13th-note 数学B

この教材を使う際は

- 表示：著作者のクレジット「13th-note」を表示してください．
- 非営利：この教材を営利目的で利用してはいけません．ただし，学校・塾・家庭教師の授業で利用するための無償配布は可能です．
- 継承：この教材を改変した結果生じた教材には，必ず，著作者のクレジット「13th-note」を表示してください．
- クレジットを外して使用したいという方はご一報（kutomi@collegium.or.jp）ください．

この教材は FTEXT 数学 I（www.ftext.org）の改訂から始まって作られた著作物です．

Ver1.00(2015-3-16)

目次

第1章　ベクトル

A 平面内のベクトル

向きのある線分がベクトルである．

力の様子（手で物を押す，紐が物を支える，風が吹く，など）を考えるとき，私たちは力の大きさだけでなく向きも考える．これが，ベクトルとも言える．

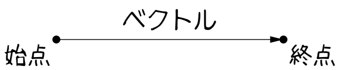
高校数学では主に，図形を調べる強力な道具として，ベクトルを学ぶ．ベクトルの大きな利点の一つは，平面図形にも空間図形にも，同じような手法が使えることにある．

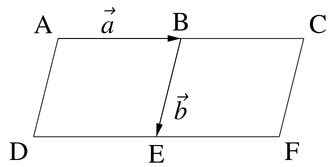
1A.1 ベクトルの基礎

1. ベクトルの定義

ベクトルにおいては，線分 AB と線分 BA を区別する．

A. 始点と終点





向きのある線分を**ベクトル** (vector) と言い[*1]，ベクトルの始まる点を**始点** (initial point)，終わる点を**終点** (terminal point) と言う．

ベクトルを文字で表す方法は 2 つある．

1 つは，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のように，アルファベット小文字 1 文字の上に右向き矢印を付けて表す方法である．

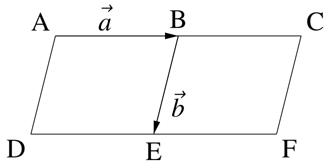
もう 1 つは始点と終点を用いる方法である．たとえば，右図の $\vec{a}$ は始点が A，終点が B であるから $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とも表される[*2]．同様に，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BE}}$ である．

[*1] 厳密には、**有向線分** (oriented segment) の定義が，向きのある線分である。ベクトルの定義はもっと広いが，有向線分は，p.2 で学ぶような演算についてベクトルの公理（p.5 脚注で挙げられた性質）を満たしているために、ベクトルと呼ぶことができる。しかし、この厳密な定義は高校数学の範囲を超える（線形代数学という分野になる）ため，13th-note 数学では有向線分のこともベクトルと呼ぶことにする。

[*2] $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の読み方は「ベクトルA B（エイビー）」となる．

BY-NC-SA

B. 等しいベクトル・逆ベクトル



向きも長さも等しいとき，2 つのベクトルは**等しい** (equal) という．たとえば，下図の $\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ は向きも長さも等しいから $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$ である．このように，ベクトルが等しいことは等号 = を用いて表す．

一方，長さが等しく向きが逆のベクトルを**逆ベクトル**という．たとえば，右図において $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ は $\vec{b}$ の逆ベクトルである．このことは，$\overrightarrow{\mathrm{DA}} = -\vec{b}$ と表される（p.2）．

C. ベクトルの大きさ

ベクトルを，線分として見たときの長さを，ベクトルの**大きさ**と言い，絶対値記号 | 　| を付けて表す．たとえば，右上の図で線分 AB の長さが 2 のとき，ベクトルを用いて $\left|\vec{a}\right| = 2$ と表す．

D. 単位ベクトル・零ベクトル

長さが 1 のベクトルを**単位ベクトル** (unit vector) という．

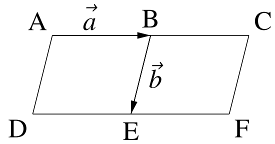
また，長さが 0 のベクトルを**零**(ぜろ)**ベクトル** (null vector, zero vector) と言い，$\vec{0}$ で表す．$\vec{0}$ を始点と終点が等しいベクトルと定義してもよい．

【例題 1】 右の図の ▱ABED，▱BCFE において，AB，AD，BC の長さを全て 5 とする．

1. $\vec{a}$ と等しいベクトル，$\vec{b}$ の逆ベクトルを下の中から全て選びなさい．

   $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

2. $\left|\vec{b}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{FD}}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CC}}\right|$ を求めよ．



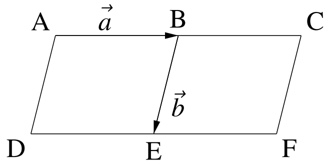
【解答】

1. $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\vec{b}$ の逆ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{FC}}$
2. $\boldsymbol{\left|\vec{b}\right| = 5}$，$\boldsymbol{\left|\overrightarrow{\mathrm{FD}}\right| = 10}$，$\boldsymbol{\left|\overrightarrow{\mathrm{CC}}\right| = 0}$

◀ 零ベクトルは大きさ 0

2. ベクトルの演算〜定数倍・足し算・引き算

ベクトルは，何倍かしたり，足したり引いたりできる．また，文字式のように扱える．



A. ベクトルの定数倍

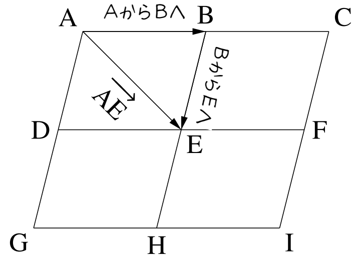
ベクトル $\vec{a}$ の長さを k 倍したベクトルは $k\vec{a}$ と表わされる．たとえば，右上図において $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\vec{a}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \vec{a}$ である．

k は負の値でもよい．その場合は，向きが逆になる．特に $\vec{a}$ の -1 倍は，$\vec{a}$ の逆ベクトル $-\vec{a}$ になる[*3]．たとえば，右図において，$\overrightarrow{\mathrm{ED}} = -\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{FD}} = -2\vec{a}$，$\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ になる．

[*3] $\vec{a}$ の逆ベクトルを $-\vec{a}$ と表わしてよいと分かる．

B.　ベクトルの和の定義

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を「A で始まり B で終わり，B で始まり E で終わる」と考えて，「A で始まり E で終わる」ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と定める．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と定義する．

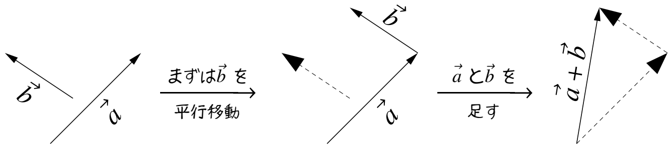


たとえば，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$$ となる．

もし，下図のように $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が離れているときは，$\vec{b}$ を平行移動してから和を考えればよい．



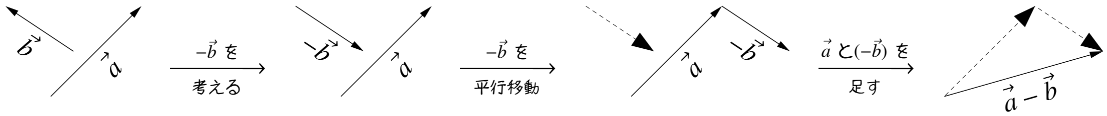
たとえば上図において

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{EI}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}\ (\leftarrow\overrightarrow{\mathrm{EI}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

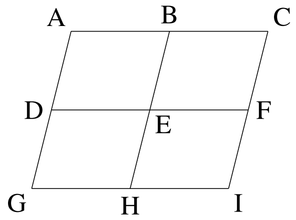
容易に分かるように $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}+\vec{a}$ は等しい．つまり，どちらから足しても良い（p.5）．

C.　ベクトルの差の考え方

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ と考えれば，ベクトルの和と同じようにして考えることができる．



【例題 2】　右図の ▱ABED，▱BCFE について $\boxed{}$ を答えなさい．



1. $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{\text{ア}}}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{GE}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{GE}}+\overrightarrow{\mathrm{E}\boxed{\text{イ}}}=\overrightarrow{\mathrm{G}\boxed{\text{ウ}}}$
3. $\overrightarrow{\mathrm{IC}}+\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{I}\boxed{\text{エ}}}$
4. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{IE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{B}\boxed{\text{オ}}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{\text{カ}}}$
5. $\overrightarrow{\mathrm{CF}}-\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\overrightarrow{\mathrm{C}\boxed{\text{キ}}}$
6. $\overrightarrow{\mathrm{IC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{I}\boxed{\text{ク}}}$
7. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{\text{ケ}}}$
8. $3\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{\text{コ}}}$

【解答】

1. $\overrightarrow{\mathrm{A}\underline{\mathbf{F}}}_{(\text{ア})}$　　2.（与式）$=\overrightarrow{\mathrm{GE}}+\overrightarrow{\mathrm{E}\underline{\mathbf{F}}}_{(\text{イ})}=\overrightarrow{\mathrm{G}\underline{\mathbf{F}}}_{(\text{ウ})}$

3.（与式）$=\overrightarrow{\mathrm{IC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{I}\underline{\mathbf{H}}}_{(\text{エ})}$

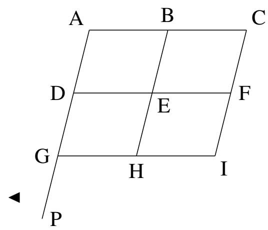
4.（与式）$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(-\overrightarrow{\mathrm{IE}})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{B}\underline{\mathbf{F}}}_{(\text{オ})}=\overrightarrow{\mathrm{A}\underline{\mathbf{F}}}_{(\text{カ})}$

5.（与式）$=\overrightarrow{\mathrm{CF}}+(-\overrightarrow{\mathrm{GH}})=\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\overrightarrow{\mathrm{C}\underline{\mathbf{E}}}_{(\text{キ})}$

6.（与式）$=\overrightarrow{\mathrm{IC}}+(-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\overrightarrow{\mathrm{IC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{I}\underline{\mathbf{A}}}_{(\text{ク})}$

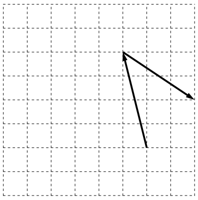
7.（与式）$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\underline{\mathbf{G}}}_{(\text{ケ})}$

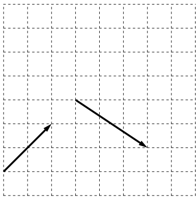
8. 右欄外のように P をとると（与式）$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\underline{\mathbf{H}}}_{(\text{コ})}$

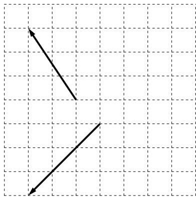


【練習 3：ベクトルの和・差】

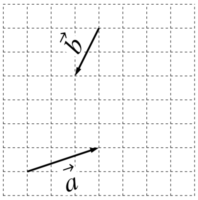
(1) それぞれについて，2 つのベクトルの和を書き込みなさい．

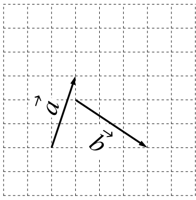
i. 

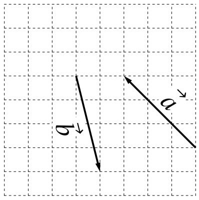
ii. 

iii. 

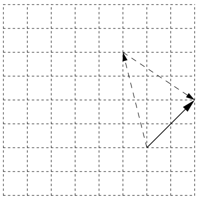
(2) それぞれについて，$\vec{a}-\vec{b}$ を書き込みなさい．

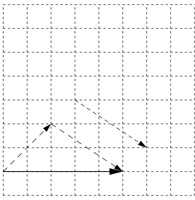
i. 

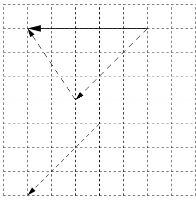
ii. 

iii. 

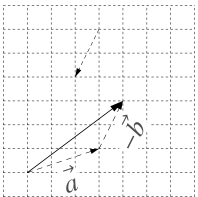
【解答】

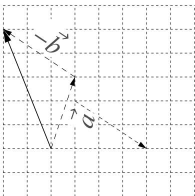
(1) (a) 

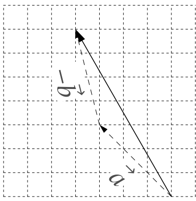
(b) 

(c) 

◀ 一方の終点と他方の始点を揃える

(2) (a) 

(b) 

(c) 

◀ $\vec{a}$ の終点と $-\vec{b}$ の始点を揃える

【練習 4：ベクトルの定数倍・和・差】

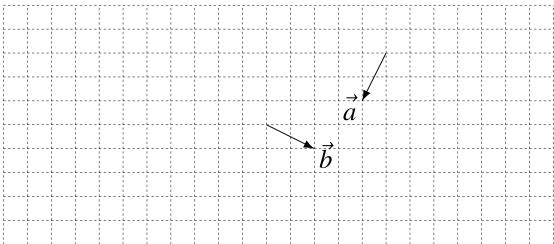
2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が右図のようにあるとき，以下のベクトルを図示しなさい．

i. $2\vec{a}$

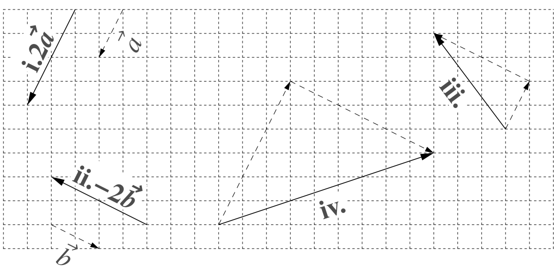
ii. $-2\vec{b}$

iii. $-\vec{a}-2\vec{b}$

iv. $-3\vec{a}+3\vec{b}$



【解答】



◀ 答えは、向きと大きさが正しければ、どこに改訂あっても構わない。

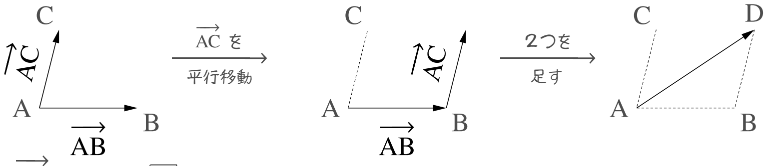
D.　ベクトルの和は交換可能である～平行四辺形を用いたベクトルの和

始点の揃った 2 つのベクトルの和は，平行四辺形の対角線になる．

ベクトルの和と平行四辺形

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の和は，四角形 ABDC が平行四辺形となるよう D を取ったときの，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ になる．
ただし，A，B，C は同一直線上にないとする．

（証明）一番右の図において，AC = BD, AC // BD であるから，四角形 ABDC は 1 組の辺が平行で長さも等しくなり，平行四辺形と分かる．そして，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の和は ▱ABDC の対角線になっている．



このことから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とも分かる．一般に，ベクトルの和は交換可能である．

E.　ベクトルの計算 ～ 文字式のように扱う

ベクトルは，次のように文字式のように計算することができる[4]．

$2\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}-\vec{b}$
$= 2\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}-\vec{b}$　←ベクトルの和は交換可能
$= 3\vec{a}+0\vec{b}$　← $2\vec{a}+\vec{a}=(2+1)\vec{a}$
$= 3\vec{a}$　← $\vec{0}$ はなし

$2\vec{a}+\vec{b}-2(\vec{a}+2\vec{b})+3\vec{b}$
$= 2\vec{a}+\vec{b}-2\vec{a}-4\vec{b}+3\vec{b}$　←2(　)を分配法則
$= 0\vec{a}+0\vec{b}$　← $\vec{a}$, $\vec{b}$ をそれぞれ計算
$= \vec{0}$

【例題 5】 次の計算をしなさい．

1. $-4\vec{a}+3\vec{b}-3\vec{b}-4\vec{a}$
2. $3(\vec{a}+2\vec{b})-(\vec{a}+3\vec{b})$
3. $2(\vec{a}+2\vec{b})+4(\vec{a}-\vec{b})-6\vec{a}$

【解答】

1.（与式）$=-8\vec{a}+0\vec{b}=\boldsymbol{-8\vec{a}}$　2.（与式）$=3\vec{a}+6\vec{b}-\vec{a}-3\vec{b}=\boldsymbol{2\vec{a}+3\vec{b}}$
3.（与式）$=2\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{a}-4\vec{b}-6\vec{a}=\boldsymbol{\vec{0}}$

【練習 6：ベクトルを文字式のように扱う】

以下の等式を満たす $\vec{x}$, $\vec{y}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表しなさい．

(1) $-\vec{a}+3\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}$

(2) $\begin{cases} 4\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}+3\vec{b} \\ -3\vec{x}+\vec{y}=-2\vec{a}-\vec{b} \end{cases}$

【解答】

(1)（与式）$\Leftrightarrow 3\vec{x}=3\vec{a}-3\vec{b}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}}$

---

[4] これらの計算は，ベクトルの以下の性質に基づいている．
(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$　(3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$　(4) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

(2)
$$\begin{array}{rrl} & 4\vec{x}-\vec{y} = & \vec{a}+3\vec{b} \\ +) & -3\vec{x}+\vec{y} = & -2\vec{a}-\vec{b} \\ \hline & \boldsymbol{\vec{x}} = & \boldsymbol{-\vec{a}+2\vec{b}} \end{array}$$

これを 2 つめの式に代入して

$$\begin{aligned} -3(-\vec{a}+2\vec{b})+\vec{y} &= -2\vec{a}-\vec{b} \\ \Leftrightarrow \quad 3\vec{a}-6\vec{b}+\vec{y} &= -2\vec{a}-\vec{b} \\ \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\vec{y}} &= \boldsymbol{-5\vec{a}+5\vec{b}} \end{aligned}$$

◀ 連立方程式を解くように，左辺同士，右辺同士を引いた

【練習 7：ベクトルの等式の証明】

次の等式を示せ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{0}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PS}}$

【解答】

(1)（左辺）$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}=$（右辺）

(2)（左辺）−（右辺）$=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}-\overrightarrow{\mathrm{RQ}}-\overrightarrow{\mathrm{PS}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}+\overrightarrow{\mathrm{SP}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}+\overrightarrow{\mathrm{SP}}=\overrightarrow{\mathrm{PP}}=\vec{0}$

よって，（左辺）=（右辺）が成り立ち，示された.

