとき，$n(n+2)(n+4) \equiv 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48 \equiv 0$

以上より，$n(n+2)(n+4)$ を 3 で割った余り 0 である.

F. 累乗と余り

まず，11^{13} を 5 で割った余りは，$11^{13} \equiv 1^{13} = 1 \pmod 5$ であるから，余り 1 である．では，12^{13} はどうだろうか.

（例）12^{13}, 12^{99} を 5 で割った余りを求めよ.

（解）mod5 で考える．$12^{13} \equiv 2^{13}$ である.

ここで，$2^2 = 4$, $2^3 = 8 \equiv 3$, $2^4 = 16 \equiv 1$ であるから　←$2^p \equiv 1$ になる p を探した

$$2^{13} = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

よって，12^{13} を 5 で割った余りは 2 である．同じようにして

$$12^{99} \equiv 2^{99} = \left(2^4\right)^{24} \cdot 2^3 \equiv 1^{24} \cdot 8 \equiv 3$$

よって，12^{99} を 5 で割った余りは 3 である.

【練習 45：累乗と余り〜その１〜】

(1) 11^{22} を 8 で割った余りを求めよ．　(2) 23^{45} を 5 で割った余りを求めよ．

(3) 13^{100} の 1 の位を求めよ．

【解答】

(1) mod8 で考える．$11^{22} \equiv 3^{22}$ である．ここで，$3^2 = 9 \equiv 1$ であるから

$$3^{22} = \left(3^2\right)^{11} \equiv 1^{11} = 1$$

よって，**余り 1** である．

◀ $3^p \equiv 1 \pmod 8$ となる p を探した

(2) mod5 で考える．$23^{45} \equiv 3^{45}$ である．

ここで，$3^2 = 9 \equiv 4$, $3^3 = 27 \equiv 2$, $3^4 = 81 \equiv 1$ であるから

$$3^{45} = \left(3^4\right)^{11} \cdot 3 \equiv 1^{11} \cdot 3 = 3$$

よって，**余り 3** である．

◀ $3^p \equiv 1 \pmod 5$ となる p を探した

(3) 13^{100} を 10 で割った余りが，1 の位である．mod10 で考えて

$$13^{100} \equiv 3^{100} = \left(3^4\right)^{25} = 81^{25} \equiv 1^{25} = 1$$

よって，**1 の位は 1** である．

◀ $3^2 = 9$, $3^3 = 27 \equiv 7$, $3^4 = 81 \equiv 1$ を用いた．なお，$9 \equiv -1$ に注目して，次の別解もできる．
$13^{100} \equiv 3^{100} = 9^{50} \equiv (-1)^{50} = 1$

【発展 46：累乗と余り〜その２〜】

① 8^{100} を 6 で割った余りを求めよ．　② 12^{100} の 1 の位を求めよ．

【解答】

① mod6 で考える．$8^{100} \equiv 2^{100}$ であり，$2^2 = 4$, $2^3 = 8 \equiv 2$ から

$$\begin{aligned} 8^{100} &\equiv 2^{100} = \left(2^3\right)^{33} \cdot 2 \\ &\equiv 2^{33} \cdot 2 = \left(2^3\right)^{11} \cdot 2 \\ &\equiv 2^{11} \cdot 2 = 2^{12} = \left(2^3\right)^4 \\ &\equiv 2^4 = 16 \equiv 4 \end{aligned}$$

よって，**余り 4** である．

◀ 8 も 6 も偶数なので，$8^p \equiv 1 \pmod 6$ となる p はない．

② 12^{100} を 10 で割った余りが，1 の位である．mod10 で考えて $12^{100} \equiv 2^{100}$ であるが，$2^5 = 32 \equiv 2$ であることを利用して

$$2^{100} = \left(2^5\right)^{20} = 32^{20} \equiv 2^{20} = \left(2^5\right)^4 = 32^4 \equiv 2^4 = 16 \equiv 6$$

よって，**1 の位は 6** になる．

◀ 2 も 10 も偶数なので，$2^p \equiv 1 \pmod{10}$ となる p はない．

2.3 ユークリッドの互除法と不定方程式

ユークリッドの互除法は，2000 年以上前，古代ギリシアの時代には用いられていた計算法である．これは，もともと大きな数同士の最大公約数を求める方法であるが，後に見るように $ax + by = c$ という一次不定方程式の解法にも用いられる．

1. ユークリッドの互除法

A. ユークリッドの互除法とは

たとえば，35 と 14 の最大公約数は 7 である．

一方，$35 \div 14$ は余り 7 であるが，割った数 14 と余り 7 の最大公約数も 7 である．

一般に，次の法則が成り立つ．

ユークリッドの互除法

自然数 a, b, q, r について，$a = bq + r$ とする．たとえば，$a \div b$ の商が q，余り r とする．このとき，**ユークリッドの互除法** (Euclidean algorithm) と呼ばれる次の定理が成り立つ．

(a, b の最大公約数) = (b, r の最大公約数)

（証明）a, b の最大公約数を d，b, r の最大公約数を d' とする．$d = d'$ を示せばよい．
まず，$a = bq + r$ において，b, r は d' の倍数なので，a は d' の倍数である．つまり，a, b とも d' の倍数なので，d' は a, b の公約数である．よって，$d' \leqq d$ (……… ①) である．
次に，$a = bq + r \Leftrightarrow r = a - bq$ であり，a, b は d の倍数なので，r も d の倍数である．つまり，b, r とも d の倍数なので，d は b, r の公約数である．よって，$d \leqq d'$ (……… ②) である．
①，②から，$d = d'$ が示された．

B. 大きな数の最大公約数を求める

たとえば，6179 と 2923 の最大公約数は，ユークリッドの互除法から，次のように求められる．

6179 と 2923 の最大公約数は，

2923 と 333 の最大公約数と等しく ($6179 \div 2923 = 2 \cdots 333$ なので)

333 と 259 の最大公約数と等しく ($2923 \div 333 = 8 \cdots 259$ なので)

259 と 74 の最大公約数と等しく ($333 \div 259 = 1 \cdots 74$ なので)

74 と 37 の最大公約数と等しく ($259 \div 74 = 3 \cdots 37$ なので)

つまり，37 である．

……以上の計算は，筆算を用い，次のようにまとめて計算できる．

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2923\,\overline{)\,6179} \\ \underline{5846} \\ 333 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rr} 8 & 2 \\ 333\,\overline{)\,2923} & \overline{)\,6179} \\ \underline{2664} & \underline{5846} \\ 259 & 333 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rrrrr} 2 & 3 & 1 & 8 & 2 \\ 37\,\overline{)\,74} & \overline{)\,259} & \overline{)\,333} & \overline{)\,2923} & \overline{)\,6179} \\ \underline{74} & \underline{222} & \underline{259} & \underline{2664} & \underline{5846} \\ 0 & 37 & 74 & 259 & 333 \end{array}$$

【例題 47】 次の 2 数の最大公約数を求めよ．

1. 611 と 564　2. 2449 と 1612　3. 3118 と 2219　4. 5217 と 2961　5. 7183 と 3758

【解答】

1. 右の計算から，564 と 47 の最大公約数と等しく，**47** である．

	12	1
47	) 564	) 611
	564	564
	0	47

2. 右の計算から，62 と 31 の最大公約数と等しく，**31** である．

	2	12	1	1	1
31	) 62	) 775	) 837	) 1612	) 2449
	62	744	775	837	1612
	0	31	62	775	837

3. 右の計算から，22 と 13 の最大公約数と等しく，**1** である．

	2	7	2	2	1
22	) 57	) 421	) 899	) 2219	) 3118
	44	399	842	1798	2219
	13	22	57	421	899

◀ さらに続けて
$22 \div 13 = 1 \cdots 9$
$13 \div 9 = 1 \cdots 4$
$9 \div 4 = 2 \cdots 1$ から，
4 と 1 の最大公約数 1 と等しい，
でもよい．

4. 右の計算から，705 と 141 の最大公約数と等しく，**141** である．

	5	3	1	1
141	) 705	) 2256	) 2961	) 5217
	705	2115	2256	2961
	0	141	705	2256

5. 右の計算から，48 と 47 の最大公約数と等しく，**1** である．

	1	3	10	1	1
48	) 95	) 333	) 3425	) 3758	) 7183
	48	285	3330	3425	3758
	47	48	95	333	3425

◀ さらに続けて
$48 \div 47 = 1 \cdots 1$ から，
47 と 1 の最大公約数 1 と等しい，
でもよい．

【発展 48：ユークリッドの互除法の応用】

① 整数 n について，$5n+1$ と $2n+3$ の最大公約数は，最大でいくつか．

② ①となるような，1000 以下の自然数 n は何個あるか．

【解答】

① $5n+1$, $2n+3$ の最大公約数は
$5n+1 = 2(2n+3)+(n-5)$ より $2n+1$, $n-5$ の最大公約数に等しく，
$2n+3 = 2(n-5)+13$ より $n-5$, 13 の最大公約数に等しい．
13 の約数は 13 が最大なので，$n-5$, 13 の最大公約数も 13 が最大．
よって，$5n+1$ と $2n+3$ の最大公約数も，**最大で 13** になる．

② $n-5 = 13k \Leftrightarrow n = 13k+5$（$k$ は整数）であればよい．$1 \leqq n \leqq 1000$ より

$$1 \leqq 13k+5 \leqq 1000$$
$$\Leftrightarrow\ -4 \leqq 13k \leqq 995$$
$$\Leftrightarrow\ -\frac{4}{13} \leqq k \leqq \frac{995}{13} = 76.\cdots$$

$0 \leqq k \leqq 76$ となるから，**77 個**．

◀ $k=0$ のときも $n=5$ となり，$5n+1=26$, $2n+3=13$ の最大公約数が 13 になっている．

◀ すべての辺から 5 を引いた

◀ すべての辺を 13 で割った

2. 不定方程式の解の 1 つを求める

A. 不定方程式とは何か

変数の数より方程式の数が少ないなどによって，解が無数に存在してしまう方程式を，**不定方程式** (Diophantine equation) という[*10]．不定方程式の**解** (solution) は，たいてい整数解のみを考える[*11]．

たとえば，$3x + 2y = 6$ は不定方程式である．変数 2 つに対し方程式は 1 つであり，$(x, y) = (0, 3), (2, 0)$ など，無数の整数解が存在する．

一方，$3x = 6$ は不定方程式でない．変数 1 つに対し方程式は 1 つであり，解は $x = 2$ しかない．

特に，1 次式で表された不定方程式 $ax + by = c$ を **1 次不定方程式**という．

B. $ax + by = 1$ の整数解を 1 つ求める〜その 1

たとえば，$2x+3y = 1$ を満たす整数解の 1 つとして，$(x, y) = (2, -1), (-1, 1)$ などが簡単に見つけられる．

【例題 49】 次の不定方程式を満たす整数解 (x, y) の組を 1 つずつ求めよ．

1. $3x + 4y = 1$　　2. $3x - 4y = 1$　　3. $2x - 3y = 1$

【解答】 以下は、答えの一例である。

1. $\mathbf{(-1, 1), (3, -2)}$　　2. $\mathbf{(3, 2)\ (-1, -1)}$　　3. $\mathbf{(2, 1), (-1, -1)}$

C. $ax + by = 1$ の整数解を 1 つ求める〜その 2

$68x + 47y = 1$ のように，整数解 (x, y) が見つけられない場合は，ユークリッドの互除法を用いる[*12]．

互除法の結果を並べた $\Longrightarrow$ A＝mk＋r の形に変形 $\Longrightarrow$ 移項してr＝の形にした

$$\left\{\begin{array}{l} 68 \div 47 = 1 \cdots 21 \\ 47 \div 21 = 2 \cdots 5 \\ 21 \div 5 = 4 \cdots 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 68 = 47 \cdot 1 + 21 \\ 47 = 21 \cdot 2 + 5 \\ 21 = 5 \cdot 4 + 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 21 = 68 - 47 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 5 = 47 - 21 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 1 = 21 - 5 \cdot 4 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{array}\right.$$

③へ，②，①を次のように代入していく．

$$\begin{aligned} 1 &= 21 - 5 \cdot 4 & & \\ &= 21 - (47 - 21 \cdot 2) \cdot 4 & &\Longleftarrow ② \text{を代入した} \\ &= 21 - 47 \cdot 4 + 21 \cdot 8 & &\Longleftarrow \cdot 4 \text{を分配した} \\ &= -47 \cdot 4 + 21 \cdot 9 & &\Longleftarrow 21 + 21 \cdot 8 = 21 \cdot (1 + 8) \\ &= -47 \cdot 4 + (68 - 47 \cdot 1) \cdot 9 & &\Longleftarrow ① \text{を代入した} \\ &= -47 \cdot 4 + 68 \cdot 9 - 47 \cdot 9 & &\Longleftarrow \cdot 9 \text{を分配した} \\ &= 68 \cdot 9 - 47 \cdot 13 & &\Longleftarrow -47 \cdot 4 - 47 \cdot 9 = 47 \cdot (-4 - 9) \end{aligned}$$

つまり，$68x + 47y = 1$ の解の一つが $\mathbf{(x, y) = (9, -13)}$ と求められる．

[*10] ディオファントス方程式ともいう．不定方程式に関するまとまった研究のうち，残された最古のものがアレクサンドリアのディオファントスによる（3 世紀）ため．

[*11] 高校数学以後では，有理数解を考えることもある．

[*12] ただし、これとは別のやり方も存在する。詳しくは p.110 を参照のこと。

【例題 50】 次の式を満たす整数解 $(x,\ y)$ の一つを，上のようにして求めなさい．

1. $23x+16y=1$　　2. $41x+17y=1$　　3. $38x-27y=1$　　4. $36x+29y=1$

【解答】

1. 23 と 16 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 23 \div 16 = 1 \cdots 7 \\ 16 \div 7 = 2 \cdots 2 \\ 7 \div 2 = 3 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7 = 23 - 16 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2 = 16 - 7 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 1 = 7 - 2 \cdot 3 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 = 7 - 2 \cdot 3 &= 7 - (16 - 7 \cdot 2) \cdot 3 \\ &= 7 - 16 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \\ &= -16 \cdot 3 + 7 \cdot 7 \\ &= -16 \cdot 3 + (23 - 16 \cdot 1) \cdot 7 \\ &= -16 \cdot 3 + 23 \cdot 7 - 16 \cdot 7 \\ &= 23 \cdot 7 - 16 \cdot 10 \end{aligned}$$

◀③へ②を代入した
◀$\cdot 3$ を分配した
◀$7 + 7 \cdot 6 = 7 \cdot (1 + 6)$
◀①を代入した
◀$\cdot 7$ を分配した
◀$-16 \cdot 3 - 16 \cdot 7 = 16 \cdot (-3 - 7)$

つまり，$23x + 16y = 1$ の解の一つが $\boldsymbol{(x,\ y) = (7, -10)}$ と求められる．

2. 41 と 17 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 41 \div 17 = 2 \cdots 7 \\ 17 \div 7 = 2 \cdots 3 \\ 7 \div 3 = 2 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7 = 41 - 17 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ④ \\ 3 = 17 - 7 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ⑤ \\ 1 = 7 - 3 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 = 7 - 3 \cdot 2 &= 7 - (17 - 7 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 7 - 17 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \\ &= -17 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \\ &= -17 \cdot 2 + (41 - 17 \cdot 2) \cdot 5 \\ &= -17 \cdot 2 + 41 \cdot 5 - 17 \cdot 10 \\ &= 41 \cdot 5 - 17 \cdot 12 \end{aligned}$$

◀⑥へ⑤を代入した
◀$\cdot 2$ を分配した
◀$7 + 7 \cdot 4 = 7 \cdot (1 + 4)$
◀④を代入した
◀$\cdot 5$ を分配した
◀$-17 \cdot 2 - 17 \cdot 10 = 17 \cdot (-2 - 10)$

つまり，$41x + 17y = 1$ の解の一つが $\boldsymbol{(x,\ y) = (5, -12)}$ と求められる．

3. 38 と 27 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 38 \div 27 = 1 \cdots 11 \\ 27 \div 11 = 2 \cdots 5 \\ 11 \div 5 = 2 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 11 = 38 - 27 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ⑦ \\ 5 = 27 - 11 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ⑧ \\ 1 = 11 - 5 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ⑨ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 = 11 - 5 \cdot 2 &= 11 - (27 - 11 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 11 - 27 \cdot 2 + 11 \cdot 4 \\ &= -27 \cdot 2 + 11 \cdot 5 \\ &= -27 \cdot 2 + (38 - 27 \cdot 1) \cdot 5 \\ &= -27 \cdot 2 + 38 \cdot 5 - 27 \cdot 5 \\ &= 38 \cdot 5 - 27 \cdot 7 \end{aligned}$$

◀⑨へ⑧を代入した
◀$\cdot 2$ を分配した
◀$11 + 11 \cdot 4 = 11 \cdot (1 + 4)$
◀⑦を代入した
◀$\cdot 5$ を分配した
◀$-27 \cdot 2 - 27 \cdot 5 = 27 \cdot (-2 - 5)$

つまり，$38x - 27y = 1$ の解の一つが $\boldsymbol{(x,\ y) = (5,\ 7)}$ と求められる．

◀y の符号に注意

4. 36 と 29 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 36 \div 29 = 1 \cdots 7 \\ 29 \div 7 = 4 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7 = 36 - 29 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ⑩ \\ 1 = 29 - 7 \cdot 4 & \cdots\cdots\cdots ⑪ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 = 29 - \boxed{7} \cdot 4 &= 29 - \boxed{(36 - 29 \cdot 1)} \cdot 4 \\ &= 29 - 36 \cdot 4 + 29 \cdot 4 \\ &= -36 \cdot 4 + 29 \cdot 5 \end{aligned}$$

◀ ⑪へ ⑩ を代入した
◀ ·4 を分配した
◀ $29 + 29 \cdot 4 = 29 \cdot (1 + 4)$

つまり，$36x + 29y = 1$ の解の一つが $\boldsymbol{(x,\ y) = (-4,\ 5)}$ と求められる.

【練習 51：整数解をもたない $ax + by = 1$】

$3x + 6y = 1$ には整数解 $x,\ y$ が存在しないことを示せ.

【解答】 整数解 $(x,\ y)$ があったとすると，（与式）$\Leftrightarrow 3(x + 2y) = 1$ となって左辺は 3 の倍数だが，右辺は 3 の倍数にならないので矛盾する.

よって，$3x + 6y = 1$ には整数解がない.

$ax + by = 1$ が整数解をもつ必要十分条件は，$a,\ b$ が互いに素なことである（p.111）.

D. $ax + by = c$ の整数解を 1 つ求める

たとえば，$2x + 3y = 5$ の整数解は $(x,\ y) = (1,\ 1)$ などが簡単に見つけられる.

しかし，$60x + 41y = 5$ の整数解は容易には見つからないので，互除法を用いて求める[*13].

互除法の結果を並べた ⟹ A＝bk＋r の形に変形 ⟹ 移項して r＝ の形にした

$$\begin{cases} 60 \div 41 = 1 \cdots 19 \\ 41 \div 19 = 2 \cdots 3 \\ 19 \div 3 = 6 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 60 = 41 \cdot 1 + 19 \\ 41 = 19 \cdot 2 + 3 \\ 19 = 3 \cdot 6 + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 19 = 60 - 41 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3 = 41 - 19 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 1 = 19 - 3 \cdot 6 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 19 - \boxed{3} \cdot 6 \\ &= 19 - \boxed{(41 - 19 \cdot 2)} \cdot 6 && \Longleftarrow \boxed{②}\text{ を代入した} \\ &= 19 - 41 \cdot 6 + 19 \cdot 12 && \Longleftarrow \bullet 6\text{ を分配した} \\ &= -41 \cdot 6 + \boxed{19} \cdot 13 && \Longleftarrow 19 + 19 \cdot 12 = 19 \cdot (1 + 12) \\ &= -41 \cdot 6 + \boxed{(60 - 41 \cdot 1)} \cdot 13 && \Longleftarrow \boxed{①}\text{ を代入した} \\ &= -41 \cdot 6 + 60 \cdot 13 - 41 \cdot 13 && \Longleftarrow \bullet 13\text{ を分配した} \\ &= 60 \cdot 13 - 41 \cdot 19 && \Longleftarrow -41 \cdot 6 - 41 \cdot 13 = 41 \cdot (-6 - 13) \end{aligned}$$

ここまでは，p.89 と同じであるが，最後の式 $60 \cdot 13 - 41 \cdot 19 = 1$ の両辺を 5 倍して

$$\begin{aligned} &\left(\boxed{60} \cdot 13 - \boxed{41} \cdot 19\right) \cdot 5 = 1 \cdot 5 \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{60} \cdot (13 \cdot 5) - \boxed{41} \cdot (19 \cdot 5) = 5 \quad \Longleftarrow \boxed{60}\text{ と }\boxed{41}\text{ はそのまま} \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{60} \cdot 65 - \boxed{41} \cdot 95 = 5 \end{aligned}$$

こうして，$60x + 41y = 5$ の解の一つが $\boldsymbol{(x,\ y) = (65, -95)}$ と求められる[*14].

[*13] ただし、これとは別のやり方も存在する。詳しくは p.110 を参照のこと。

[*14] ただし，$(x,\ y) = (24, -35),\ (-17,\ 25)$ も解になることが，一般解を求める（p.97）と分かる.

【例題 52】 次の式を満たす整数解 $(x,\ y)$ の一つを，前ページのようにして求めなさい．

1. $37x + 21y = 3$　　2. $69x + 56y = 2$　　3. $31x - 22y = 4$　　4. $25x + 16y = 3$

【解答】

1. 37 と 21 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 37 \div 21 = 1 \cdots 16 \\ 21 \div 16 = 1 \cdots 5 \\ 16 \div 5 = 3 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 16 = 37 - 21 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 5 = 21 - 16 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 1 = 16 - 5 \cdot 3 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 = 16 - 5 \cdot 3 &= 16 - (21 - 16 \cdot 1) \cdot 3 \\ &= 16 - 21 \cdot 3 + 16 \cdot 3 \\ &= -21 \cdot 3 + 16 \cdot 4 \\ &= -21 \cdot 3 + (37 - 21 \cdot 1) \cdot 4 \\ &= -21 \cdot 3 + 37 \cdot 4 - 21 \cdot 4 \\ &= 37 \cdot 4 - 21 \cdot 7 \end{aligned}$$

◀ ③へ ② を代入した
◀ $\cdot 3$ を分配した
◀ $16 + 16 \cdot 3 = 16 \cdot (1 + 3)$
◀ ① を代入した
◀ $\cdot 4$ を分配した
◀ $-21 \cdot 3 - 21 \cdot 4 = 21 \cdot (-3 - 4)$

最後の $37 \cdot 4 - 21 \cdot 7 = 1$ の両辺を 3 倍して，$37 \cdot 12 - 21 \cdot 21 = 3$ となり，$37x + 21y = 3$ の解の一つが $\boldsymbol{(x,\ y) = (12, -21)}$ と求められる．

2. 69 と 56 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 69 \div 56 = 1 \cdots 13 \\ 56 \div 13 = 4 \cdots 4 \\ 13 \div 4 = 3 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 13 = 69 - 56 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ④ \\ 4 = 56 - 13 \cdot 4 & \cdots\cdots\cdots ⑤ \\ 1 = 13 - 4 \cdot 3 & \cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 = 13 - 4 \cdot 3 &= 13 - (56 - 13 \cdot 4) \cdot 3 \\ &= 13 - 56 \cdot 3 + 13 \cdot 12 \\ &= -56 \cdot 3 + 13 \cdot 13 \\ &= -56 \cdot 3 + (69 - 56 \cdot 1) \cdot 13 \\ &= -56 \cdot 3 + 69 \cdot 13 - 56 \cdot 13 \\ &= 69 \cdot 13 - 56 \cdot 16 \end{aligned}$$

◀ ⑥へ ⑤ を代入した
◀ $\cdot 3$ を分配した
◀ $13 + 13 \cdot 12 = 13 \cdot (1 + 12)$
◀ ④ を代入した
◀ $\cdot 13$ を分配した
◀ $-56 \cdot 3 - 56 \cdot 13 = 56 \cdot (-3 - 13)$

最後の $69 \cdot 13 - 56 \cdot 16 = 1$ の両辺を 2 倍して $69 \cdot 26 - 56 \cdot 32 = 2$ となり，$69x + 56y = 2$ の解の一つが $\boldsymbol{(x,\ y) = (26, -32)}$ と求められる．

3. 31 と 22 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 31 \div 22 = 1 \cdots 9 \\ 22 \div 9 = 2 \cdots 4 \\ 9 \div 4 = 2 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 9 = 31 - 22 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ⑦ \\ 4 = 22 - 9 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ⑧ \\ 1 = 9 - 4 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ⑨ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 = 9 - 4 \cdot 2 &= 9 - (22 - 9 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 9 - 22 \cdot 2 + 9 \cdot 4 \\ &= -22 \cdot 2 + 9 \cdot 5 \\ &= -22 \cdot 2 + (31 - 22 \cdot 1) \cdot 5 \\ &= -22 \cdot 2 + 31 \cdot 5 - 22 \cdot 5 \\ &= 31 \cdot 5 - 22 \cdot 7 \end{aligned}$$

◀ ⑨へ ⑧ を代入した
◀ $\cdot 2$ を分配した
◀ $9 + 9 \cdot 4 = 9 \cdot (1 + 4)$
◀ ⑦ を代入した
◀ $\cdot 5$ を分配した
◀ $-22 \cdot 2 - 22 \cdot 5 = 22 \cdot (-2 - 5)$

最後の $31 \cdot 5 - 22 \cdot 7 = 1$ の両辺を 4 倍して $31 \cdot 20 - 22 \cdot 28 = 4$ となり，

$31x-22y=4$ の解の一つが $(x,\ y)=(20,\ 28)$ と求められる．

4. 25 と 16 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 25 \div 16 = 1 \cdots 9 \\ 16 \div 9 = 1 \cdots 7 \\ 9 \div 7 = 1 \cdots 2 \\ 7 \div 2 = 3 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 9 = 25 - 16 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ⑩ \\ 7 = 16 - 9 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ⑪ \\ 2 = 9 - 7 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ⑫ \\ 1 = 7 - 2 \cdot 3 & \cdots\cdots\cdots ⑬ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 = 7 - 2 \cdot 3 &= 7 - (9 - 7 \cdot 1) \cdot 3 \\ &= 7 - 9 \cdot 3 + 7 \cdot 3 \\ &= -9 \cdot 3 + 7 \cdot 4 \\ &= -9 \cdot 3 + (16 - 9 \cdot 1) \cdot 4 \\ &= -9 \cdot 3 + 16 \cdot 4 - 9 \cdot 4 \\ &= 16 \cdot 4 - 9 \cdot 7 \\ &= 16 \cdot 4 - (25 - 16 \cdot 1) \cdot 7 \\ &= 16 \cdot 4 - 25 \cdot 7 + 16 \cdot 7 \\ &= -25 \cdot 7 + 16 \cdot 11 \end{aligned}$$

◀ ⑬へ ⑫ を代入した
◀ ·3 を分配した
◀ $7+7\cdot 3=7\cdot(1+3)$
◀ ⑪ を代入した
◀ ·4 を分配した
◀ $-9\cdot 3-9\cdot 4=9\cdot(-3-4)$
◀ ⑩ を代入した
◀ ·7 を分配した
◀ $16\cdot 4+16\cdot 7=16\cdot(4+7)$

最後の $-25\cdot 7+16\cdot 11=1$ の両辺を 3 倍して $-25\cdot 21+16\cdot 33=3$ となり，$25x+16y=3$ の解の一つが $(x,\ y)=(-21,\ 33)$ と求められる．

◀ 実際には $(x,\ y)=(-5,\ 8)$ という解も存在する．これは一般解を求める（p.97）と分かる．

3. 1次不定方程式の一般解

A. 一般解とは何か

たとえば，不定方程式 $3x+4y=0$ を考えよう．この整数解として $(x,\ y)=(0,\ 0),\ (4,-3),\ (8,-6)$ などが考えられ，そのいずれも x は 4 の倍数，y は 3 の倍数になっている．

実際，次の 暗記 のようにして，$3x+4y=0$ の整数解はすべて $(x,\ y)=(4k,-3k)$（k は整数）と表されると分かる．このように，整数 k を用いて，不定方程式のすべての整数解を表したものを，**一般解**と言う．

【暗記 53：1 次不定方程式の一般解〜その１〜】

$\boxed{}$ にもっともふさわしい数字・式・言葉を入れ，$3x+4y=0$ の整数解を求めなさい．

方程式 $3x+4y=0$ は $3x=\boxed{ア}$ と変形でき，$3x$ は $\boxed{イ}$ の倍数と分かる．3 と 4 は $\boxed{ウ}$ なので，x が $\boxed{イ}$ の倍数でないといけない．