◀ 等式の証明は（左辺）−（右辺）で考える。

◀ $-\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{QR}}$，$-\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{SP}}$

◀ 順番を入れ替えると P → Q → R → S → P と戻る。

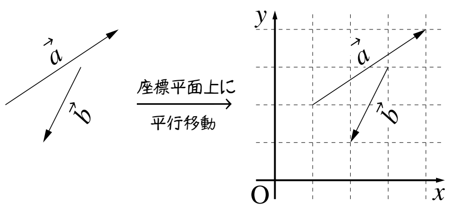
1A.2 ベクトルの成分表示

座標平面上でベクトルを考えると，ベクトルは座標のように表すことができる.

1. ベクトルを座標平面上に配置する

A. ベクトルの「成分表示」とは

たとえば，左下の $\vec{a}$, $\vec{b}$ があったとする．これを，座標平面上に平行移動すると右下のようになる.



$\vec{a}$ は，始点から x 方向に 3，y 方向に 2 進んで終点に一致する．これを，$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ と表し，3 を x 成分，2 を y 成分と呼ぶ.

同じように，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ と表され，$\vec{b}$ の x 成分は −1，y 成分は −2 である.

ベクトルの成分表示

座標平面上にあるベクトル $\vec{a}$ が，始点から x 方向に p，y 方向に q 進んで終点に一致するならば

$\vec{a}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$[*5] と表し，これを $\vec{a}$ の**成分表示** (component expression) という.

1 つ目の成分 p は **x 成分** (x-component)，2 つ目の成分 q は **y 成分** (y-component) と呼ばれる.

[*5] これを縦ベクトル表示という．一方，$\vec{a}=(p,\ q)$ と表すこともあり、これを横ベクトル表示という．たとえば上の例において，$\vec{a}=(3,\ 2)$, $\vec{b}=(-1,-2)$ である.

B.　「終点（まで）」引く「始点（から）」

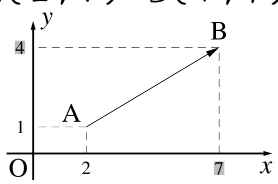
6 時から 9 時までは，「9 時（までゝ）」引く「6 時（から）」の 3 時間である．

同じように，座標平面上において A から B までの $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，「B（まで）」引く「A（から）」で求められる．

たとえば，右図のように $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めることができる．

また、その長さも三平方の定理を用いて求められる。

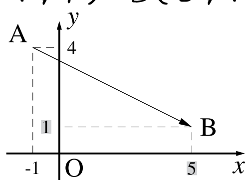
A(2，1)　B(7，4)



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} \underset{\text{B}\text{の}x}{7} - \underset{\text{A}\text{の}x}{2} \\ \underset{\text{B}\text{の}y}{4} - \underset{\text{A}\text{の}y}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

A(−1，4)　B(5，1)



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} \underset{\text{B}\text{の}x}{5} - \underset{\text{A}\text{の}x}{(-1)} \\ \underset{\text{B}\text{の}y}{1} - \underset{\text{A}\text{の}y}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

成分表示されたベクトルの大きさ

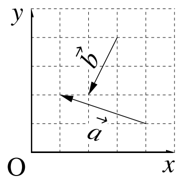
$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ である．

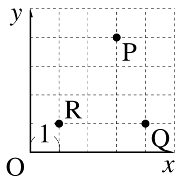
また，$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ であれば，大きさは $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{p^2 + q^2}$ と求められる．

【例題 8】

座標の 1 目盛りの長さを 1 とするとき，以下の問いに答えなさい．

1. ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を成分表示し，大きさも求めなさい．
2. 右の図のように P，Q，R があるとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PR}}, \overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を答えなさい．また，大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|, \left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|, \left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|$ を求めなさい．





【解答】

1. $\boldsymbol{\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$，$\boldsymbol{\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

 $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{10}}$，$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$

2. P(3, 4)，Q(4, 1)，R(1, 1) であるから

 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \boldsymbol{\sqrt{10}}$

 $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \boldsymbol{\sqrt{13}}$

 $\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right| = \boldsymbol{3}$

◄ 公式通り計算すれば $\sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

2. 成分表示されたベクトルの演算

A. 成分表示されたベクトルの演算

成分表示された 2 つのベクトルの定数倍，足し算，引き算は，次のように計算できる．

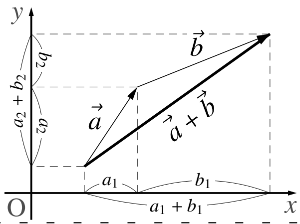
成分表示されたベクトルの演算

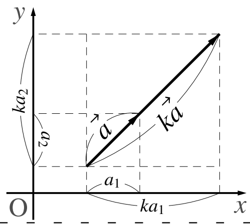
$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ と，実数 k について，次のように計算できる[*6]．

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix},\qquad \vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix},\qquad k\vec{a}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\end{pmatrix}$$

$\vec{a}+\vec{b}$, $k\vec{a}$ については右図のように考えて分かる（$k\vec{a}$ については三角形の相似を用いている）．$\vec{a}-\vec{b}$ については，以下から分かる．

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b_1\\-b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$$





【例題 9】 $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ のとき，以下のベクトルを答えよ．

1. $\vec{a}+\vec{b}$
2. $\vec{a}-\vec{b}$
3. $2\vec{a}+\vec{b}$
4. $3\vec{a}-2\vec{b}$
5. $\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$
6. $s\vec{a}+t\vec{b}$（s, t を用いて答えよ）
7. $2(\vec{a}+\vec{b})+3(\vec{a}-\vec{b})$
8. $3(\vec{a}-2\vec{b})-2(\vec{a}-3\vec{b})$

【解答】

1. $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1+(-3)\\2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$

2. $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}1-(-3)\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$

3. $2\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}$

4. $3\vec{a}-2\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{9}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$

5. $\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{\frac{4}{5}}\end{pmatrix}$

6. $s\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}s\\2s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{s-3t}\\\boldsymbol{2s+t}\end{pmatrix}$

7. （与式）$=2\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{a}-3\vec{b}$
$=5\vec{a}-\vec{b}$
$=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{8}\\\mathbf{9}\end{pmatrix}$

8. （与式）$=3\vec{a}-6\vec{b}-2\vec{a}+6\vec{b}$
$=\vec{a}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$

◀ひとまず $\vec{a}$, $\vec{b}$ の文字式と見て整頓した

[*6] 横ベクトルで書けば，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ と実数 k について $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$，$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$，$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$

B.　平行四辺形とベクトル

平行四辺形の成立条件「1 組の向かい合う辺の長さが等しく平行」は次のように言い換えられる.

平行四辺形の成立条件

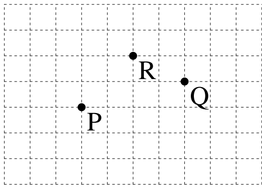
「四角形 ABCD が平行四辺形」　⇔　$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$　⇔　$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

図を描けばわかるように、$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば，四角形 ABḊĊ が平行四辺形になる.

向かい合う辺の組，辺 AB，DC について，「AB = DC かつ AB // DC」⇔ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ より示される. .

【練習 10：平行四辺形〜その１〜】

次の図のように P, Q, R がある時，以下の問に答えなさい.



(1) 四角形 PQSR が平行四辺形となるよう，S を右図に書き込みなさい.

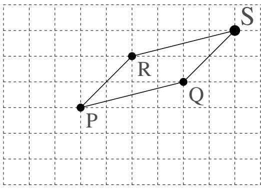
(2) 四角形 PQRT が平行四辺形のとき，$\overrightarrow{PT}$ と等しいベクトルを下から選べ.

(3) 四角形 PUQR が平行四辺形のとき，$\overrightarrow{PU}$ と等しいベクトルを下から選べ.

a. $\overrightarrow{PR}$　　b. $\overrightarrow{RP}$　　c. $\overrightarrow{PQ}$　　d. $\overrightarrow{QP}$　　e. $\overrightarrow{QR}$　　f. $\overrightarrow{RQ}$

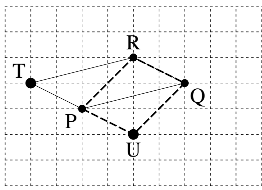
【解答】

(1) $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ より右のようになる.



(2) 右欄外のようになって，$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{QR}$ から **e.**

(3) 右欄外のようになって，$\overrightarrow{PU} = \overrightarrow{RQ}$ から **f.**



【練習 11：平行四辺形〜その２〜】

座標平面上に A(1, 3)，B(2, −1)，C(4, 4) があるとき

(1) 平行四辺形 ABCD となるよう D の座標を定めよ.

(2) 4 点 A，B，C，E を結んで平行四辺形ができるとき，E の座標をすべて求めよ.

【解答】

(1) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ であればよい．D(x, y) とすると，

$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4-x \\ 4-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ より $x = 3,\ y = 8$ なので **D(3, 8)**.

(2) 右欄外の図より，条件を満たす E は 3 点しかない.

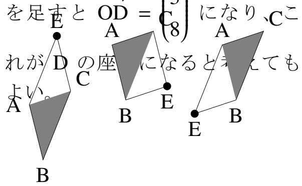
四角形 ABCE が平行四辺形となるとき，(1) より E(3, 8).

四角形 ABEC が平行四辺形となるとき，$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ となればよい．E(x, y) とすると，$\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ より E(5, 0).

四角形 AEBC が平行四辺形となるとき，$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ となればよい．E(x, y) とすると，$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ より E(−1, −2).

以上より，求める E は **(3, 8), (5, 0), (−1, −2)**.

◀【別解】$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ に $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ を足すと $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ になり，これが D の座標になると考えてもよい。



△ABC の辺のどれか 1 つだけが，平行四辺形の対角線になるので，3 点しかない.

1A.3 ベクトルの平行と一次独立

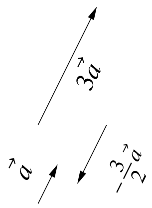
1. ベクトルにおける「平行」

A. 「平行」とは k 倍のこと

$\vec{a} = k\vec{b}$ となる実数 k が存在するとき，$\vec{a}, \vec{b}$ は**平行** (parallel) であると言い，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ と表される．平行でないときは $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ と表される．ただし，$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, k \neq 0$ とする．

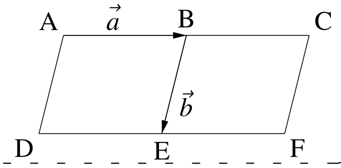
たとえば，$3\vec{a}$ と $\vec{a}$ は平行であり，$3\vec{a} \parallel \vec{a}$ である．

また，$\vec{a}$ と $-\vec{a}$ は向きは違うが，やはり $\vec{a} \parallel (-\vec{a})$ である．このように，k が負の値の時，$\vec{a}, k\vec{a}$ は逆向きとなるが，平行なベクトルと定義される．



【例題 12】 右の図の ▱ABED, ▱BCFE について，以下の $\boxed{}$ に $\parallel$ か $\not\parallel$ のいずれかを入れなさい．

$\vec{a}$ $\boxed{ア}$ $\overrightarrow{BC}$, $\vec{a}$ $\boxed{イ}$ $\overrightarrow{CF}$, $\vec{b}$ $\boxed{ウ}$ $\overrightarrow{FE}$, $\vec{b}$ $\boxed{エ}$ $\overrightarrow{EB}$



【解答】 ア : $\vec{a} \parallel \overrightarrow{BC}$, イ : $\vec{a} \not\parallel \overrightarrow{CF}$, ウ : $\vec{b} \not\parallel \overrightarrow{FE}$, エ : $\vec{b} \parallel \overrightarrow{EB}$

B. 成分表示から考えた「平行」

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトルが平行なことは、成分の比から考えることができる。

たとえば，$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ のとき，$2 : 3 = 6 : 9$ であり，$\vec{b} = 3\vec{a}$ となるから $\vec{b} \parallel \vec{a}$ である．

また，$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -6 \end{pmatrix}$ が平行となるとき，$1 : 3 = x : (-6)$ でないといけない．これを解いて，$3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$ を得る．このときは $\vec{b} = -2\vec{a}$ である．

【例題 13】 それぞれの場合について，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ となるよう x の値を定めよ．

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -3 \end{pmatrix}$
2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ x+3 \end{pmatrix}$
3. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x+4 \\ 3x+1 \end{pmatrix}$

【解答】

1. $3 : 1 = x : (-3)$ が成り立てばよい．これを解いて $\boldsymbol{x = -9}$.
2. $-2 : x = 4 : (x+3)$ が成り立てばよい．これより $4x = -2(x+3)$ となり，これを解いて $\boldsymbol{x = -1}$.
3. $2x : 3 = (x+4) : (3x+1)$ が成り立てばよい．よって

$$\begin{aligned} & 3(x+4) = 2x(3x+1) \\ \Leftrightarrow\ & 3x + 12 = 6x^2 + 2x \\ \Leftrightarrow\ & 0 = 6x^2 - x - 12 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = (2x-3)(3x+4) \qquad \therefore \boldsymbol{x = \frac{3}{2},\ -\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

◀【別解】y 成分から $\vec{b} = -3\vec{a}$ を用いる

◀【別解】x 成分から $\vec{b} = -2\vec{a}$ である．よって，$\begin{pmatrix} 4 \\ x+3 \end{pmatrix} = -2\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2x \end{pmatrix}$ となって，$x + 3 = -2x$

◀【別解】y 成分を見て，$\vec{b} = \frac{3x+1}{3}\vec{a}$ となる．x 成分を見て，$x+4 = 2x \cdot \frac{3x+1}{3}$ となり，これを解いても得られる．

ベクトルの平行

$k \neq 0$ を実数とする．2 つのベクトル $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ が平行であることは

(1) $\vec{a} = k\vec{b}$ となる実数 k が存在すること

と定義される．もし，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ と成分表示されていれば，次のように言い換えられる．

(2) $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$[*7]

【練習 14：2 つのベクトルの平行】

(1) 2 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} x-1 \\ x^2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x+5 \\ 2x \end{pmatrix}$ が平行となるような，x の値を求めよ．

(2) $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - 2\vec{b}$ とする．$\left(\vec{x} + \vec{y}\right) \parallel \left(t\vec{x} - \vec{y}\right)$ となるよう実数 t の値を定めよ．ただし，$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ とする．

【解答】

(1) $(x-1) : x^2 = (x+5) : 2x$ が成り立てばよい．よって

$$x^2(x+5) = 2x(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \ x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow \ x(x+1)(x+2) = 0 \quad \therefore \quad x = 0, -1, -2$$

いずれの場合も $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ となって適し，$\boldsymbol{x = 0, -1, -2}$.

(2) $k(\vec{x} + \vec{y}) = t\vec{x} - \vec{y}$ となる実数 k が存在すればよい。

$\vec{x} + \vec{y} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $t\vec{x} - \vec{y} = (2t-1)\vec{a} + (t+2)\vec{b}$ である．

$$t\vec{x} - \vec{y} = k\left(\vec{x} + \vec{y}\right)$$
$$\Leftrightarrow \ (2t-1)\vec{a} + (t+2)\vec{b} = 3k\vec{a} - k\vec{b}$$

よって，$2t - 1 = 3k$, $t + 2 = -k$ であればよいから

$$2t - 1 = -3(t+2) \quad \therefore \quad \boldsymbol{t = -1}$$

◀ $\vec{a}$, $\vec{b}$ の係数を見て $3 : (-1) = (2t-1) : (t+2)$ が成り立てばよいと気づけば，計算は楽になる．

[*7] 「$a_1 = kb_1$ かつ $a_2 = kb_2$ となる実数 k が存在すること」とも言い換えられる．

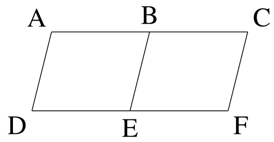
2. 平面上の「全ての」ベクトルを表す

A. ベクトルの一次独立

2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が平行でなく、$\vec{0}$ でないとき，$\vec{a}, \vec{b}$ は**一次独立** (linear independence) [*8]という[*9].

平面のベクトルにおいては，「$\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立であること」と「$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \not\parallel \vec{b}$」は一致する.

【例題 15】 右図について，次のベクトルの組のうち，一次独立なものを全て答えなさい.



1. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DF}$　2. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF}$　3. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EC}$　4. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$　5. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FF}$

【解答】 1. は $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DF}$ のため，4. は $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{ED}$ のため，5. は $\overrightarrow{FF} = \vec{0}$ のため，一次独立でない．一次独立なものは **2**，**3**.

◀ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{ED}$

B. 平面上の「全ての」ベクトルを表す

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と実数 p, q について，$p\vec{a} + q\vec{b}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ の**一次結合** (linear combination) という[*10].

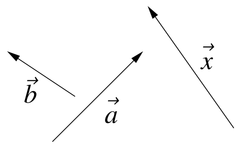
平面のベクトルは，この一次結合を用いて表せる。

「全ての」平面上のベクトルを表す

$\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立とする．このとき，平面上のどんなベクトル $\vec{x}$ についても実数 p, q が存在し $\vec{x} = p\vec{a}+q\vec{b}$ と表せる．さらに，p, q は必ず 1 通りに定まる.

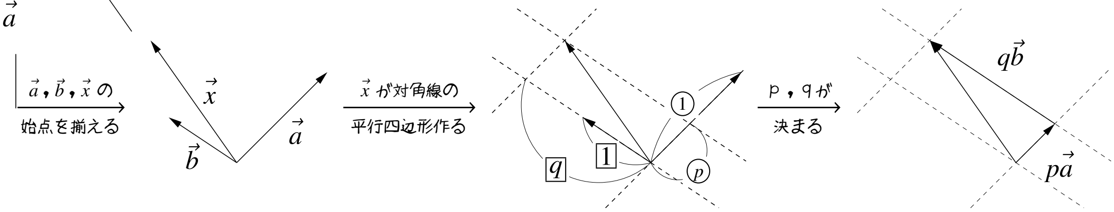
この事実について，「図形的」「成分表示」の 2 つの側面から考えてみよう.

C. 図形的に考える～ベクトルの分解



たとえば，左図のように $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$ があったとしよう.

このとき $\vec{x}$ が，$\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b}$ のように表せることは，次のようにして分かる.



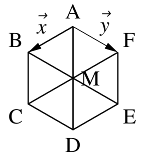
この操作を，$\vec{x}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ に**分解** (resolution) すると言う.

[*8] 「$\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立」という言葉の由来は「$\vec{a}, \vec{b}$ のどちらも，他のベクトルの一次結合で表せない」ためである（今は「他のベクトル」は 1 つしかない）．この意味は，空間ベクトルの一次独立を学んだときにさらに明確になる.

[*9] 言い換えると、一次独立は、$\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k が存在しないことである。逆に，$\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k が存在するとき，$\vec{a}, \vec{b}$ は**一次従属** (linear dependence) という．これは，$\vec{a}, \vec{b}$ が平行であったり，どちらかが $\vec{0}$ であることと一致する.

[*10] 2 つのベクトルを 1 次式でつないで $p\vec{a} + q\vec{b}$ になるから，一次結合と言う．ベクトルには掛け算は存在せず 2 次式が作れないので，二次結合，三次結合，…は存在しない.

【例題 16】 右の正六角形 ABCDEF について，以下のベクトルを $\vec{x}$, $\vec{y}$ で表せ．



1. $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$　　2. $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　　3. $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$
4. $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$　　5. $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$　　6. $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

【解答】

1. $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} = \boldsymbol{\vec{x} + \vec{y}}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BE}} = \boldsymbol{\vec{x} + 2\vec{y}}$
3. $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \boldsymbol{2\vec{x} + 2\vec{y}}$
4. $\overrightarrow{\mathrm{FD}} = \overrightarrow{\mathrm{FC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \boldsymbol{2\vec{x} + \vec{y}}$
5. $\overrightarrow{\mathrm{DB}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EB}} = \boldsymbol{-\vec{x} - 2\vec{y}}$
6. $\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{CM}} + \overrightarrow{\mathrm{ME}} = \boldsymbol{-\vec{x} + \vec{y}}$

◀【別解】$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{FM}} = \vec{y} + \vec{x}$

◀【別解】
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} \\ &= \vec{x} + \vec{y} + \vec{x} + \vec{y} = 2\vec{x} + 2\vec{y}\end{aligned}$$
他にも別解は多数ある．

D.　成分表示を用いて考える

成分表示を用いると，どんな $\vec{x}$ に対しても $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b}$ となる p, q を計算で求められる．

たとえば，$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする．$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ について $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおくと、

$p\vec{a} + q\vec{b} = \begin{pmatrix} 2p - q \\ p + 3q \end{pmatrix}$ であり，これが $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ と等しいので，連立方程式 $\begin{cases} 2p - q = 4 \\ p + 3q = -5 \end{cases}$ が成り立つ．

これを解いて $p = 1$, $q = -2$ を得るから，$\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$ であると分かる．

【例題 17】

1. ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ について, $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ.
2. ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ について, $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ.

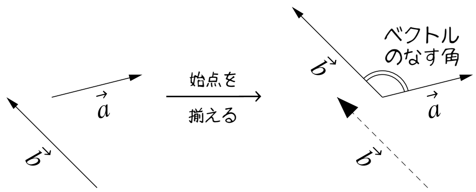
【解答】

1. $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく．$p\vec{a} + q\vec{b} = \begin{pmatrix} -p + q \\ p + q \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ より，
$\begin{cases} -p + q = -5 \\ p + q = -1 \end{cases}$ が成り立つ．これを解いて $(p,\ q) = (2, -3)$ であるから，$\boldsymbol{\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}}$.
2. $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく．$p\vec{a} + q\vec{b} = \begin{pmatrix} -2p - 3q \\ 3p + q \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ より，
$\begin{cases} -2p - 3q = -2 \\ 3p + q = 10 \end{cases}$ が成り立つ．これを解いて $(p,\ q) = (4, -2)$ であるから，$\boldsymbol{\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}}$.

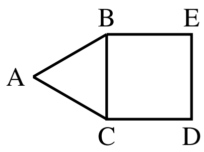
1. ベクトルの内積とは何か

A. 2 つのベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない，2 つのベクトルの始点を揃えたときにできる角を，「2 つのベクトルのなす角[*11]」または「2 つのベクトルのつくる角」という．



【例題 18】 右図のように正三角形 ABC，正方形 BCDE があり，AB = 2 とする．次の 2 つのベクトルのなす角を求めよ．



1. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$　2. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}$　3. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}$　4. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}$
5. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$　6. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EB}$　7. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$　8. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$

【解答】

1. $\boldsymbol{\theta = 60^\circ}$　2. $\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$　3. $\boldsymbol{\theta = 150^\circ}$　4. $\boldsymbol{\theta = 90^\circ}$
5. 始点を揃えて，$\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$　6. 始点を揃えて，$\boldsymbol{\theta = 180^\circ}$
7. 始点を揃えて，$\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$　8. 始点を揃えて，$\boldsymbol{\theta = 120^\circ}$

B. ベクトルの内積の 2 つの定義

ベクトルの内積

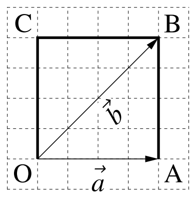
2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，次の 2 つの値は一致し，**内積** (inner product) [*12]と呼ばれる．

(1) （成分表示使わない）$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

(2) （成分表示使う）$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき，$a_1b_1 + a_2b_2$

この内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表される．つまり，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2$ である．

たとえば，右図において内積の計算は次のようになる．



(1) （成分表示使わない）$|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 4\sqrt{2}$，なす角は 45° なので，
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 4\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ = 4\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 16$$

(2)（成分表示使う）$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ となり，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 4 + 0\cdot 4 = 16$

[*11] 「つくる角」と言う方が分かりやすいが，「なす角」「角をなしている」などの表現で，しばしば用いられる．
[*12] 内積の値は常に実数である．そのため，内積のことをスカラー積ともいう．ここでのスカラーは「実数」を意味する．一方，外積という計算も存在し，こちらはベクトル積ともいう．外積を計算した結果は必ずベクトルになるからである．

（2 つの定義が一致することの証明・$\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立のとき）

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ について，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2$ が成り立つことを示せばよい．

$\vec{a}, \vec{b}$ の始点を O に揃え，それぞれの終点を A，B とする．△OAB[*13]について余弦定理より

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

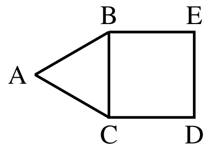
である．ここで，$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = |\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$ であり，$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ から

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$ であるので，これらを①に代入して

$$\begin{aligned}
& (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta \\
\Leftrightarrow\ & b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + a_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta \\
\Leftrightarrow\ & -2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta
\end{aligned}$$

両辺を -2 で割って，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2$ を得る．

【例題 19】 右図のように正三角形 ABC，正方形 BCDE があり，AB = 2 とする．
内積の定義 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を用いて，次の内積の値を求めよ．



1. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$
3. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$
4. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$
5. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$
6. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EB}$
7. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}$
8. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

【解答】

1. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} = \mathbf{2}$
2. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{4}$
3. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = 2 \cdot 2 \cdot -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{-2\sqrt{3}}$
4. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 0 = \mathbf{0}$
5. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2\sqrt{3}}$
6. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = \mathbf{-4}$
7. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2\sqrt{3}}$
8. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \mathbf{-2}$

【例題 20】 内積の定義 (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ を用いて，次の内積を計算しなさい．

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のときの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$
2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ のときの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

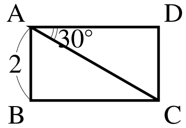
【解答】

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = \mathbf{-1}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-4) \cdot (-3) + (-2) \cdot 5 = \mathbf{2}$

[*13] $\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立であることと，△OAB は存在することは，同値である．

【練習 21：内積の計算】

(1) 右図の長方形について次の内積を計算しなさい．



1. $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$　2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$　3. $\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$　4. $\overrightarrow{\mathrm{DC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}$

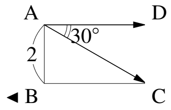
(2) $\vec{a}, \vec{b}$ が次のようになるとき，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を計算しなさい．

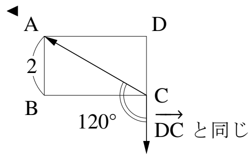
1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき　2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ のとき

【解答】

(1) 直角三角形 ADC は辺の比が $1 : 2 : \sqrt{3}$ であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 4$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| = 2\sqrt{3}$ である．

1. $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{3} \cdot 4\cos 30° = 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{12}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2 \cdot 4\cos 60° = 2 \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{2} = \mathbf{4}$
3. $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさとなす角を考えて
   （与式）$= 2\sqrt{3} \cdot 4\cos 30° = \mathbf{12}$
4. 右図のように考えて
   （与式）$= 2 \cdot 4\cos 120° = 2 \cdot 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \mathbf{-4}$





(2) 1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = \mathbf{-1}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-4) \cdot (-3) + (-2) \cdot 5 = \mathbf{2}$

2. ベクトルの内積の利用（１）～ベクトルの垂直条件・なす角の計算

A. ベクトルの垂直

$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}, \vec{b}$ は**垂直** (perpendicular) であると言い，$\vec{a} \perp \vec{b}$ と表される．

ベクトルの垂直

$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，　$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$　が成り立つ．

（証明）$\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90°$ であるから，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

【例題 22】

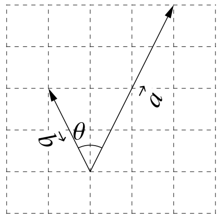
1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \end{pmatrix}$ が $\vec{a} \perp \vec{b}$ を満たすとき，x の値を求めよ．
2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ x-1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2x-5 \\ 3 \end{pmatrix}$ が $\vec{a} \perp \vec{b}$ を満たすとき，x の値を求めよ．

【解答】

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x + 3 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow 2x + 12 = 0$　　$\therefore \boldsymbol{x = -6}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot (2x-5) + (x-1) \cdot 3 = 0$
   $\Leftrightarrow -2x + 5 + 3x - 3 = 0$　　$\therefore \boldsymbol{x = -2}$

B. ベクトルのなす角を求める

右図の $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ について



$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2+8=6$

である．一方，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\theta=10\cos\theta$

である．こうして，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を 2 通りで求められたので

$$10\cos\theta=6 \iff \cos\theta=\frac{3}{5}$$

と分かる．このように，内積を用いてベクトルのなす角を計算できる．

【例題 23】 以下のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ について，$\cos\theta$ をそれぞれ求めよ．また，θ が求められる場合は θ の値も求めよ．

1. $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
2. $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$
3. $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

【解答】

1. 成分を用いて $\vec{a}\cdot\vec{b}=6+1=7$.
一方，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{10}\sqrt{5}\cos\theta=5\sqrt{2}\cos\theta$. よって
$$5\sqrt{2}\cos\theta=7 \iff \cos\theta=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{2}}{10}}$$
2. 成分を用いて $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2+15=13$.
一方，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{13}\sqrt{26}\cos\theta=13\sqrt{2}\cos\theta$. よって
$$13\sqrt{2}\cos\theta=13 \iff \boldsymbol{\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
また，$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$ である．
3. 成分を用いて $\vec{a}\cdot\vec{b}=4+4=8$.
一方，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{17}\sqrt{17}\cos\theta=17\cos\theta$. よって
$$17\cos\theta=8 \iff \boldsymbol{\cos\theta=\frac{8}{17}}$$

2 つのベクトルのなす角

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のなす角 θ は，内積の定義 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ に、値 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$, $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$ を代入すれば求められる．

C. 直交する単位ベクトルを求める

【練習 24：直交する単位ベクトル】

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と直交する単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ.

【解答】 $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と直交するので

$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \iff 2x + y = 0$ ……………………… ①

一方, $|\vec{e}| = 1$ であるから

$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \iff x^2 + y^2 = 1$ ……………………… ②

◀ 単位ベクトルとは, 長さ 1 のベクトルのこと

①より $y = -2x$ であるから, ②に代入して

$x^2 + (-2x)^2 = 1 \iff 5x^2 = 1$

よって, $x^2 = \dfrac{1}{5}$ となるから $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

$x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき $y = -2x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき $y = -2x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ であるから, $\boldsymbol{\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}$.

3. ベクトルの内積の利用（２）～内積を掛け算のように扱う

A. 結合法則・交換法則・分配法則～内積と掛け算の類似

実数 a, b, c は結合法則 $a(bc) = (ab)c$, 交換法則 $ab = ba$, 分配法則 $a(b + c) = ab + ac$ を満たす. これらと類似の法則は, ベクトルの内積においても成立する.

内積の交換法則・分配法則

どんなベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ についても, 次の等式が成り立つ.

(I) **（定数倍）** 実数 k について, $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(II) **（交換法則）** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(III) **（分配法則）** $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

(I) から, たとえば $(2\vec{a}) \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot (2\vec{b})$, $2(\vec{a} \cdot \vec{b})$ の括弧は省略でき, すべて $2\vec{a} \cdot \vec{b}$ と書かれる.