そこで，k を整数として $x=\boxed{エ}$ とおいて与式に代入すると，$3\cdot\boxed{エ}+4y=0$ となる．これを解いて $y=\boxed{オ}$ であるから，$3x+4y=0$ の一般解は $(x,\ y)=\left(\boxed{エ},\boxed{オ}\right)$（$k$ は $\boxed{カ}$）となる．

【解答】 $3x+4y=0 \Leftrightarrow 3x=\underline{\mathbf{-4y}}_{(ア)}$ から，$3x$ は$_{(イ)}\underline{\mathbf{4}}$の倍数と分かる．3 と 4 は**互いに素**$_{(ウ)}$なので，$x$ は 4 の倍数．

そこで，k を整数として $x=\underline{\mathbf{4k}}_{(エ)}$ とおいて代入すると

$$3(4k)+4y=0 \Leftrightarrow 3k+y=0 \Leftrightarrow y=\underline{\mathbf{-3k}}_{(オ)}$$

$3x+4y=0$ の一般解は $(x,\ y)=(4k,-3k)$（k は**整数**$_{(カ)}$）となる．

一般解の表し方は 1 通りではない．$(x,\ y) = (-4k,\ 3k)$（k は整数）と答えてもよい．
実際，次のようにして考えると，2 つの表し方は同じことを表していると分かる．

	···	$k=-2$	$k=-1$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	···	
$(x,\ y) = (4k, -3k)$	···	$(-8,\ 6)$	$(-4,\ 3)$	$(0,\ 0)$	$(4, -3)$	$(8, -6)$	···	$\Longleftarrow$
$(x,\ y) = (-4k,\ 3k)$	···	$(8, -6)$	$(4, -3)$	$(0,\ 0)$	$(-4,\ 3)$	$(-8,\ 6)$	···	$\Longleftarrow$

順序が逆に
なっている
だけで，
全体として
は結局同じ

このように，不定方程式の一般解は複数の形がある．詳しくは p.95 を参照のこと．

【例題 54】 次の 1 次不定方程式の一般解を求めなさい．

1. $2x + 3y = 0$　　2. $5x + 3y = 0$　　3. $4x - 3y = 0$　　4. $12x + 9y = 0$

【解答】

1. $2x = -3y$ であり，2 と 3 は互いに素なので
$(x,\ y) = (3k, -2k)$（k は整数）．
◀ $(x,\ y) = (-3k,\ 2k)$（k は整数）でもよい．
2. $2x = -3y$ であり，5 と 3 は互いに素なので $x = 3k$ とおけて
$(x,\ y) = (3k, -5k)$（k は整数）．
◀ $(x,\ y) = (-3k,\ 5k)$（k は整数）でもよい．
3. $4x = 3y$ であり，4 と 3 は互いに素なので $x = 3k$ とおけて
$(x,\ y) = (3k,\ 4k)$（k は整数）．
◀ $(x,\ y) = (-3k, -4k)$（k は整数）でもよい．
4. 与式の両辺を 3 で割って $4x + 3y = 0$．4 と 3 は互いに素なので
$(x,\ y) = (3k, -4k)$（k は整数）．
◀ $(x,\ y) = (-3k,\ 4k)$（k は整数）でもよい．

B.　1 次不定方程式 $ax + by = c$ の一般解〜その 1・解法の基礎〜

$ax + by = c$ の一般解は，次のようにして求めることができる．

（問）$2x + 3y = 1$ の一般解を求めなさい．

（解）$2x + 3y = 1$ ……… ① の解の一つは $(2, -1)$ であり，$2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1$ ……… ②．① − ② から

$$\begin{array}{rlr} & 2x + 3y & = 1 \\ -) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & = 1 \\ \hline & 2(x-2) + 3\{y - (-1)\} & = 0 \end{array} \iff 2(x-2) = -3(y+1)$$

2 と 3 は互いに素なので，$x - 2 = 3k,\ y + 1 = -2k$（k は整数）とおける．
よって，一般解は $(x,\ y) = (3k + 2, -2k - 1)$ となる．

もし，$2x + 3y = 1$ の解の一つを $(-1,\ 1)$ とすると最後の一般解は $(x,\ y) = (3k - 1,\ -2k + 1)$（$k$ は整数）と変わるが，この形も正しい．詳しくは p.95 を参照のこと．

【暗記 55：1 次不定方程式の一般解〜その２〜】

$\boxed{}$ に当てはまる式を答え，$4x+3y=2$ の一般解を求めなさい．

$4x+3y=2$ ……… ① の解の一つは $(2,-2)$ なので，$4\cdot 2+3\cdot(-2)=2$ ……… ②．①−② から $\boxed{ア}=0$ となる．ここから $\boxed{イ}=\boxed{ウ}$ であり，4 と 3 は互いに素なので，$\boxed{エ}=3k$, $\boxed{オ}=-4k$ とおける．よって，$(x,\ y)=\left(\boxed{カ},\ \boxed{キ}\right)$（$k$ は整数）となる．

【解答】

$$\begin{array}{rll} & 4x+3y & =2 \\ -) & 4\cdot 2+3\cdot(-2) & =2 \\ \hline & \underline{\mathbf{4(x-2)+3\{y-(-2)\}=0}}_{(ア)} & \end{array} \iff \underline{\mathbf{4(x-2)}}_{(イ)}=\underline{\mathbf{-3(y+2)}}_{(ウ)}$$

であり，4 と 3 は互いに素なので，$_{(エ)}\underline{\mathbf{x-2}}=3k$, $_{(オ)}\underline{\mathbf{y+2}}=-4k$ とおける．よって，$(x,\ y)=(_{(カ)}\underline{\mathbf{3k+2}},\ \underline{\mathbf{-4k-2}}_{(キ)})$（$k$ は整数）．

◀ アは $\mathbf{4(x-2)+3(y+2)=0}$ でも正しい．

C. 1 次不定方程式 $ax+by=c$ の一般解〜その２・一般解の様々な形〜

p.93 などで見たように，不定方程式の一般解は複数の形が存在する．この点を詳しく考えよう．

たとえば，$3x+2y=1$ の解を考える．この解には $(-1,\ 2)$ や，$(1,-1)$ や，$(3,-4)$ がある．それぞれを利用して一般解を考えてみよう．

i. (−1, 2) とした場合

$$\begin{array}{rll} & 3x+2y & =1 \\ -) & 3\cdot(-1)+2\cdot 2 & =1 \\ \hline & 3\{x-(-1)\}+2\{y-2\}=0 & \end{array}$$

$\Leftrightarrow 3(x+1)=-2(y-2)$

3 と 2 は互いに素なので
$x+1=2k,\ y-2=-3k$ となり
$(x,\ y)=(2k-1,-3k+2)$
（k は整数）

ii. (1, −1) とした場合

$$\begin{array}{rll} & 3x+2y & =1 \\ -) & 3\cdot 1+2\cdot(-1) & =1 \\ \hline & 3(x-1)+2\{y-(-1)\}=0 & \end{array}$$

$\Leftrightarrow 3(x-1)=-2(y+1)$

3 と 2 は互いに素なので
$x-1=2k,\ y+1=-3k$ となり
$(x,\ y)=(2k+1,-3k-1)$
（k は整数）

iii. (3, −4) とした場合

$$\begin{array}{rll} & 3x+2y & =1 \\ -) & 3\cdot 3+2\cdot(-4) & =1 \\ \hline & 3(x-3)+2\{y-(-4)\}=0 & \end{array}$$

$\Leftrightarrow 3(x-3)=-2(y+4)$

3 と 2 は互いに素なので
$x-3=2k,\ y+4=-3k$ となり
$(x,\ y)=(2k+3,-3k-4)$
（k は整数）

これらはすべて一般解として正しい．式の形は異なるが，以下のように同じ内容を表している．

	⋯	$k=-2$	$k=-1$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	⋯
$(x,\ y)=(2k-1,\ -3k+2)$	⋯	$(-5,\ 8)$	$(-3,\ 5)$	$(-1,\ 2)$	$(1,-1)$	$(3,-4)$	⋯
$(x,\ y)=(2k+1,\ -3k-1)$	⋯	$(-3,\ 5)$	$(-1,\ 2)$	$(1,-1)$	$(3,-4)$	$(5,-7)$	⋯
$(x,\ y)=(2k+3,\ -3k-4)$	⋯	$(-1,\ 2)$	$(1,-1)$	$(3,-4)$	$(5,-7)$	$(7,-10)$	⋯

⟸ 1 つずつずれているだけで，結局は同じ

結局，この 3 つの式は，次のような関係になっている．

$(x,\ y)=(2k-1,\ -3k+2)$ $\xrightarrow[x,\ y\text{に代入}]{k=k-1\text{を}}$ $(x,\ y)=(2k+1,\ -3k-1)$ $\xrightarrow[x,\ y\text{に代入}]{k=k-1\text{を}}$ $(x,\ y)=(2k+3,\ -3k-4)$

D. 1次不定方程式 $ax+by=c$ の一般解〜その３・正しい一般解の見分け方〜

たとえば，$(x,\ y)=(-2k-3, 3k+5)$ は $3x+2y=1$ の一般解として正しい．これは，次の 2 点が確認できるからである．

i.（左辺）$=3(-2k-3)+2(3k+5)=-6k-9+6k+10=1=$（右辺）

ii. x の k の係数について $|-2|=2$，y の k の係数について $|3|=3$，2 と 3 は互いに素になっている．

ii. を満たさない場合、整数でない k からも整数解 $(x,\ y)$ が作りうる。たとえば，$3x+2y=1$ の一般解として $x=-4k-3$, $y=6k+5$（k が整数）を考えると、$k=\dfrac{1}{2}$ からも整数解 $(x,\ y)=(-5,\ 8)$ が得られてしまう．

【例題 56】 以下の解は，$7x+4y=1$ の一般解であるか．一般解でない場合はその理由を簡潔に示せ．ただし，k は整数とする．

1. $(x,\ y)=(4k-1,\ 7k+2)$　　2. $(x,\ y)=(4k+3, -7k-5)$　　3. $(x,\ y)=(-12k-1,\ 21k+2)$

【解答】

1. $(x,\ y)=(4k-1,\ 7k+2)$ を $7x+4y$ に代入すると，$7(4k-1)+4(7k+2)=28k-7+28k+8$ となり，右辺の 1 にならないため**一般解でない**.
2. $(x,\ y)=(4k+3, -7k-5)$ を $7x+4y$ に代入すると，$7(4k+3)+4(-7k-5)=28k+21-28k-20=1$ となる．さらに，x, y の k の係数の絶対値は 4, 7 であり互いに素である．よって，**一般解である**.
3. x, y の k の係数の絶対値は 12, 21 であり公約数 3 をもち互いに素でないため，**一般解でない**.

1 次不定方程式の一般解の正誤を確かめる

$x=x_0k+x_1$, $y=y_0k+y_1$（k は整数）は，次の 2 点を満たしていれば 1 次不定方程式 $ax+by=c$ の一般解である．ただし，x_0, x_1, y_0, y_1, a, b はすべて整数であり，x_0, y_0, a, b は 0 でないとする．

i. x, y を代入して両辺が等しいこと.

ii. x と y の，k の係数の絶対値である，$|x_0|$, $|y_0|$ が互いに素であること.

この方法は，あくまでも答えの確認のために用いよう.

この確認方法が有効である証明は難しい．詳しくは p.112 を参照のこと.
ひとまずは，i. が成り立たなければ $x=x_0k+x_1$, $y=y_0k+y_1$ は解として不適切であること，ii. が成り立たなければ，k が整数でなくても，x, y が整数になりうることを理解しよう.

【練習 57：1 次不定方程式の解法〜その３〜】

次の 1 次不定方程式の一般解を求めなさい.

(1) $5x+4y=1$　　(2) $3x+4y=1$　　(3) $6x-5y=4$　　(4) $2x+3y=4$

【解答】 以下はすべて，一般解の一例である.

◀ 違った形を求めた場合は，自分で確認しよう.

(1) $5x+4y=1$ の解の 1 つとして $(x,\ y)=(1,-1)$ があるので

$$\begin{array}{rl} 5x+4y & =1 \\ -)\quad 5\cdot 1+4\cdot(-1) & =1 \\ \hline 5(x-1)+4\{y-(-1)\}=0 & \end{array} \Leftrightarrow 5(x-1)=-4(y+1)$$

5 と 4 は互いに素なので $x-1=4k,\ y+1=-5k$ となり，

$\boldsymbol{(x,\ y)=(4k+1,-5k-1)}$（$k$ は整数）．

(2) $3x+4y=1$ の解の 1 つとして $(x,\ y)=(-1,\ 1)$ があるので

$$\begin{array}{rl} 3x+4y & =1 \\ -)\quad 3\cdot(-1)+4\cdot 1 & =1 \\ \hline 3\{x-(-1)\}+4(y-1)=0 & \end{array} \Leftrightarrow 3(x+1)=-4(y-1)$$

3 と 4 は互いに素なので $x+1=4k,\ y-1=-3k$ となり，

$\boldsymbol{(x,\ y)=(4k-1,-3k+1)}$（$k$ は整数）．

(3) $6x-5y=4$ の解の 1 つとして $(x,\ y)=(4,\ 4)$ があるので

$$\begin{array}{rl} 6x-5y & =4 \\ -)\quad 6\cdot 4-5\cdot 4 & =4 \\ \hline 6(x-4)-5(y-4)=0 & \end{array} \Leftrightarrow 6(x-4)=5(y-4)$$

6 と 5 は互いに素なので $x-4=5k,\ y-4=6k$ となり，

$\boldsymbol{(x,\ y)=(5k+4,6k+4)}$（$k$ は整数）．

(4) $2x+3y=4$ の解の 1 つとして $(x,\ y)=(2,\ 0)$ があるので

$$\begin{array}{rl} 2x+3y & =4 \\ -)\quad 2\cdot 2+3\cdot 0 & =4 \\ \hline 2(x-2)+3(y-0)=0 & \end{array} \Leftrightarrow 2(x-2)=-3y$$

2 と 3 は互いに素なので $x-2=3k,\ y=-2k$ となり，

$\boldsymbol{(x,\ y)=(3k+2,-2k)}$（$k$ は整数）．

E. 1 次不定方程式 $ax+by=c$ の一般解〜その４・ユークリッドの互除法の利用〜

$29x+22y=3$ のように係数が大きな方程式の場合は，ユークリッドの互除法を用いて解の 1 つを求めて (p.89) から，一般解を求める (p.94).

例として $29x+22y=3$ を解こう．29 と 22 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 29\div 22=1\cdots 7 \\ 22\div 7=3\cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7=29-22\cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 1=22-7\cdot 3 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} 1 &= 22-\boxed{7}\cdot 3 \\ &= 22-\boxed{(29-22\cdot 1)}\cdot 3 && \Longleftarrow \boxed{②}\text{ を代入} \\ &= 22-29\cdot 3+22\cdot 3 && \Longleftarrow \cdot 3\text{ を分配} \\ &= -29\cdot 3+22\cdot 4 \end{aligned}$$

つまり，$29\cdot(-3)+22\cdot 4=1$ となるので，両辺に 3 を掛けて $29\cdot(-9)+22\cdot 12=3$ となり解の 1 つを得る．

$$\begin{array}{rl} 29x+22y & =3 \\ -)29\cdot(-9)+22\cdot 12 & =3 \\ \hline 29\{x-(-9)\}+22(y-12)=0 & \end{array} \Leftrightarrow 29(x+9)=-22(y-12)$$

29 と 22 は互いに素なので $x+9=22k,\ y-12=-29k$ となり，$(x,\ y)=(22k-9,-29k+12)$（k は整数）．

【練習 58：1 次不定方程式の解法〜その４〜】

次の 1 次不定方程式の一般解を求めなさい.

(1) $20x+11y=1$　(2) $31x+24y=3$　(3) $38x-29y=4$　(4) $37x+26y=2$

【解答】

(1) 20 と 11 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 20 \div 11 = 1 \cdots 9 \\ 11 \div 9 = 1 \cdots 2 \\ 9 \div 2 = 4 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 9 = 20 - 11 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2 = 11 - 9 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 1 = 9 - 2 \cdot 4 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③へ，②，①を次のように代入していく.

$$\begin{aligned} 1 = 9 - \boxed{2} \cdot 4 &= 9 - \boxed{(11 - 9 \cdot 1)} \cdot 4 \\ &= 9 - 11 \cdot 4 + 9 \cdot 4 \\ &= -11 \cdot 4 + \boxed{9} \cdot 5 \\ &= -11 \cdot 4 + \boxed{(20 - 11 \cdot 1)} \cdot 5 \\ &= -11 \cdot 4 + 20 \cdot 5 - 11 \cdot 5 \\ &= 20 \cdot 5 - 11 \cdot 9 \end{aligned}$$

◀ ② を代入した
◀ $\cdot 4$ を分配した
◀ $9 + 9 \cdot 4 = 9 \cdot (1+4)$
◀ ① を代入した
◀ $\cdot 5$ を分配した
◀ $-11 \cdot 4 - 11 \cdot 5 = 11 \cdot (-4-5)$

つまり，$20x+11y=1$ の解の一つが $(x,\ y)=(5,-9)$ と求められる.

$$\begin{array}{rrl} & 20x + 11y & = 1 \\ -) & 20 \cdot 5 + 11 \cdot (-9) & = 1 \\ \hline \end{array}$$

$20(x-5)+11\{y-(-9)\}=0 \iff 20(x-5)=-11(y+9)$

20 と 11 は互いに素なので $x-5=11k,\ y+9=-20k$ となり，

$(x,\ y)=(11k+5,-20k-9)$（k は整数）.

(2) 31 と 24 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 31 \div 24 = 1 \cdots 7 \\ 24 \div 7 = 3 \cdots 3 \\ 7 \div 3 = 2 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7 = 31 - 24 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ④ \\ 3 = 24 - 7 \cdot 3 & \cdots\cdots\cdots ⑤ \\ 1 = 7 - 3 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

⑥へ，⑤，④を次のように代入していく.

$$\begin{aligned} 1 = 7 - \boxed{3} \cdot 2 &= 7 - \boxed{(24 - 7 \cdot 3)} \cdot 2 \\ &= 7 - 24 \cdot 2 + 7 \cdot 6 \\ &= -24 \cdot 2 + \boxed{7} \cdot 7 \\ &= -24 \cdot 2 + \boxed{(31 - 24 \cdot 1)} \cdot 7 \\ &= -24 \cdot 2 + 31 \cdot 7 - 24 \cdot 7 \\ &= 31 \cdot 7 - 24 \cdot 9 \end{aligned}$$

◀ ⑤ を代入した
◀ $\cdot 2$ を分配した
◀ $7 + 7 \cdot 6 = 7 \cdot (1+6)$
◀ ④ を代入した
◀ $\cdot 7$ を分配した
◀ $-24 \cdot 2 - 24 \cdot 7 = 24 \cdot (-2-7)$

つまり，$31 \cdot 7 + 24 \cdot (-9) = 1$ となるので，両辺に 3 を掛けて $31 \cdot 21 + 24 \cdot (-27) = 3$ となり解の 1 つを得る.

$$\begin{array}{rrl} & 31x + 24y & = 3 \\ -) & 31 \cdot 21 + 24 \cdot (-27) & = 3 \\ \hline \end{array}$$

$31(x-21)+24\{y-(-27)\}=0 \iff 31(x-21)=-24(y+27)$

31 と 24 は互いに素なので $x-21=24k,\ y+27=-31k$ となり，

$(x,\ y)=(24k+21,-31k-27)$（k は整数）.

(3) 38 と 29 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 38 \div 29 = 1 \cdots 9 \\ 29 \div 9 = 3 \cdots 2 \\ 9 \div 2 = 4 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 9 = 38 - 29 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ⑦ \\ 2 = 29 - 9 \cdot 3 & \cdots\cdots\cdots ⑧ \\ 1 = 9 - 2 \cdot 4 & \cdots\cdots\cdots ⑨ \end{cases}$$

⑨へ，⑧，⑦を次のように代入していく．

$$\begin{aligned} 1 = 9 - \boxed{2} \cdot 4 &= 9 - \boxed{(29 - 9 \cdot 3)} \cdot 4 \\ &= 9 - 29 \cdot 4 + 9 \cdot 12 \\ &= -29 \cdot 4 + \boxed{9} \cdot 13 \\ &= -29 \cdot 4 + \boxed{(38 - 29 \cdot 1)} \cdot 13 \\ &= -29 \cdot 4 + 38 \cdot 13 - 29 \cdot 13 \\ &= 38 \cdot 13 - 29 \cdot 17 \end{aligned}$$

◀ ⑧ を代入した
◀ ·4 を分配した
◀ $9 + 9 \cdot 12 = 9 \cdot (1 + 12)$
◀ ⑦ を代入した
◀ ·13 を分配した
◀ $-29 \cdot 4 - 29 \cdot 13 = 29 \cdot (-4 - 13)$

つまり, $38{\cdot}13-29{\cdot}17 = 1$ となるので, 両辺に 4 を掛けて $38{\cdot}52-29{\cdot}68 = 4$ となり解の 1 つを得る.

$$\begin{array}{rl} 38x - 29y & = 4 \\ -)\,38 \cdot 52 - 29 \cdot 68 & = 4 \\ \hline 38(x - 52) - 29(y - 68) = 0 & \end{array} \iff 38(x - 52) = 29(y - 68)$$

38 と 29 は互いに素なので $x - 52 = 29k,\ y - 68 = 38k$ となり,

$(x,\ y) = (29k + 52,\ 38k + 68)$（$k$ は整数）．

(4) 37 と 26 で互除法を用いて変形すると

$$\begin{cases} 37 \div 26 = 1 \cdots 11 \\ 26 \div 11 = 2 \cdots 4 \\ 11 \div 4 = 2 \cdots 3 \\ 4 \div 3 = 1 \cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 11 = 37 - 26 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ⑩ \\ 4 = 26 - 11 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ⑪ \\ 3 = 11 - 4 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots ⑫ \\ 1 = 4 - 3 \cdot 1 & \cdots\cdots\cdots ⑬ \end{cases}$$

⑬へ，⑫，⑪，⑩を次のように代入していく．

$$\begin{aligned} 1 = 4 - \boxed{3} \cdot 1 &= 4 - \boxed{(11 - 4 \cdot 2)} \cdot 1 \\ &= 4 - 11 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ &= -11 \cdot 1 + \boxed{4} \cdot 3 \\ &= -11 \cdot 1 + \boxed{(26 - 11 \cdot 2)} \cdot 3 \\ &= -11 \cdot 1 + 26 \cdot 3 - 11 \cdot 6 \\ &= 26 \cdot 3 - 11 \cdot 7 \\ &= 26 \cdot 3 - \boxed{(37 - 26 \cdot 1)} \cdot 7 \\ &= 26 \cdot 3 - 37 \cdot 7 + 26 \cdot 7 \\ &= 37 \cdot (-7) + 26 \cdot 10 \end{aligned}$$

◀ ⑫ を代入した
◀ ·1 を分配した
◀ $4 + 4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 + 2)$
◀ ⑪ を代入した
◀ ·3 を分配した
◀ $-11 \cdot 1 - 11 \cdot 6 = 11 \cdot (-1 - 6)$
◀ ⑩ を代入した
◀ ·7 を分配した
◀ $26 \cdot 3 + 26 \cdot 7 = 26 \cdot (3 + 7)$

つまり，$37 \cdot (-7) + 26 \cdot 10 = 1$ となるので，両辺に 2 を掛けて $37 \cdot (-14) + 26 \cdot 20 = 2$ となり解の 1 つを得る．

$$\begin{array}{rl} 37x + 26y & = 2 \\ -)\,37 \cdot (-14) + 26 \cdot 20 & = 2 \\ \hline 37\{x - (-14)\} + 26(y - 20) = 0 & \end{array} \iff 37(x + 14) = -26(y - 20)$$

37 と 26 は互いに素なので $x + 14 = 26k,\ y - 20 = -37k$ となり,

$(x,\ y) = (26k - 14, -37k + 20)$（$k$ は整数）．

4. 種々の1次不定方程式

A. 1次不定方程式の自然数解

1次不定方程式の解を自然数に限るなら，解は有限個に限定される．

【例題 59】 以下の $\boxed{}$ に当てはまる数字，解の組を答え，適する言葉を選びなさい．

1. 等式 $3x+2y=20$ を満たす自然数解 $(x,\ y)$ を考えよう．
   $2y>0$ より，$3x<20$ でないといけないので，x に適する自然数は 1 以上 $\boxed{ア}$ 以下に限る．
   $x=1$ のとき y は $\boxed{イ}$ となり $\left\{\begin{matrix}適する\\不適\end{matrix}\right\}$，$x=2$ のとき y は $\boxed{ウ}$ となり $\left\{\begin{matrix}適する\\不適\end{matrix}\right\}$．これらを $\boxed{ア}$ まで繰り返して，すべての自然数解は $\boxed{エ}$ と分かる．
2. 等式 $2x+3y+4z=21$ を満たす自然数解 $(x,\ y,\ z)$ を考えよう．
   $2x+3y>0$ より，z に適する自然数は 1 以上 $\boxed{オ}$ 以下に限る．
   $z=1$ のとき $2x+3y=\boxed{カ}$ となり，y は 1 以上 $\boxed{キ}$ 以下に限り全ての自然数解 $(x,\ y)=\boxed{ク}$．
   $z=2$ のときは $2x+3y=\boxed{ケ}$ となり，同様にして全ての自然数解は $(x,\ y)=\boxed{コ}$ である．
   これを $z=\boxed{オ}$ まで繰り返して，$(x,\ y,\ z)$ の自然数解は $\boxed{サ}$ がすべてである．

【解答】

1. $2y>0$ より $3x<20 \Leftrightarrow x<\dfrac{20}{3}=6.\dot{6}$ となり，$1\leqq x\leqq \underline{\mathbf{6}}_{(ア)}$．
   $x=1$ のとき $3+2y=20 \Leftrightarrow 2y=17$ $\therefore y=\underline{\dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{2}}}_{(イ)}$ となり，**不適**．
   $x=2$ のとき $6+2y=20 \Leftrightarrow 2y=14$ $\therefore y=\underline{\mathbf{7}}_{(ウ)}$ となり，**適する**．
   $x=3$ のとき $9+2y=20 \Leftrightarrow 2y=11$（×），$x=4$ のとき $y=4$,
   $x=5$ のとき $2y=5$（×），$x=6$ のとき $y=1$,
   以上から，すべての自然数解は $\underline{\mathbf{(x,\ y)=(2,\ 7),\ (4,\ 4),\ (6,\ 1)}}_{(エ)}$．
2. $2x+3y>0$ より $4z<21 \Leftrightarrow z<\dfrac{21}{4}=5.25$ となり，
   $1\leqq z\leqq$ **5（右脚注の方法から 4 でもよい）**$_{(オ)}$．
   $z=1$ のとき $2x+3y=\underline{\mathbf{17}}_{(カ)}$, $2x>0$ より $3y<17$ なので $1\leqq y\leqq \underline{\mathbf{5}}_{(キ)}$．
   $y=1\to x=7$，$y=2\to 2x=11$（×），$y=3\to x=4$,
   $y=4\to 2x=5$（×），$y=5\to x=1$ より，
   $(x,\ y)=\underline{\mathbf{(7,1),(4,3),(1,5)}}_{(ク)}$．
   $z=2$ のとき $2x+3y=\underline{\mathbf{13}}_{(ケ)}$，$2x>0$ より $3y<13$ なので $1\leqq y\leqq 4$．
   $y=1\to x=5$，$y=2\to 2x=7$（×），
   $y=3\to x=2$，$y=4\to 2x=1$（×）より，$(x,\ y)=\underline{\mathbf{(5,1),(2,3)}}_{(コ)}$．
   $z=3$ のとき $2x+3y=9$，$2x>0$ より $3y<9$ なので $1\leqq y\leqq 2$．
   $y=1\to x=3$，$y=2\to 2x=3$（×）より，$(x,\ y)=(3,\ 1)$．
   $z=4$ のとき $2x+3y=5$，$y>2$ は適さず，$(x,\ y)=(1,\ 1)$．
   $z=5$ のとき $2x+3y=1$（×）以上から，$(x,\ y,\ z)=$
   $\underline{\mathbf{(7,1,1),\ (4,3,1),\ (1,5,1),\ (5,1,2),\ (2,3,2),\ (3,1,3),\ (1,1,4)}}_{(サ)}$．

◀または，$x\geqq 1$, $y\geqq 1$ から $2x+3y\geqq 5$ となり，$4z\leqq 16$ であり $z\leqq 4$ である．

B. 整数解，自然数解を求める

【暗記 60：因数分解を利用して整数解を求める】

次の不定方程式を満たす整数解 $(x,\ y)$ をすべて求めなさい．

1. $(x-1)(y+2)=3$　　2. $xy-x+2y=3$　　3. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}=1$

【解答】

1. 3 の約数は $\pm 1, \pm 3$ なので，以下のいずれかである．

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y+2=3 \end{cases},\quad \begin{cases} x-1=3 \\ y+2=1 \end{cases},\quad \begin{cases} x-1=-1 \\ y+2=-3 \end{cases},\quad \begin{cases} x-1=-3 \\ y+2=-1 \end{cases}$$

これらを解いて，$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 1),\ (4,-1),\ (0,-5),\ (-2,-3)}$．

2. （与式）$\Leftrightarrow x(y-1)+2y=3$

◀ x の係数をまとめた

$\Leftrightarrow x(y-1)+2(y-1)=3-2$

◀ 両辺から 2 を引き $(y-1)$ を作る

$\Leftrightarrow (x+2)(y-1)=1$

1 の約数は ± 1 なので，$\begin{cases} x+2=1 \\ y-1=1 \end{cases},\quad \begin{cases} x+2=-1 \\ y-1=-1 \end{cases}$ のいずれかである．これらを解いて，$\boldsymbol{(x,\ y)=(-1,\ 2),\ (-3,\ 0)}$．

3. （与式）$\Leftrightarrow y-2x=xy$

◀ 両辺を xy 倍した

$\Leftrightarrow \quad 0=xy+2x-y=x(y+2)-y$

$\Leftrightarrow x(y+2)-(y+2)=-2$

$\Leftrightarrow (x-1)(y+2)=-2$

-2 の約数は $\pm 1, \pm 2$ なので，以下のいずれかである．

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y+2=-2 \end{cases},\quad \begin{cases} x-1=-1 \\ y+2=2 \end{cases},\quad \begin{cases} x-1=2 \\ y+2=-1 \end{cases},\quad \begin{cases} x-1=-2 \\ y+2=1 \end{cases}$$

これらを解いて，$(x,\ y)=(2,-4),\ (0,\ 0),\ (3,-3),\ (-1,-1)$ であるが，$x\neq 0,\ y\neq 0$ より $\boldsymbol{(x,\ y)=(2,-4),\ (3,-3),\ (-1,-1)}$．

◀ 問題文において，分母が 0 になってはいけない．

【発展 61：候補を有限個に絞る】

$3a+2b+c=c^2,\ a<b<c$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ を全て求めなさい．

【解答】　$a<c,\ b<c$ より，$3a+2b+c<3c+2c+c=6c$ であるから $c^2<6c$．$c>0$ なので $c<6$ である．

◀ 2 次方程式 $c^2-6c<0$ を解くと考えてもよい．

$a<b<c$ より $c\neq 1,\ 2$ なので，$c=3,\ 4,\ 5$ しか適さない．

1. $c=3$ のとき，$3a+2b+3=3^2 \Leftrightarrow 3a+2b=6$ である．$2b>0$ より $3a<6$ であり $a=1$，このとき $2b=3$（×）．
2. $c=4$ のとき，$3a+2b+4=4^2 \Leftrightarrow 3a+2b=12$ であるが，$2b>0$ より $3a<12$ であり $a=1,\ 2,\ 3$．
   $a=1\to 2b=9$（×），$a=2\to b=3$，$a=3\to 2b=3$（×）．

◀ $c=4$ なので $a<b<c$ より $a=3$ は不適としてもよい．

3. $c=5$ のとき，$3a+2b+5=5^2 \Leftrightarrow 3a+2b=20$ であるが，$2b>0$ より $3a<20$ であり $a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$．

◀ $c=5$ なので $a<b<c$ より $a=4,\ 5,\ 6$ は不適としてもよい．

$a = 1 \to 2b = 17$（×），$a = 2 \to b = 7$，$a = 3 \to 2b = 11$（×），
$a = 4 \to b = 4$，$a = 5, 6$ ならば $a > b$ となって不適.
以上より，$(a, b, c) = (2, 3, 4), (2, 7, 5), (4, 4, 5)$ であるが，$a < b < c$ より $\boldsymbol{(a, b, c) = (2, 3, 4)}$.