（証明）成分を計算すればよい. たとえば, 成分表示によって $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ になったとすると, (I) の 1 つ目の式について

（左辺）$= (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 = ka_1b_1 + ka_2b_2$, （右辺）$= k(a_1b_1 + a_2b_2) = ka_1b_1 + ka_2b_2$

となるから（左辺）=（右辺）である.

B. 大きさの 2 乗〜内積と掛け算の違い

ベクトル $\vec{a}$ の 2 乗は存在しない．しかし，それに類似した式 $\vec{a}\cdot\vec{a}$ は次のようになる．

同じベクトルの内積

(IV) **（同じベクトルの内積）** どんなベクトル $\vec{a}$ についても，$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$ になる．

（証明）$\vec{a}=\vec{0}$ のときは明らか．$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}, \vec{a}$ のなす角は 0° なので $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0^\circ=\left|\vec{a}\right|^2$．

【例題 25】 $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=2$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=3$ とするとき，以下の値を計算しなさい．

1. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$　2. $(\vec{a}-3\vec{b})\cdot\vec{c}$　3. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})$　4. $(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(5\vec{a}-2\vec{c})$

【解答】

1.（与式）$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=1+3=\mathbf{4}$　◀ $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=3$

2.（与式）$=\vec{a}\cdot\vec{c}-3\vec{b}\cdot\vec{c}=3-6=\mathbf{-3}$

3.（与式）$=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})=\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　◀ $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$

$=2+3+1+2=\mathbf{8}$　◀ $\left|\vec{a}\right|^2=2$

4.（与式）$=5\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}-20\vec{b}\cdot\vec{a}+8\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=5\times2-2\times3-20\times1+8\times2=\mathbf{0}$　◀ つまり，$(\vec{a}-4\vec{b})\perp(5\vec{a}-2\vec{c})$ が成り立っている．

C. 内積の計算を文字式の展開のように扱う

ここまでで学んだ内積の性質 (I)-(IV) によって，以下のような計算ができる．

$$\begin{aligned}
\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2 &= \left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right) && \text{←性質（IV）を使った}\\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot2\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot2\vec{b} && \text{←性質（III）を使った}\\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b} && \text{←性質（I），（II）を使った}\\
&= \left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2 && \text{←性質（IV）を使った}
\end{aligned}$$

こうして，文字式の展開 $(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$ に似た結果を得る．同じようにして，一般に次のような等式を得る．

文字式の展開との類似

任意のベクトル $\vec{x}, \vec{y}$，実数 k について，以下の等式が成り立つ．

(1) $\left|\vec{x}+k\vec{y}\right|^2=\left|\vec{x}\right|^2+2k\vec{x}\cdot\vec{y}+k^2\left|\vec{y}\right|^2$　(2) $(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y})=\left|\vec{x}\right|^2-\left|\vec{y}\right|^2$

(3) $(\vec{x}+k\vec{y})\cdot(\vec{x}+l\vec{y})=\left|\vec{x}\right|^2+(k+l)\vec{x}\cdot\vec{y}+kl\left|\vec{y}\right|^2$

ベクトルには 2 乗が存在しないが，代わりに，大きさの 2 乗となることに注意しよう．

【例題 26】

$\left|\vec{a}\right| = 2,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 4$ とする．以下の値を求めよ．

1. $\left|3\vec{a}+\vec{b}\right|^2$　2. $\left|5\vec{a}-2\vec{b}\right|^2$　3. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$　4. $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|$

【解答】

1. （与式）$= 9\left|\vec{a}\right|^2 + 6\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 = 36 + 18 + 16 = \mathbf{70}$
2. （与式）$= 25\left|\vec{a}\right|^2 - 20\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\left|\vec{b}\right|^2 = 100 - 60 + 64 = \mathbf{104}$
3. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2$ を計算すると $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2$

$$= 4 + 6 + 16 = 26$$

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| > 0$ より，$\left|\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}\right| = \mathbf{\sqrt{26}}$.

4. $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2$ を計算すると $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\left|\vec{b}\right|^2$

$$= 4 - 12 + 64 = 56$$

$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right| > 0$ より，$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right| = \sqrt{56} = \mathbf{2\sqrt{14}}$.

ベクトルの和の大きさ，たとえば $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ を求めるには，まず 2 乗 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2$ を計算しよう．

【練習 27：内積の計算の利用〜その 1 〜】

(1) $\left|\vec{a}\right| = 1,\ \left|\vec{b}\right| = 4$ で，$\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角が 60° のとき，$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$ を求めよ．

(2) $\left|\vec{a}\right| = 1,\ \left|\vec{b}\right| = 5,\ \left|4\vec{a}-\vec{b}\right| = 7$ であるとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(3) $\left|\vec{a}\right| = 4,\ \left|\vec{b}\right| = 2,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -2$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直となるよう t の値を定めなさい．

【解答】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 4\cdot\cos 60^\circ = 2$ であるから

$$\begin{aligned}\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|^2 &= 4\left|\vec{a}\right|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2\\ &= 4 - 8 + 16 = 12\end{aligned}$$

$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right| > 0$ より，$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{12} = \mathbf{2\sqrt{3}}$

(2) $\left|4\vec{a}-\vec{b}\right| = 7$ の両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned}&16\left|\vec{a}\right|^2 - 8\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 = 49\\ \Leftrightarrow\ &16\cdot 1 - 8\vec{a}\cdot\vec{b} + 25 = 49\\ \Leftrightarrow\ &-8\vec{a}\cdot\vec{b} = 8 \qquad \therefore \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = -1}\end{aligned}$$

(3) $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直である必要十分条件は

$$\begin{aligned}&\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+t\vec{b}\right) = 0\\ \Leftrightarrow\ &\left|\vec{a}\right|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} + t\left|\vec{b}\right|^2 = 0\\ \Leftrightarrow\ &16 - 2t - 2 + 4t = 0\\ \Leftrightarrow\ &14 + 2t = 0 \qquad \therefore \boldsymbol{t = -7}\end{aligned}$$

D.　ベクトルの大きさの最小値

【練習 28：ベクトルの大きさの最小値〜その１・成分がない場合〜】

$\left|\vec{a}\right| = 1,\ \left|\vec{b}\right| = 2,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ のとき，$\left|t\vec{a}+\vec{b}\right|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ．

【解答】
$$\begin{aligned}\left|t\vec{a}+\vec{b}\right|^2 &= t^2\left|\vec{a}\right|^2 + 2t\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2\\ &= t^2 + 2t + 4 = (t+1)^2 + 3\end{aligned}$$

であるから，$t = -1$ のときに $\left|t\vec{a}+\vec{b}\right|^2$ は最小値 3 をとる．よって，$\left|t\vec{a}+\vec{b}\right|$ は $\boldsymbol{t = -1}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ をとる．

【練習 29：ベクトルの大きさの最小値〜その２・成分がある場合〜】

$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$ のとき，$\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ．

【解答】　$2\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 4+t \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned}\left|2\vec{a}+\vec{b}\right| &= \sqrt{(1+t)^2 + (4+t)^2}\\ &= \sqrt{2t^2 + 10t + 17}\\ &= \sqrt{2(t^2 + 5t) + 17}\\ &= \sqrt{2\left\{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right\} + 17} = \sqrt{2\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}}\end{aligned}$$

よって，$\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|$は $\boldsymbol{t = -\frac{5}{2}}$ **のとき，最小値** $\sqrt{\frac{9}{2}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{2}}$ をとる．

◀ $\left|\vec{a}\right|^2 = t^2 + 4,\ \left|\vec{b}\right|^2 = (1-t)^2 + t^2$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = t(1-t) + 2t = -t^2 + 3t$ を $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\left|\vec{b}\right|^2$ に代入しても解けるが，計算量は多くなる．

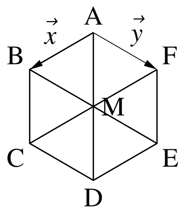
【練習 30：ベクトルの大きさの最小値〜その３・図形から考える〜】

1 辺が 1 の正六角形 ABCDEF があり，対角線の交点を M とする．
$\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{y} = \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\vec{x}\cdot\vec{y}$ の値を求めよ．

(2) $\left|\vec{x}+t\vec{y}\right|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ．

(3) $(\vec{x}+t\vec{y}) \perp \vec{y}$ となるときの t の値を求めよ．



【解答】

(1) $\vec{x}\cdot\vec{y} = 1\cdot 1\cdot\cos 120^\circ = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

(2)
$$\begin{aligned}\left|\vec{x}+t\vec{y}\right|^2 = \left|\vec{x}\right|^2 + 2t\vec{x}\cdot\vec{y} + t^2\left|\vec{y}\right|^2 &= 1^2 + 2t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + t^2\cdot 1^2\\ &= t^2 - t + 1 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

よって，$\left|\vec{x}+t\vec{y}\right|$ は $\boldsymbol{t = \frac{1}{2}}$ **のとき最小値** $\sqrt{\frac{3}{4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ をとる．

(3) $(\vec{x}+t\vec{y})\cdot\vec{y} = -\frac{1}{2} + t = 0$ を解いて $\boldsymbol{t = \frac{1}{2}}$.

(2) と答えが一致する．$\vec{x}+t\vec{y} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおくと P は直線 BM 上にあり，AP が最小になるのは AP ⊥ BM の時になるから．

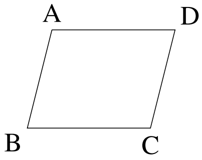
1A.5 位置ベクトル

ベクトルの始点を固定することによって，ベクトルの有用性はさらに高まる.

1. 位置ベクトルの定義

A. 始点を固定する

ベクトルとは「向きのある線分」であった．しかし，「始点と終点のペアを決めればベクトルが決まる」と言ってもよい．たとえば，右の平行四辺形においては，次のように定まる.



「始点は A，終点は B」⇒ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　「始点は D，終点は C」⇒ $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

一方，始点を固定して考えられたベクトルを**位置ベクトル** (position vector) と言う[*14]．たとえば右の平行四辺形において，「A を始点」と固定すれば次のようになる.

「終点は B」⇒ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　「終点は C」⇒ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　「終点は D」⇒ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

従来の「向きのある線分」としてのベクトルを**幾何ベクトル** (geometric vector) と呼ぶ.

B. 位置ベクトルの始点を省略する

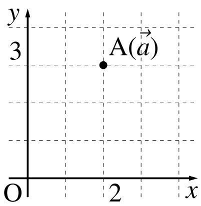
位置ベクトルにおいては始点を省略することがあり，次の 2 つの文章は同じ意味である.

同じ意味 $\left\{\begin{array}{l}\text{・O を始点とした位置ベクトルを考え，} \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c} \text{ とする} \\ \text{・O を始点とし，} \mathrm{A}(\vec{a}),\ \mathrm{B}(\vec{b}),\ \mathrm{C}(\vec{c}) \text{ とする}\end{array}\right.$ ←簡略化された

C. 位置ベクトル ～「座標」という概念の拡張

座標平面上では，位置ベクトルの始点として (0, 0) を固定すると，「位置ベクトル」と「座標」は同一視できる.

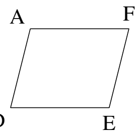
たとえば，原点を始点とした右図の $\mathrm{A}(\vec{a})$ について，A(2, 3) であるが、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ であるから、「$\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ である」と言ってもよい.

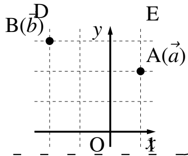


座標と座標は足せない。しかし、位置ベクトルは足せる。これが、位置ベクトルを考える大きな利点の一つである.

【例題 31】 $\boxed{}$ に適当な文字・数字を入れなさい.

1. 「始点が A，終点が E」のベクトルは，$\overrightarrow{\boxed{ア}\boxed{イ}}$ である.
2. A を始点として $\mathrm{D}(\vec{d})$，$\mathrm{E}(\vec{e})$，$\mathrm{F}(\vec{f})$ とすると，$\vec{d} = \overrightarrow{\boxed{ウ}\boxed{エ}}$，$\vec{e} = \overrightarrow{\boxed{オ}\boxed{カ}}$，$\vec{f} = \overrightarrow{\boxed{キ}\boxed{ク}}$
3. 右の座標平面上で、原点 O を始点として $\mathrm{A}(\vec{a})$、$\mathrm{B}(\vec{b})$ とする。
$\vec{a} = \begin{pmatrix}\boxed{ケ}\\\boxed{コ}\end{pmatrix}$ であり、$\vec{b} = \begin{pmatrix}\boxed{サ}\\\boxed{シ}\end{pmatrix}$ である。





[*14] 位置ベクトルにおいて，始点として固定された点は**基点**とも言う.

1. アイ $\underline{\overrightarrow{\mathbf{AE}}}$　　2. $\vec{d} = \underline{\overrightarrow{\mathbf{AD}}}$ ウエ、$\vec{e} = \underline{\overrightarrow{\mathbf{AE}}}$ オカ、$\vec{f} = \underline{\overrightarrow{\mathbf{AF}}}$ キク　　3. $\vec{a} = \underline{\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}}$ ケコ，$\vec{b} = \underline{\begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}}$ サシ

2. 位置ベクトルの公式

A. ベクトルの差〜幾何ベクトルと位置ベクトルの変換

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を始点 O の位置ベクトルに書き換えると

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

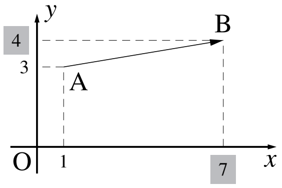
よって、始点 O として A$(\vec{a})$、B$(\vec{b})$ とすると、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{b} - \vec{a}$ となる.

ベクトルの差 〜 位置ベクトルへの変換

A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ である.　　←「まで」引く「から」

この公式は、たとえば $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の x 成分は「終点 B の x 座標」引く「始点 A の x 座標」になること（p.56）に対応している.

A (1 , 3)　B (7 , 4)



⇒ 位置ベクトルを用いて表す

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$

$= \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ になっている.

p.56 のように，A から B まで の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，「まで」引く「から」をして $\vec{b} - \vec{a}$，と覚えるとよい.

【例題 32】 O を始点とし，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$ とする．$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$，$\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b}$ であるとき

1. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{BD}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ.　　2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき，$\vec{c}, \vec{d}$ を成分表示しなさい.

【解答】

1. $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c} - \vec{a} = (2\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = \boldsymbol{\vec{a} + \vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \vec{d} - \vec{b} = (-\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} = \boldsymbol{-\vec{a} - 2\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{d} - \vec{c} = (-\vec{a} - \vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b}) = \boldsymbol{-3\vec{a} - 2\vec{b}}$

2. $\vec{c} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + (-1) \\ -4 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

$\vec{d} = -\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - (-1) \\ -(-2) - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

B.　内分点の位置ベクトル

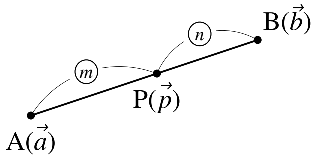
位置ベクトルを用いると，線分の内分点（数学 A p.118）は，次のように表現できる.

位置ベクトルにおける内分点の公式

O を始点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とする.

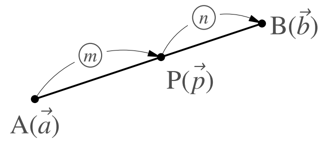
線分 AB を $m:n$ に内分する点を P($\vec{p}$) は、$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ と表せる。

また、たとえば A = O のときは，$\vec{a}=\vec{0}$ を代入すればよい[*15]。

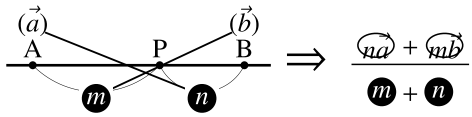


（証明） AP : PB = $m:n$ から nAP = mPB であり，P は内分点ゆえ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は平行で向きも等しく

$$n\overrightarrow{\mathrm{AP}}=m\overrightarrow{\mathrm{PB}} \Leftrightarrow n\left(\vec{p}-\vec{a}\right)=m\left(\vec{b}-\vec{p}\right)$$
$$\Leftrightarrow n\vec{p}-n\vec{a}=m\vec{b}-m\vec{p}$$
$$\Leftrightarrow (m+n)\vec{p}=n\vec{a}+m\vec{b} \qquad \therefore\ \vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$



この公式を覚えるには，右のような図を描き，「比だけを足すと分母，ベクトルと比を交差して掛けて足すと分子になる」と考えるとよい.



【例題 33】 O を始点として A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とする.

1. 線分 AB を 2 : 3 に内分する点 P($\vec{p}$)，7 : 3 に内分する点 Q($\vec{q}$)、線分 AB の中点 M($\vec{m}$) を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ.
2. $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ のとき，1. の $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{m}$ を成分表示しなさい。

【解答】

1. $\vec{p}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=\boldsymbol{\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}}$, $\vec{q}=\dfrac{3\vec{a}+7\vec{b}}{7+3}=\boldsymbol{\dfrac{3\vec{a}+7\vec{b}}{10}}$

   中点 M は、AB を 1 : 1 に内分するので $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{1+1}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$。

2. $\vec{p}=\dfrac{1}{5}\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)=\dfrac{1}{5}\left\{3\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right\}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}}$

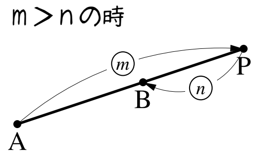
   $\vec{q}=\dfrac{1}{10}\left(3\vec{a}+7\vec{b}\right)=\dfrac{1}{10}\left\{3\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right\}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}2\\22\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{11}{5}\end{pmatrix}}$

   $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right\}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

◂ $\vec{p}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$ でも良い.

[*15] たとえば、線分 OB を $m:n$ に内分する点 Q($\vec{q}$) は，O の位置ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OO}}=\vec{0}$ であるから $\vec{q}=\dfrac{n\vec{0}+m\vec{b}}{m+n}=\dfrac{m}{m+n}\vec{b}$ となる．この事実は、図を描いても確かめられる.

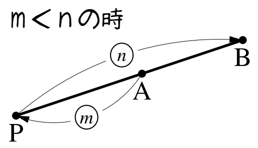
C. 外分点の位置ベクトル



直線 AB 上の点 P が AP : PB = $m:n$ であり，線分 AB の外にあるとき，P が線分 AB を $m:n$ に**外分** (exterior division) するといった（数学 A，p.118）．

外分の場合は，A から P と，P から B では逆向きなので，次のようになる．

位置ベクトルにおける外分の公式



位置ベクトルにおいては

- AP : PB を $m:n$ に外分する点 P を考える
- AP : PB を $m:(-n)$ に内分する点 P を考える
- AP : PB を $(-m):n$ に内分する点 P を考える

ことは同じことである（ただし，$m \neq n$）．つまり，O を始点とし，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ とするとき

線分 AB を $m:n$ に外分する点を P$(\vec{p})$ とすると，$\vec{p} = \dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$ または $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$

$m>n$ の時は $\vec{p} = \dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$，$m<n$ の時は $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$ を用いると，分母に負の数が表れない．

（証明）AP : PB = $m:n$ から nAP = mPB であり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は平行，向きは逆になるから

$n\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -m\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ または $-n\overrightarrow{\mathrm{AP}} = m\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ となる。これは，内分の公式の証明において，m を $-m$ に置き換えるか，n を $-n$ に置き換えた場合に一致するので，示された．

【例題 34】 O を始点として A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ とする．

1. AB を 3 : 5 に外分する点 P$(\vec{p})$，7 : 3 に外分する点 Q$(\vec{q})$，2 : 3 に外分する点 R$(\vec{r})$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．
2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき，1. の $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ を成分表示しなさい。

【解答】

1. AB を (−3) : 5 に内分した点が P と考え，$\vec{p} = \dfrac{5\vec{a}-3\vec{b}}{-3+5} = \boldsymbol{\dfrac{5\vec{a}-3\vec{b}}{2}}$

   AB を 7 : (−3) に内分した点が Q と考え，$\vec{q} = \dfrac{-3\vec{a}+7\vec{b}}{7-3} = \boldsymbol{\dfrac{-3\vec{a}+7\vec{b}}{4}}$

   AB を (−2) : 3 に内分した点が R と考え，$\vec{r} = \dfrac{3\vec{a}-2\vec{b}}{-2+3} = \boldsymbol{3\vec{a}-2\vec{b}}$

2. $\vec{p} = \dfrac{1}{2}\left(5\vec{a}-3\vec{b}\right) = \dfrac{1}{2}\left\{5\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 18 \\ -22 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}}$

   $\vec{q} = \dfrac{1}{4}\left(-3\vec{a}+7\vec{b}\right) = \dfrac{1}{4}\left\{-3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -16 \\ 34 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{17}{2} \end{pmatrix}}$

   $\vec{p} = 3\vec{a}-2\vec{b} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 11 \\ -14 \end{pmatrix}}$

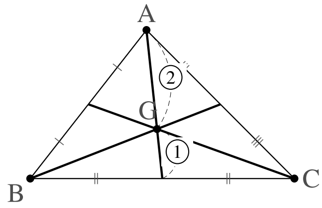
D. 重心の位置ベクトル

三角形の中線を 3 本引くと，三角形の重心で交わり，中線を 2 : 1 に内分していた（数学 A p.130）.

三角形の重心

O を始点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) とする．△ABC の重心 G($\vec{g}$) は $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ となる.

（証明）辺 BC の中点を N($\vec{n}$) とすると，$\vec{n} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ である．重心 G は線分 AN を 2 : 1 に内分するので $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+2\vec{n}}{2+1} = \dfrac{\vec{a}+2\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{3} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$.



三角形の 3 頂点の位置ベクトルの平均だと覚えると良い.

【例題 35】 O を始点として A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) とし，$\vec{c} = 4\vec{a}+\vec{b}$ とする.

1. △ABC の重心 G($\vec{g}$) を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ.
2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき，$\vec{g}$ を成分表示しなさい.

【解答】

1. $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+4\vec{a}+\vec{b}}{3} = \mathbf{\dfrac{5\vec{a}+2\vec{b}}{3}}$

2. $\vec{g} = \dfrac{1}{3}\left\{5\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 15+(-2) \\ (-10)+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{13}{3}} \\ \mathbf{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$

E. 位置ベクトルの公式の意味

「位置ベクトル」と「座標」を同一視すると、たとえば、重心の公式は、次のように考えられる。

O を原点とし、A の座標 $\vec{a}$, B の座標 $\vec{b}$, C の座標 $\vec{c}$ とすると △ABC の重心 G の座標 $\vec{g}$ は $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ である。つまり、x, y 座標とも（G の座標）$= \dfrac{(\text{A の座標})+(\text{B の座標})+(\text{C の座標})}{3}$ で求められる。

この事実を、次の 暗記 で確認しよう。

【 暗記 36 : 重心・内分点の成分表示】

A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) について、$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ とするとき，△ABC の重心を G($\vec{g}$) について $\vec{g} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix}$ である．また、線分 AB を $m:n$ に内分する点を P($\vec{p}$) とすると、$\vec{p} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$ である.

【解答】 $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ a_2+b_2+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{a_1+b_1+c_1}{3}} \\ \mathbf{\frac{a_2+b_2+c_2}{3}} \end{pmatrix}$

$\vec{p} = \dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n} = \begin{pmatrix} \frac{na_1}{m+n} \\ \frac{na_2}{m+n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{nb_1}{m+n} \\ \frac{nb_2}{m+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{na_1+mb_1}{m+n}} \\ \mathbf{\frac{na_2+mb_2}{m+n}} \end{pmatrix}$

◀ 位置ベクトルを座標と見なすと，この式は数学 II の内分点の公式に他ならない.

【練習 37：位置ベクトルの公式のまとめ～その２～】

O を始点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) とする．

(1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 E($\vec{e}$)、4 : 1 に外分する点 F($\vec{f}$) について、$\vec{e}$, $\vec{f}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.

(2) △EFC の重心 G($\vec{g}$) を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.

(3) 始点 O が (0, 0) であり、A(1, 2)、B(−3, 4)、C(5, 0) であるとき、$\vec{a}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{ア}}\\\boxed{\text{イ}}\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{ウ}}\\\boxed{\text{エ}}\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{オ}}\\\boxed{\text{カ}}\end{pmatrix}$ を (1)、(2) の結果に代入して $\vec{e}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{キ}}\\\boxed{\text{ク}}\end{pmatrix}$, $\vec{f}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{ケ}}\\\boxed{\text{コ}}\end{pmatrix}$, $\vec{g}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{サ}}\\\boxed{\text{シ}}\end{pmatrix}$ を得る。よって、E、F、G の座標はそれぞれ E($\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$)、F($\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$)、G($\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$) となる.

【解答】

(1) $\vec{e}=\dfrac{1\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{2+1}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}}$、$\vec{f}=\dfrac{(-1)\cdot\vec{a}+4\cdot\vec{b}}{4+(-1)}=\boldsymbol{\dfrac{-\vec{a}+4\vec{b}}{3}}$、

(2) (1) の結果から $\vec{g}=\dfrac{\vec{e}+\vec{f}+\vec{c}}{3}=\dfrac{\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+\frac{-\vec{a}+4\vec{b}}{3}+\vec{c}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}}$

(3) $\vec{a}=\underline{\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}}_{\text{アイ}}$, $\vec{b}=\underline{\begin{pmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}}_{\text{ウエ}}$, $\vec{c}=\underline{\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}}_{\text{オカ}}$ であるから、これを代入して

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+(-6)\\2+8\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}\mathbf{-\frac{5}{3}}\\\mathbf{\frac{10}{3}}\end{pmatrix}}_{\text{キク}}$$

$$\vec{f}=\frac{-\vec{a}+4\vec{b}}{3}=\frac{1}{3}\left\{-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1+(-12)\\-2+16\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}\mathbf{-\frac{13}{3}}\\\mathbf{\frac{14}{3}}\end{pmatrix}}_{\text{ケコ}}$$

$$\vec{g}=\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\left\{2\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-6)+5\\8+0\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}\mathbf{-\frac{1}{3}}\\\mathbf{\frac{8}{3}}\end{pmatrix}}_{\text{サシ}}$$

よって、E$\left(-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$、F$\left(-\dfrac{13}{3},\ \dfrac{14}{3}\right)$、G$\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$ である。

3. 位置ベクトルとは（２）～幾何ベクトルとの関係

A. 幾何ベクトルにおいて，内分・外分の公式を用いる

幾何ベクトルにおいても，始点をそろえれば，位置ベクトルの公式を用いることができる.

（例）△ABC において，線分 BC を 2 : 1 に内分する点を D とするとき，$\overrightarrow{AD}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ.

【解】A を始点として内分の公式より $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{3}$.　　←始点が揃っていればＯＫ

【例題 38】 △ABC において，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を D，辺 AB の中点を M とする.

1. $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AM}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ.
2. 辺 MC を 3 : 4 に内分する点を E とする．$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ.
3. 辺 MD を 5 : 4 に外分する点を F とする．$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ.

【解答】

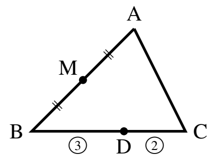
1. $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+2} = \dfrac{\mathbf{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mathbf{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\mathbf{5}}$，右欄外の図より $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2. $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AM}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+4} = \dfrac{4 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7} = \dfrac{\mathbf{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mathbf{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\mathbf{7}}$

3. $5 : (-4)$ に内分すると考えて

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{-4\overrightarrow{\mathrm{AM}} + 5\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5+(-4)} = -4 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 5 \cdot \frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5} = \mathbf{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

◀



B. 幾何ベクトルにおいて，重心の公式を用いる

（例）△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

【解】A を始点として重心の公式より $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$．$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．　始点が揃っていればOK ↑

【例題 39】 △ABC において，辺 AB，AC を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D，E とする．

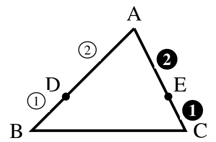
1. $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．　2. △ADE の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

【解答】

1. $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，　$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

2. $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}}{3} = \dfrac{\vec{0} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

◀



C. 幾何ベクトルの問題を位置ベクトルで考える

「ベクトルの差 〜 位置ベクトルへの変換 (p.23)」により幾何ベクトルは位置ベクトルに書き換えられる．

（例）△ABC において，線分 BC を 2 : 1 に内分する点を D，線分 AC の中点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

【解】$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ ········ ① なので，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を求めればよい．A を始点として内分の公式より $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，これを①に代入して $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

【例題 40】 △ABC において，辺 AB，BC，CA を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

【解答】 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{1}{3}\vec{c}$ であるから

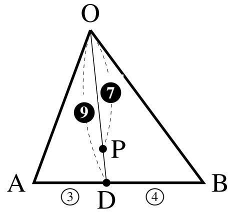
$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{1}{3}\vec{c} - \dfrac{2}{3}\vec{b} = \boldsymbol{-\dfrac{2}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}}$

◀ $\dfrac{1}{3}\vec{c} - \dfrac{2}{3}\vec{b}$ を答えとしてもよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}}$$

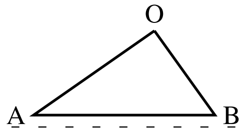
D. 点の「精確な」位置

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{9}$ となる P の精確な位置を求めてみよう．分母を $4+3=7$ に変え $\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくと，D は線分 AB を $3:4$ に内分する点を表している．これを用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7} = \dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となり，右の図のようになる．つまり，P は OD を $7:2$ に内分した点とわかる．



【例題 41】 次の P，Q の場所を △OAB の中に図示せよ．

1. $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{8}$　　2. $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{10}$



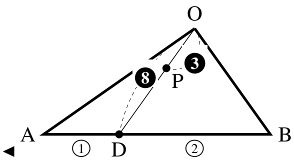
【解答】

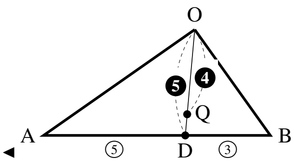
1. $\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくと，D は辺 AB を $1:2$ に内分した点を表し

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となり，右欄外のように図示できる．

2. $\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{8} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくと，D は辺 AB を $5:3$ に内分した点を表し

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{8}{10}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{8} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となり，右欄外のように図示できる．

◀


◀


【暗記 42：P の精確な位置と面積比】

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$ になるよう P を定める．

1. $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．　　2. △BPD の面積を何倍すると，△ABC の面積に等しいか．

【解答】

1. A を始点にして変形すると

$$\text{（与式）} \Leftrightarrow -\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}) + 3(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}) = \vec{0}$$

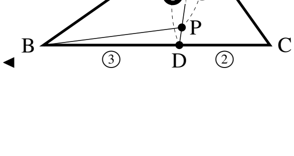
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6\overrightarrow{\mathrm{AP}} \quad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boldsymbol{\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}}$$

◀ $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を代入する。

2. $\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと，D は辺 BC を $3:2$ に内分した点を表し

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$ となり，P は右欄外のようになる．よって

$$\triangle\mathrm{BPD} \xRightarrow[\text{高さは}\,\frac{6}{1}\,\text{倍}]{\text{底辺は}\,\frac{5}{3}\,\text{倍}} \triangle\mathrm{ABC}\ \text{となり，}\ \frac{5}{3}\times\frac{6}{1} = \textbf{10 倍}\text{である．}$$

◀


1A.6 ベクトルの図形への応用

位置ベクトルを用いると，平面図形の性質のいくつかは，以下のように式で表せる．

2 点の一致	「C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) が一致」 $\iff$ $\vec{c} = \vec{d}$，または $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$
2 線分の平行	「DE // FG」 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = k\overrightarrow{\mathrm{FG}}$
3 点が一直線上	「P，Q，R が一直線上」 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{PR}}$
2 直線の交点	「AB，CD の交点 P($\vec{p}$)」 $\iff$ $\vec{p} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} = (1-t)\vec{c} + t\vec{d}$
2 直線の垂直	「AB ⊥ CD」 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$

そのため，平面図形の証明や計算が，ベクトルの計算問題となる可能性がある[*16]．

1. 応用（1）～「点が一致する」ことの証明

始点を揃えていれば，次のように考えられる．

「点の一致」 $\iff$ 「位置ベクトルの一致」

「2 点 C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) が一致する」⇒（位置ベクトルの場合）「$\vec{c} = \vec{d}$」

⇒（A を始点にした場合）「$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$」

【練習 43：点の一致～その１～】

△ABC において，辺 AB，BC，CA の中点を P，Q，R とする．△ABC の重心 G と △PQR の重心 G' が一致することを示せ．

【解答】 O を始点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，P($\vec{p}$)，Q($\vec{q}$)，R($\vec{r}$)，G($\vec{g}$)，G'($\vec{g}'$) とする．このとき，$\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ である．

◂ G は △ABC の重心 (p.26)

一方．辺 AB，BC，CA の中点が P，Q，R なので

$$\vec{p} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{q} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \vec{r} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$$

であるから，

$$\vec{g}' = \frac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3} = \frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

になる．よって，$\vec{g} = \vec{g}'$ であるから，G と G' は一致する．

【練習 44：点の一致～その２～】

△OAB において，辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 1 : 5 に内分する点を D，辺 AB を 1 : 4 に内分する点を E とする．このとき，線分 CD の中点 M と，線分 OE を 5 : 7 に内分する点 F は一致することを示せ．

[*16] この事実は，「空間図形の証明や計算」をするときに，ますます重要となる．というのも，空間図形を図形的に調べることは難しいが，空間ベクトルは平面ベクトルと同じように計算できてしまう．

【解答】 C は OA を 2 : 1 に内分するから $\overrightarrow{OC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}$, 同様に $\overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$,

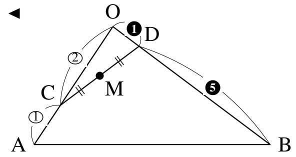
$\overrightarrow{OE} = \dfrac{4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{1+4} = \dfrac{4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{5}$ となる.