2.4 数の数え方・表し方

1. n 進法とは何か

A. 10 進法

私たちは普段，1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ⋯ と数えていく．用いられる数字は 0, 1, 2, ⋯, 9 の 10 個の数字だけであるため，この数え方は **10 進法** (decimal numeral system) と言われる．また，10 進法を用いて表された数は **10 進数** (decimal numeral) と言われる．

B. n 進法

0, 1, 2 の 3 個の数字だけを用い，1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, ⋯ と数えることができる．このような数の表し方を **3 進法** (ternaly numeral system)，表された数を **3 進数** (ternaly numeral) と言う．

3 進数 A は，しばしば $A_{(3)}$ のように書かれる．たとえば，3 進数 121 であれば $121_{(3)}$ となる．

同様に，0, 1, 2, ⋯, $n-1$ の n 個の数字だけを用いた数の表し方を $\boldsymbol{n}$ **進法** (base-n numeral system) と言い，n 進法で表された数を $\boldsymbol{n}$ **進数** (base-n numeral) と言う．n 進数 A は，$A_{(n)}$ のように書かれる．

C. 世の中における n 進法

現在の私たちが 10 進法を用いる大きな理由の一つは，私たちの手の指が 10 本であることだろう．

しかし，歴史上，10 進法以外の方法で数えられた文明は多数存在する．たとえば，その名残として現在でも，時間の秒や分は 60 進法が用いられている．

また，私たちの社会に欠かせないコンピューターは，電気の ON/OFF だけで物を数えている．一方，**2 進法** (binary numeral system) は，数字の 1 か 0 だけで物を数える仕組みである．この類似性のため，コンピューターと 2 進法は大変密接な関係がある[*15].

【例題 62】 右の 1. は，10 進数と 3 進数の対応を表にまとめたものである．最後の空欄を埋めなさい．

また，2. 以降の空欄を埋めて，10 進数と，4 進数や 7 進数や 2 進数との対応をまとめなさい．

1.

10 進数	3 進数
1	1
2	2
3	10
4	11
5	12
6	20
7	21
8	22
9	100
10	101
11	
12	
13	
⋮	⋮

2.

10 進数	4 進数
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
⋮	⋮

3.

10 進数	7 進数
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
⋮	⋮

4.

10 進数	2 進数
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
⋮	⋮

[*15] 実際には，2 進数を 4 桁ずつに区切って 16 進数を用いられることが多い．詳しくは「情報」の科目などを参照のこと．

【解答】

1.

10 進数	3 進数
1	1
2	2
3	10
4	11
5	12
6	20
7	21
8	22
9	100
10	101
11	**102**
12	**110**
13	**111**
⋮	⋮

2.

10 進数	4 進数
1	**1**
2	**2**
3	**3**
4	**10**
5	**11**
6	**12**
7	**13**
8	**20**
9	**21**
10	**22**
11	**23**
12	**30**
13	**31**
⋮	⋮

3.

10 進数	7 進数
1	**1**
2	**2**
3	**3**
4	**4**
5	**5**
6	**6**
7	**10**
8	**11**
9	**12**
10	**13**
11	**14**
12	**15**
13	**16**
⋮	⋮

4.

10 進数	2 進数
1	**1**
2	**10**
3	**11**
4	**100**
5	**101**
6	**110**
7	**111**
8	**1000**
9	**1001**
10	**1010**
11	**1011**
12	**1100**
13	**1101**
⋮	⋮

2. n 進数を 10 進数に

A. 10 進数への変換

10 進数 46073 において，3 は 1 の位であり，4 は 10 の位，0 は 100 の位，6 は 1000 の位，7 は 10000 の位である．これは，10^0 の位，10^1 の位，10^2 の位，10^3 の位，10^4 の位と言い換えられ，次のように表せる．

$$46073_{(10)} = 4\cdot 10^4 + 6\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 7\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0$$

同様にして，3 進数 $12012_{(3)}$ は，右から順に 3^0 の位，3^1 の位，3^2 の位，3^3 の位，3^4 の位となる．そのため，次のように計算して 10 進数にできる．

$$\begin{aligned} 12012_{(3)} &= 1\cdot 3^4 + 2\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 \\ &= 1\cdot 81 + 2\cdot 27 + 0\cdot 9 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = 81 + 54 + 0 + 3 + 2 = 140_{(10)} \end{aligned}$$

【例題 63】 $2101_{(3)}$，$321_{(4)}$，$432_{(5)}$，$807_{(9)}$，$10101_{(2)}$ を，すべて 10 進数に変えなさい．

【解答】

$$\begin{aligned} 2101_{(3)} &= 2\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 \\ &= 2\cdot 27 + 1\cdot 9 + 0\cdot 3 + 1\cdot 1 = 54 + 9 + 0 + 1 = \mathbf{64_{(10)}} \\ 321_{(4)} &= 3\cdot 4^2 + 2\cdot 4^1 + 1\cdot 4^0 \\ &= 3\cdot 16 + 2\cdot 4 + 1\cdot 1 = 48 + 8 + 1 = \mathbf{57_{(10)}} \\ 432_{(5)} &= 4\cdot 5^2 + 3\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0 = \mathbf{117_{(10)}} \\ 807_{(9)} &= 8\cdot 9^2 + 0\cdot 9^1 + 7\cdot 9^0 = \mathbf{655_{(10)}} \\ 10101_{(2)} &= 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = \mathbf{21_{(10)}} \end{aligned}$$

B. 2 進法，5 進法の小数を 10 進法の小数に

10 進数の 0.3109 は，左から順に 1 の位，$\dfrac{1}{10}$ の位，$\dfrac{1}{100}$ の位，$\dfrac{1}{1000}$ の位，$\dfrac{1}{10000}$ の位からできている．これは，10^0 の位，$\dfrac{1}{10^1}$ の位，$\dfrac{1}{10^2}$ の位，$\dfrac{1}{10^3}$ の位，$\dfrac{1}{10^4}$ の位[*16]と言い換えられる．

$$0.3513_{(10)} = 0 \cdot 10^0 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 1 \cdot \frac{1}{10^2} + 0 \cdot \frac{1}{10^3} + 9 \cdot \frac{1}{10^4}$$

同様にして，5 進数ならば桁が 1 つ減るごとに $\dfrac{1}{5}$ 倍の個数の数を表せるため，$0.1304_{(5)}$ は，右から順に 5^0 の位，$\dfrac{1}{5^1}$ の位，$\dfrac{1}{5^2}$ の位，$\dfrac{1}{5^3}$ の位，$\dfrac{1}{5^4}$ の位となる．そのため，次のように計算して 10 進数にできる．

$$\begin{aligned} 0.1304_{(5)} &= 0 \cdot 5^0 + 1 \cdot \frac{1}{5^1} + 3 \cdot \frac{1}{5^2} + 0 \cdot \frac{1}{5^3} + 4 \cdot \frac{1}{5^4} \\ &= 1 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.04 + 0 \cdot 0.008 + 4 \cdot 0.0016 = 0.2 + 0.12 + 0.0064 = 0.3264_{(10)} \end{aligned}$$

$0.1304_{(5)} = 0.3264_{(10)}$

$$\begin{array}{rll} & 0.2 & \leftarrow 1 \times 0.2 \\ & 0.12 & \leftarrow 3 \times 0.04 \\ & 0 & \leftarrow 0 \times 0.008 \\ +) & 0.0064 & \leftarrow 4 \times 0.0016 \\ \hline & 0.3264 & \end{array}$$

この計算は，右上のような筆算を用いて行うとよい．

一般に，10 進法の分数に直して，分母が 2 の累乗や 5 の累乗になるときのみ，2 進法や 5 進法にしたとき有限小数になる．特に，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{9}$ が無限小数になってしまうので，3 進法，6 進法，7 進法，9 進法などで表された小数を 10 進法の小数にすることは，ここでは取り上げない．

【例題 64】 以下の小数を，すべて 10 進法の小数に変えなさい．

1. $0.312_{(5)}$　　2. $0.4012_{(5)}$　　3. $0.101_{(2)}$　　4. $0.1101_{(2)}$　　5. $0.31_{(4)}$

【解答】

1. $\dfrac{1}{5} = 0.2$，$\dfrac{1}{5^2} = 0.04$，$\dfrac{1}{5^3} = 0.08$ なので

$$\begin{aligned} 0.321_{(5)} &= 3 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.04 + 2 \cdot 0.008 \\ &= 0.6 + 0.04 + 0.016 = \mathbf{0.656_{(10)}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rll} & 0.6 & \leftarrow 3 \times 0.2 \\ & 0.04 & \leftarrow 1 \times 0.04 \\ +) & 0.016 & \leftarrow 2 \times 0.008 \\ \hline & 0.656 & \end{array}$$

2. $\dfrac{1}{5^4} = 0.0016$ なので

$$\begin{aligned} 0.4012_{(5)} &= 4 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.04 + 1 \cdot 0.008 + 2 \cdot 0.0016 \\ &= 0.8 + 0.008 + 0.0032 = \mathbf{0.8112_{(10)}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rll} & 0.8 & \leftarrow 4 \times 0.2 \\ & 0 & \leftarrow 0 \times 0.04 \\ & 0.008 & \leftarrow 1 \times 0.008 \\ +) & 0.0032 & \leftarrow 2 \times 0.0016 \\ \hline & 0.8112 & \end{array}$$

3. $\dfrac{1}{2} = 0.5$，$\dfrac{1}{2^2} = 0.25$，$\dfrac{1}{2^3} = 0.125$ なので

$$\begin{aligned} 0.101_{(2)} &= 1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.125 \\ &= 0.5 + 0.125 = \mathbf{0.625_{(10)}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rll} & 0.5 & \leftarrow 1 \times 0.5 \\ & 0 & \leftarrow 0 \times 0.25 \\ +) & 0.125 & \leftarrow 1 \times 0.125 \\ \hline & 0.625 & \end{array}$$

4. $\dfrac{1}{2^4} = 0.0625$ なので

$$\begin{aligned} 0.1101_{(2)} &= 1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.125 + 1 \cdot 0.0625 \\ &= 0.5 + 0.25 + 0.0625 = \mathbf{0.8125_{(10)}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rll} & 0.5 & \leftarrow 1 \times 0.5 \\ & 0.25 & \leftarrow 1 \times 0.25 \\ & 0 & \leftarrow 0 \times 0.125 \\ +) & 0.0625 & \leftarrow 1 \times 0.0625 \\ \hline & 0.8125 & \end{array}$$

[*16] 数学 II において，負の指数を学び，$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ と定義され，たとえば，$\dfrac{1}{10^1} = 10^{-1}$，$\dfrac{1}{10^2} = 10^{-2}$ である．そのため，0.3109 を左から順に 10^0 の位，10^{-1} の位，10^{-2} の位，10^{-3} の位，10^{-4} の位と考えることもできる．

5. $\frac{1}{4}=0.25$，$\frac{1}{4^2}=0.0625$ なので

$$\begin{aligned} 0.31_{(4)} &= 3\cdot 0.25 + 1\cdot 0.0625 \\ &= 0.75 + 0.0625 = \mathbf{0.8125_{(10)}} \end{aligned}$$

◀ $$\begin{array}{rl} 0.75 & \leftarrow 3\times 0.25 \\ +)\ 0.0625 & \leftarrow 1\times 0.0625 \\ \hline 0.8125 & \end{array}$$

3. 10 進数を n 進数に

A. 10 進法の整数を n 進法の整数に

$26_{(10)} = 11010_{(2)}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 26 \\ 2 & 13 \cdots 0 \\ 2 & 6 \cdots 1 \\ 2 & 3 \cdots 0 \\ & 1 \cdots 1 \end{array}$$

$163_{(10)} = 431_{(6)}$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 163 \\ 6 & 27 \cdots 1 \\ & 4 \cdots 3 \end{array}$$

たとえば，$26_{(10)}$ を 2 進数にするには，左のようにする．

つまり，2 で割り続けて余りを書き並べ，$26_{(10)} = 11010_{(2)}$ と求められる．

この求め方については，$4531_{(10)}$ を 10 で割り続けると，右のように，10 進数の位が順に現れることから理解できる．

$4531_{(10)} = 4531_{(10)}$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4531 \\ 10 & 453 \cdots 1 \\ 10 & 45 \cdots 3 \\ & 4 \cdots 5 \end{array}$$

上のやり方で求められることの厳密な証明は難しい (p.113).

【例題 65】 $53_{(10)}$ を 4 進数，3 進数，2 進数で表しなさい．
また，$456_{(10)}$ を 9 進数，8 進数，7 進数で表しなさい．

【解答】

$$\begin{array}{r|l} 4 & 53 \\ 4 & 13 \cdots 1 \\ & 3 \cdots 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 53 \\ 3 & 17 \cdots 2 \\ 3 & 5 \cdots 2 \\ & 1 \cdots 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 53 \\ 2 & 26 \cdots 1 \\ 2 & 13 \cdots 0 \\ 2 & 6 \cdots 1 \\ 2 & 3 \cdots 0 \\ & 1 \cdots 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 456 \\ 9 & 50 \cdots 6 \\ & 5 \cdots 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 456 \\ 8 & 57 \cdots 0 \\ & 7 \cdots 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 456 \\ 7 & 65 \cdots 1 \\ 7 & 9 \cdots 2 \\ & 1 \cdots 2 \end{array}$$

$\mathbf{53_{(10)} = 311_{(4)} = 1222_{(3)} = 110101_{(2)}}$

$\mathbf{456_{(10)} = 556_{(9)} = 710_{(8)} = 1221_{(7)}}$

B. 10 進法の小数を 2 進法，5 進法の小数に

たとえば，$0.296_{(10)}$ を 5 進法の小数にするには，左下のように，5 を掛けて整数部分を取り除くことを繰り返し，最後に整数部分を上から書き並べればよい．同じように，2 進数にするには，真ん中のように 2 を掛けていく．

$0.296_{(10)} = 0.122_{(5)}$

$$\begin{array}{rl} 0.296 & \\ \times\quad 5 & \\ \hline ①.480 & \\ \times\quad 5 & \leftarrow ①は無視して掛ける \\ \hline ②.40 & \leftarrow 0.48\times 5 \\ \times 5 & \leftarrow ②は無視して掛ける \\ \hline ②.0 & \leftarrow 0.4\times 5 \end{array}$$

$0.625_{(10)} = 0.101_{(2)}$

$$\begin{array}{rl} 0.625 & \\ \times\quad 2 & \\ \hline ①.250 & \\ \times\quad 2 & \leftarrow ①は無視して掛ける \\ \hline ⓪.50 & \leftarrow 0.25\times 2 \\ \times 2 & \\ \hline ①.0 & \leftarrow 0.5\times 2 \end{array}$$

$0.378_{(10)} = 0.378_{(10)}$

$$\begin{array}{rl} 0.378 & \\ \times\quad 10 & \\ \hline ③.780 & \\ \times\quad 10 & \\ \hline ⑦.80 & \leftarrow 0.78\times 10 \\ \times 10 & \\ \hline ⑧.0 & \leftarrow 0.8\times 10 \end{array}$$

これは，$0.378_{(10)}$ に 10 を掛けて整数部分を取り除くことを繰り返すと，下のように，10 進数の位が順に現れることから理解できる．

上のやり方で求められることの厳密な証明は難しい (p.114).

【例題 66】 $0.456_{(10)}$ を 5 進数で表せ．また，$0.8125_{(10)}$ を 2 進数で表せ．

【解答】

$$\begin{array}{rl}
0.456 & \\
\times \quad 5 & \\
\hline
②.280 & \\
\times \quad 5 & \leftarrow ②\text{は無視して掛ける} \\
\hline
①.40 & \leftarrow 0.28\times 5 \\
\times 5 & \leftarrow ①\text{は無視して掛ける} \\
\hline
②.0 & \leftarrow 0.4\times 5
\end{array}$$

$\mathbf{0.456_{(10)} = 0.212_{(5)}}$

$$\begin{array}{rl}
0.8125 & \\
\times \quad 2 & \\
\hline
①.6250 & \\
\times \quad 2 & \leftarrow ①\text{は無視して掛ける} \\
\hline
①.250 & \leftarrow 0.625\times 2 \\
\times \quad 2 & \leftarrow ①\text{は無視して掛ける} \\
\hline
⓪.50 & \leftarrow 0.25\times 2 \\
\times 2 & \\
\hline
①.0 & \leftarrow 0.25\times 2
\end{array}$$

$\mathbf{0.8125_{(10)} = 0.1101_{(2)}}$

4. n 進数の四則計算

A. 2 進数の足し算

まず，10 進数の足し算 $3578+8229$ を筆算で考えてみよう．

$$\begin{array}{r} 3578 \\ +\ 8229 \\ \hline {}^{1}7 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 3578 \\ +\ 8229 \\ \hline {}^{1}07 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 3578 \\ +\ 8229 \\ \hline 807 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 3578 \\ +\ 8229 \\ \hline 11807 \end{array}$$

8+9=17　　7+2+1=10　　5+2+1=8　　3+8=11

同様にして，2 進数の足し算 $10001_{(2)}+1011_{(2)}$ は次のように筆算できる．

ここで，$0_{(2)}+0_{(2)}=0_{(2)}$，$0_{(2)}+1_{(2)}=1_{(2)}$，$1_{(2)}+1_{(2)}=10_{(2)}$，$1_{(2)}+1_{(2)}+1_{(2)}=11_{(2)}$ に注意しよう．

$$\begin{array}{r} 10001 \\ +\ 1011 \\ \hline {}^{1}0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 10001 \\ +\ 1011 \\ \hline {}^{1}00 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 10001 \\ +\ 1011 \\ \hline 100 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 10001 \\ +\ 1011 \\ \hline 1100 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 10001 \\ +\ 1011 \\ \hline 11100_{(2)} \end{array}$$

1+1=10　　0+1+1=10　0+0+1=1　　0+1=1　　1を下ろした

【例題 67】 次の足し算をしなさい．

1. $1001_{(2)}+101_{(2)}$　　2. $11001_{(2)}+11011_{(2)}$　　3. $11111_{(2)}+1011_{(2)}$

【解答】

1. $\begin{array}{r} 1001 \\ +\ 101 \\ \hline \mathbf{1110}_{(2)} \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 11001 \\ +11011 \\ \hline \mathbf{110100}_{(2)} \end{array}$

◂ 2 進数では $1+1+1=11$ に注意．

3. $\begin{array}{r} 11111 \\ +\ 1011 \\ \hline {}^{1}0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 11111 \\ +\ 1011 \\ \hline {}^{1}10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 11111 \\ +\ 1011 \\ \hline {}^{1}010 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 11111 \\ +\ 1011 \\ \hline \mathbf{101010}_{(2)} \end{array}$

B. 2 進数の引き算

まず，10 進数の引き算 10131 − 4312 を筆算で考えてみよう．

$$
\begin{array}{cccccc} &&&&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 11}\\ &1&0&1&\cancel{3}&\cancel{1}\\ -&&4&3&1&2\\ \hline &&&&& \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc} &&&&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 11}\\ &1&0&1&\cancel{3}&\cancel{1}\\ -&&4&3&1&2\\ \hline &&&&1&9 \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc} &&{\scriptstyle 10}&&&\\ &\cancel{1}&\cancel{0}&1&3&1\\ -&&4&3&1&2\\ \hline &&&&1&9 \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc} &&{\scriptstyle 9}&&&\\ &&{\scriptstyle \cancel{10}}&{\scriptstyle 11}&&\\ &\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{1}&3&1\\ -&&4&3&1&2\\ \hline &&&&1&9 \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc} &&{\scriptstyle 9}&&&\\ &&{\scriptstyle \cancel{10}}&{\scriptstyle 11}&&\\ &\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{1}&3&1\\ -&&4&3&1&2\\ \hline &&5&8&1&9 \end{array}
$$

3から10借りた

11−2=9
2−1=1

1−3はできない
2つ左から借りる

これで借りられる

11−3=8
9−4=5

同様にして，2 進数の引き算 $110010_{(2)} - 1001_{(2)}$ は次のように筆算できる．

$0_{(2)} - 0_{(2)} = 0_{(2)}$，$1_{(2)} - 0_{(2)} = 1_{(2)}$，$10_{(2)} - 1_{(2)} = 1_{(2)}$ に注意しよう．

$$
\begin{array}{ccccccc} &&&&&&{\scriptstyle 10}\\ &1&1&0&0&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&&1&0&0&1\\ \hline &&&&&& \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ccccccc} &&&&&&{\scriptstyle 10}\\ &1&1&0&0&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&&1&0&0&1\\ \hline &&&&&0&1 \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ccccccc} &&&{\scriptstyle 1}&&&\\ &&&{\scriptstyle \cancel{10}}&{\scriptstyle 10}&&{\scriptstyle 10}\\ &&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&&1&0&0&1\\ \hline &&&&0&0&1_{(2)} \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ccccccc} &&&{\scriptstyle 10}&&&{\scriptstyle 10}\\ &1&\cancel{1}&\cancel{0}&0&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&&1&0&0&1\\ \hline &&&&0&0&1 \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ccccccc} &&&{\scriptstyle 1}&&&\\ &&&{\scriptstyle \cancel{10}}&{\scriptstyle 10}&&{\scriptstyle 10}\\ &1&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&&1&0&0&1\\ \hline &1&0&1&0&0&1 \end{array}
$$

0−1はできない
左隣から借りる

10−1=1

0−0=0

0−1はできない
左隣から借りる

10−1=1
残りは下ろす

また，$10010_{(2)} - 1101_{(2)}$ のように，繰り下がりが多い場合は次のようになる．

$$
\begin{array}{cccccc} &&&&&{\scriptstyle 10}\\ &1&0&0&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&1&1&0&1\\ \hline &&&&& \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc} &&&&&{\scriptstyle 10}\\ &1&0&0&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&1&1&0&1\\ \hline &&&&0&1 \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc} &&{\scriptstyle 10}&&&{\scriptstyle 10}\\ &\cancel{1}&\cancel{0}&0&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&1&1&0&1\\ \hline &&&&0&1 \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc} &&{\scriptstyle 1}&&&\\ &&{\scriptstyle \cancel{10}}&{\scriptstyle 10}&&{\scriptstyle 10}\\ &\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&1&1&0&1\\ \hline &&&&0&1 \end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc} &&{\scriptstyle 1}&&&\\ &&{\scriptstyle \cancel{10}}&{\scriptstyle 10}&&{\scriptstyle 10}\\ &\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&1&1&0&1\\ \hline &&&1&0&1_{(2)} \end{array}
$$

0−1はできない
隣から借りる

10−1=1

0−1はできない
2つ左から借りる

これで借りられる

10−1=1
1−1=0

【例題 68】 次の引き算をしなさい．

1. $11011_{(2)} - 101_{(2)}$　2. $10101_{(2)} - 1010_{(2)}$　3. $110110_{(2)} - 11011_{(2)}$　4. $101000_{(2)} - 11011_{(2)}$

【解答】

1.
$$
\begin{array}{cccccc} &&{\scriptstyle 0}&{\scriptstyle 10}&&\\ &1&\cancel{1}&\cancel{0}&1&1\\ -&&&1&0&1\\ \hline &\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}_{(2)} \end{array}
$$

2.
$$
\begin{array}{cccccc} &&&&{\scriptstyle 10}&\\ &1&0&\cancel{1}&\cancel{0}&1\\ -&&1&0&1&0\\ \hline &&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}_{(2)} \end{array}
$$

3.
$$
\begin{array}{ccccccc} &&&&&{\scriptstyle 0}&{\scriptstyle 10}\\ &1&1&0&1&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&1&1&0&1&1\\ \hline &&&&&&1 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccccccc} &&&&&{\scriptstyle 10}&\\ &&&&{\scriptstyle 0}&{\scriptstyle \cancel{0}}&{\scriptstyle 10}\\ &1&1&0&\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{0}\\ -&&1&1&0&1&1\\ \hline &&&&0&1&1 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccccccc} &1&1&0&1&1&0\\ -&&1&1&0&1&1\\ \hline &&&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}_{(2)} \end{array}
$$

◂ 繰り下がりしたために 2 桁目の 0 − 1 ができないから，再び隣から借りる

4.
$$
\begin{array}{ccccccc} &&&{\scriptstyle 0}&{\scriptstyle 10}&&\\ &1&0&\cancel{1}&\cancel{0}&0&0\\ -&&1&1&0&1&1\\ \hline &&&&&& \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccccccc} &&&&{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 1}&\\ &&&{\scriptstyle 0}&{\scriptstyle \cancel{10}}&{\scriptstyle \cancel{10}}&{\scriptstyle 10}\\ &1&0&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\ -&&1&1&0&1&1\\ \hline &&&&1&0&1 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccccccc} &&{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 10}&{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 1}&\\ &&{\scriptstyle \cancel{10}}&{\scriptstyle \cancel{0}}&{\scriptstyle \cancel{10}}&{\scriptstyle \cancel{10}}&{\scriptstyle 10}\\ &\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\ -&&1&1&0&1&1\\ \hline &&&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}_{(2)} \end{array}
$$

◂ 最初の 0 − 1 をするため，3 つ左の桁から繰り下がりを考えた．

C. 2 進数の掛け算

2 進数の掛け算 $1101_{(2)} \times 101_{(2)}$ は次のように筆算して，$1000001_{(2)}$ と分かる.