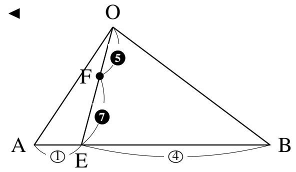
M は CD の中点より $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}}{2} = \dfrac{4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{12}$.

F は OE を 5 : 7 に内分する点なので

$\overrightarrow{OF} = \dfrac{5}{12}\overrightarrow{OE} = \dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{5} = \dfrac{4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{12}$.

よって，$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF}$ であるから M と F は一致する.

◀ 

◀ 

【練習 45：点の一致〜その３〜】

四角形 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P，Q，R，S とする．線分 PR の中点 M と線分 QS の中点 N が一致することを示せ.

2. 応用（２）〜「2 直線の平行」「3 点が同一直線上」の証明

A. 「2 直線の平行」を示すには

2 直線が平行であることは，p.11 と同じように示せばよい.

「2 直線の平行」 $\Longleftrightarrow$ 「ベクトルの定数倍」

「DE // FG」$\Rightarrow$ $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{FG}$ となる実数 k がある

【練習 46：2 直線の平行〜その１〜】

▱ABCD があり，辺 AB を 1 : 2 に内分した点を E，辺 BC の中点を F，辺 CD を 1 : 5 に内分した点を G とする．$\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{DE}$ を $\vec{x}$, $\vec{y}$ で表せ.　　(2) $\overrightarrow{FG}$ を $\vec{x}$, $\vec{y}$ で表し，DE // FG を示せ.

【解答】

(1) $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\vec{x}$ より

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{x} - \vec{y}}$

(2) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{x} + \dfrac{1}{2}\vec{y}$ であり，

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{y} + \dfrac{5}{6}\vec{x}$ となるから，

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AF} = \left(\dfrac{5}{6}\vec{x} + \vec{y}\right) - \left(\vec{x} + \dfrac{1}{2}\vec{y}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{1}{6}\vec{x} + \dfrac{1}{2}\vec{y}}$

よって，$\overrightarrow{FG} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DE}$ と分かり，DE // FG が示された.

◀ $\overrightarrow{AF} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ に $\overrightarrow{AC} = \vec{x} + \vec{y}$ を代入して求めてもよい.

【練習 47：2 直線の平行〜その２〜】

△ABC があり，辺 BC の 3 等分点を BD = DE = EC となるようにとる．辺 AB を 3 : 2 に内分する点を P，辺 AC を 2 : 1 に外分する点を Q とする．EP // DQ を示せ．

【解答】 A を始点とした位置ベクトルで考える．$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = \vec{p} - \vec{e}$ であり，P は辺 AB を 3 : 2 に内分する点なので $\vec{p} = \frac{3}{5}\vec{b}$，E は辺 BC を 2 : 1 に内分する点なので $\vec{e} = \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{2+1} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$ となる．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = \vec{p} - \vec{e} = \frac{3}{5}\vec{b} - \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) = \frac{4}{15}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$$

同じように，Q は辺 AC を 2 : 1 に外分する点なので $\vec{q} = 2\vec{c}$，D は辺 BC を 1 : 2 に内分する点なので $\vec{d} = \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{1+2} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}} = \vec{q} - \vec{d} = 2\vec{c} - \left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{5}{3}\vec{c}$$

つまり，$-\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{EP}} = -\frac{5}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{4}^{2}}{15}\vec{b} - \frac{\cancel{2}}{3}\vec{c}\right) = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{5}{3}\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{DQ}}$ となっているので，EP // DQ である．

◀ $\vec{c}$ の係数から $-\frac{5}{2}$ 倍になっているだろうと予想して計算する（もし，計算結果が合わなければ，計算ミスしているということ）．

【発展 48：2 直線の平行〜その３〜】

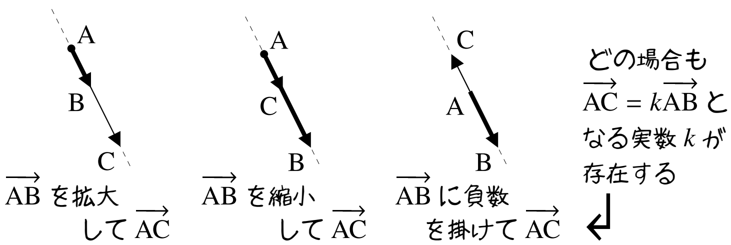
▱ABCD があり，辺 AB を 3 : 1 に内分した点を E，辺 DC を a : 1 に内分した点を F，△BCD の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{y}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

① $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ をそれぞれ $\vec{x}$, $\vec{y}$, a で表せ．

② DE // FG となるとき，a の値を求めよ．

B. 「3 点が同一直線上にある」を示すには

3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，線分 AB，AC は向きが同じか逆向きであり，いずれの場合も $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の定数倍が $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ になる．そのため，「3 点が同一直線上」は「平行」と同じ形となり，次のように考えられる[*17]．



3 点が同一直線上

次の 2 つの条件は，互いに同値である．

「3 点 A，B，C が同一直線上にある」⇔「$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 k がある」

A を始点とした「$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 k がある」ことを示す代わりに，「$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる実数 k がある」など，B や C を始点とした場合を示してもよい．

[*17] $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のように考えていることになる（線分としては「平行」ではなく，AB，AC は「重なっている」）．

【練習 49：3 点が同一直線上～その１～】

△ABC 内に，AF : FB = 1 : 2, BD : DC = 3 : 1 になるよう F，D を定めた．辺 AC を 3 : 2 に外分する点 Q をとると，F，D，Q が同一直線上に位置することを示せ．

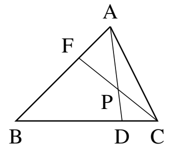
【解答】 $\overrightarrow{FQ} = k\overrightarrow{FD}$ となる実数 k が存在すればよい．

AF : FB = 1 : 2 より $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，BD : DC = 3 : 1 より $\overrightarrow{AD} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{4}$，辺 AC を 3 : (−2) に内分した Q と考え $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{-2\overrightarrow{AA}+3\overrightarrow{AC}}{3+(-2)} = 3\overrightarrow{AC}$ である．

$$\overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{4} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AB}$$

であるから，$\overrightarrow{FQ} = 4\overrightarrow{FD}$ と分かる．よって，F，D，Q は同一直線上にある．

◀ 

◀ p.25，また，図を描いても分かる．

【発展 50：3 点が同一直線上～その２～】

▱ABCD があり，辺 BC，CD を 3 : 2 に内分する点をそれぞれ E，F とする．直線 AB 上に $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ となるよう P をとって，E，F，P が同一直線上にあったとき，t の値を求めよ．

3. 応用（３）～「2 直線の交点」 ー ベクトルを 2 通りで表し連立する

A. 比を $s : (1-s)$ とおく

P が直線 AB 上にあるとき，「P は AP : PB = $s : (1-s)$ に内分している ……… ①」とおける．

たとえば，P が直線 AB 上のうち「線分 AB を 3 : 5 に内分する点」に一致したならば，AP : PB = 3 : 5 = $\dfrac{3}{8} : \dfrac{5}{8}$ となるから，①において $s = \dfrac{3}{8}$ といえる．

また，「P が線分 AB を 3 : 5 に外分していた」ならば，「P が線分 AB を (−3) : 5 に内分していた」ことと同じなので AP : PB = (−3) : 5 = $-\dfrac{3}{2} : \dfrac{5}{2}$ となるから，①において $s = -\dfrac{3}{2}$ だったといえる．

逆に，もし，$s = \dfrac{3}{2}$ だったとしよう．このときは，AP : PB = $\dfrac{3}{2} : \left(1-\dfrac{3}{2}\right) = 3 : (-1)$ である．これは，線分 AB を 3 : 1 に外分した点が P であることを表している．

【例題 51】 AP : PB = $s : (1-s)$ とする． $\boxed{}$ へ整数を，（ ）へ「内分」「外分」のいずれかを答えよ．

1. $s = \dfrac{1}{3}$ のときは $s : (1-s) = \boxed{ア} : \boxed{イ}$ となり，P は線分 AB を $\boxed{ウ} : \boxed{エ}$ に（オ）した点．
2. $s = -3$ のときは $s : (1-s) = \boxed{カ} : \boxed{キ}$ となり，P は線分 AB を $\boxed{ク} : \boxed{ケ}$ に（コ）した点．

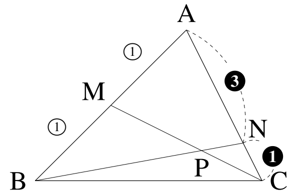
【解答】

1. $s : (1-s) = \dfrac{1}{3} : \dfrac{2}{3} =$ (ア)**1** : **2**(イ) なので，P は線分 AB を (ウ)**1** : **2**(エ) に(オ)**内分**した点．
2. $s : (1-s) =$ (カ)**−3** : **4**(キ) なので，P は線分 AB を (ク)**3** : **4**(ケ) に(コ)**外分**した点．

B. 2 線分の交点 〜 係数比較

p.12 で学んだように，平面のベクトルを表すには，一次独立な 2 つのベクトルで必要かつ十分だった．そのため，2 線分の交点は「求めるベクトルを 2 通りで表して係数比較」して求められる．

（例）△ABC において，辺 AB の中点を M，AC を 3 : 1 に内分する点を N とし，線分 BN と CM の交点を P とする．A を始点とし B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，P($\vec{p}$) としたとき，$\vec{p}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．



（解）M($\vec{m}$)，N($\vec{n}$) とすると，$\vec{m}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{n}=\dfrac{3}{4}\vec{c}$ になる．

BP : PN $= s : (1-s)$ とおくと $\vec{p}=(1-s)\vec{b}+s\vec{n}=(1-s)\vec{b}+\dfrac{3}{4}s\vec{c}$ ……… ①

CP : PM $= t : (1-t)$ とおくと $\vec{p}=(1-t)\vec{c}+t\vec{m}=\dfrac{1}{2}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$ ……… ②

$\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立であるから①, ②は係数が一致して，$\begin{cases} 1-s=\dfrac{1}{2}t & \cdots\cdots\cdots ③ \\ \dfrac{3}{4}s=1-t & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$ となる．③から $t=2-2s$ なので，④ に代入して解くと $s=\dfrac{4}{5}$ を得る．これを①に代入して $\boldsymbol{\vec{p}=\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}}$.

【練習 52：2 直線の交点〜その１〜】

△ABC の辺 AB を 3 : 1 に内分する点を M，辺 AC を 2 : 3 に内分する点を N，線分 CM と線分 BN の交点を P とする．次の $\boxed{}$ に当てはまる数字・式を入れ，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

（解）A を始点とし B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，M($\vec{m}$)，N($\vec{n}$)，P($\vec{p}$) とすると，$\vec{m}=\boxed{\text{ア}}\vec{b}$, $\vec{n}=\boxed{\text{イ}}\vec{c}$ である．

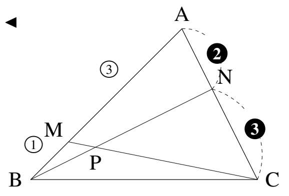
BP : PN $= s : (1-s)$ とおくと，$\vec{p}$ は s を用いて $\vec{p}=\boxed{\text{ウ}}\vec{b}+\boxed{\text{エ}}\vec{c}$ ……… ①.

CP : PM $= t : (1-t)$ とおくと，$\vec{p}$ は t を用いて $\vec{p}=\boxed{\text{オ}}\vec{b}+\boxed{\text{カ}}\vec{c}$ ……… ②.

$\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立なので，①，②より $\begin{cases} \boxed{\text{ウ}}=\boxed{\text{オ}} & \cdots\cdots\cdots ③ \\ \boxed{\text{エ}}=\boxed{\text{カ}} & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$ である．これを解き，求めた s または t を②に代入して $\vec{p}=\boxed{\text{キ}}\vec{b}+\boxed{\text{ク}}\vec{c}$ となるから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{\text{キ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\text{ク}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．

【解答】 右欄外の図より，$\vec{m}=\underset{(ア)}{\underline{\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}}}\vec{b}$, $\vec{n}=\underset{(イ)}{\underline{\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}}}\vec{c}$ である．

◀



BP : PN $= s : (1-s)$ より

$\vec{p}=(1-s)\vec{b}+s\vec{n}=\underset{(ウ)}{\underline{\boldsymbol{(1-s)}}}\vec{b}+\underset{(エ)}{\underline{\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}}}s\vec{c}$ ……①

また，CP : PM $= t : (1-t)$ より

$\vec{p}=(1-t)\vec{c}+t\vec{m}=\underset{(オ)}{\underline{\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}}}t\vec{b}+\underset{(カ)}{\underline{\boldsymbol{(1-t)}}}\vec{c}$ ……②

$\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立なので，①，②より $\begin{cases} 1-s=\dfrac{3}{4}t & \cdots\cdots ③ \\ \dfrac{2}{5}s=1-t & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

③より $t=\dfrac{4}{3}(1-s)$ なので，④へ代入して

$\dfrac{2}{5}s=1-\dfrac{4}{3}(1-s)$

$\Leftrightarrow\ 6s=15-20(1-s)$ ◀ 両辺を 15 倍した

これを解いて $s=\dfrac{5}{14}$．②に代入して $\vec{p} = \underset{\text{(キ)}}{\underline{\boldsymbol{\dfrac{9}{14}}}}\vec{b} + \underset{\text{(ク)}}{\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{7}}}}\vec{c}$ である．

◀なお，$t=\dfrac{6}{7}$ となる．

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{9}{14}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．

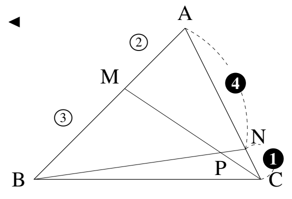
◀A が始点なので，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ である．

【練習 53：2 直線の交点〜その２〜】

△ABC の辺 AB を 2 : 3 に内分する点を M，辺 AC を 4 : 1 に内分する点を N，線分 CM と線分 BN の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．

【解答】 $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{m}$, $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \vec{n}$ とおくと，右欄外の図より $\vec{m} = \dfrac{2}{5}\vec{b}$, $\vec{n} = \dfrac{4}{5}\vec{c}$．

◀



BP : PN $= s : (1-s)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-s)\vec{b} + s\vec{n} = (1-s)\vec{b} + \dfrac{4}{5}s\vec{c} \cdots ①$.

CP : PM $= t : (1-t)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-t)\vec{c} + t\vec{m} = \dfrac{2}{5}t\vec{b} + (1-t)\vec{c} \cdots ②$.

$\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立であるから，$\begin{cases} 1-s = \dfrac{2}{5}t \cdots ③ \\ \dfrac{4}{5}s = 1-t \cdots ④ \end{cases}$ となる．

◀①，②は係数が一致するので，係数比較した．

③から $t = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}s$ なので，④ に代入して解くと

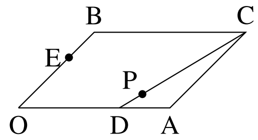
$$\begin{aligned} \frac{4}{5}s = 1 - \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}s\right) &\Leftrightarrow \frac{4}{5}s = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}s \\ &\Leftrightarrow 8s = -15 + 25s \\ &\Leftrightarrow -17s = -15 \qquad \therefore\ s = \frac{15}{17} \end{aligned}$$

◀両辺 10 倍した

を得る．これを①に代入して $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{17}\vec{b} + \dfrac{12}{17}\vec{c}}$.

【練習 54：平行四辺形】

右図のように，▱OACB の辺 OA，OB を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D, E とし，線分 CD 上に点 P があるとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく．



(1) CP : PD $= s : (1-s)$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

(2) P が線分 CD，AE の交点であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

【解答】

(1) P は線分 CD を $s : (1-s)$ に内分するので $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$.

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{2}{3}\vec{a}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-s)(\vec{a}+\vec{b}) + s\cdot\frac{2}{3}\vec{a} \\ &= \left(1 - s + \frac{2}{3}s\right)\vec{a} + (1-s)\vec{b} = \boldsymbol{\left(1 - \frac{1}{3}s\right)\vec{a} + (1-s)\vec{b}} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

(2) AP : PE $= t : (1-t)$ とおくと

◀『比を $s : 1-s$ とおく』(p.33)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OE}} \qquad \cdots\cdots ② \\ &= (1-t)\vec{a} + t\cdot\frac{2}{3}\vec{b} = (1-t)\vec{a} + \frac{2}{3}t\vec{b} \qquad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

P は線分 CD，AE の交点であるから①，③は一致する．$\vec{a}$, $\vec{b}$ は一次独

立であるから $\begin{cases} 1-\dfrac{1}{3}s = 1-t \cdots\cdots ④ \\ 1-s = \dfrac{2}{3}t \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$ となる.

④より $t = \dfrac{1}{3}s$ であるから，⑤に代入して解くと $s = \dfrac{9}{11}$.

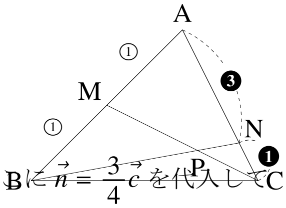
これを①に代入して $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\dfrac{8}{11}\vec{a} + \dfrac{2}{11}\vec{b}}$

C. 「メネラウスの定理」による別解

p.34 の問題は，「メネラウスの定理」（数学 A）を用いて，次のように解くことができる.

このやり方は大変便利だが，空間のベクトルにおいて使うことが困難になる．係数比較のやり方も身につけるようにしよう.

（例） △ABC において，辺 AB の中点を M，AC を 3 : 1 に内分する点を N とし，線分 BN と CM の交点を P とする．A を始点とし B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，P($\vec{p}$) としたとき，$\vec{p}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.



（解） △ABN と直線 MC について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PN}}\cdot\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{CA}} = 1 \iff \frac{1}{1}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PN}}\cdot\frac{1}{4} = 1 \iff \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PN}} = \frac{4}{1}$$

よって，BP : PN = 4 : 1 となり，N($\vec{n}$) とすると $\vec{p} = \dfrac{1\vec{b}+4\vec{n}}{4+1} = \dfrac{1}{5}\vec{b} + \dfrac{4}{5}\vec{n}$. ここに $\vec{n} = \dfrac{3}{4}\vec{c}$ を代入して

$\boldsymbol{\vec{p} = \dfrac{1}{5}\vec{b} + \dfrac{3}{5}\vec{c}}$ を得る.

【練習 55：2 直線の交点～その 2～】

△ABC の辺 AB を 3 : 1 に内分する点を M，辺 AC を 2 : 3 に内分する点を N，線分 CM と線分 BN の交点を P とする．次の $\boxed{}$ に当てはまる数字・式を入れ，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ.

（解） △ABN と直線 $\boxed{\text{ア}}$ について，メネラウスの定理より $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\cdot\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PN}}\cdot\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} = 1$

これを解いて $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PN}} = \boxed{\text{カ}}$ となり，BP : PN = $\boxed{\text{キ}}$: $\boxed{\text{ク}}$ となる.

これより，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boxed{\text{ケ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boxed{\text{コ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を得る.

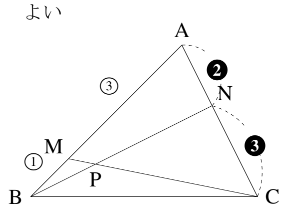
【解答】 △ABN と直線 **MC**(ア) について，メネラウスの定理より

$$\frac{\text{(イ)}\,\mathbf{AM}}{\text{(ウ)}\,\mathbf{MB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PN}}\cdot\frac{\mathbf{NC}\,\text{(エ)}}{\mathbf{CA}\,\text{(オ)}} = 1 \iff \frac{3}{1}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PN}}\cdot\frac{3}{5} = 1$$

$$\iff \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PN}} = \underline{\boldsymbol{\frac{5}{9}}}\text{(カ)}$$

BP : PN = (キ)**5** : **9**(ク) となり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{9\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AN}}}{5+9} = \dfrac{9}{14}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{5}{14}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$. ここに $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を代入して $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \text{(ケ)}\,\boldsymbol{\dfrac{9}{14}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \text{(コ)}\,\boldsymbol{\dfrac{1}{7}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を得る.

◀ **イ : 3，ウ : 1，エ : 3，オ : 5** でもよい



4. 応用（4）～「2直線の垂直」の証明

2直線・線分の垂直を証明するには，内積を計算して0になることを示せばよい（14）.

【練習56：2直線の垂直～その1～】

△OAB があり，$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{3}$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 1$ とする．辺 AB を 2 : 1 に内分する点を C とするとき，OC ⊥ AB を示せ.

【解答】 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ を示せばよい.

C は AB を 2 : 1 に内分するので $\overrightarrow{OC} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+1}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB} &= \frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}\right)\\ &= \frac{1}{3}(1-3+2\cdot 2-2\cdot 1) = 0\end{aligned}$$

◀『内積を掛け算のように扱う』(p.18)

よって，OC ⊥ AB が示された.

【練習57：2直線の垂直～その2～】

∠O = 90° の直角二等辺三角形 OAB があり，辺 OA を 2 : 3 に内分する点を D，辺 OB を 1 : 4 に内分する点を E，辺 AB の中点を M とする．このとき，DM ⊥ AE を示せ.

【解答】 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする．△OAB が直角二等辺三角形なので，$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$ ……… ①, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ……… ② である．ここで

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OD} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{2}{5}\vec{a} = \frac{1}{10}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA} = \frac{1}{5}\vec{b}-\vec{a}$$

ここで①，②より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AE} &= \left(\frac{1}{10}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\vec{b}-\vec{a}\right)\\ &= \frac{1}{10}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{1}{10}\left|\vec{a}\right|^2 = 0\end{aligned}$$

◀①より $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の項は不要

◀②を利用した

よって，DM ⊥ AE が示された.

【暗記58：垂線が1点で交わることの証明】

△ABC があり，BH ⊥ CA, CH ⊥ AB とする．このとき，AH ⊥ BC を示せ.

【解答】 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AH} = \vec{h}$ とする.

BH ⊥ CA であり，$\overrightarrow{BH} = \vec{h}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -\vec{c}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA} = 0 &\iff (\vec{h}-\vec{b})\cdot(-\vec{c}) = 0\\ &\iff -\vec{h}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \qquad \therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{h}\cdot\vec{c}\ \cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

また，CH ⊥ BA であるから

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \iff (\vec{h}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

$\iff \vec{h}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{b}=0 \qquad \therefore \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{h}\cdot\vec{b}$ ········ ②

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{h}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{h}\cdot\vec{c}-\vec{h}\cdot\vec{b}$ であるが，①，②より

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

よって，AH ⊥ BC が示された.

5. 応用（5）〜三角形の面積

ベクトルを用いた三角形の面積

△OAB の面積は次のように計算できる.

(1) （成分表示使わない）$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}$

(2) （成分表示使う）$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき，$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

（証明）(1) 三角形の面積の公式より $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}$ であり

$\sin\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AOB}}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}}$ であるから

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\left(1-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=a_1b_1+a_2b_2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=a_1^2+a_2^2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=b_1^2+b_2^2$ を代入して

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2-(a_1^2b_1^1+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

【例題 59】

1. $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4$ のとき，△OAB の面積を求めよ.
2. O(0, 0)，A(2, 1)，B(−3, 2) のとき，△OAB の面積を求めよ.
3. M(1, 2)，A(3, 4)，B(4, −3) のとき，△MAB の面積を求めよ.

【解答】

1. $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3^2\cdot2^2-4^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{20}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

◀『三角形の面積 (1)』(p.38)

2. $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}|2\cdot2-1\cdot(-3)|=\dfrac{1}{2}|7|=\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

◀『三角形の面積 (2)』(p.38)

3. $\overrightarrow{\mathrm{MA}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ であるから，$\triangle\mathrm{MAB} = \dfrac{1}{2}|2\cdot(-5) - 2\cdot 3| =$
$\dfrac{1}{2}|-16| = \mathbf{8}$

6. 三角形の五心と位置ベクトル

A. 重心

p.26 で学んだように，△ABC の重心 G は $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ であった.

B. 内心

内心の位置ベクトルを求めるには，まず「角の二等分線の公式」（数学 A）を用いて比を求める.

【暗記 60：内心】

△ABC の内心を I とする．AB = 5, BC = 8, CA = 7 のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ.

【解答】　直線 AI と辺 BC の交点を D とする.
角の二等分線の公式より BD : DC = AB : AC = 5 : 7 ········ ①
さらに，角の二等分線の公式より AI : ID = AB : BD = 5 : BD ········ ②
①より $\mathrm{BD} = \dfrac{5}{5+7}\mathrm{BC} = \dfrac{5}{12}\cdot 8 = \dfrac{10}{3}$ であるから，②に代入して
$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = 5 : \dfrac{10}{3} = 3 : 2$ ········ ③．以上から

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{3}{3+2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{7\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5+7} = \boldsymbol{\frac{7\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{20}}$$

C. 外心

三角形の外心は 3 辺の垂直二等分線の交点であり，外接円の中心であるから，以下の条件が成り立つ.

三角形の外心とベクトル

△ABC の外心を R としたとき，以下が成立する.
(1) R は 3 辺の垂直二等分線の交点であるから，辺 AB，BC，CA の中点 L，M，N について
RL ⊥ AB であるから $\overrightarrow{\mathrm{RL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$，RM ⊥ BC であるから $\overrightarrow{\mathrm{RM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$，RN ⊥ CA であるから $\overrightarrow{\mathrm{RN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0$（2 つが成立すれば，3 つ目も成り立つ）.
(2) R は外接円の中心になるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{RA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{RB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{RC}}\right|$

【練習 61：外心】

AB = 5, AC = 6, ∠A = 60° である △ABC の外心を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \vec{r}$ とするとき，$\vec{r}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ.

【解答】 $\vec{r}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおく（$s,\ t$ は実数）．辺 AB，AC の中点を M，N とすると R は外心であるから，

$$\mathrm{RM}\perp\mathrm{AB}\iff\overrightarrow{\mathrm{RM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\mathrm{RN}\perp\mathrm{AC}\iff\overrightarrow{\mathrm{RN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．ここで①について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\vec{r})\cdot\vec{b}\\&=\left(\frac{1}{2}\vec{b}-s\vec{b}-t\vec{c}\right)\cdot\vec{b}\\&=\left(\frac{1}{2}-s\right)\left|\vec{b}\right|^2-t\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

◀ M は AB の中点なので $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\vec{b}$．また，$\vec{r}=s\vec{b}+t\vec{c}$ も代入．

ここで，$\vec{b}\cdot\vec{c}=5\cdot6\cdot\cos60^\circ=15,\ \left|\vec{b}\right|=5$ より

$$① \iff 25\left(\frac{1}{2}-s\right)-15t=0 \iff \frac{5}{2}=5s+3t \cdots\cdots ③$$

一方，②について $\vec{b}\cdot\vec{c}=15,\ \left|\vec{c}\right|=6$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\vec{r})\cdot\vec{c}\\&=\left(\frac{1}{2}\vec{c}-s\vec{b}-t\vec{c}\right)\cdot\vec{c}\\&=\left(\frac{1}{2}-t\right)\left|\vec{c}\right|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot36-15s=18-36t-15s\end{aligned}$$

◀ N は AC の中点なので $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1}{2}\vec{c}$．

よって，② $\iff 18-36t-15s=0\iff 5s+12t=6$ である．
これと③を連立して $(s,\ t)=\left(\frac{4}{15},\ \frac{7}{18}\right)$ であるから，$\boldsymbol{\vec{h}=\frac{4}{15}\vec{b}+\frac{7}{18}\vec{c}}$．

D.　垂心

p.37 で示したように，三角形の 3 本の垂線は 1 点で交わる．
垂心の位置ベクトルを求めるには，内積を利用する．

【練習 62：垂心】

AB = 5，AC = 6，$\angle\mathrm{A}=60^\circ$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{h}$ とするとき，$\vec{h}$ を $\vec{b},\ \vec{c}$ で表せ．

【解答】 $\vec{h}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおく（$s,\ t$ は実数）．H は垂心であるから

$$\mathrm{BH}\perp\mathrm{AC}\iff\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\mathrm{CH}\perp\mathrm{AB}\iff\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．まず，①について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(\vec{h}-\vec{b})\cdot\vec{c}\\&=(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{c}\\&=(s-1)\vec{b}\cdot\vec{c}+t\left|\vec{c}\right|^2\end{aligned}$$

◀ $\vec{h}=s\vec{b}+t\vec{c}$ を代入した

ここで，$\vec{b}\cdot\vec{c} = 5\cdot 6\cdot\cos 60^\circ = 15$, $|\vec{c}| = 6$ より

① $\iff (s-1)\cdot 15 + t\cdot 6^2 = 0 \iff 5s + 12t = 5$ …………………… ③

一方，②について $\vec{b}\cdot\vec{c} = 15$, $|\vec{b}| = 5$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\vec{h}-\vec{c})\cdot\vec{b}\\ &= (s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{c})\cdot\vec{b}\\ &= s|\vec{b}|^2 + (t-1)\vec{b}\cdot\vec{c}\\ &= s\cdot 25 + (t-1)\cdot 15\end{aligned}$$

◀ $\vec{b}\cdot\vec{c} = 15$, $|\vec{b}| = 5$ を代入した

よって ② $\iff 25s + 15(t-1) = 0 \iff 5s + 3t = 3$ である．

これと③を連立して $(s,\ t) = \left(\dfrac{7}{15},\ \dfrac{2}{9}\right)$ であるから，$\boldsymbol{\vec{h} = \dfrac{7}{15}\vec{b} + \dfrac{2}{9}\vec{c}}$.

E. 傍心

傍心の位置ベクトルを求めるには，まず「角の二等分線の公式」（数学 A）の外角の場合を利用することになり，内心の場合（p.39）と同様である．

【練習 63：傍心】

△ABC の傍心のうち，∠A の二等分線上にあるものを I とする．AB = 5, BC = 7, CA = 8 のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

【解答】 ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とおく．角の二等分線の公式より，BD : DC = AB : AC = 5 : 8 であるから，BD $= \dfrac{5}{5+8}$BC $= \dfrac{35}{13}$.

また，△BAD について，BI は ∠B の外角の二等分線であるから，外角の二等分線の公式より AI : ID = BA : BD $= 5 : \dfrac{35}{13} = 13 : 7$ である．

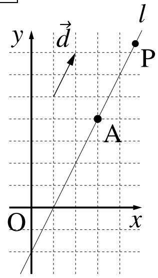
これより，AI : AD = 13 : 6 である．よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}} &= \frac{13}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &= \frac{13}{6}\cdot\frac{8\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5+8} = \boldsymbol{\frac{8\vec{b}+5\vec{c}}{6}}\end{aligned}$$

1A.7 ベクトル方程式

ベクトルを用い，直線や円を表した式を**ベクトル方程式** (vector equation) と言う.

1. 直線のベクトル方程式（１） ～１点と方向が与えられた直線



A. ベクトルを用いて直線を表す

A を通り $\vec{d}$ に平行な直線を l とする．この直線 l 上の点 P は，必ず $\overrightarrow{AP} = t\vec{d}$ を満たす実数 t を持つ．この式を，A$(\vec{a})$，P$(\vec{p})$ として位置ベクトルで書き換えると

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{d} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} - \vec{a} = t\vec{d} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

最後の式 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ を「直線 l のベクトル方程式」と呼び，次のようにまとめられる.

直線のベクトル方程式～その１～

A$(\vec{a})$ を通り $\vec{d}$ に平行な直線 l があるとき，直線上の点 P$(\vec{p})$ は必ず $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$（$t$ は実数）を満たし，逆も正しい．この $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ を，直線 l のベクトル方程式といい，t を**媒介変数** (parameter)，$\vec{d}$ を**方向ベクトル**という.