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times\quad 101 \\ \hline 1101 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 1101 \\ \times\quad 101 \\ \hline 1101 \\ 1101 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 1101 \\ \times\quad 101 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ \hline {}^{1}\ 001 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 1101 \\ \times\quad 101 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ \hline 1000001_{(2)} \end{array}$$

1101×1　　1101×1　　最後に足し算

【例題 69】 次の掛け算をしなさい.

1. $1011_{(2)} \times 101_{(2)}$　2. $10101_{(2)} \times 1011_{(2)}$　3. $1011_{(2)} \times 111_{(2)}$　4. $10011_{(2)} \times 1111_{(2)}$

【解答】

(1)
$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times\quad 101 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ \hline \mathbf{110111}_{(2)} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 10101 \\ \times\quad 1011 \\ \hline 10101 \\ 10101 \\ 10101 \\ \hline \mathbf{11100111}_{(2)} \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times\quad 111 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ 1011 \\ \hline \mathbf{1001101}_{(2)} \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{r} 10011 \\ \times\quad 1111 \\ \hline 10011 \\ 10011 \\ 10011 \\ 10011 \\ \hline \mathbf{100011101}_{(2)} \end{array}$$

D. 2 進数の割り算

2 進数の足し算 $110101_{(2)} \div 101_{(2)}$ は次のように筆算して，商 $1010_{(2)}$，余り $11_{(2)}$ となる.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 101\overline{)110101} \\ 101 \\ \hline 1 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 1 \\ 101\overline{)110101} \\ 101 \\ \hline 11 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 10 \\ 101\overline{)110101} \\ 101 \\ \hline 11 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 10 \\ 101\overline{)110101} \\ 101 \\ \hline 110 \end{array}$$

110÷101は商が1　　1を下ろした　　11÷101は商が0　　さらに0を下ろした

$$\Longrightarrow \begin{array}{r} 101 \\ 101\overline{)110101} \\ 101 \\ \hline 110 \\ 101 \\ \hline 1 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 101 \\ 101\overline{)110101} \\ 101 \\ \hline 110 \\ 101 \\ \hline 11 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 1010_{(2)} \\ 101\overline{)110101} \\ 101 \\ \hline 110 \\ 101 \\ \hline 11_{(2)} \end{array}$$

110÷101は商が1　　さらに1を下ろした　　11÷101は商が0

【例題 70】 次の割り算をしなさい．割り切れない場合は商と余りを答えなさい.

1. $111111_{(2)} \div 11_{(2)}$　2. $10101111_{(2)} \div 110_{(2)}$　3. $10001000_{(2)} \div 101_{(2)}$

【解答】

(1)
$$\begin{array}{r} 10101 \\ 11\overline{)111111} \\ 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 0 \end{array}$$

商 $\mathbf{10101}_{(2)}$

(2)
$$\begin{array}{r} 11101 \\ 110\overline{)10101111} \\ 110 \\ \hline 1001 \\ 110 \\ \hline 111 \\ 110 \\ \hline 111 \\ 110 \\ \hline 1 \end{array}$$

商 $\mathbf{11101}_{(2)}$，余り $\mathbf{1}_{(2)}$

(3)
$$\begin{array}{r} 11011 \\ 101\overline{)10001000} \\ 101 \\ \hline 111 \\ 101 \\ \hline 1000 \\ 101 \\ \hline 110 \\ 101 \\ \hline 1 \end{array}$$

商 $\mathbf{11011}_{(2)}$，余り $\mathbf{1}_{(2)}$

【練習 71：2 進数の四則計算】

次の計算をしなさい．割り切れない場合は商と余りを答えなさい．

(1) $11111_{(2)} + 11111_{(2)}$　(2) $1001000_{(2)} - 101011_{(2)}$　(3) $100100100_{(2)} - 111111_{(2)}$

(4) $11010110_{(2)} \div 111_{(2)}$　(5) $1101011010_{(2)} \div 1011_{(2)}$　(6) 発展 $1111_{(2)} \times 1111_{(2)}$

(1)
$$\begin{array}{r} 11111 \\ +\ 11111 \\ \hline \mathbf{111110}_{(2)} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 1001000 \\ -\ 101011 \\ \hline \mathbf{11101}_{(2)} \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r} 100100100 \\ -\ 111111 \\ \hline \mathbf{11100101}_{(2)} \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{r} 10101 \\ 111\,\big)\,11010110 \\ 111 \\ \hline 1001 \\ 111 \\ \hline 1010 \\ 111 \\ \hline 11_{(2)} \end{array}$$

商 **10101**$_{(2)}$，余り **11**$_{(2)}$

(5)
$$\begin{array}{r} 1001110 \\ 1011\,\big)\,1101011010 \\ 1011 \\ \hline 10011 \\ 1011 \\ \hline 10000 \\ 1011 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ \hline 0_{(2)} \end{array}$$

商 **1001110**$_{(2)}$

(6)
$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times\ 1111 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ \hline \mathbf{11100001}_{(2)} \end{array}$$

E. n 進数の計算

2 進数以外においても，足し算と引き算は筆算で計算できる[*17]．

【発展 72：n 進数の計算】

次の計算をしなさい．

① $12012_{(3)} + 2201_{(3)}$　② $123456_{(7)} - 54321_{(7)}$　③ $43210123_{(5)} - 1234321_{(5)}$

【解答】

①
$$\begin{array}{r} 12012 \\ +\ 2201 \\ \hline \mathbf{21220}_{(3)} \end{array}$$

②
$$\begin{array}{r} 123456 \\ -\ 54321 \\ \hline \mathbf{36135}_{(7)} \end{array}$$

③
$$\begin{array}{r} 43210123 \\ -\ 1234321 \\ \hline \mathbf{41420302}_{(5)} \end{array}$$

*17 掛け算・割り算は，九九が使えないため難しい．

2.5 第２章の補足

1. 余りの判定法の証明

倍数と余りの判定法のまとめ

自然数 n について，倍数と余りの判定が以下のようにできる．

(1)
- 「$n \div 2$ の余り」=「(n の一の位) $\div 2$ の余り」
- 「$n \div 4$ の余り」=「(n の下 2 桁) $\div 4$ の余り」
- 「$n \div 8$ の余り」=「(n の下 3 桁) $\div 8$ の余り」

(2)
- 「$n \div 5$ の余り」=「(n の一の位) $\div 5$ の余り」
- 「$n \div 25$ の余り」=「(n の下 2 桁) $\div 25$ の余り」

(3)
- 「$n \div 3$ の余り」=「(n の全ての位の和) $\div 3$ の余り」
- 「$n \div 9$ の余り」=「(n の全ての位の和) $\div 9$ の余り」

A. 『2,4,8,5,25 で割ったときの余り』の証明

自然数 n の一の位を a，下 2 桁を b，下 3 桁を c とし，それぞれ $n = 10A + a$，$n = 100B + b$，$n = 1000C + c$ とおく（A, B, C は整数）．

mod2 において，$n = 10A + a \equiv 0 + a = a$ より，「$n \div 2$ の余り」=「(n の一の位) $\div 2$ の余り」は示された．

mod4 において，$n = 100B + b \equiv 0 + b = b$ より，「$n \div 4$ の余り」=「(n の下 2 桁) $\div 4$ の余り」は示された．

mod8 において，$n = 100C + c \equiv 0 + c = c$ より，「$n \div 8$ の余り」=「(n の下 3 桁) $\div 8$ の余り」は示された．

mod5 において，$n = 10A + a \equiv 0 + a = a$ より，「$n \div 5$ の余り」=「(n の一の位) $\div 5$ の余り」は示された．

mod25 において，$n = 100B + b \equiv 0 + b = b$ より，「$n \div 25$ の余り」=「(n の下 2 桁) $\div 25$ の余り」は示された．

B. 『3,9 で割ったときの余り』の証明

自然数 n は k 桁の数とし，下から第 i 桁を a_i（$0 \leqq a_i \leqq 9$）とする．すると，

$$n = a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_1$$

である．mod3，mod 9 のいずれについても，$10 \equiv 1$ であるから

$$n \equiv a_k \cdot 1^{k-1} + a_{k-1} \cdot 1^{k-2} + \cdots + a_3 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 1 + a_1 = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

右辺は n の全ての位の和に一致するから，「$n \div 3$ の余り」=「(n の全ての位の和) $\div 3$ の余り」，「$n \div 9$ の余り」=「(n の全ての位の和) $\div 9$ の余り」がいずれも示された．

2. 1 次方程式 $ax + by = c$ の整数解を 1 つ求める別の方法

p.89, 91 で扱った方法には、別のやり方が存在する。たとえば、$60x + 41y = 5$ であれば

$$\begin{aligned} 60x + 41y = 5 &\iff (41 + 19)x + 41y = 5 \\ &\iff 41(x + y) + 19x = 5 \\ &\iff (19 \cdot 2 + 3)(x + y) + 19x = 5 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 19(2x+2y)+3(x+y)+19x=5$$
$$\Leftrightarrow 19(3x+2y)+3(x+y)=5$$

ここで $3x+2y=A,\ x+y=B$ とおいた $19A+3B=5$ には、整数解 $(A,\ B)=(2,-11)$ が存在する。$A=3x+2y=2,\ B=x+y=-11$ を解いて $(x,\ y)=(24,-35)$。

3. 発展 $ax+by=c$ が整数解をもつ条件

A. $ax+by=1$ が整数解をもつ条件

p.91 の例題で見たように，$3x+6y=1$ のように，$a,\ b$ が互いに素でないときは $ax+by=1$ には整数解が存在しない．これは，逆も成立し，たいていは次の形で述べられる．その証明には，「b で割った余りは（割り切れる場合を除くと）$b-1$ 通りしかない」ことが用いられる．

$ax+by=1$ が整数解をもつ条件

「$a,\ b$ が互いに素である」 $\Longleftrightarrow$ 「1 次不定方程式 $ax+by=1$ の整数解が存在する」

（証明）（$\Leftarrow$）$ax+by=1$ となる整数 $x,\ y$ が存在することを示すには，$ax=b(-y)+1$ であるから，適当な整数 x を選べば，ax を b で割った余りが 1 になることを示せばよい．そこで，$b-1$ 個の整数 $a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots,\ a(b-1)$ の中に，b で割った余りが 1 になるものが存在することを示す．
$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots a(b-1)$ の中で，b で割った余りが 1 となるものがなかったと仮定する（ ……… ①）．
まず，$a,\ b$ は互いに素なので，$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots,\ a(b-1)$ はすべて b で割り切れない．つまり，b で割った余りは 1 から $b-1$ のいずれかである．
しかし，$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots,\ a(b-1)$ は $b-1$ 個あるので，この中に余りが 1 のものがないならば，b で割った余りが等しくなるような $la,\ ma$（$b>l>m>0$）が存在しなければならない．このとき

$la-ma$ が b で割り切れる $\Rightarrow$ $la-ma=kb$ となる 0 でない整数 k が存在する

となって $(l-m)a=kb$ であるが，$l-m<b$ より[*18]，$a,\ b$ が互いに素であることと矛盾する．
よって，①は間違っており，$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots a(b-1)$ の中で，b で割った余りが 1 となるものが存在する．それを pa とおき，pa を b で割った余りを q とすれば，$pa=qb+1 \Leftrightarrow ap+b(-q)=1$ となり，$ax+by=1$ の整数解として $(p,-q)$ が存在すると示される．

（$\Rightarrow$）対偶「$a,\ b$ が最大公約数 $d(\neq 1)$ をもつならば，$ax+by=1$ は整数解をもたない」を背理法で示す．仮定より，$a=dA,\ b=dB$ とおける（$A,\ B$ は互いに素な整数）ので，$ax+by=1 \Leftrightarrow d(Ax+By)=1$ である．これを満たす整数解 $(x,\ y)$ があったならば，左辺は d の倍数，右辺は d で割って 1 余り矛盾する．
よって，$ax+by=1$ が整数解を持たないことが示されて，対偶が示された．

B. $ax+by=c$ が整数解をもつ条件

たとえば，$6x+12y=14$ は各辺を 2 で割って $3x+6y=7$ となる．このように，方程式 $ax+by=c$ は，$a,\ b,\ c$ の最大公約数が 1 になるようにできる．

この $3x+6y=7$ には整数解はない．$3(x+2y)=7$ と変形でき，$x,\ y$ が整数であれば左辺は 3 の倍数とな

[*18] 両辺を $l-m$ で割ると、$a=\dfrac{kb}{l-m}$ となるが、$l-m<b$ より右辺に b の約数が残り、それが $a,\ b$ の 1 でない公約数となってしまう。

る一方，右辺 3 の倍数にならないからである．

一般に，$ax+by=c$ について次が成り立つことが，上の証明を応用して示される．

$ax+by=c$ が整数解をもつ条件

$a,\ b,\ c$ の最大公約数が 1 のとき
「$a,\ b$ が互いに素」 $\Longleftrightarrow$ 「1 次不定方程式 $ax+by=c$ の整数解が存在する」

4. 発展 一次不定方程式の一般解について

A. 1 次不定方程式 $ax+by=c$ の一般解を確認する

1 次不定方程式 $ax+by=c$ の一般解を見分ける方法（p.96）は，いつでも有効であることが以下のように示される．

一次不定方程式の一般解の正誤を確かめる

$x=x_0k+x_1,\ y=y_0k+y_1$（k は整数）は，次の 2 点を満たしていれば一次不定方程式 $ax+by=c$ の一般解である．ただし，$x_0,\ x_1,\ y_0,\ y_1,\ a,\ b$ はすべて整数であり，$x_0,\ y_0,\ a,\ b$ は 0 でないとする．

i. $x,\ y$ を代入して両辺が等しいこと．

ii. x と y の，k の係数の絶対値である，$|x_0|,\ |y_0|$ が互いに素であること．

（証明）まず，i. を満たしているので，$ax+by$ に $x=x_0k+x_1,\ y=y_0k+y_1$ を代入した式

$$a(x_0k+x_1)+b(y_0k+y_1)=(ax_0+by_0)k+(ax_1+by_1)$$

は k に関わらず c に等しい．よって，$ax_0+by_0=0$ ……… ②, $ax_1+by_1=c$ ……… ③ である．

一方，$ax+by=c$ を満たす整数解 $(p,\ q)$ を任意にとる．このとき，適当な実数 $l,\ m$ が存在し，$p=x_0l+x_1,\ q=y_0m+y_1$ と表せる．$(p,\ q)$ は解なので

$$\begin{aligned}ap+bq=c &\Leftrightarrow a(x_0l+x_1)+b(y_0m+y_1)=c\\ &\Leftrightarrow ax_0l+by_0m+ax_1+by_1=c\\ &\Leftrightarrow -by_0l+by_0m+c=c\ (\text{②より } ax_0=-by_0 \text{ と，③を代入した})\\ &\Leftrightarrow by_0(m-l)=0\end{aligned}$$

$by_0\neq 0$ から $m-l=0$ であり，$m=l$ と分かる．よって，$(p,\ q)=(x_0l+x_1,\ y_0l+y_1)$ とおける．

あとは，l が整数でないといけないことを示せばよい．

まず，l が無理数であれば，$p,\ q$ が整数でないことは明らか．$l=\dfrac{v}{u}$ と既約分数で表せるとすると，$p=x_0\cdot\dfrac{v}{u}+x_1,\ q=y_0\cdot\dfrac{v}{u}+y_1$ はともに整数なので，u は $x_0,\ y_0$ の公約数でないといけない．しかし，ii. より，$x_0,\ y_0$ の最大公約数は 1．よって，$u=1$ であり l は整数である．

以上より，$ax+by=c$ のどんな整数解も，整数 l を用いて $(x,\ y)=(x_0l+x_1,\ y_0l+y_1)$ と表せる．

B. $ax+by=c$ の一般解

一般に，$a,\ b$ が互いに素であるとき，$ax+by=c$ の解の 1 つが $(x,\ y)=(x_0,\ y_0)$ であるならば，$(x,\ y)=(bk+x_0,\ -ak+y_0)$ は $ax+by=c$ の一般解になっている．これは，上の確認方法によって確かめることができる．

5. 発展 『10 進数から n 進数への変換』の証明

A. n 進法による数の表現

たとえば，n 進法の整数において，小さい位から a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_k だったとしよう（a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_k はすべて 0 から $n-1$ の整数）．このような整数 N は $a_k\cdots a_2a_1a_{0(n)}$ と書かれ

$N = a_k\cdots a_2a_1a_{0(n)} = a_k\cdot n^k + \cdots + a_2\cdot n^2 + a_1\cdot n + a_0$

である．たとえば，10 進法において，小さい位から 1, 2, 3, 4, 5 である整数 N は次のようになる．

$N = 12345_{(10)} = 1 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10^3 + 5\cdot 10^4$

同じように，0 と 1 の間の大きさの n 進法の小数において，大きい位から順に a_1, a_2, $\cdots$, a_k だったとしよう（a_1, a_2, $\cdots$, a_k はすべて 0 から $n-1$ の整数）．このような小数 N は $0.a_1a_2\cdots a_{k(n)}$ と書かれ

$N = 0.a_1a_2\cdots a_{k(n)} = 0 + a_1\cdot\dfrac{1}{n} + a_2\cdot\dfrac{1}{n^2} + \cdots + a_k\cdot\dfrac{1}{n^k}$

である．たとえば，10 進法において，小数第 1 位から順に 9, 8, 7, 6, 5 である小数 N は次のようになる．

$N = 0.98765_{(10)} = 0 + 9\cdot\dfrac{1}{10} + 8\cdot\dfrac{1}{10^2} + 7\cdot\dfrac{1}{10^3} + 6\cdot\dfrac{1}{10^4} + 5\cdot\dfrac{1}{10^5}$

B. 『10 進法の整数を n 進法の整数にする方法』の証明

この方法は，結局次のようにまとめられ，数学 B で学ぶ「数学的帰納法」を使って示すことができる．

10 進法の整数を n 進法の整数にする方法

整数 N を n で割り，その商を再び n で割ることを，商が n 未満になるまで繰り返す（$\cdots\cdots$ ④）．④が k 回行われ，i 回目の余りを a_{i-1}（$1\leqq i\leqq k$）、最後に残った n より小さな商を a_k とおくと，$N = a_k\cdots a_2a_1a_{0_{(n)}}$ である．

$163_{(10)} = 431_{(6)}$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 163 \\ 6 & 27 \cdots 1 \\ & 4 \cdots 3 \end{array}$$

（証明）$A_k = \left\{N \,\middle|\, n^k \leqq N < n^{k+1}\right\}$ とおくと、④を k 回行う数と集合 A_k は一致する。0 以上のすべての k について、A_k に含まれる全要素が定理を満たすことを、k についての数学的帰納法を用いて示す．

i) $k=0$ のときは明らか。$k=1$ のとき，$A_1 \in N$ について、$N\div n$ の余りが a_0、商が a_1 となるので $N = a_1a_{0(n)}$ を示せばよいが，$N\div n = a_1\cdots a_0$ より $N = a_1\cdot n + a_0 = a_1a_{0(n)}$ となって示された．

ii) $0\leqq l\leqq k$ である整数 l に対し、$A_l \in N$ については，命題が正しいと仮定する（$\cdots\cdots$ ⑤）．

このとき，$A_{k+1}\ni N$ について，④を繰り返した i 回目の余りを a_{i-1}（$1\leqq i\leqq k+1$）、最後に残った n より小さな商を a_{k+1} とおくと，$N = a_{k+1}\cdots a_2a_1a_{0_{(n)}}$ であることを示せばよい．

N を最初に割った商を q，余りを r とおく．すると，$r = a_0$ より $N = nq + a_0$（$\cdots\cdots$ ⑥）である．また，$q\in A_k$ であり、最後に残った n より小さな商は N と同じ a_{k+1}，q に対する i 回目の④の余りは、N に対する $i+1$ 回目の④の余りに等しく a_i．

よって，仮定⑤より $q = a_{k+1}\cdots a_3a_2a_{1_{(n)}} = a_{k+1}\cdot n^k + \cdots + a_3\cdot n^2 + a_2\cdot n + a_1$ である。⑥に代入して

$$\begin{aligned} N &= n(a_{k+1}\cdot n^k + \cdots + a_3\cdot n^2 + a_2\cdot n + a_1) + a_0 \\ &= a_{k+1}\cdot n^{k+1}\cdots + a_3\cdot n^3 + a_2\cdot n^2 + a_1\cdot n + a_0 = a_{k+1}\cdots a_3a_2a_1a_{0_{(n)}} \end{aligned}$$

よって，$A_{k+1}\ni N$ でも正しい．

以上より，④が何回必要な整数であっても，正しいことが示された．

C. 『10 進法の小数を n 進法の小数にする方法』の証明

この方法は，結局次のようにまとめられ，数学 B で学ぶ「数学的帰納法」を使って示すことができる．

10 進法の小数を n 進法の小数にする方法

$0 < N < 1$ とする．N に n を掛け，その答えの整数部分を取り除き，小数部分を再び n で掛けることを，繰り返す（……… ⑦）．k 回目の⑦で取り除かれた整数部分を a_k とおくと，$N = 0.a_1a_2a_3 \cdots a_k \cdots_{(n)}$ である[*19]．

0. 2 9 6　($0.296_{(10)} = 0.122_{(5)}$)
× 5
①. 4 8 0
× 5 ←①は無視して掛ける
②. 4 0 ←0. 48×5
×5 ←②は無視して掛ける
②. 0 ←0. 4×5

（証明・どんな実数にも n 進法表記ができることは証明無しに用いる）

実数 N に対し、$N = 0.b_1b_2b_3 \cdots b_k \cdots_{(n)}$ とする（有限小数の場合は，ある程度以上大きな k では $b_k = 0$ とする）．$a_k = b_k$ であることを示せばよい．

ここで，「⑦を l 回繰り返した時，N が $b_l.b_{l+1}b_{l+2} \cdots_{(n)}$ となっていること」を数学的帰納法を用いて示す．

(1) $l = 1$ のとき

$$N = 0.b_1b_2 \cdots b_k \cdots_{(n)} = 0 + b_1 \cdot \frac{1}{n} + b_2 \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + b_k \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots$$

であるから，N に n を掛けると

$$nN = b_1 + b_2 \cdot \frac{1}{n} + b_3 \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + b_k \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \cdots = b_1.b_2b_3 \cdots_{(n)}$$

となり，正しい．

(2) $l = k$ のとき正しいと仮定する．つまり，⑦を k 回繰り返した後，N が $b_k.b_{k+1}b_{k+2} \cdots_{(n)}$ となっていると仮定する．この小数部分 $0.b_{k+1}b_{k+2} \cdots_{(n)}$ を n 倍すると

$$\begin{aligned} n \times 0.b_{k+1}b_{k+2} \cdots_{(n)} &= n\left(0 + b_{k+1} \cdot \frac{1}{n} + b_{k+2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots\right) \\ &= b_{k+1} + b_{k+2} \cdot \frac{1}{n} + b_{k+3} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots = b_{k+1}.b_{k+2}b_{k+3} \cdots_{(n)} \end{aligned}$$

となり，$l = k + 1$ のときも正しい．

以上より，任意の自然数 k について，⑦を k 回繰り返した時，N が $b_k.b_{k+1}b_{k+2} \cdots_{(n)}$ となって整数部分は b_k となる。

よって、k 回繰り返した後に取り除く整数部分が b_k に一致するから，$a_k = b_k$ が示された．

*19 小数点以降，無限に数が続く数は「無限個の数の和」を表し，無限の扱いについて注意が必要になるが，この場合は問題がない．詳しくは数学 III で学ぶ．

第3章　平面図形

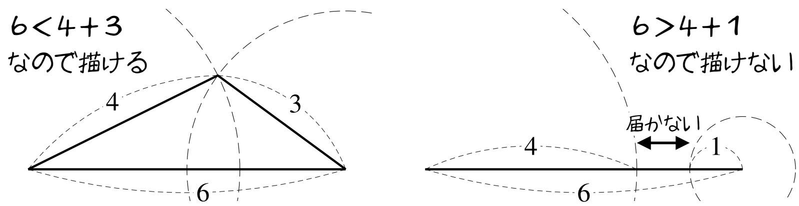
この章では，三角形・四角形・円などの平面図形について成り立つ重要な法則について学ぶ.

3.1　三角形の性質（１）

1.　三角形の成立条件

A.　描ける三角形・描けない三角形

3 辺が 6 cm，4 cm，3 cm の三角形は描けるが，3 辺が 6 cm，4 cm，1 cm の三角形を描くことはできない.



一番長い辺（6 cm）を底辺にして書いてみよう．すると，一番長い辺は，他の 2 辺の和より短くないといけない.

【例題 1】　3 辺が以下で与えられる三角形が，存在するか，存在しないか，答えなさい.

a) 5, 3, 3　　b) 7, 4, 3　　c) 8, 5, 2　　d) 9, 6, 4

【解答】

a) 存在する　　b) 存在しない　　c) 存在しない　　d) 存在する

B.　三角形の成立条件

3 辺が a, b, c である三角形が存在する条件は，以下のようにまとめられる．

三角形の成立条件

3 辺が a, b, c である三角形が存在する条件は

　$c < a + b$, $b < c + a$, $a < b + c$ を全て満たすこと[*1]

である．特に，c が一番長い場合は，$c < a + b$ が成り立てば十分である．

【練習 2：三角形の成立する条件】

(1) 3 辺が $x - 2$, x, $x + 2$ である三角形を考えよう．最大辺は $\boxed{\text{ア}}$ の辺なので，三角形が存在するには $\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ でないといけない．これを解いて，$\boxed{\text{ウ}} < x$ のときに三角形が存在する．

(2) 3 辺が 3, 5, $x + 1$ である三角形を考えよう．三角形が成立する条件は，

連立不等式 $\begin{cases} 3 < \boxed{\text{エ}} \\ 5 < \boxed{\text{オ}} \\ x + 1 < \boxed{\text{カ}} \end{cases}$ の解であるから，$\boxed{\text{キ}} < x < \boxed{\text{ク}}$ のときに三角形が存在する．

(3) 3 辺が 5, $x + 2$, $2x + 1$ である三角形が成立するための x の条件を求めよ．

【解答】

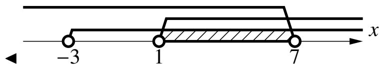
(1) 最大辺は $\underline{\boldsymbol{x+2}}_{(\text{ア})}$ であるから，${}_{(\text{ア})}\underline{\boldsymbol{x+2}} < \underline{\boldsymbol{(x-2)+x}}_{(\text{イ})}$ でないといけない．これを解いて

$$x + 2 < 2x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad {}_{(\text{ウ})}\underline{\boldsymbol{4}} < x$$

(2) 三角形の成立条件となる連立不等式を解くと

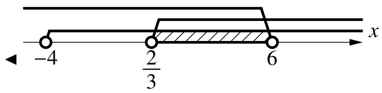
$$\begin{cases} 3 < \underline{\boldsymbol{5+(x+1)}}_{(\text{エ})} \\ 5 < \underline{\boldsymbol{(x+1)+3}}_{(\text{オ})} \\ x + 1 < \underline{\boldsymbol{5+3}}_{(\text{カ})} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \\ 1 < x \\ x < 7 \end{cases}$$

これらを連立して ${}_{(\text{キ})}\underline{\boldsymbol{1}} < x < \underline{\boldsymbol{7}}_{(\text{ク})}$ を得る．



(3) 三角形の成立条件となる連立不等式を解くと

$$\begin{cases} 5 < (x+2) + (2x+1) \\ x + 2 < (2x+1) + 5 \\ 2x + 1 < 5 + (x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < 3x \\ -4 < x \\ x < 6 \end{cases}$$



以上を連立して，$\boldsymbol{\dfrac{2}{3} < x < 6}$ を得る．

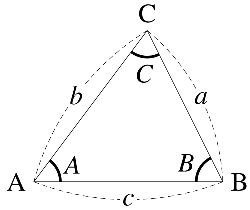
◀ このとき，$x + 2$ も $2x + 1$ も正であることが確認できる．

[*1] 「この 3 条件を同時に満たす」ことの必要十分条件として「不等式 $|a - b| < c < a + b$ を満たす」ことを考えてもよい．ただし，絶対値が含まれる分，計算は少しややこしいことがある．

2. 三角形の辺と角

A. 辺と角の名前

$\triangle$ABC において，以下のように略すことが多い．



$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C の大きさ　$\longrightarrow$　それぞれ A，B，C

辺 BC，CA，AB の長さ $\longrightarrow$　それぞれ a，b，c

たとえば，角 A の向かい側にある辺 BC を a と表すことになる．

今後，特に断りのない限りこの記法にしたがうこととする．

B. 辺と角の大小関係

たとえば，$A = 45°$，$B = 60°$，$c = 6$ を描くと $a < b$ になる．

また，$a = 3$，$b = 4$，$c = 6$ の $\triangle$ABC を描くと，角の大きさは $A < B < C$ になる．

一般に，次のような関係が成り立つ．

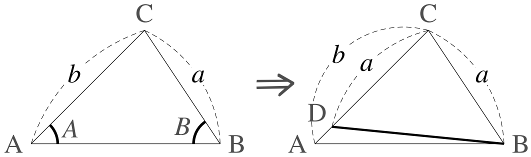
三角形の辺と角

$\triangle$ABC について，辺の大小と，向かいの角の大小は，一致する．

（証明）$a > b \iff A > B$ を示せばよい．

$a < b$ のとき，辺 AC 上に，CD $= a$ となるよう D をとる．すると

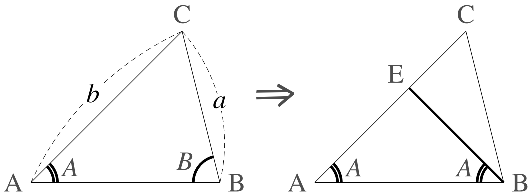
$$B > \angle\text{CBD} = \angle\text{CDB} = A + \angle\text{DBA} > A$$



から，$A < B$ が示される．

逆に，$A < B$ であったとする．このとき，$\angle$ABE $= A$ となるよう，辺 AC 上に E をとる．すると，$\triangle$EAB は二等辺三角形であるから

$$b = \text{AE} + \text{EC} = \text{BE} + \text{EC} > \text{CB} = a$$



から，$a < b$ である．

上の定理は，定理の内容の分かりやすさに比べると，証明が難しい．

【例題 3】 次の三角形について，一番長い辺・短い辺はそれぞれどこか．

1. $A = 50°$，$B = 60°$　　2. $A = 100°$，$B = 30°$　　3. $B = 45°$，$C = 40°$

【解答】

1. $C > B > A$ なので，**AB**（$= c$）が一番長く，**BC**（$= a$）が一番短い
2. $A > C > B$ なので，**BC**（$= a$）が一番長く，**AC**（$= b$）が一番短い
3. $A > B > C$ なので，**BC**（$= a$）が一番長く，**AB**（$= c$）が一番短い

【発展 4：辺の大小と角の大小】

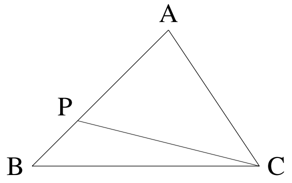
辺 BC が最大である △ABC の辺 AB 上に P をとるとき，PC < BC ……… ①を示そう．

「三角形の辺と角の大小関係」から，①を示すには

∠$\boxed{\text{ア}}$ < ∠$\boxed{\text{イ}}$ ……… ②を示せばよい．ここで，△ABC においては

辺 BC が最大であるので，∠$\boxed{\text{ア}}$ < ∠$\boxed{\text{ウ}}$ であるから，

∠$\boxed{\text{イ}}$ − ∠$\boxed{\text{ア}}$ > ∠$\boxed{\text{イ}}$ − ∠$\boxed{\text{エ}}$ = ∠$\boxed{\text{オ}}$ > 0



よって，②が成立することが分かったから，よって，①が示せた． ■

【解答】 △PBC について「三角形の辺と角の大小関係」から，

PC < BC（①）⇔ ∠**PBC**（ア） < ∠**BPC**（イ）（②）を示せばよい．

辺 BC が △ABC の最大辺なので ∠PBC < ∠**BAC**（ウ） が成り立つので

∠BPC − ∠PBC > ∠BPC − ∠**BAC**（エ） ……………………… ③

△APC について，∠BAC + ∠ACP = ∠BPC であるから ③ = ∠**ACP**（オ） > 0

よって，∠BPC − ∠PBC > 0 ⇔ PC < BC が示せた． ■

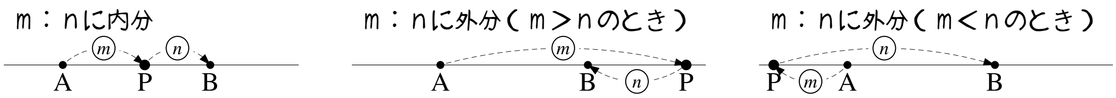
3. 辺の内分・外分

A. 内分とは・外分とは

線分 AB を考え，P を直線 AB 上のどこか（A，B 除く）にとる．

P を線分 AB 内にとるとき「P は線分 AB を**内分** (interior devision) する」という．線分の長さの比 AP : PB = $m : n$ となるとき「P は線分 AB を $m : n$ に内分する」という．

P を線分 AB 外にとるとき「P は線分 AB を**外分** (exterior division) する」という．線分の長さの比 AP : PB = $m : n$ となるとき「P は線分 AB を $m : n$ に外分する」という．

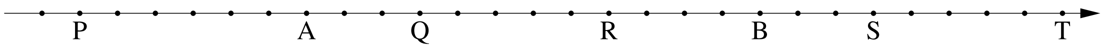


上の図のように「A から P へ，P から B へ」の矢印 2 つで考えると，内分も外分も分かりやすい．

また，P が線分 AB を 1 : 1 に内分するとき，P は中点になる．

【例題 5】

以下の目盛りが等間隔であるとき，$\boxed{}$ に数値を，（　）に「内」「外」のいずれかを入れよ．

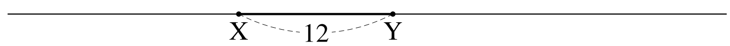


- P は AB を $\boxed{ア}$: $\boxed{イ}$ に（**ウ**）分している
- Q は AB を $\boxed{エ}$: $\boxed{オ}$ に（**カ**）分している
- R は AB を $\boxed{キ}$: $\boxed{ク}$ に（**ケ**）分している
- S は AB を $\boxed{コ}$: $\boxed{サ}$ に（**シ**）分している
- T は AB を $\boxed{ス}$: $\boxed{セ}$ に（**ソ**）分している

【解答】　線分 AB 上にある Q，R は内分，他は外分である．

- AP = 6，PB = 18 より，6 : 18 = $_{(ア)}$**1** : **3**$_{(イ)}$ に $_{(ウ)}$**外**分している
- AQ = 3，QB = 9 より，　3 : 9 = $_{(エ)}$**1** : **3**$_{(オ)}$ に $_{(カ)}$**内**分している
- AR = 8，RB = 4 より，　8 : 4 = $_{(キ)}$**2** : **1**$_{(ク)}$ に $_{(ケ)}$**内**分している
- AS = 15，SB = 3 より，15 : 3 = $_{(コ)}$**5** : **1**$_{(サ)}$ に $_{(シ)}$**外**分している
- AT = 20，TB = 8 より，20 : 8 = $_{(ス)}$**5** : **2**$_{(セ)}$ に $_{(ソ)}$**外**分している

【例題 6】　右の線分 XY の長さを 12 とし，線分 XY を 1 : 2 に内分する点を A，5 : 1 に内分する点を B，1 : 2 に外分する点を C，3 : 2 に外分する点を D とする．



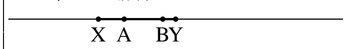
1. 点 A、B、C、D のうち、一番左にある点、一番右にある点を答えなさい。
2. XA，XB，XC，XD の長さをそれぞれ求めよ．
3. 比 XA : AB : BY を求めよ．

【解答】

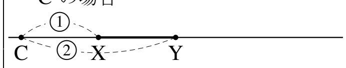
1. 一番左は **C**、一番右は **D**。
2. $\mathrm{XA} = 12 \times \dfrac{1}{1+2} = \mathbf{4}$，$\mathrm{XB} = 12 \times \dfrac{5}{5+1} = \mathbf{10}$，
   C，D は右欄外のようになるので
   $\mathrm{XC} = \mathrm{XY} = \mathbf{12}$，$\mathrm{XD} = 12 \times \dfrac{3}{3-2} = \mathbf{36}$
3. AB = 10 − 4 = 6，BY = 12 − 10 = 2 より，
   XA : AB : BY = 4 : 6 : 2 = **2 : 3 : 1**.

◀ A、B、C、D は次のようになる。

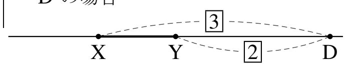
A、B の場合



C の場合



D の場合



【暗記 7 : 3 分割された線分の長さ】

線分 AB を 3 : 5 に内分した点を P，5 : 1 に内分した点を Q とするとき，比 AP : PQ : QB を求めよ．

【解答】　3 + 5 = 8 と 5 + 1 = 6 の最小公倍数は 24 なので，
AP : PB = 3 : 5 = 9 : 15，AQ : QB = 5 : 1 = 20 : 4 と変形して
AP : PQ : QB = 9 : (20 − 9) : 4 = **9 : 11 : 4** と分かる．

◀【別解】AB = a とおくと
$\mathrm{AP} = \dfrac{3}{3+5}\mathrm{AB} = \dfrac{3}{8}a$
$\mathrm{AQ} = \dfrac{5}{6}a$, $\mathrm{PQ} = \mathrm{AQ} - \mathrm{AP} = \dfrac{11}{24}a$
$\mathrm{QB} = \mathrm{AB} - \mathrm{AQ} = \dfrac{1}{6}a$，後は比を取ればよい．

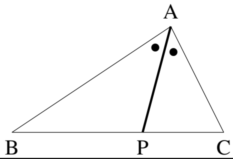
B. 内角の二等分線の定理

三角形の内角を二等分する線は，以下の性質を持つ．

内角の二等分線の定理

$\triangle$ABC について，$\angle$A を二等分する線と辺 BC が P で交わるとき（$\angle$BAP = $\angle$PAC のとき），次が成り立つ．

BP : PC = BA : AC



「A から P へ」二等分線を引いて，BA : AC $\xrightarrow[\text{代えても同じ}]{\text{AをPに}}$ BP : PC と覚えても良い．

（証明）CA // PD となるよう，辺 AB 上に D をとる．このとき

$\angle$APD = $\angle$PAC　（CA // PD より）

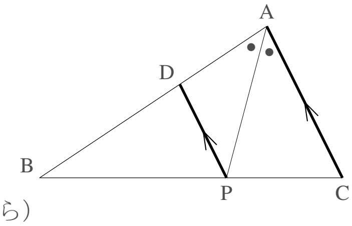
= $\angle$PDA　（AP は $\angle$A を二等分するから）

であるから，$\triangle$DAP はDA = DP ········ ① の二等辺三角形．よって

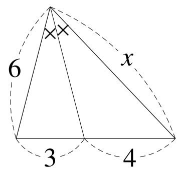
AB : AC = DB : DP　（CA // PD より $\triangle$BDP ∽ $\triangle$BAC であるから）

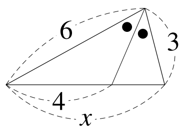
= DB : DA　（①から）

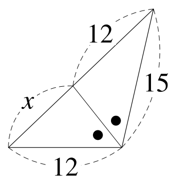
= BP : PC　（CA // PD より） ■

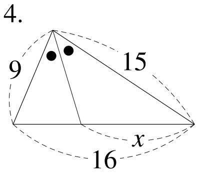


【例題 8】 以下の図について，x の値を求めなさい．

1.


2.


3.


4.


【解答】

1. 6 : x = 3 : 4 であるから，$\boldsymbol{x = 8}$
2. 6 : 3 = 4 : 2 であるから，$x = 4 + 2 = \mathbf{6}$
3. 15 : 12 = 12 : x であるから，$12^2 = 15x$ を解いて $\boldsymbol{x = \frac{48}{5}}$
4. 底辺は 9 : 15 = 3 : 5 で内分されるので，$x = 16 \times \dfrac{5}{3+5} = \mathbf{10}$

◀ 9 : 15 = (16 − x) : x を解いてもよい．

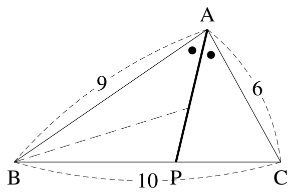
【練習 9：内角の二等分線】

右の $\triangle$ABC について，次の問いに答えよ．

(1) BP，PC の長さを求めよ．

(2) $\angle$B の二等分線と AP の交点を Q とする．AQ : QP を求めよ．

(3) $\angle$C の二等分線と AP の交点を R とする．AR : RP を求めよ．



【解答】

(1) BP : PC = BA : AC = 9 : 6 = 3 : 2 なので，

BP = BC × $\dfrac{3}{3+2}$ = **6**，PC = BC × $\dfrac{2}{3+2}$ = **4**

(2) AQ : QP = AB : BP = 9 : 6 = **3 : 2**

(3) AR : RP = AC : CP = 6 : 4 = **3 : 2**

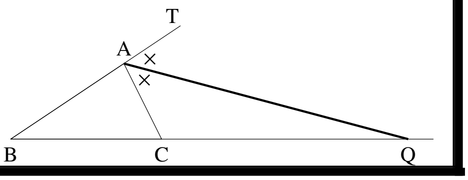
◀ Q と R は一致し内心と呼ばれる．詳しくは p.124 を参照のこと．

C. 外角の二等分線の定理

外角の二等分線の定理

△ABC について，∠A の外角を二等分する線と辺 BC が Q で交わるとき（∠CAQ = ∠QAT のとき），次が成立する．

BQ : QC = BA : AC



「A から Q へ」二等分線を引いて，BA : AC $\xrightarrow[\text{代えても同じ}]{\text{AをQに}}$ BQ : QC と覚えても良い．

【発展 10：外角の二等分線の定理の証明】

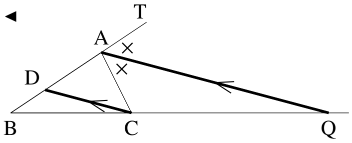
「外角の二等分線の定理」を証明せよ．

【解答】 QA // CD となるよう，辺 AB 上に D をとる．このとき

∠ACD = ∠QAC （QA // CD より）
　= ∠QAT （AP は ∠A の外角を二等分するから）
　= ∠CDA （QA // CD より）

であるから，△CAD はAC = AD ········ ①の二等辺三角形．よって

AB : AC = AB : AD （①より）
　= QB : QC （CA // PD より） ■

◀ 

（別解）として，直線 AB 上に，CA // QD となるよう D をとる，などの補助線でも証明できる．

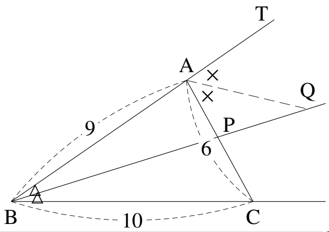
【練習 11：内角・外角の二等分線】

右の △ABC について，次の問いに答えよ．

(1) AP，PC の長さを求めよ．

(2) AQ は ∠A の外角の二等分線である．BQ : QP を求めよ．

(3) ∠C の外角の二等分線と直線 BP の交点を R とする．BR : RP を求めよ．



【解答】

(1) AP : PC = AB : BC = 9 : 10 なので，

$BP = AC \times \dfrac{9}{9+10} = \mathbf{\dfrac{54}{19}}$，$PC = AC \times \dfrac{10}{9+10} = \mathbf{\dfrac{60}{19}}$

(2) $BQ : QP = BA : AP = \cancel{9}^1 : \dfrac{\cancel{54}^6}{19} = \mathbf{19 : 6}$

(3) $BR : RP = BC : CP = \cancel{10}^1 : \dfrac{\cancel{60}^6}{19} = \mathbf{19 : 6}$

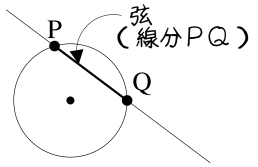
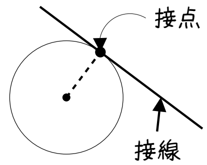
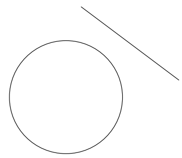
◀ Q と R は一致し傍心と呼ばれる．詳しくは p.132 を参照のこと．

3.2 円の性質（１）〜円の弦・接線

次に学ぶ内心・外心の準備として，円の弦・接線について学ぶ.

A. 円と直線の共有点

円と直線の関係は，共有点の個数によって右の表のようにまとめられる.

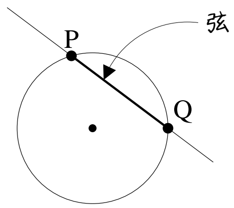
円と直線の関係	交わっている	接している	離れている
			
共有点の個数	**2** 個	**1** 個	**0** 個

B. 円の弦－共有点が２つのとき

円は、弦の垂直二等分線について線対称であり，次のことが成り立つ.

【練習 12：弦の垂直二等分線】

円 O と直線 PQ が右のように交わっているとする.



(1) 暗記 以下の $\boxed{}$ に当てはまる言葉を答えなさい。

a) 弦 PQ の垂直二等分線は，必ず円の $\boxed{\text{ア}}$ を通る.

b) 逆に、円の中心を通り弦 PQ に垂直な線は，PQ の $\boxed{\text{イ}}$ を通る.

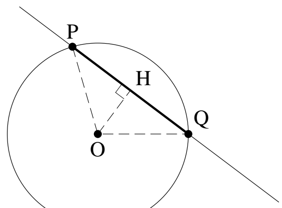
c) また、円の中心と弦 PQ の中点を通る直線は，弦 PQ と $\boxed{\text{ウ}}$ する.

(2) 上の b), c) を示しなさい[*2]。

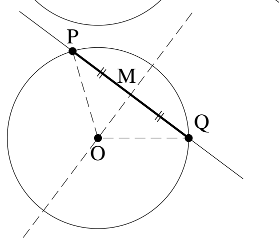
【解答】

(1) ア：中心、イ：中点、ウ：直交

(2) b) O から PQ へ垂線を引き，その足を H とする.
直角三角形 $\triangle$OPH と $\triangle$OQH について，OM は共通，OP = OQ であるから，斜辺ともう 1 辺が等しいので $\triangle$OPH $\equiv$ $\triangle$OQH である.
つまり，PH = HQ であるから，垂線 PH は弦 PQ の中点を通る.



c) PQ の中点を M とする.
$\triangle$OPM と $\triangle$OQM について，OM は共通，OP = OQ，PM = MQ より 3 辺が等しいので $\triangle$OPM $\equiv$ $\triangle$OQM，つまり $\angle$OMP = $\angle$OMQ であり、どちらも 90° である.
よって，OM は PQ の垂直二等分線になっている.



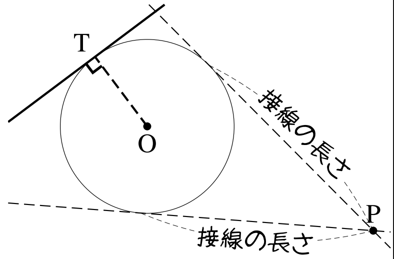
[*2] なお、a) は次のようにして証明できる。「PQ の垂直二等分線は，P からも Q からも等間隔にある点の集まりであるが，OP = OQ =（円の半径）であるから，O は PQ の垂直二等分線上にある.」

C. 円の接線－共有点が１つのとき

円の接線

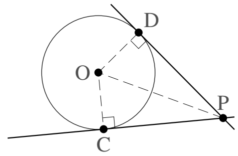
円とその接線について，次のことが成り立つ．

1. 円 O と直線が接点 T で接しているとき，線分 OT は接線と垂直に交わる．
2. 円外の点 P から円へ接線を引くとき，P から接点までの距離を**接線の長さ**という．P からの接線は 2 本引けるが，どちらの接線の長さも等しい．



（1. の証明）接線と OT が垂直に交わらないと仮定し（ ……… ①)、背理法で示す．
O から接線へ垂線を引き，その足を H とする．H と T は異なるので，H は円周より外側にある．つまり，OT > OH であるが，直角三角形 OTH について斜辺 OH が一番長くないことになり，矛盾である．
よって，仮定①は誤りであり，接線と OT は垂直に交わる． ■

（2. の証明）右図において，PC = PD を示せばよい．
△POC と △POD について，∠POC = ∠POD = 90°，PO は共通，OC = OD から直角三角形の斜辺と他の 1 辺が等しいと分かるので，△POC ≡ △POD になる．よって，PC = PD が示された． ■



直観的には，上の図の直線 OP について線対称であるから，接線の長さは等しい．

【練習 13：円と直線】

中心が O である半径 2 の円へ，OP = 5 となる P から接線を 2 本引き，接点を A，B とする．

(1) AB と OP の交点を C とする．△OAP と合同な三角形を 1 つ，相似な三角形を 4 つ答えよ．
（ただし，三角形の頂点は，A，B，C，O，P のいずれかのみを考える）

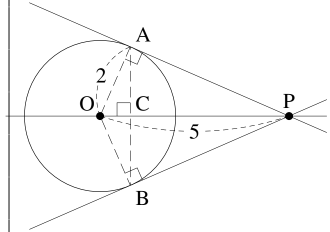
(2) AC，OC の長さをそれぞれ求めよ．

【解答】

(1) OP 共通，OA = OB，PA = PB から，合同な三角形は **△OBP**.
相似な三角形は，すべて，2 角が等しいことから導かれ
直角と ∠APC 共通から **△OAP ∽ △ACP**,
直角と ∠AOC 共通から **△OAP ∽ △OCA**,
直角と ∠OPA = ∠BPC から **△OAP ∽ △BCP**,
直角と ∠AOP = ∠COB から **△OAP ∽ △OCB**.

(2) △OAP について，三平方の定理より $PA = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$
△OAP ∽ △OCA において，PO : AO = 5 : 2 であるから
$AC = PA \times \frac{2}{5} = \boldsymbol{\frac{2}{5}\sqrt{21}}$，$OC = OA \times \frac{2}{5} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$.

◀ 図は必ず描こう．

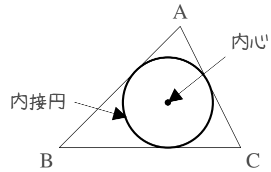


円の中心と接点を結ぶと，円の半径と，直角が図の中に現れる．

3.3 三角形の性質（２）～三角形の五心

1. 三角形の内心

A. 内心とは



三角形の 3 つの辺すべてに接する円を，その三角形の**内接円** (inscribed circle) といい，内接円の中心を**内心** (inner center) という

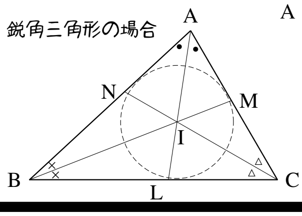
B. 三角形の内心～角の二等分線の交点

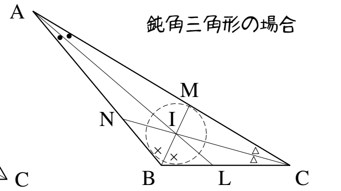
たとえば，辺 AC からも辺 BC からも等距離にあるのは，∠C の二等分線上の点である．同じように考えると，3 辺から等距離にある三角形の内心は，角の二等分線によって決まる．

内心

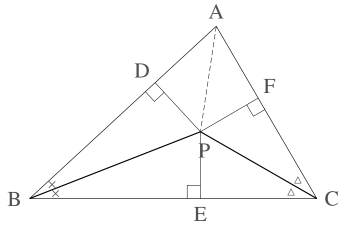
△ABC の 3 本の角の二等分線 AL，BM，CN について，次のことが成り立つ．

AL，BM，CN は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の内心 I に一致する．



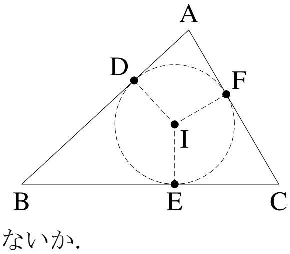


一般に，内接円と辺の接点は L，M，N のいずれにも一致しないので注意すること．（△ABC が二等辺三角形のときにだけ，一致することがある）



（証明）∠B，∠C の二等分線の交点を P とおく．また，P から辺 AB，辺 BC，辺 CA へ垂線 PD，PE，PF をそれぞれ引く．
まず，△PBD ≡ △PBE である（PB 共通，∠PBD = ∠PBE から斜辺と 1 角が等しい直角三角形になる）から PD = PE ········ ① とわかる．
同様に，△PCE ≡ △PCF から，PE = PF ········ ② である．
△PAD と △PAF について PA 共通，①，②から PD = PF から斜辺と他の 1 辺が等しい直角三角形と分かるので △PAD ≡ △PAF．つまり，∠PAD = ∠PAF となって AP は ∠A の二等分線と分かる．
以上より，3 本の角の二等分線は 1 点 P で交わり，①，②から P はどの辺からも等距離にあるとわかるので，三角形の内心 I と P は一致していることがわかる． ■

【例題 14】 △ABC の内心を I とし，内接円と辺 AB，BC，CA の接点をそれぞれ D，E，F とする．ただし，△ABC は二等辺三角形でないとする．



1. 図の中にある直角を，3 ヶ所答えなさい．
2. 図の中にある長さの等しい線分を，3 組答えなさい．
   ただし，ID = IE = IF を除く．
3. 直線 AI 上に点 D はあるか，ないか．また，直線 IF 上に点 B はあるか，ないか．

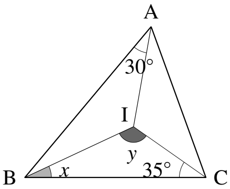
【解答】

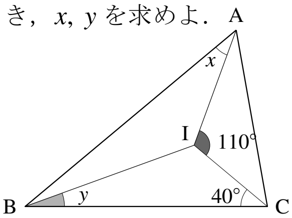
1. **ID ⊥ AB，IE ⊥ BC，IF ⊥ CA**

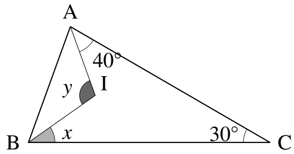
2. **AD = AF**，**BD = BE**，**CE = CF**

3. 直線 AI 上に点 D は**ない**．また，直線 IF 上に点 B は**ない**．

【例題 15】 I が △ABC の内心であるとき，x, y を求めよ．

1.


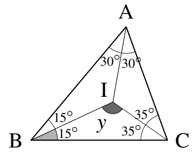
2.


3.


【解答】

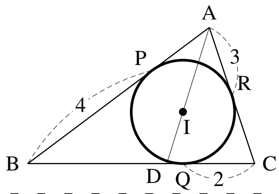
1. △ABC について，$2(30° + x + 35°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 25°}$，△IBC について，$25° + y + 35° = 180°$ であるから $\boldsymbol{y = 120°}$.
2. △IAC について，$110° + x + 40° = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 30°}$．△ABC について，$2(30° + y + 40°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{y = 20°}$，
3. △ABC について，$2(40 + x) + 30° = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 35°}$，△IAB について，$y + 40° + 35° = 180°$ であるから $\boldsymbol{y = 105°}$.

◀1. の場合，結局次のようになる．



【例題 16】 右の図において，P，Q，R は内接円と辺の接点であり，D は直線 AI 上にある．

1. 3 辺の長さを全て求めよ．
2. BD の長さを求めよ．
3. AI : ID を求めよ．



【解答】

1. AP = AR = 3，BQ = BP = 4，CR = CQ = 2 であるから，**AB = 7**，**BC = 6**，**CA = 5**.
2. AD は ∠A の二等分線であるから，BD : DC = BA : AC = 7 : 5 となり，$\text{BD} = 6 \times \dfrac{7}{7+5} = \boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$.
3. BI は ∠B の二等分線であるから，$\text{AI} : \text{ID} = \text{AB} : \text{BD} = 7 : \dfrac{7}{2} = \boldsymbol{2 : 1}$.

C. 内接円の半径を求める

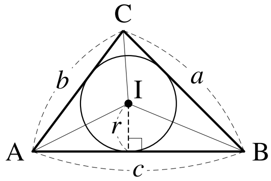
内接円の半径を求めるには，数学 I(p.141) で学ぶ次の公式を用いる．

三角形の内接円と面積の関係

三角形の面積 S は，内接円の半径 r を用いて

$$S = \triangle\text{BCI} + \triangle\text{CAI} + \triangle\text{ABI} = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

と表すことができる．ここで a，b，c は各辺の長さを表す．



この公式は，必要なときに導くことができれば十分である．ただし，三角形とその内接円を見たら「三角形の面積は計算できる」と連想できるようにしよう．

【練習 17：内心と内接円の性質】

AB = 7, AC = 8 である △ABC の点 A から辺 BC へ垂線 AH を引くと，$AH = 4\sqrt{3}$ であったという．また，内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする．

(1) 内接円の半径 r を求めよ．　(2) 線分 BD の長さを求めよ．　(3) 線分 AI の長さを求めよ．

【解答】

(1) 三平方の定理より $BH = \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = 1$，$CH = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$ であるから，BC = 1 + 4 = 5 になる．よって

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 5 \times 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} r \times (7 + 8 + 5)$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{3} = 10r \qquad \therefore \boldsymbol{r = \sqrt{3}}$$

(2) AD は ∠A の二等分線であるから，BD : DC = BA : AC = 7 : 8 となり，$BD = 5 \times \dfrac{7}{7+8} = \boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$.

(3) $DH = \dfrac{7}{3} - 1 = \dfrac{4}{3}$ であるから，△ADH に三平方の定理を用いると，

$$AD = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{16 + 432}{9}} = \frac{8\sqrt{7}}{3}.$$

一方，BI は ∠B の二等分線なので，$AI : ID = AB : BD = 7 : \dfrac{7}{3} = 3 : 1$.

よって，$AI = \dfrac{8\sqrt{7}}{3} \times \dfrac{3}{3+1} = \boldsymbol{2\sqrt{7}}$.

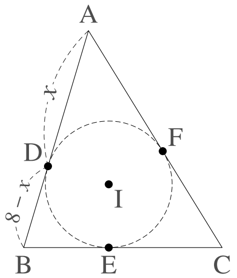
【暗記 18：接線の長さ】

AB = 8, BC = 7, CA = 9 である △ABC の内接円が，辺 AB，BC，CA と D，E，F で接している．このとき，AD の長さを求めよ．

【解答】　AD = x とおくと、接線の長さが等しいので AF = x。

また、DB = $8 - x$, FC = $9 - x$ であり、接線の長さが等しいから BE = $8 - x$, CE = $9 - x$。

ここで、BC = 7 であるから $(8-x)+(9-x) = 7$、これを解いて $x = 5$、つまり **AD = 5**.



◀【別解】AD = AF = x, BE = BD = y, CF = CE = z とおくと

$$\begin{cases} x + y = AB = 8 & \cdots\cdots ① \\ y + z = BC = 7 & \cdots\cdots ② \\ z + x = CA = 9 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

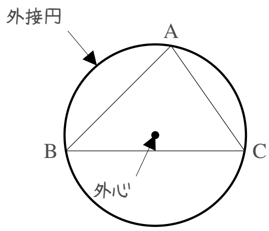
である．① + ② + ③ より $2(x + y + z) = 24 \Leftrightarrow x + y + z = 12$ ……④。

④ − ② から x = **AD = 5**.

2. 三角形の外心

A. 外心とは

三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円** (circumscribed circle) といい，外接円の中心を**外心** (circumcenter) という．



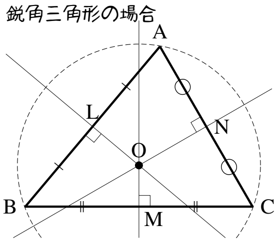
B. 三角形の外心〜垂直二等分線の交点

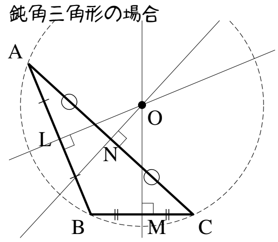
辺の垂直二等分線上のどの点も，その両側の頂点からの距離が等しい．そのため，三角形の外心は辺の垂直二等分線によって決まる．

外心

△ABC の 3 本の垂直二等分線について，次のことが成り立つ．

・3 本は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の外心 O に一致する．

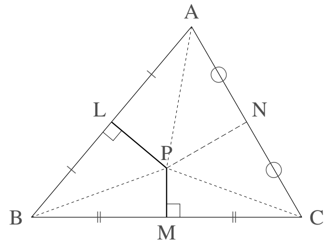




（証明）辺 AB の垂直二等分線，辺 BC の垂直二等分線の交点を P とおく．△PAL と △PBL は PL 共通，AL = LB，∠PLA = ∠PLB = 90° から 2 辺とその間の角が等しい．よって，△PAL ≡ △PBL であるから，AL = BL．同様に △PBM ≡ △PCM から BL = CL．

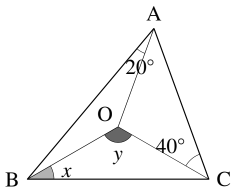
△PAN と △PCN について，PN 共通，AN = NC，PA = PC から 3 辺が等しいので △PAN ≡ △PCN になる．よって ∠PNA = ∠PNC となり，∠PNA = ∠PNC = 90° である．つまり，PN は辺 AC の垂直二等分線に一致し，3 本の垂直二等分線は 1 点 P で交わる．

さらに，PA = PB = PC から P は △ABC の外心に一致する． ■

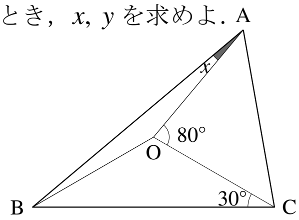


【例題 19】 O が △ABC の外心であるとき，x, y を求めよ．

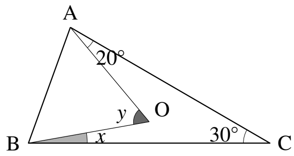
1.



2.



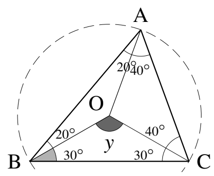
3.



【解答】

1. OA = OC より ∠OAC = 40°，OA = OB より ∠OBA = 20°，
   OB = OC より ∠OCB = x になる．
   △ABC について，$2(20° + x + 40°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 30°}$，
   △OBC について，$y + 2 \times 30° = 180°$ であるから $\boldsymbol{y = 120°}$．
2. △OAC について，80° + 2∠OAC = 180° であるから ∠OAC = ∠OCA = 50°．よって，△ABC について，$2(x + 30° + 50°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 10°}$．
3. △OAC について，OA = OC より ∠OCA = 20°，よって，x = ∠OCB = 30° − 20° = **10°**．△ABC について，2(∠OAB + 10° + 20°) = 180° であるから ∠OAB = 60° であるから，$\boldsymbol{y = 60°}$．

◀ 1. の場合，結局次のようになる．



◀ （別解）円周角の定理より，y = 2∠ACB = 60°．

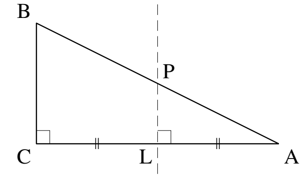
外心を含む問題では，必ず外接円を書き込むようにしよう．

C. 直角三角形の外心

【暗記 20：直角三角形の外心】
$\angle C = 90°$ の直角三角形において，辺 CA，CB の二等分線は辺 AB の中点を通ることを示せ.

【解答】 辺 CA の中点を L とし，辺 CA の垂直二等分線と辺 AB の交点を P とする．$\angle ALP = \angle ACB = 90°$ より $LP \parallel CB$ であるから，$AP : PB = AL : LC = 1 : 1$，よって P は辺 AB の中点である．

同様に，辺 CB の中点を M，辺 CB の垂直二等分線と辺 AB の交点を Q とすると，$MQ \parallel CA$ から Q も辺 AB の中点になる. ■

◀


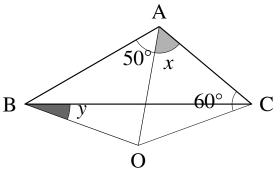
直角三角形の外心

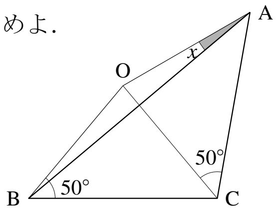
直角三角形の外心は，斜辺の中点に一致する．結果，外接円の半径は斜辺の半分に一致する.

D. 鈍角三角形の外心

鈍角三角形の外心は，必ず三角形の外になる．詳しくは『円周角の定理の逆』(p.136) で学ぶ.

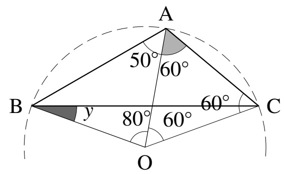
【例題 21】 O が △ABC の外心であるとき，x, y を求めよ.

1.


2.


【解答】 △OAB，△OBC，△OCA がすべて二等辺三角形であるから

1. △OAC について，$x = \angle OCA =$ **60°**，$\angle AOC = 60°$．また，△OAB について，$\angle OAB = 50°$ なので $\angle AOB = 80°$，よって $\angle BOC = 140°$ であり，△OBC を考えて $y = \dfrac{1}{2}(180° - 140°) =$ **20°** になる.
2. △OAC について，$\angle AOC = 180° - 50° \times 2 = 80°$，△OBC についても $\angle BOC = 80°$，よって $\angle AOB = 160°$ であり，△OAB を考えて，$\boldsymbol{x = 10°}$.

◀ 1. の場合，結局次のようになる.


E. 外接円の半径を求める

外接円の半径を求めるには，数学 I で学ぶ**正弦定理** (sine theorem) を用いる.

正弦定理

△ABC の外接円の半径 R について $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ が成り立つ.

ただし，直角三角形の場合は外接円の半径は斜辺の半分に一致し，正弦定理は必要ない.

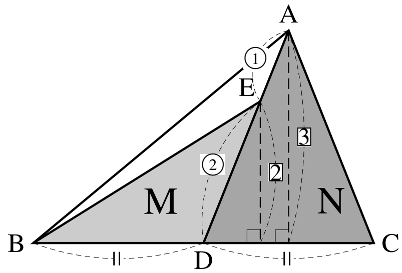
3. 三角形の重心

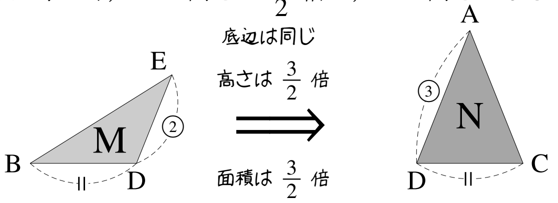
A. ２つの三角形の面積比

面積比を求めるときには，どこを底辺におくかが重要である．

まず，右の三角形 M，N の面積比を考えてみよう．

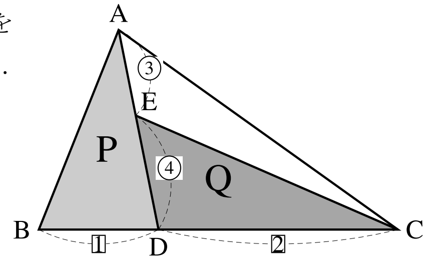
M の底辺を BD，N の底辺を CD とおけば，M，N の底辺の長さは等しく，M の高さの $\frac{3}{2}$ 倍が，N の高さになる．

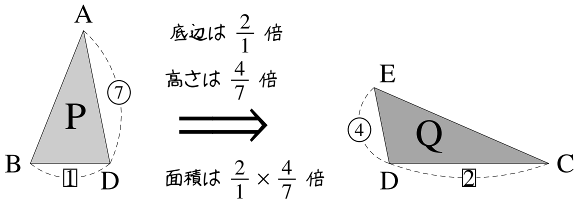




つまり，M の面積を $\frac{3}{2}$ 倍すると N の面積に等しいと分かるから，M，N の面積比は 2 : 3 である．

次に，右の三角形 P，Q の面積比を考えてみよう．P の底辺を BD，Q の底辺を CD とすると，次のようにまとめることができる．





P の面積を $\frac{2}{1} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{7}$ 倍すると Q の面積に等しいと分かるから，P，Q の面積比は 8 : 7 である．

【練習 22：平面図形の線分の比】

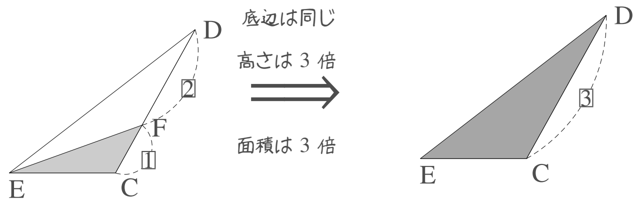
▱ABCD において，辺 BC 上に E を，辺 CD 上に F をとり，BE : EC = 1 : 2，DF : FC = 2 : 1 とする（▱は「平行四辺形」を表す）．

(1) △FEC と △DEC の面積比を求めよ．　(2) △FBC と △DEC の面積比を求めよ．

(3) △FEC と ▱ABCD の面積比を求めよ．

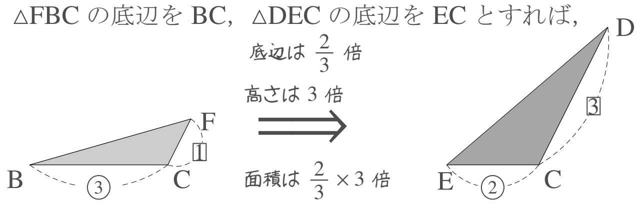
【解答】

(1) 問題文を図示すれば，右欄外のようになる．底辺を EC とすれば

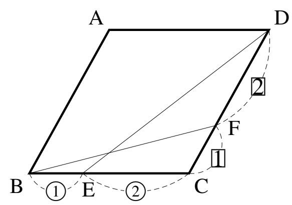


なので，面積比は **1 : 3** である．

(2) △FBC の底辺を BC，△DEC の底辺を EC とすれば，



◀ DC と EC を底辺と考えた場合は，高さが等しくなる．



◀ △FBC の底辺を FC，△DEC の底辺を DC としてもよい．

なので，面積比は **1 : 2** である．

(3) $\triangle\mathrm{FEC} \xrightarrow{3\,倍} \triangle\mathrm{DEC}$ 　（(2) より）

$\xrightarrow{\frac{3}{2}\,倍} \triangle\mathrm{DBC}$ 　（底辺を EC，BC にとれば，底辺は $\frac{3}{2}$ 倍，高さは等しい）

$\xrightarrow{2\,倍}$ ▱ABCD

よって $\triangle$FEC の $3 \times \frac{3}{2} \times 2 = 9$ 倍が ▱ABCD の面積になるので，$\triangle$FEC と ▱ABCD の面積比は **1 : 9** である．

◀ $\triangle\mathrm{FEC} \xrightarrow{\frac{3}{2}\,倍} \triangle\mathrm{FBC} \xrightarrow{3\,倍} \triangle\mathrm{DBC} \xrightarrow{2\,倍}$ ▱ABCD でもよい．

B. 三角形の重心〜中線の交点

三角形の面積は，中線によって二等分される．

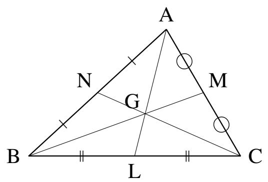
そして，3 本の中線は 1 点で交わる．これを**重心** (centroid, barycenter) という[3]．

重心

$\triangle$ABC の 3 本の中線 AL，BM，CN について，次のことが成り立つ．

(1) AL，BM，CN は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の重心 G に一致する．

(2) AG : GL = 2 : 1, BG : GM = 2 : 1, CG : GN = 2 : 1 である．



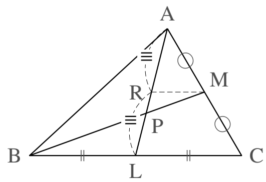
（証明）まず，AL と BM の交点を P，AL と CN の交点を Q とおき，P と Q が一致することを示す．

AL の中点を R とする．$\triangle$ALC について中点連結定理から

MR // BC ……… ①，RM : LC = 1 : 2 ……… ② になる．

①より，二角相等から $\triangle$MRP ∽ $\triangle$BLP と分かるので

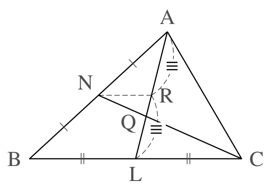
RP : PL = RM : BL = 1 : 2 　（①と BL = LC より） ………③



である．次に，$\triangle$ABL について中点連結定理から

NR // BC ……… ④，NR : BL = 1 : 2 ……… ⑤ である．

④から $\triangle$NRQ ∽ $\triangle$CLQ と分かるので，やはり RQ : QL = 1 : 2 になる．③とあわせて，P と Q は一致することが分かる．



つまり，AL，BM，CN は 1 点で交わる．これを G とおく．

さらに，④，③から $\mathrm{GL} = \mathrm{AL} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\mathrm{AL}$ と分かるので，AG : GL = 2 : 1 と分かる．

重心についての別証明が，p.152 にある．

[3] 直感的には，重さの中心，つり合いの中心が重心である．たとえば，重さが一様な三角形の板を重心で支えると，板は地面に平行になってつり合う．

【練習 23：重心と面積比～その１～】

$\triangle ABC = S$ とするとき，$\triangle AGB$, $\triangle BGC$, $\triangle CGA$ をそれぞれ S を用いて表わせ.

【解答】　直線 AG と BC の交点を M とする.

BM = MC, AG : GM = 2 : 1 より，$\triangle AGB = \dfrac{2}{3}\triangle ABM = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}S}$,
$\triangle AGC = \dfrac{2}{3}\triangle ACM = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}S}$ である.

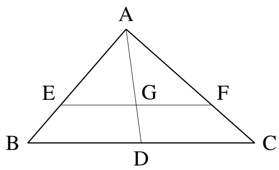
また，$\triangle BGC = S - \dfrac{1}{3}S - \dfrac{1}{3}S = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}S}$ である.

【練習 24：重心と面積比～その２～】

$\triangle ABC$ の重心を G とし，直線 AG と辺 BC の交点を D とする．また，G を通り BC に平行な直線が，辺 AB，AC と交わる点を E，F とする.

(1) 相似な三角形の組を 3 組答え，その相似比を答えなさい.

(2) 四角形 EBDG と $\triangle ABC$ の面積比を答えよ.



【解答】

(1) EF // BC から $\boldsymbol{\triangle AEG \backsim \triangle ABD}$，$\boldsymbol{\triangle AGF \backsim \triangle ADC}$，$\boldsymbol{\triangle AEF \backsim \triangle ABC}$ であり，AG : AD = 2 : 3 から，相似比はすべて **2 : 3**.

(2) $\triangle ABC = S$ とおくと，$\triangle ABD = \dfrac{1}{2}S$．$\triangle ABD : \triangle AEG = 3^2 : 2^2$ より，$\triangle AEG = \dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{2}S = \dfrac{2}{9}S$ であるから，四角形 EBDG $= \dfrac{1}{2}S - \dfrac{2}{9}S = \dfrac{5}{18}S$．よって，四角形 EBDG : $\triangle ABC = \dfrac{5}{18}S : S =$ **5 : 18**.

4. 三角形の三心と五心

A. 三角形の三心

重心・内心・外心をまとめて、三角形の三心という.

【暗記 25：三角形の三心】

次の $\boxed{}$ にあてはまる適当な言葉・文字を答えよ.

1. $\triangle ABC$ の内心 I は 3 本の $\boxed{ア}$ の交点である．I は $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$ からの距離がすべて等しい.
2. $\triangle ABC$ の外心 O は 3 本の $\boxed{オ}$ の交点である．O は $\boxed{カ}$, $\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$ からの距離がすべて等しい.
3. $\triangle ABC$ の重心 G は 3 本の $\boxed{ケ}$ の交点であり，G は $\boxed{ケ}$ を $\boxed{コ}$ する点である.

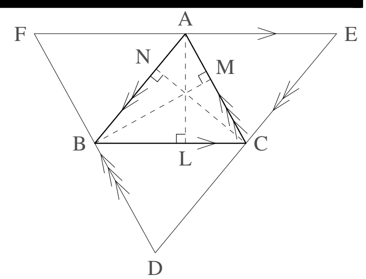
【解答】

1. ア：**角の二等分線**，イ：**辺 AB**，ウ：**辺 BC**，エ：**辺 CA**
2. オ：**辺の垂直二等分線**，カ：**点 A**，キ：**点 B**，ク：**点 C**
3. ケ：**中線**，コ：**2 : 1 に内分**

B. 垂心

垂心

$\triangle$ABC の 3 本の垂線は必ず 1 点で交わる．その交点を**垂心** (orthocenter) という．



（証明）　（別証明が p.138 にもある）

AB // ED, BC // FE, CA // DF であり，$\triangle$ABC に外接する $\triangle$DEF を，右図のように作る．また，点 A，B，C から下ろした垂線の足を，それぞれ L，M，N とおく．

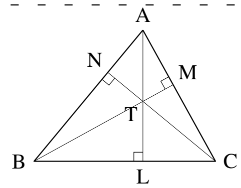
四角形 ABCE，ACBF は平行四辺形になるので BC = AE，BC = AF と分かり，A は線分 EF の中点である．さらに，$\angle$EAL = $\angle$ALB = 90° から，線分 AL は線分 EF の垂直二等分線になる．

同様に，線分 BM は線分 DF の垂直二等分線，線分 CN は線分 DE の垂直二等分線になっている．

$\triangle$DEF の 3 本の垂直二等分線は外心で交わるから，AL，BM，CN は 1 点で交わる． ■

【例題 26】　右図の三角形について次の問いに答えよ．

1. 右図に相似な三角形を全て書き出しなさい．
   （ただし，補助線を引かないものとする）
2. $\angle$CAL = 25°，$\angle$ABM = 20° のとき，$\angle$TCL を求めよ．



【解答】

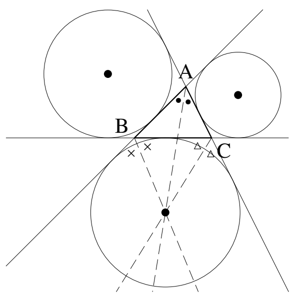
1. **$\triangle$ABM ∽ $\triangle$ACN ∽ $\triangle$BTN ∽ $\triangle$CTM**,
   $\triangle$BCN ∽ $\triangle$BAL ∽ $\triangle$ATN ∽ $\triangle$CTL,
   $\triangle$CAL ∽ $\triangle$CBM ∽ $\triangle$BTL ∽ $\triangle$ATM の 3 組ある．
2. $\triangle$ABM ∽ $\triangle$ACN より $\angle$ACN = $\angle$ABM = 20° なので，$\triangle$ACL に着目すれば，$\angle$TCL = 90° − 20° − 25° = **45°**.

C. 三角形の傍心 〜 傍接円の中心

傍心 〜 傍接円の中心

$\triangle$ABC について，直線 AB，BC，CA のすべてに接する円は，$\triangle$ABC の外側に 3 つ存在し，これを**傍接円** (escribed circle) という．また，傍接円の中心を**傍心** (excenter) という．

そして，$\angle$B の外角の二等分線，$\angle$C の外角の二等分線と，$\angle$A の（内角の）二等分線は必ず 1 点で交わり，それは傍心の 1 つに一致する．また，A，B，C を入れ替えて考えれば，他の傍心のいずれかに一致する．



証明は p.153 を参照のこと．

D. 三角形の五心

三角形の五心

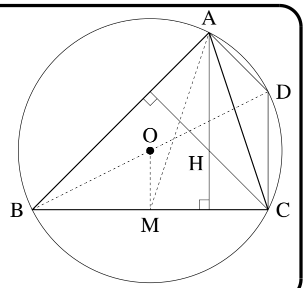
どんな三角形も次の性質を持ち，重心・内心・外心・垂心・傍心をまとめて三角形の五心という．

- 3 本の中線は 1 点で交わり，それは重心に一致し，重心は中線を 2 : 1 に内分する．
- 3 本の角の二等分線は 1 点で交わり，それは内接円の中心である内心に一致する．
- 3 本の垂直二等分線は 1 点で交わり，それは外接円の中心である外心に一致する．
- 3 本の垂線は 1 点で交わり，それは垂心と定義される．
- 2 本の外角の二等分線と，残り 1 角の内角の二等分線は 1 点で交わり，それは傍接円の中心である傍心に一致する．

【発展 27：オイラー線～外心・重心・垂線を通る線】

鋭角三角形 ABC があり，外心を O，垂心を H，重心を G とする．また，辺 BC の中点を M とし，D を線分 BD が外接円の直径となるようにとる．

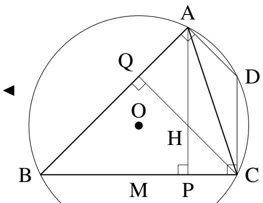
1. 四角形 ADCH は平行四辺形であることを示せ．
2. AH = 2OM を示せ．
3. 3 点 H，G，O は同一直線上にある（この直線を**オイラー線** (Euler's line) という）ことを示し，HG : GO を求めよ．



【解答】 A，C から下ろした垂線の足を，それぞれ P，Q とする．

1. BD は直径であるから，∠DCB = 90° になる．よって
∠APB = ∠DCB = 90° から同位角が等しいので，AP // DC．
同様に，∠DAB = ∠CQB = 90° から CQ // DA であり，向かい合う 2 組の辺が平行なので，四角形 ADCH は平行四辺形である．

◀

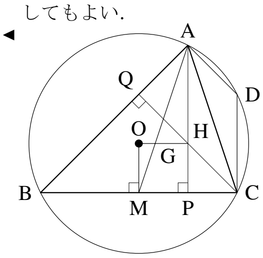


2. BO = OD，BM = MC から中点連結定理より 2OM = DC．さらに，▱ADCH について AH = DC が成り立つから，AH = 2OM となる．

◀（別解）△BOM ∽ △BDC と，相似比が 1 : 2 であることを直接示してもよい．

3. ∠AGH = ∠MGO を示せばよい．
△AHG と △MOG について, まず, G が重心であるから AG : GM = 2 : 1 である．これと②を合わせて，AH : OM = AG : GM = 2 : 1 が成り立つ．
また，AP も OM も辺 BC と垂直に交わるから AP // OM であり，∠HAG = ∠OMG が分かる．つまり，2 辺の比とその間の角が等しいから △AHG ∽ △MOG である．
よって，∠HGA = ∠OGM であるから，O，G，H は同一直線上にあると分かる．さらに，相似比から HG : GO = 2 : 1 である．

◀



1. 円に内接している四角形

A. 円周角の定理について

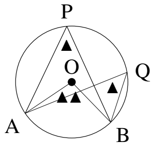
中学校で学んだ円周角の定理は，次のように表すことができる．

円周角の定理

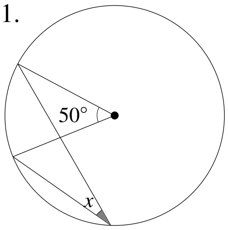
中心が O である円の円周上に，A，B，P が固定されているとき

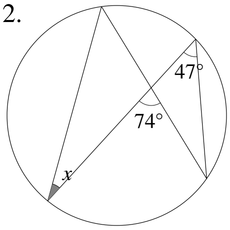
(1) $\angle AOB = 2\angle APB$ である．

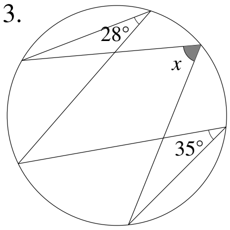
(2) P を含む側の弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上に Q をとるとき，$\angle APB = \angle AQB$ である．

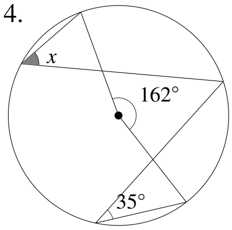


【例題 28】 以下の図について，x, y を求めよ．

1.


2.


3.


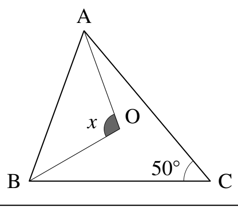
4.


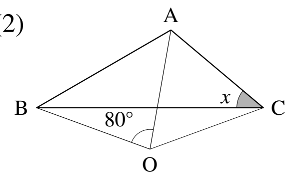
【解答】

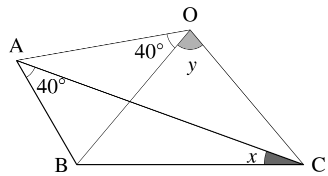
1. $2x = 50$ より $\boldsymbol{x = 25°}$
2. $x + 47° = 74°$ より $\boldsymbol{x = 27°}$
3. $28° + 35° = x$ より $\boldsymbol{x = 63°}$
4. $2x + 2\times 35° = 162°$ より $\boldsymbol{x = 46°}$

【練習 29：外心と円周角の定理】

O が $\triangle ABC$ の外心であるとき，x を求めよ．

(1)


(2)


(3)


【解答】

(1) $x = 2\angle ACB = \mathbf{100°}$

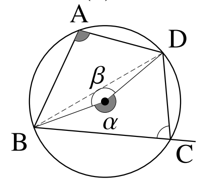
(2) $2x = \angle AOB = 80°$ から $\boldsymbol{x = 40°}$

(3) $2x = 2\angle AOB = 40°$ から $\boldsymbol{x = 20°}$，$y = 2\angle BAC = \mathbf{80°}$

外心が与えられた場合は，図に外接円を書き込むようにしよう．

B. 円に内接する四角形の性質〜四角形の対角の和

四角形 ABCD が円に内接しているとき，右のように α, β をおくと，『円周角の定理』の (1) から



A は右図の $\dfrac{1}{2}\alpha$ と等しく，C は右図の $\dfrac{1}{2}\beta$ と等しい.

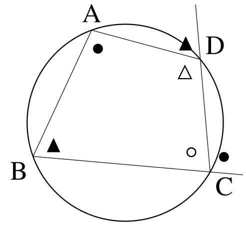
よって，$A + C = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180°$ とわかる.

また，変形して $A = 180° - C$ となるので，A は角 C の外角に等しい.

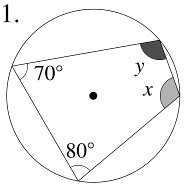
円に内接する四角形の対角

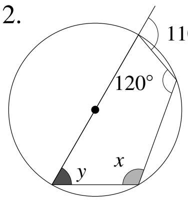
円に内接する四角形において，以下が成立する.

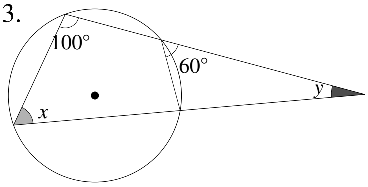
- 向かい合う角（対角）どうしを足すと 180° になる．つまり
  $A + C = 180°$,　　　$B + D = 180°$
- どの角も，向かいの頂点の外角に等しい，たとえば
  $A =$（∠C の外角）$=$ ●，$B =$（∠D の外角）$=$ ▲

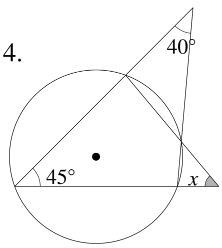


【例題 30】 以下の図について，x, y を求めよ.

1.


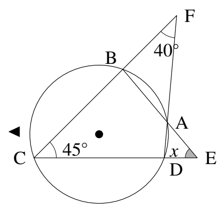
2.


3.


4.


【解答】

1. $x = 180° - 70° = \mathbf{110°}$，$y = 180° - 80° = \mathbf{100°}$
2. $\boldsymbol{x} = \mathbf{110°}$，$y = 180° - 120° = \mathbf{60°}$
3. $\boldsymbol{x} = \mathbf{60°}$，$y = 180° - 100° - 60° = \mathbf{20°}$
4. 右のように A から F までとると，△FCD から ∠FDE $= 40° + 45° = 85°$，∠DAE $=$ ∠C $= 45°$ なので，$x = 180° - 85° - 45° = \mathbf{50°}$

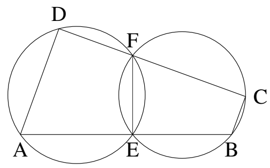
◀


【練習 31：円に内接する四角形】

右図において，AD // BC を示せ.

ただし，D，F，C は一直線上にあり，

A，E，B も一直線上にあるとする.



【解答】 辺 BC を C の方へ伸ばし，伸ばした線上に G をとる.

四角形 ADFE は円に内接するので，∠D = ∠FEB，四角形 FEBC は円に内接するので，∠FEB = ∠FCG であるから，∠D = ∠FCG になる．つまり，錯角が等しいから，AD // BC になる. ■

◀ 別解として，以下を示してもよい.
- ∠D + ∠C = 180°
- ∠A = ∠B の外角
- ∠A + ∠B = 180°

2. 四角形が円に内接する条件

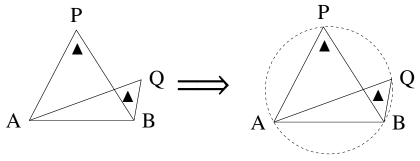
前ページで学んだことは逆も成立し，そのまま四角形が円に内接する条件となる.

A. 円周角の定理の逆

円周角の定理の (2) は「(仮定) P を含む側の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上に Q がある ⇒ (結論) ∠APB = ∠AQB」となるが，この命題は逆も成立する.

円周角の定理の逆

P，Q は線分 AB に対して同じ側にあり，
∠APB = ∠AQB であったとする.
このとき，A，B，P，Q は同一円周上にある[*4].
(四角形 ABPQ は円に内接する)



(証明) は p.154 を参照のこと.

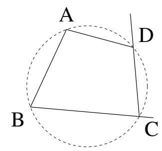
B. 「四角形の対角の和」の逆

『円に内接する四角形の対角』(p.135) も逆が成立する.

四角形が内接する条件（4 点が同一円周上にある）

次のいずれかが成り立てば，四角形 ABCD は円に内接し（4 点 A，B，C，D は同一円周上にあり），他の 3 つも成り立つ.

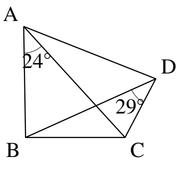
- ∠A + ∠C = 180°，　∠B + ∠D = 180°（対角の和が 180°）
- ∠A = ∠C の外角，　∠B = ∠D の外角（対角の外角と等しい）

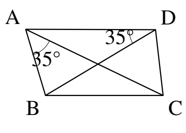


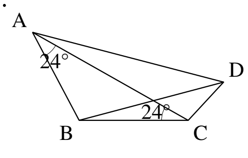
(証明) は p.154 を参照のこと.

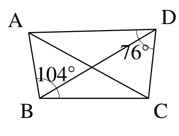
【例題 32】

次の四角形のうち，円に内接するものを 1 つ選べ.

1. 

2. 

3. 

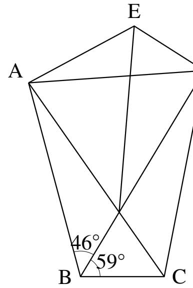
4. 

【解答】 円に内接するのは **4.**

1. 円周角の定理の逆が不成立
2. 等しい角は円周角の定理の逆に対応しない　　3. 2. と同じ
4.「四角形の対角の和」の逆が成り立つ

[*4] 「A，B，P，Q は同じ一つの円の周上にある」という意味

【例題 33】



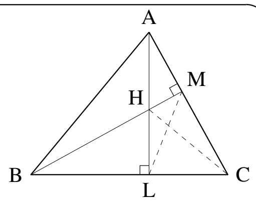
1. ∠ACD = 46° のとき，円に内接する四角形はどれか．また，その根拠を答えよ．
2. ∠AED = 134° のとき，円に内接する四角形はどれか．また，その根拠を答えよ．
3. AC と BD の交点を F とする．四角形 ABCD，四角形 AFDE がどちらも円に内接するとき，59° に等しい角をすべて求めよ．ただし，右図に補助線を引かずに得られる角のみを答えること．

【解答】

1. **円周角の定理の逆**により，**四角形 ABCD** が円に内接する．
2. **四角形の対角の和の逆**により，**四角形 ABDE** が円に内接する．
3. 四角形 ABCD が円に内接するから ∠DAC = ∠DBC = 59°，四角形 AFDE が円に内接するから ∠DAC = ∠DBF = 59°，よって，59° に等しいのは **∠DAC**，**∠DEF** の 2 つ．

◀ ∠DAC は ∠DAF でもよい．

【練習 34：四角形の内接】



△ABC の A，B から垂線 AL，BM を引き，交点を H とする．

(1) A，B，C，H，L，M のいずれかを頂点とする四角形のうち，円に内接するもの 2 つを答えなさい．
(2) ∠CAL = 15°，∠ABM = 25° のとき，∠ALM，∠HCL の大きさを求めよ．

【解答】

(1) ∠CMH + ∠CLH = 180° から，**C**，**M**，**H**，**L** **は同一円周上にある**．
また，∠AMB = ∠ALB から，**A**，**M**，**L**，**B** **は同一円周上にある**．

◀『円周角の定理の逆』(p.136)

◀『四角形の対角の和の逆』(p.136)

(2) 四角形 AMLB について，円周角の定理より ∠ALM = ∠ABM = **25°**．
また，∠HCL = ∠HML = ∠BAL である．△ABM に着目して，∠BAL = 90° − 15° − 25° = 50° であるから，**∠HCL = 50°**．

◀順に，四角形 CMHL，四角形 AMLB について，円周角の定理を用いた）

直角が向かい合う四角形を見たら，円に内接することを連想できるようにしよう．

【暗記 35：円周角の定理の逆】

線分 AB があり，線分 AB を直径とする円の円周を K とする．以下の $\boxed{}$ に「内部」「周上」「外部」のいずれかを入れよ．

- ∠APB が鋭角ならば，P は K の $\boxed{ア}$ にある．
- ∠APB が直角ならば，P は K の $\boxed{イ}$ にある．
- ∠APB が鈍角ならば，P は K の $\boxed{ウ}$ にある．

【解答】 ア：外部，　イ：周上，　ウ：内部

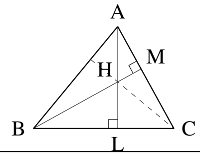
上の 3 点の証明は p.154 を参照のこと．

【練習 36：垂心についての別証明】

$\triangle ABC$ の A，B から垂線 AL，BM を引き，交点を H とする．

(1) $\angle HCL = \angle LAB$ を証明せよ．

(2) 直線 CH と辺 AB の交点を N とする．$CN \perp AB$ を示せ．



【解答】

(1) $\angle CMH + \angle CLH = 180°$ から，四角形 CMHL は同一円周上にある．また，$\angle AMB = \angle ALB$ から，四角形 AMLB は同一円周上にあるので

$\angle HCL = \angle HML$ （四角形 CMHL について，円周角の定理より）

$= \angle BAL$ （四角形 AMLB について，円周角の定理より）

(2) (1) より $\angle HCL = \angle LAB$，対頂角より $\angle AHN = \angle CHL$ から，2 角が等しいので $\triangle AHN \backsim \triangle CHL$，よって，$\angle ANH = \angle CLH = 90°$． ■

【練習 37：垂心と内心】

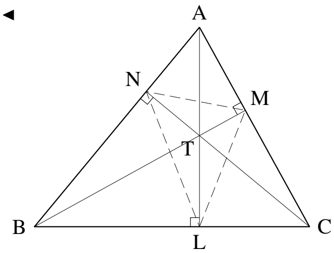
鋭角三角形 ABC の各頂点から，垂線 AL，BM，CN を引く．$\triangle ABC$ の垂心が，$\triangle LMN$ の内心であることを示せ．

【解答】 NT，LT，MT がすべて，$\triangle LMN$ の内角二等分線になることを示せばよい．

◂ 実際には，このうち 2 つを示せば十分である．

まず，$\angle ANT + \angle AMT = 90° + 90° = 180°$ であるから，四角形 ANTM は円に内接する．同様にして，四角形 BNTL，CMTL も円に内接する．また，$\angle AMB = \angle ALB = 90°$ から四角形 AMLB は円に内接する．同様にして，四角形 BNMC，CLNA も円に内接する．以上より，

◂



$\angle MNT = \angle MAT$ （四角形 ANTM について，円周角の定理より）

$= \angle LBT$ （四角形 AMLB について，円周角の定理より）

$= \angle TML$ （四角形 BNTL について，円周角の定理より）

であるから，NT は $\angle LNM$ の二等分線になる．また

$\angle NLT = \angle NBT$ （四角形 BNTL について，円周角の定理より）

$= \angle MCT$ （四角形 BMMC について，円周角の定理より）

$= \angle MLT$ （四角形 CMTL について，円周角の定理より）

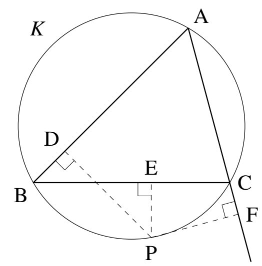
$\angle LMT = \angle LCT$ （四角形 CMTL について，円周角の定理より）

$= \angle NAT$ （四角形 CLNA について，円周角の定理より）

$= \angle NMT$ （四角形 ANTM について，円周角の定理より）

であるから，LT，MT は $\angle NLM$，$\angle LMN$ の二等分線になる．よって，T は $\triangle LMN$ の内心である．

【発展 38：シムソン線】



$\triangle ABC$ と外接円 K を考える．A を含まない弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上に P をとり，P から直線 AB，BC，CA へ引いた垂線の足を D，E，F とする．ただし，線分 AP が円 K の直径でないように，P をとる．

① A，B，C，D，E，F，P のいずれかを頂点とする四角形のうち，円に内接するものは 4 つある．そのうち 1 つは四角形 ABPC であるが，他の 3 つを答えなさい．

② D か F の一方は $\triangle ABC$ の辺上にあり，他方は辺上にないことを示せ．

③ 3 点 D，E，F は同一直線上にあることを示せ（この直線を**シムソン線** (Simson line) という）．

【解答】

① **四角形 ADPF** （$\angle ADP + \angle AFP = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ より）

四角形 BDEP （$\angle BDP = \angle BEP = 90^\circ$ より）

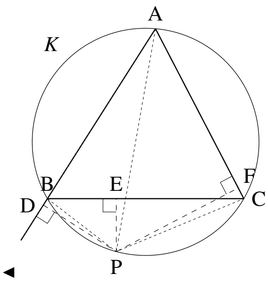
四角形 CEPF （$\angle PEC + \angle PFC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ より）

② $\angle PBA < 90^\circ$ のとき D は辺 AB 上にある．このとき，$\angle PBA + \angle PCA = 180^\circ$ から $\angle PCA > 90^\circ$ となり，F は辺 AC 上にはないと分かる．

AP は直径でないので，$\angle PBA = 90^\circ$ にはならない．

$\angle PBA > 90^\circ$ のとき D は辺 AB 上にない．このとき，$\angle PBA + \angle PCA = 180^\circ$ から $\angle PCA < 90^\circ$ になって，F は辺 AC 上にはあると分かる．

以上より，題意は示された．



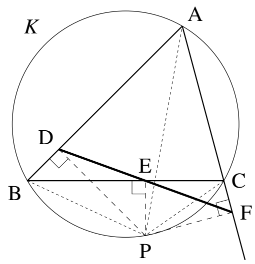
③ $\angle DEB = \angle CEF$ であることを示せばよい．まず，四角形 BDEP，四角形 CEPF は円に内接するので，

$\angle DEB = \angle DPB$, $\angle CEF = \angle CPF$ ……… ① である．一方，

四角形 ABPC が円に内接するので $\angle BAC + \angle BPD + \angle DPC = 180^\circ$,

四角形 ADPF が円に内接するので $\angle BAC + \angle DPC + \angle CPF = 180^\circ$ である．よって，$\angle BPD = 180^\circ - \angle BAC - \angle DPC = \angle CPF$ とわかる．

これと①を合わせて $\angle DEB = \angle CEF$ であるから，D，E，F は同一直線上にあることは示された．



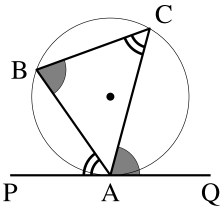
3. 接弦定理

接弦定理

$\triangle$ABC が円に内接し，A で円に接する直線 PQ が引いてある．
このとき，次が成り立つ．

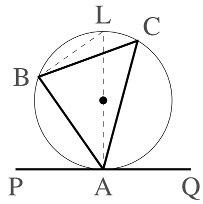
$\angle BAP = \angle BCA, \qquad \angle CAQ = \angle CBA$

これを，**接弦定理**という．



（証明・鋭角のとき）直線 AO と円周の交点を L とし，直径 AL を考える．
円周角の定理より $\angle ABL = 90^\circ$ であるから，$\triangle$ABL について
$\angle BLA + \angle BAL = 90^\circ$ ……… ② である．よって

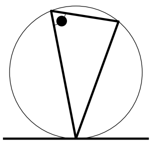
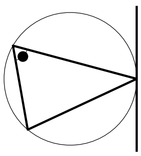
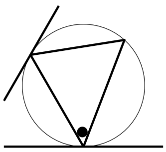
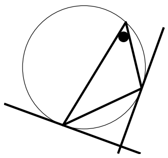
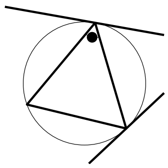
$$\begin{aligned}\angle BAP = 90^\circ - \angle BAL &= \angle BLA \quad \text{（②より）}\\ &= \angle BCA \quad \text{（円周角の定理より）} \ \blacksquare\end{aligned}$$

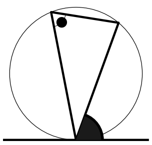
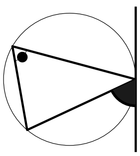
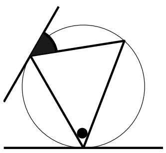
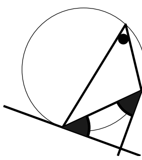
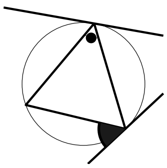


左右を逆に考えれば，$\angle CAQ = \angle CBA$ も同様に示される．
（証明・鈍角のとき）$\angle CBA$ が鈍角の場合を示す．$\angle BCA$ は鋭角なので $\angle BAP = \angle BCA$ であり

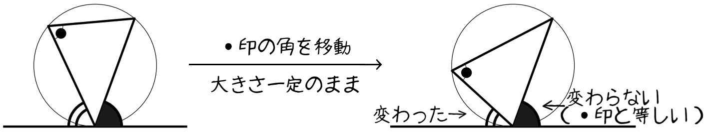
$$\begin{aligned}\angle CBA &= 180^\circ - \angle BCA - \angle BAC \quad \text{（}\triangle ABC\text{ の内角の和は }180^\circ\text{）}\\ &= 180^\circ - \angle BAP - \angle BAC = \angle CAQ \ \blacksquare\end{aligned}$$

【例題 39】 以下の図において，接弦定理によって・印と等しい角をすべて選べ．

1.

2.

3.

4.

5.


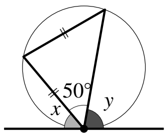
1.

2.

3.

4.

5.


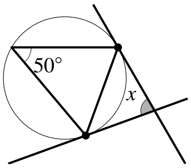
右のように，・印の角を一定に移動しても，大きさの変わらない側の角が・印と等しいと理解するとよい．

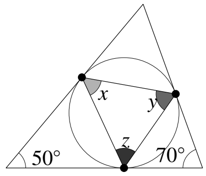


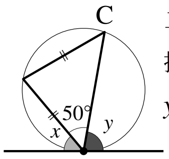
【練習 40：接弦定理〜その１〜】

右の図中の ● はすべて，円と直線の接点である．
それぞれ，x, y, z を求めよ．

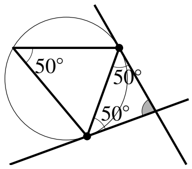
(1) 

(2) 

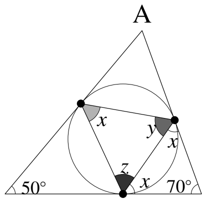
(3) 

(1) 

二等辺三角形から $\angle C = 50°$
接弦定理より $x = \angle C = \mathbf{50°}$
$y = 180° - (50° + 50°) = \mathbf{80°}$

(2) 

接弦定理より，2 ヶ所が 50° に等しい．よって
$x = 180° - (50° + 50°) = \mathbf{80°}$

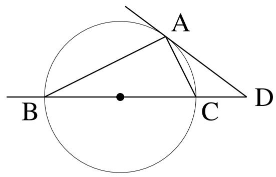
(3) 

接弦定理より，2 ヶ所が x に等しい．よって
$x = (180° - 70°) \div 2 = \mathbf{55°}$
同様にして $y = (180° - 50°) \div 2 = \mathbf{65°}$
$\angle A = 60°$ に注意して，同様に $z = (180° - 60°) \div 2 = \mathbf{60°}$.

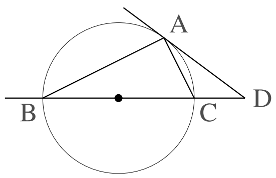
【練習 41：接弦定理〜その２〜】

右図において，線分 BC は円の直径，直線 DA は円の接線である．以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle ABC = 20°$ のとき，$\angle D$ の大きさを求めよ．
(2) $AC = CD = 1$ のとき，$\angle ABC$ と円の直径を求めよ．



【解答】 まず，BC が直径なので $\angle BAC = 90°$ である．

(1) 

接弦定理より $\angle DAC = 20°$,
$\angle ACB = 180° - (90° + 20°) = 70°$
よって，$\triangle ACD$ について，
$\angle D = 70° - 20° = \mathbf{50°}$

◀ 三角形の 2 角の和は，他の 1 角の外角に等しい．

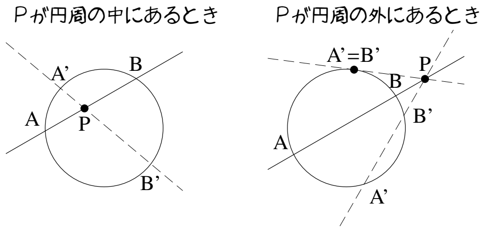
(2) $\angle ABC = x$ とおくと $\angle DAC = x$, $\angle D = x$ であるから，$\angle ACB = 2x$ になる．$\angle ABC + \angle ACB = 90°$ に代入して，$x + 2x = 90°$，つまり $x = \mathbf{30°}$
また，$\triangle ABC$ は 30°, 60°, 90° の直角三角形になり，$AC = 1$ より，$BC = \mathbf{2}$ **が円の直径**になる．

4. 方べきの定理

A. 方べきの定理とは

円 C と，1 点 P がある．ただし，P は C の円周上にないとする．

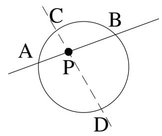
ここで，P を通る直線 l を考え，C の円周と l の交点を A，B とする．**方べきの定理**とは，l をどのように引いても，PA · PB が同じ値になることを言う．



B. P が円周の中にあるとき

方べきの定理（P が円周の中にあるとき）

弦 AB と弦 CD が，円の中の P で交わっているとき
- △PAD ∽ △PCB であり
- PA · PB = PC · PD が成り立つ（方べきの定理）．



【暗記 42：方べきの定理〜その１〜】
上の定理を証明せよ．

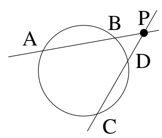
【解答】 △PAD と △PCB について，円周角の定理より ∠PAD = ∠PCB，∠PDA = ∠PBC であるので，2 角が等しいから △PAD ∽ △PCB になる．よって，PA : PC = PD : PB ⇔ PA · PB = PC · PD ■

◀ △PAC ∽ △PDB を示しても良い．

C. P が円周の外にあるとき

方べきの定理（P が円周の外にあるとき）

弦 AB と弦 CD が，円の中の P で交わっているとき
- △PAD ∽ △PCB であり
- PA · PB = PC · PD が成り立つ（方べきの定理）．

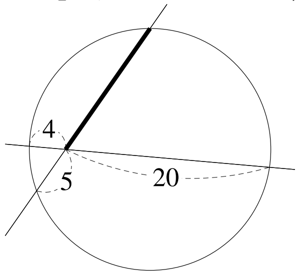


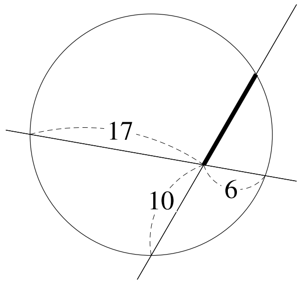
【暗記 43：方べきの定理〜その２〜】
上の定理を証明せよ．

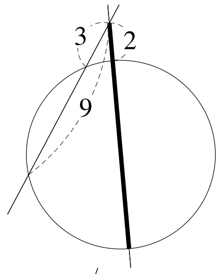
【解答】 △PAD と △PCB について，∠P は共通，円周角の定理より ∠PAD = ∠PCB であるので，2 角が等しいから △PAD ∽ △PCB になる．よって，PA : PC = PD : PB ⇔ PA · PB = PC · PD ■

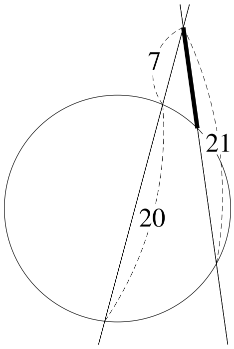
◀ △PAC ∽ △PDB を示しても良い．この場合，四角形 ABCD が円に内接することを用いる．

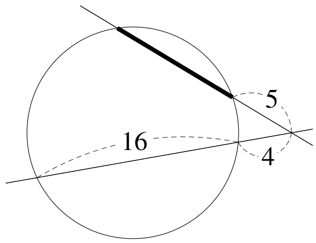
【例題 44】 以下の図において，太線の長さを求めよ．

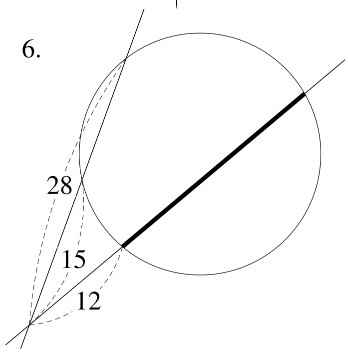
1.


2.


3.


4.


5.


6.


【解答】 いずれも，求める長さを x とおく．

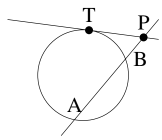
1. $4\cdot\cancel{20}^{4}=\cancel{5}x$ より，$\boldsymbol{x=16}$.
2. $17\cdot\cancel{6}^{3}=\cancel{10}^{5}x$ より，$\boldsymbol{x=\dfrac{51}{5}}$.
3. $3\cdot 9=2x$ より，$\boldsymbol{x=\dfrac{27}{2}}$.
4. $\cancel{7}\cdot(20+7)=\cancel{21}^{3}x$ より，$\boldsymbol{x=9}$.
5. $\cancel{(16+4)}^{4}\cdot 4=(x+5)\cdot\cancel{5}$ より，$x=16-5=\mathbf{11}$.
6. $\cancel{28}^{7}\cdot\cancel{15}^{5}=\cancel{12}^{\cancel{3}}\cdot(x+12)$ より，$x=35-12=\mathbf{23}$.

D. 円周外の点 P から，接線を引いたとき

方べきの定理（P から接線を引いたとき）

接点が T である接線が，弦 AB と点 P で交わっているとき

- $\triangle\mathrm{PAT}\backsim\triangle\mathrm{PTB}$ であり
- $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$ が成り立つ（方べきの定理）．



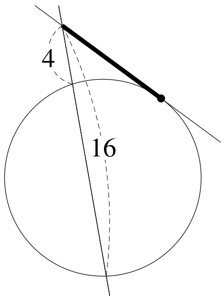
【暗記 45：方べきの定理〜その３〜】
上の定理を証明せよ．

【解答】 $\triangle\mathrm{PAT}$ と $\triangle\mathrm{PTB}$ について，$\angle\mathrm{P}$ は共通，接弦定理より $\angle\mathrm{PAT}=\angle\mathrm{PTB}$ であるので，2 角が等しいから $\triangle\mathrm{PAT}\backsim\triangle\mathrm{PTB}$ になる．よって
$\mathrm{PA}:\mathrm{PT}=\mathrm{PT}:\mathrm{PB}\Leftrightarrow\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

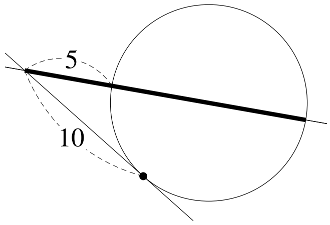
【練習 46：接線を引いたときの方べきの定理】

以下の図において，太線の長さを求めよ．ただし，図の中の“・”は接点とする．

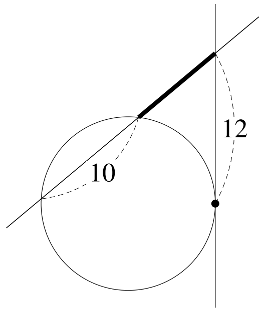
(1)



(2)



(3)



【解答】　求める長さを x とする．

(1) $16 \cdot 4 = x^2$ より，$x = \sqrt{64} = \mathbf{8}$

(2) $5 \cdot x = 10^2$ より，$\boldsymbol{x = 20}$

(3) $x(x+10) = 12^2 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 144 = 0$.

これを解いて $x = 8, -18$ なので，$\boldsymbol{x = 8}$.

方べきの定理においては，一方の点のみが円周上にあることに注意しよう．

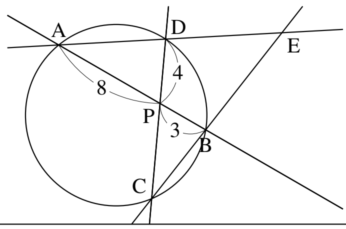
【練習 47：方べきの定理のまとめ】

右の図について，以下の問いに答えよ．

(1) CP の長さを求めよ．

(2) 図中の相似な三角形を 2 組答え，それぞれの相似比も答えよ．

(3) DE = 10 とするとき，BC の長さを求めよ．



【解答】

(1) 方べきの定理より $8 \cdot 3 = 4 \cdot \mathrm{CP}$ なので，$\mathrm{CP} = \mathbf{6}$

(2) **△PAD ∽ △PCB**，相似比は PD : PB = **4 : 3**

△EAB ∽ △ECD，相似比は AB : CD = **11 : 10**

(3) BC = x とおく．

△EAB ∽ △ECD，DE = 10 より $\mathrm{BE} = 10 \times \dfrac{11}{10} = 11$

△PAD ∽ △PCB，BC = x より $\mathrm{AD} = \dfrac{4}{3}x$

よって，方べきの定理より

$$10\left(10 + \frac{4}{3}x\right) = 11(11 + x) \Leftrightarrow 100 + \frac{40}{3}x = 121 + 11x$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{3}x = 21 \quad \therefore \quad x = \cancel{21}^{3} \cdot \frac{3}{\cancel{7}}\ \mathbf{9}$$

◀【別解】EA : EC = 11 : 10 より $\left(10 + \frac{4}{3}x\right) : (11 + x) = 11 : 10$ これを解いて $\boldsymbol{x = 9}$.

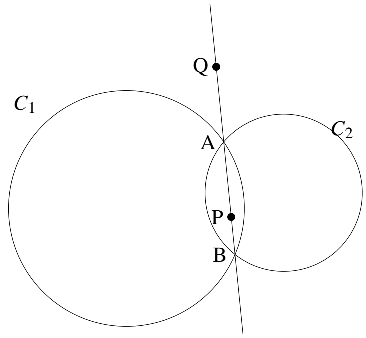
方べきの定理と，それを示すために用いた三角形の相似は，セットにして理解しよう．上の【練習】のように，相似を使わないと解けない問題も存在する．

【発展 48：総合問題】

円 C_1 と C_2 が 2 点 A，B と交わっている．直線 AB 上のうち，線分 AB 上に P を，線分 AB の外に Q をとる．

① P を通り，直線 AB とは異なる直線 l を引き，l と円 C_1 の 2 交点を D，E とし，l と円 C_2 の 2 交点を F，G とする．このとき，$\mathrm{PD}\cdot\mathrm{PE}=\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PG}$ を示せ．

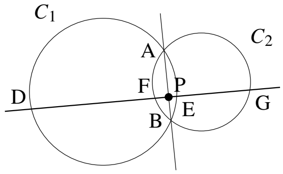
② Q を通り円 C_1 と 2 点 K，L で交わる直線 m_1 を引き，Q を通り円 C_2 と 2 点 M，N で交わる直線 m_2 を引く．このとき，K，L，M，N は同一円周上にあることを示せ．ただし，直線 AB，m_1，m_2 はすべて異なる直線とする．



【解答】

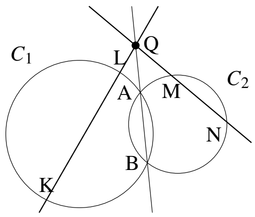
① 円 C_1 について方べきの定理を用いると $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PD}\cdot\mathrm{PE}$,
円 C_2 について方べきの定理を用いると $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PG}$
である．よって，$\mathrm{PD}\cdot\mathrm{PE}=\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PG}$ が示された．

◀



② K，L，M，N を右図のようにとる．
円 C_1 について方べきの定理を用いると $\mathrm{QA}\cdot\mathrm{QB}=\mathrm{QK}\cdot\mathrm{QL}$,
円 C_2 について方べきの定理を用いると $\mathrm{QA}\cdot\mathrm{QB}=\mathrm{QM}\cdot\mathrm{QN}$
である．よって，$\mathrm{QK}\cdot\mathrm{QL}=\mathrm{QM}\cdot\mathrm{QN}$ と分かり，
$\mathrm{QK}:\mathrm{QN}=\mathrm{QM}:\mathrm{QL}$ ……… ① が成り立つ．
$\triangle\mathrm{QKM}$ と $\triangle\mathrm{QNL}$ について，$\angle\mathrm{Q}$ は共通，①から 2 辺の比とその間の角が等しいので，$\triangle\mathrm{QKM}\backsim\triangle\mathrm{QNL}$ である．よって，$\angle\mathrm{QKM}=\angle\mathrm{QNL}$ となるから，四角形 KLNM について，$\angle\mathrm{N}$ は向かい合う角の外角に等しいので円に内接する．

◀



◀ (別解)「方べきの定理の逆」が成り立つ（13th-note では扱わない）ことを用いれば，$\mathrm{QK}\cdot\mathrm{QL}=\mathrm{QM}\cdot\mathrm{QN}$ から直接，K，L，M，N が同一円周上にあると導かれる．

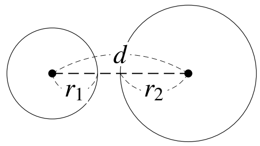
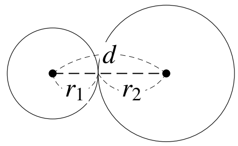
5. 2円の性質

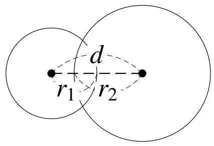
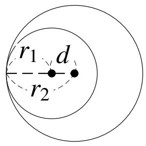
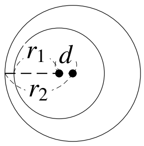
A. 2円の位置関係

2円の位置関係は，2円の半径と中心間の距離で決まり，以下の5つの状態しかない．

2円の位置関係

2円の半径を r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$，中心間の距離を d とすると，以下のようになる．

2円の図		
2円の位置関係	離れている	外接している
2円の共有点の個数	0個	1個（外接）
2円の中心間の距離 d	$\boldsymbol{r_2 + r_1 < d}$	$\boldsymbol{d = r_2 + r_1}$

		
交わっている	内接している	一方が他方を含む
2個	1個（内接）	0個
$\boldsymbol{r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1}$	$\boldsymbol{d = r_2 - r_1}$	$\boldsymbol{d < r_2 - r_1}$

円が複数個あるときは，まず，中心間を線で結んだ図を描こう．そのうえで，上のような条件を考えるとよい．

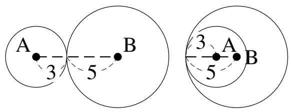
【例題 49】 2点A, Bがあり，中心がAで半径3の円 C_1 と，中心がBで半径5の円 C_2 がある．以下のそれぞれの場合について，C_1 と C_2 の位置関係を答えよ．

1. AB = 9　　2. AB = 5　　3. AB = 2　　4. AB = 1

【解答】 円 C_1 の中心 (0, 0) をOとすると，OA = 5 + 3 = 8 のとき2円は外接，OA = 5 − 3 = 2 のとき2円は内接であるので，

- 8 < OA のとき2円は離れている
- 2 < OA < 8 のとき2円は交わっている
- OA < 2 のとき C_2 が C_1 を含む

1. **2円は離れている．**　　2. **2円は交わっている．**
3. **2円は内接している．**　　4. **C_2 が C_1 を含む．**

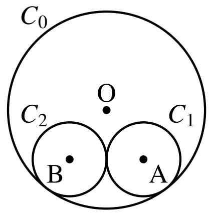
◂ 

【練習 50：複数の円を含む図形】

半径 8 の円 C_0 に，半径 3 の円 C_1, C_2 が右図のように内接している．それぞれの中心を O，A，B とする．

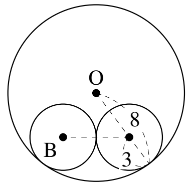
(1) AB，OA の長さをそれぞれ求めよ．

(2) 発展 円 C_0 に内接し，円 C_1, C_2 の両方に外接する円のうち，大きい方の円 C_3 の半径を求めよ．



【解答】

(1) 図より明らかに，**AB = 6**．また，直線 OA を右欄外の図のように引いて，OA = 8 − 3 = **5**.



円が接しているときは円の中心と接点を結ぶ習慣をつけよう

(2) 円 C_3 の中心を P，半径を x とする．

AB の中点を M とすると，M は直線 PO 上にあり，PM ⊥ AB になる．

△OAM は直角三角形なので

$5^2 = 3^2 + \mathrm{OM}^2 \qquad \therefore\ \mathrm{OM} = 4$

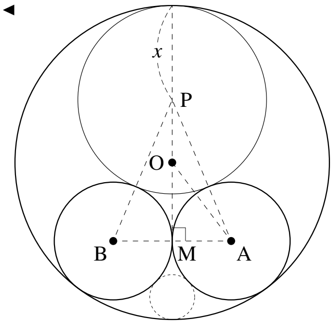
また，円 C_3 が円 C_0 と内接することから PO = $8 - x$ なので，△PAM について

$$\mathrm{PA}^2 = (\mathrm{PO} + \mathrm{OM})^2 + \mathrm{MA}^2$$

$$\Leftrightarrow\ (x+3)^2 = \{(8-x)+4\}^2 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + 6x + 9 = 144 - 24x + x^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow\ 6x = 144 - 24x \qquad \therefore\ \boldsymbol{x = \frac{24}{5}}$$

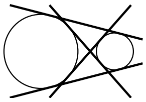
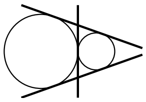
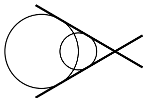
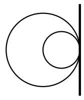
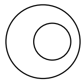


ちなみに，下に小さい円も書ける．こちらの円の半径は $\frac{8}{7}$ になる．

B. 2円の共通接線

2つの円にどちらも接する接線を2円の**共通接線**と言い，2円の位置関係によって本数が異なる．

2円の共通接線

本数	4本*5	3本	2本	1本	0本
2円と共通接線の図					
2円の位置関係	離れている	外接している	交わっている	内接している	一方が他方を含む
共通外接線	2本	2本	2本	1本	0本
共通内接線	2本	1本	0本	0本	0本

【例題 51】 2点A, Bがあり，中心がAで半径3の円 C_1 と，中心がBで半径5の円 C_2 がある．以下の場合について，共通接線の本数を答えよ．

1. AB = 9　　2. AB = 5　　3. AB = 2　　4. AB = 1

【解答】 前ページの答えを利用して

1. 2円は離れているので**4本**.
2. 2円は交わっているので**2本**.
3. 2円は内接しているので**1本**.
4. C_2 が C_1 を含むので**0本**.

【暗記 52：共通接線の長さ】

O_1 が中心で半径1の円 C_1 と，O_2 が中心で半径2の円 C_2 があり，$O_1O_2 = 4$ とする．

1. 2円の共通外接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ A_1，A_2 で接するとき，線分 A_1A_2 の長さを求めよ．
2. 2円の共通内接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ B_1，B_2 で接するとき，線分 B_1B_2 の長さを求めよ．

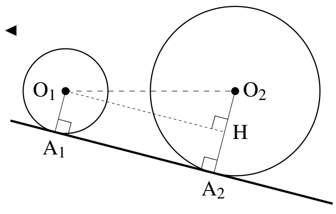
【解答】

1. O_1 から O_2A_2 へ下ろした垂線の足をHとすると

$$A_1A_2 = O_1H = \sqrt{O_1O_2{}^2 - O_2H^2}$$

である．$O_1O_2 = 4$, $O_2H = A_2O_2 - A_2H = 2 - 1 = 1$ なので

$$A_1A_2 = \sqrt{4^2 - 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{15}}$$

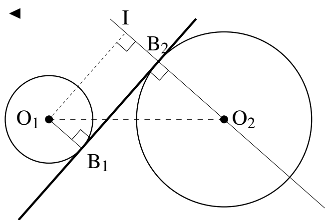


2. O_1 から直線 O_2B_2 へ下ろした垂線の足をIとすると

$$B_1B_2 = O_1I = \sqrt{O_1O_2{}^2 - O_2I^2}$$

である．$O_1O_2 = 4$,　$O_2I = O_2B_2 + B_1O_1 = 2 + 1 = 3$ なので

$$B_1B_2 = \sqrt{4^2 - 3^2} = \boldsymbol{\sqrt{7}}$$



上の問題の2. の別解として，O_1O_2 と B_1B_2 の交点をCとし，$\triangle O_1B_1C \backsim \triangle O_2B_2C$ と三平方の定理を用いても解くことが出来る．ただし，計算が多少ややこしい．

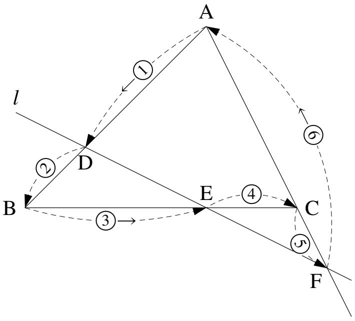
1. メネラウスの定理

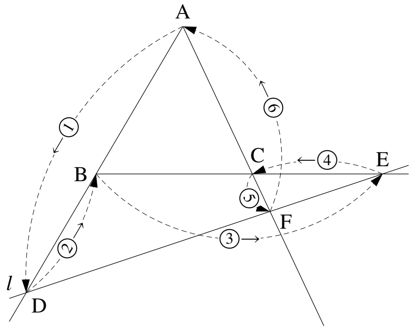
A. メネラウスの定理とは

メネラウスの定理

△ABC と直線 l を考える．l が直線 AB，BC，CA と交わる点を D，E，F とするとき，次の式が成り立つ．

$$\overset{①}{\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}}_{②}\cdot\overset{③}{\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}}_{④}\cdot\overset{⑤}{\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}}_{⑥}=1$$





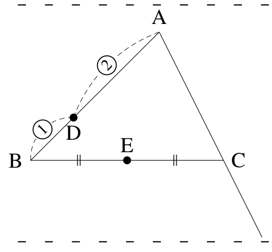
（ただし，D，E，F は △ABC の頂点に一致しないとする．）

（証明）C を通り直線 l に平行な直線と，直線 AB の交点を K とする．このとき，CK // l より
$\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DK}}$，$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=\dfrac{\mathrm{KD}}{\mathrm{DA}}$ となる．よって，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DK}}\cdot\dfrac{\mathrm{KD}}{\mathrm{DA}}=1$ ■

この定理を使うには，上図の矢印のように，線でなぞって考えると良い．
このとき，線でなぞるのは，A から始めなくても，B からでも，C からでもよい．実際に，次のどちらの等式も成り立つからである．

Bから始めた場合→ $\overset{③}{\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}}_{④}\cdot\overset{⑤}{\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}}_{⑥}\cdot\overset{①}{\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}}_{②}=1$ ，　Cから始めた場合→ $\overset{⑤}{\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}}_{⑥}\cdot\overset{①}{\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}}_{②}\cdot\overset{③}{\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}}_{④}=1$

【例題 53】 △ABC があり，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，辺 BC の中点を E とする．直線 DE と直線 AC の交点を F とするとき，$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}$ を求めよ．
また，AC : CF を求めよ．



【解答】 △ABC と直線 DE について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1 \iff \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1$$

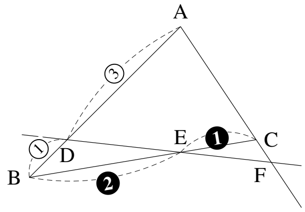
よって，$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$
また，**AC : CF = 1 : 1**

◀ AD : DB = 2 : 1 と $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=\dfrac{2}{1}$ は同じことを表わしている．

◀ 両辺を $\dfrac{1}{2}$ 倍した

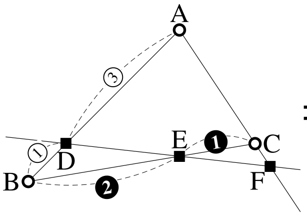
◀ 詳しく書けば，$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=\dfrac{1}{2}$ より，CF = k，FA = $2k$ とおけるので AC = k になるから 1 : 1.

B.　三角形と１本の直線を決める



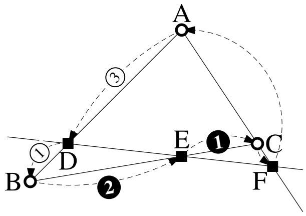
右の図にメネラウスの定理を使うと，次のように，2 通りの等式を考えることが出来る．

(I) △ABC と直線 DEF で考えた場合



○は三角形の頂点
■は直線と辺の交点

$\Longrightarrow$



Aから始めて
Ⓐ→■→○→■→○→■→Ⓐ

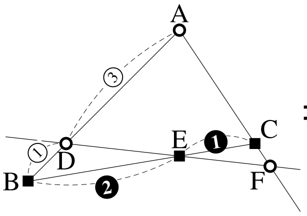
$\Longrightarrow$ $\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1$

よって，$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=\dfrac{1}{6}$ になり，

CF : FA = 1 : 6

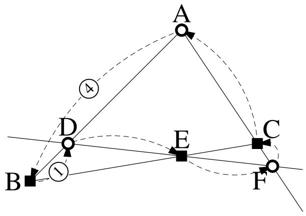
AC : CF = 5 : 1

(II) △ADF と直線 BC で考えた場合



○は三角形の頂点
■は直線と辺の交点

$\Longrightarrow$



Aから始めて
Ⓐ→■→○→■→○→■→Ⓐ

$\Longrightarrow$ $\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}\cdot\dfrac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}=1$

このように，どの三角形と直線で考えるかによって，異なる式を作ることが出来る．

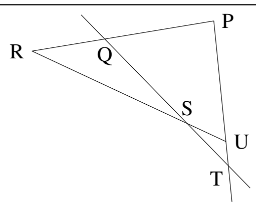
(····) 問題を解く際は，上のことに注意して「とりあえずやってみる」とよい．

【練習 54：メネラウスの定理】

右図において，PQ : QR = 3 : 2，PU : UT = 4 : 1 である．
以下の問いに答えよ．

(1) RS : SU を求めよ．

(2) QS : ST を求めよ．



【解答】

(1) △PRU と直線 QT についてメネラウスの定理を考えれば

$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{RS}}{\mathrm{SU}}\cdot\dfrac{1}{5}=1 \iff \dfrac{\mathrm{RS}}{\mathrm{SU}}=\dfrac{10}{3}$

よって，**RS : SU = 10 : 3**.

(2) △PQT と直線 RU についてメネラウスの定理を考えれば

$\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{QS}}{\mathrm{ST}}\cdot\dfrac{1}{4}=1 \iff \dfrac{\mathrm{QS}}{\mathrm{ST}}=\dfrac{8}{5}$

よって，**QS : ST = 8 : 5**.

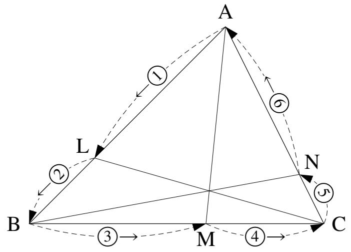
2. チェバの定理

チェバの定理

△ABC の辺 AB，BC，CA 上に L，M，N がある．ここで，直線 AM，BN，CL が 1 点で交わるならば，次の式が成り立つ．

$$\underset{\text{②}}{\overset{\text{①}}{\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}}}\cdot\underset{\text{④}}{\overset{\text{③}}{\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}}}\cdot\underset{\text{⑥}}{\overset{\text{⑤}}{\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}}}=1$$

（ただし，L，M，N は △ABC の頂点に一致しないとする．）

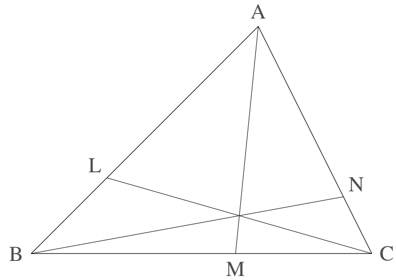


（証明）AM，BN，CL が交わる 1 点を K とする．△ABM と直線 LC についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CM}}\cdot\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{KA}}=1 \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

△AMN と直線 BN についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KM}}\cdot\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}=1 \qquad \cdots\cdots\text{②}$$



①，②の左辺どうし，右辺どうしを掛け合わせると

$$\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\frac{\cancel{\mathrm{BC}}}{\mathrm{CM}}\cdot\frac{\cancel{\mathrm{MK}}}{\cancel{\mathrm{KA}}}\cdot\frac{\cancel{\mathrm{AK}}}{\cancel{\mathrm{KM}}}\cdot\frac{\mathrm{MB}}{\cancel{\mathrm{BC}}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}=1 \iff \frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{CM}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}=1 \quad \blacksquare$$

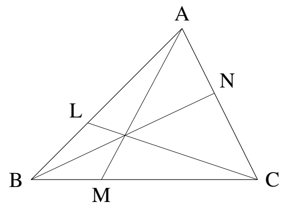
…… チェバの定理も線でなぞると考えやすい．また，A でなく，B や C から始めてもよい．

【練習 55：メネラウスの定理・チェバの定理】

右図の三角形において，L は辺 AB を 5 : 3 に内分し，N は辺 AC を 3 : 4 に内分し，線分 AM，BN，CL は 1 点 G で交わっている．

(1) BM : MC を求めよ．　(2) AG : GM を求めよ．

(3) BG : GN を求めよ．　(4) CG : GL を求めよ．



【解答】

(1) チェバの定理より $\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}=1 \iff \frac{5}{3}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{4}{3}=1$ より，$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}=\frac{9}{20}$ なので，BM : MC = **9 : 20**

(2) △ABM と直線 LC についてメネラウスの定理を考えれば
$\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CM}}\cdot\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{GA}}=1 \iff \frac{\cancel{5}}{3}\cdot\frac{29}{\cancel{20}^{4}}\cdot\frac{\mathrm{NG}}{\mathrm{GA}}=1 \iff \frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{GA}}=\frac{12}{29}$ なので，AG : GM = **29 : 12**

◀ △ACM と直線 BM についてメネラウスの定理を考えても，解くことが出来る．

(3) △ABN と直線 LC についてメネラウスの定理を考えれば
$\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GN}}\cdot\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{CA}}=1 \iff \frac{5}{3}\cdot\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GN}}\cdot\frac{4}{7}=1 \iff \frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GN}}=\frac{21}{20}$ なので，BG : GN = **21 : 20**

◀ △BCN と直線 AM についてメネラウスの定理を考えても，解くことが出来る．

(4) △ACL と直線 BN についてメネラウスの定理を考えれば
$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BL}}\cdot\frac{\mathrm{LG}}{\mathrm{GC}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}=1 \iff \frac{8}{3}\cdot\frac{\mathrm{LG}}{\mathrm{GC}}\cdot\frac{4}{3}=1 \iff \frac{\mathrm{LG}}{\mathrm{GC}}=\frac{9}{32}$ なので，CG : GL = **32 : 9**

◀ △CLB と直線 AM についてメネラウスの定理を考えても，解くことが出来る．

1. 重心の別証明

【発展 56：重心と面積比〜重心についての別証明】

$\triangle$ABC の中線 BM，CN の交点を P とする．$\triangle$ABC の面積を S とすると，$\triangle$BCM = $\boxed{ア}$ である．

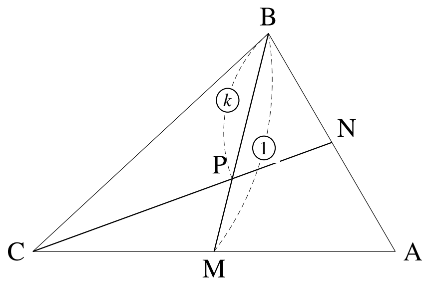
ここで，BM : BP = 1 : k とおくと，$\triangle$BPC = $\boxed{イ}$ になる．

同様にして，$\triangle$BPA = $\boxed{ウ}$ であり，N は AB の中点であるから $\triangle$BPN = $\boxed{エ}$ になる．ここで，

$$\triangle\text{BCN} = \triangle\text{BPC} + \triangle\text{BPN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = \boxed{イ} + \boxed{エ}$$

になるから，k = $\boxed{オ}$ である．

よって，BP : PM = $\boxed{カ}$: $\boxed{キ}$ と分かる[*6]．



【解答】 底辺が $\triangle$ABC の半分だから，$\triangle\text{BCM} = \underline{\boldsymbol{\frac{S}{2}}}_{(ア)}$ であり，$\triangle$BPC の底辺を BP と見れば，$\triangle\text{BPC} = k\triangle\text{BCM} = \underline{\boldsymbol{\frac{k}{2}S}}_{(イ)}$ になる．

◂ CM を底辺に見る

同様にして，$\triangle\text{BPA} = k\triangle\text{BAM} = \underline{\boldsymbol{\frac{k}{2}S}}_{(ウ)}$ であり，$\triangle$BPN の底辺を BN と見れば，$\triangle\text{BPN} = \frac{1}{2}\triangle\text{BPA} = \underline{\boldsymbol{\frac{k}{4}S}}_{(エ)}$ になる．ここで

$$\triangle\text{BCN} = \triangle\text{BPC} + \triangle\text{BPN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = \underline{\boldsymbol{\frac{k}{2}S}}_{(イ)} + \underline{\boldsymbol{\frac{k}{4}S}}_{(エ)} = \frac{3k}{4}S$$

$$\Leftrightarrow 2 = 3k \qquad \therefore k = \underline{\boldsymbol{\frac{2}{3}}}_{(オ)}$$

よって，$\text{BP} : \text{PM} = \frac{2}{3} : \left(1 - \frac{2}{3}\right) = {}_{(カ)}\underline{\boldsymbol{2}} : \underline{\boldsymbol{1}}_{(キ)}$ と分かる．

[*6] BC の中点を L，BM と AL の交点を P' とすると，同じように BP' : P'M = $\boxed{カ}$: $\boxed{キ}$ と分かり，P と P' は一致し，これが重心と分かる．

2. 傍心と傍接円についての証明

【発展 57：傍心と傍接円】

$\triangle ABC$ について，$\angle B$ の外角の二等分線，$\angle C$ の外角の二等分線の交点を E とする．直線 AE は，$\angle A$ の二等分線になることを示せ．また，E が傍心の一つになっていることを示せ．

【解答】　E から辺 BC，直線 AB，AC へ引いた垂線の足を，それぞれ P, Q，R とする．

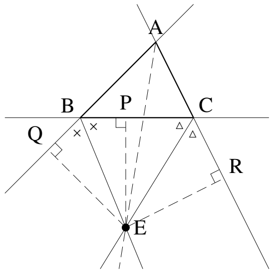
直角三角形 $\triangle EQB$ と $\triangle EPB$ について，EB 共通，$\angle EBQ = \angle EBP$ より，斜辺と 1 角が等しいから $\triangle EQB \equiv \triangle EPB$ となって $EQ = EP$ ……… ①.

同様に，$\triangle ERC \equiv \triangle EPC$ から $ER = EP$ ……… ② である．

直角三角形 $\triangle EAQ$ と $\triangle EAR$ について，EA 共通，①，② より $EQ = ER$ であるから，$\triangle EAQ \equiv \triangle EAR$ になる．よって，$\angle EAQ = \angle EAR$ と分かるので，EA は $\angle A$ の二等分線に一致することが示された．

また，①，②から $EP = EQ = ER$ であるので，E を中心に AB，BC，CA と交わる円を描けることも示されている．■

◀



3. 「四角形が円に内接する条件」の証明

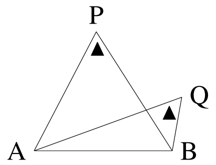
A. 「円周角の定理の逆」の証明

「円周角の定理の逆」は，次の命題の一部として示される．

円周角の定理の逆（拡張）

$\triangle$ABP の外接円を K とし，P，Q は線分 AB に対して同じ側にあるとき，次が成立する．

- $\angle$APB < $\angle$AQB ならば，Q は K の内部にある．
- $\angle$APB = $\angle$AQB ならば，Q は K の周上にある．
- $\angle$APB > $\angle$AQB ならば，Q は K の外部にある．



直線 BQ と円周 K の交点のうち，B でない点を R とする．円と直線は最大 2 点でしか交わらないので，R はただ 1 点に定まる．また，円周角の定理より，$\angle$ARB = $\angle$APB が成り立つ．

(I) $\angle$APB < $\angle$AQB のとき，Q が K の内部になかったと仮定する．
もし，Q が K の周上にあるならば，Q は R と一致するので $\angle$APB = $\angle$AQB となるがこれは矛盾．
もし，Q が K の外部にあるならば，$\triangle$QAR について，$\angle$AQB + $\angle$QAR = $\angle$ARB となるので，$\angle$AQB < $\angle$ARB = $\angle$APB となって矛盾．
つまり，Q は K の内部にないという仮定は誤っているから，背理法によって，Q は K の内部にあることが示された．

(II) $\angle$APB = $\angle$AQB のとき，Q が K の周上になかったと仮定する．
もし，Q が K の内部にあるならば，$\triangle$QAR について，$\angle$AQB = $\angle$ARB + $\angle$QAR となるので，$\angle$AQB > $\angle$ARB = $\angle$APB となって矛盾．
Q が K の外部にあるならば，(I) と同様にして $\angle$AQB < $\angle$APB となって矛盾．
つまり，背理法によって Q は K の周上にある．

(III) $\angle$APB > $\angle$AQB のとき，Q が K の外部になかったと仮定する．
Q が K の内部にあるならば，(II) と同様にして $\angle$AQB > $\angle$APB となって矛盾．
Q が K の周上にあるならば，(I) と同様にして $\angle$AQB = $\angle$APB となって矛盾．
つまり，背理法によって Q は K の外部にある．

ここで，$\angle$APB = 90° とすれば，p.137 の【練習：円周角の定理の逆】の解答の証明になる．

B. 「四角形の対角の和の逆」の証明

B を含まない孤 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 上に，P をとる．ただし，P は直線 CD 上にないとする．

すると，$\angle$B + $\angle$D = 180°，$\angle$B =（$\angle$D の外角）のどちらの公式も，$\angle$APB = $\angle$ADB という条件に一致する．

ここで「円周角の定理の逆」を用いれば，D が $\triangle$APB の外接円周上にあると示されるので，「四角形の対角の和の逆」は示されたことになる．

索引