B. ベクトル方程式を成分表示する

上の例では，A(3, 4) であり $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．そこで，$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ に代入すると

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+t \\ 4+2t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とおくと } \begin{cases} x = 3+t \\ y = 4+2t \end{cases}$$

となる．これは，直線 l のベクトル方程式の成分表示と呼ばれる.

上の事実から，「P が直線 l 上にある」ことを「P$(3+t,\ 4+2t)$ と表せる」と言い換えても良い.

C. これまでの「直線の方程式」との関係

上の l の式 $\begin{cases} x = 3+t & \cdots\cdots\cdots ① \\ y = 4+2t & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ から媒介変数 t を消去しよう．①から $t = x-3$ となり②へ代入し

$y = 4 + 2(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 2$ ←傾き２，切片－２の「直線の方程式」になっている

改めて右上の図を見ると，l は傾き 2，切片 -2 の直線である．これは上の式と一致する.

【例題 64】 (2, 2) を通り $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルにもつ直線 l_1，$(-1, -3)$ を通り $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルにもつ直線 l_2 について以下の問いに答えよ.

1. 直線 l_1, l_2 のベクトル方程式を，媒介変数 t を用い，成分表示によって答えよ.
2. 1. で求めた直線 l_1, l_2 のベクトル方程式から t を消去し，x, y で表された方程式を答えよ.

【解答】

1. $l_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2 - t} \\ \boldsymbol{y = 2 + 2t} \end{cases}$

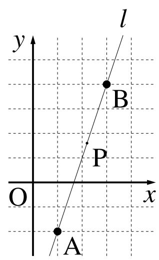
$l_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 3t} \\ \boldsymbol{y = -3 - t} \end{cases}$

2. $l_1 : t = 2 - x$ を代入して $y = 2 + 2(2 - x)$，よって $\boldsymbol{y = -2x + 6}$ ◀ $2x + y - 6 = 0$ でもよい

$l_2 : t = -y - 3$ を代入して $x = -1 + 3(-y - 3) = -3y - 10$，よって $\boldsymbol{x + 3y + 10 = 0}$ ◀ $x + 3y = -10$ でもよい

2. 直線のベクトル方程式（２）～２点が与えられた直線

A. 2 点を通る直線のベクトル方程式



「直線 AB 上に P があること」は，「AP : PB = $t : (1 - t)$ であり，内分・外分の公式が使える」ことと同じだった．つまり，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，P($\vec{p}$) とすると

AP : PB = $t : (1 - t)$ $\Rightarrow$ $\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$

となる．この $\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$ を「直線 AB のベクトル方程式」と呼ぶ.

B. 成分表示・直線の方程式

上の例では，A$(1, -2)$，B$(3, 4)$ であるから，$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を代入して，成分表示が得られる.

$\vec{p} = (1 - t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ -2 + 6t \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{cases} x = 1 + 2t & \cdots\cdots\cdots ① \\ y = -2 + 6t & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

また，①から $2t = x - 1$ なので②に代入して，これまで通りの「直線の方程式」を得る.

$y = -2 + 3 \cdot 2t = -2 + 3(x - 1) = 3x - 5$ ⋯⋯⋯ ③

【例題 65】 C$(2, 4)$，D$(3, -1)$，P$(-2, -5)$，Q$(4, -3)$ について次の問いに答えなさい.

1. 直線 CD，直線 PQ の方程式を，媒介変数 t を用い，成分表示によって答えよ.
2. 1. で求めた直線 PQ，直線 PQ のベクトル方程式から t を消去し，x, y で表された方程式を答えよ.

【解答】

1. CD : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 - t)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + t \\ 4 - 5t \end{pmatrix}$ より，$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + t} \\ \boldsymbol{y = 4 - 5t} \end{cases}$

PQ : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 - t)\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6t \\ -5 + 2t \end{pmatrix}$ より，$\begin{cases} \boldsymbol{x = -2 + 6t} \\ \boldsymbol{y = -5 + 2t} \end{cases}$

2. CD : $t = x - 2$ を代入して $y = 4 - 5(x - 2)$ より $\boldsymbol{y = -5x + 14}$.

PQ : $2t = y + 5$ を代入して $x = -2 + 3 \cdot 2t = -2 + 3(y + 5) = 3y + 13$ より $\boldsymbol{x - 3y - 13 = 0}$.

C. 線分 AB

$\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$ を $1 - t = s$ とおいた式 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ $(s + t = 1)$ も用いられ，次ページのように応用される.

このとき，AP : PB = $t : s$ となり，特に「P は線分 AB の外分 $\Leftrightarrow$ $s < 0$ または $t < 0$」となる．言い換えると，$0 \leqq s$, $0 \leqq t$ ならば P は線分AB 上を動く.

直線のベクトル方程式〜その２〜

2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を通る直線 AB 上の点 $P(\vec{p})$ は，$AP : PB = t : (1-t)$ とおいて次の 2 式を満たす．

$$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}, \qquad \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}\ (s+t=1)$$

これを，直線AB のベクトル方程式という．

さらに，条件を付け加えて $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}\ (s+t=1,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t)$ とすると，これは線分AB を表している．

D. ベクトル方程式の「曖昧さ」

直線 AB のベクトル方程式は，$AP : PB = (1-t) : t$ とおいても得られる．このときは $\vec{p} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ となり，形が異なる．さらに，$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を代入すると

$$\vec{p} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-3t \\ 4-4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2t \\ 4-6t \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とおくと } \begin{cases} x = 3-2t & \cdots\cdots\ ① \\ y = 4-6t & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

となって，上の①，②とは違う媒介変数表示になってしまう．

最後に，①，②から媒介変数 t を消去してみよう．①から $2t = 3-x$ なので② へ代入して

$$y = 4 - 3 \cdot 2t = 4 - 3(3-x) = 4 - 9 + 3x = 3x - 5$$

これは③に一致する．つまり，①，②も正しいベクトル方程式であることが確認できる．

このように，ベクトル方程式は一つに定まるとは限らないので注意しよう[*18]．

E. $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ と $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ の関係

「直線 l の方程式は何か？」という問には，直線 l が「A を通り線分 AB に平行な直線」と考えれば，次のベクトル方程式で答えられる．

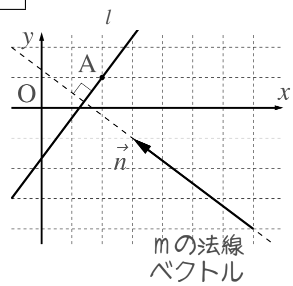
「直線 l 上の点 P は，$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ を満たし，逆も正しい．」

ここで，$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$P(\vec{p})$ とおき，位置ベクトルを用いて書き換えると

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{p} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{p} = t\vec{b} - t\vec{a} + \vec{a} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

3. 直線のベクトル方程式（３） 〜１点と法線ベクトル



A. 法線ベクトルとは何か

右のように，$\vec{n}$ が直線 l と垂直なとき，$\vec{n}$ は l の**法線ベクトル** (normal vector) と言われる．

右図の直線 l は，「A を通り法線ベクトル $\vec{n}$ をもつ直線」である．

B. 1 点と法線ベクトルが与えられた直線の方程式

右上の直線 l 上の点 P を考える．この P は，l 上のどこにあっても $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$ を満たしている．この式を，$A(\vec{a})$，$P(\vec{p})$ として位置ベクトルで書き換えると

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$$

[*18] 特に，問題集などにおいて解答とは違う式であっても，媒介変数 t を消去して同じ式になれば，正しいと言える．

最後の 2 式 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$, $\vec{p}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}$ はどちらも「直線 l のベクトル方程式」と呼ばれる．

直線のベクトル方程式〜その３〜

A$(\vec{a})$ を通り，$\vec{n}$ が法線ベクトルである直線 l 上の点 P$(\vec{p})$ は次の 2 式を満たし，逆も正しい．

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0,\qquad \vec{p}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}$

これらを，直線 l のベクトル方程式という．

C.　これまでの「直線の方程式」との関係

上の例では，A(2, 1) であり $\vec{n}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ である．そこで，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおき，$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ を代入すると，これまでのような「直線の方程式」が得られる．

$\vec{p}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n} \iff x\cdot(-4)+y\cdot 3=2\cdot(-4)+1\cdot 3 \iff -4x+3y=-5$

【例題 66】 (4, 1) を通り $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ を法線ベクトルにもつ直線 l_1，(−2, −1) を通り $\vec{n_2}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ を法線ベクトルにもつ直線 l_2 について，直線 l_1, l_2 の方程式をそれぞれ答えよ．

【解答】 l_1 : $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ を $\vec{p}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}$ に代入して，$\boldsymbol{-3x+2y=-10}$.

l_2 : $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ を $\vec{p}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}$ に代入して，$\boldsymbol{5x+3y=-13}$.

4.　一次結合 $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ による P の存在範囲

A.　（1）直線・線分になる場合

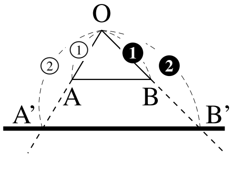
$s\vec{a}=\dfrac{1}{2}s\cdot 2\vec{a}$, $t\vec{b}=\dfrac{1}{2}t\cdot 2\vec{b}$ のような変形を用い，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ による P の存在範囲を考えてみよう．

（例）始点を O とした位置ベクトル A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，P$(\vec{p})$ について $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$（$s+t=2$）となるよう P が動くとき，P の存在範囲を求めよ．

（解）$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\ (s+t=2) \iff \vec{p}=\dfrac{1}{2}s\cdot 2\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\cdot 2\vec{b}\left(\dfrac{1}{2}s+\dfrac{1}{2}t=1\right)$

であるから，これは，位置ベクトル $2\vec{a}$, $2\vec{b}$ が表す 2 点（これを A’，B’ とおく）を通る直線のベクトル方程式になっている．

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので A’，B’ は右のようになり，P の軌跡は直線 A’B’ になる．



上の（例）において，$0\leqq s$, $0\leqq t$ という条件を付け加えると，結果は線分A’B’ になる．なぜなら，$0\leqq\dfrac{1}{2}s$, $0\leqq\dfrac{1}{2}t$ が成り立つからである．

【練習 67：P の存在範囲〜その１〜】

始点を O とした位置ベクトル $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$P(\vec{p})$ について，$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とする．s，t が次の条件を満たすとき，P の存在範囲を図示せよ．

(1) $s + t = 3$　 (2) $s + t = 4,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t$　 (3) $s + 3t = 1$　 (4) $2s + 3t = 6,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t$

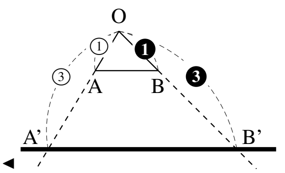
【解答】

(1) $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}\ (s + t = 3) \iff \vec{p} = \dfrac{1}{3}s \cdot 3\vec{a} + \dfrac{1}{3}t \cdot 3\vec{b}\ \left(\dfrac{1}{3}s + \dfrac{1}{3}t = 1\right)$

◀ $s + t = 3$ の両辺を 3 で割った

であるから，これは位置ベクトル $3\vec{a}$, $3\vec{b}$ が表す 2 点（これを A’，B’ とおく）を通る直線のベクトル方程式になっている．

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので**存在範囲は右欄外の直線 A’B’** になる．



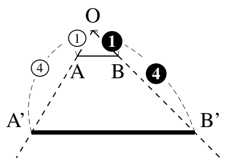
(2)　$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$　　$(s + t = 4,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t)$

$\iff \vec{p} = \dfrac{1}{4}s \cdot 4\vec{a} + \dfrac{1}{4}t \cdot 4\vec{b}\ \left(\dfrac{1}{4}s + \dfrac{1}{4}t = 1,\ \ 0 \leqq \dfrac{1}{4}s,\ 0 \leqq \dfrac{1}{4}t\right)$

◀ $s + t = 4$ の両辺を 4 で割った

であるから，これは位置ベクトル $4\vec{a}$, $4\vec{b}$ が表す 2 点（これを A’，B’ とおく）を通る線分のベクトル方程式になっている．

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 4\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = 4\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より**存在範囲は右欄外の線分 A’B’** になる．

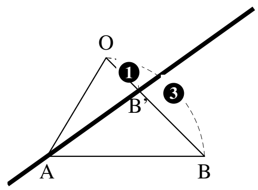


(3)　$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$　　$(s + 3t = 1)$

$\iff \vec{p} = s \cdot \vec{a} + 3t \cdot \dfrac{1}{3}\vec{b}\ \ (s + 3t = 1)$

であるから，これは位置ベクトル $\vec{a}$, $\dfrac{1}{3}\vec{b}$ が表す 2 点（これを A’，B’ とおく）を通る直線のベクトル方程式になっている．

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので，A’ は A に一致し，**P の軌跡は右欄外図の直線 AB’** になる．



(4) $2s + 3t = 6 \iff \dfrac{1}{3}s + \dfrac{1}{2}t = 1$ を用い，与えられた条件は

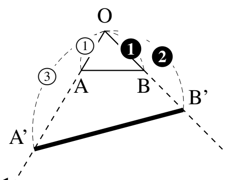
◀ $2s + 3t = 6$ の両辺を 6 で割った

$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}\ (2s + 3t = 6,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t)$

$\iff \vec{p} = \dfrac{1}{3}s \cdot 3\vec{a} + \dfrac{1}{2}t \cdot 2\vec{b}\ \left(\dfrac{1}{3}s + \dfrac{1}{2}t = 1,\ 0 \leqq \dfrac{1}{3}s,\ 0 \leqq \dfrac{1}{2}t\right)$

となり，これは位置ベクトル $3\vec{a}$, $2\vec{b}$ が表す 2 点（これを A’，B’ とおく）を通る線分のベクトル方程式になっている．

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので**存在範囲は右欄外の線分 A’B’** になる．



B.　（２）領域になる場合

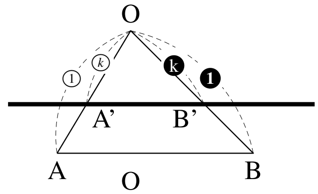
以上の議論をまとめると，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$（$s+t \leqq 1,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t$）となる P の存在範囲は，△OAB の内部及び周である．なぜなら，これは，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\ (s+t=k,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t,\ 0 \leqq k \leqq 1)$ を満たす P の存在範囲であり，それぞれの k について

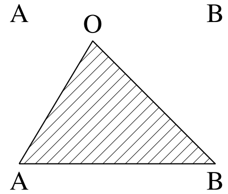
$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\ (s+t=k,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t)$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{p}=\frac{1}{k}s\cdot k\vec{a}+\frac{1}{k}t\cdot k\vec{b}\ \left(\frac{1}{k}s+\frac{1}{k}t=1,\ 0 \leqq \frac{1}{k}s,\ 0 \leqq \frac{1}{k}t\right)$$

より，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\vec{a}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=k\vec{b}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，線分 A'B' が P の存在範囲になっている．

線分 A'B' を $0 \leqq k \leqq 1$ の範囲で動かした跡を考えれば，P の存在範囲は △OAB の内部及び周である．





【発展 68：P の存在範囲〜その２〜】

△OAB に対し，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とする．$s,\ t$ が次の条件を満たすとき，P の存在範囲を図示せよ．

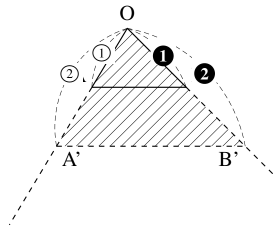
① $s+t \leqq 2,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t$　　② $2s+3t \leqq 6,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t$

【解答】

① $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\ (s+t \leqq 2,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t)$

$$\Leftrightarrow\ \vec{p}=\frac{1}{2}s\cdot 2\vec{a}+\frac{1}{2}t\cdot 2\vec{b}\ \left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t \leqq 1,\ 0 \leqq \frac{1}{2}s,\ 0 \leqq \frac{1}{2}t\right)$$

より，位置ベクトル $2\vec{a},\ 2\vec{b}$ が表す 2 点を A'，B' とおくと，P の存在範囲は △OA'B' の内部及び周になっている．
$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので **P の存在範囲は右欄外図の斜線部（境界含む）**になる．



◀

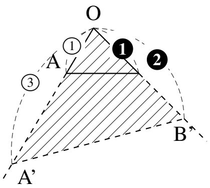
② $2s+3t \leqq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{3}s+\frac{1}{2}t \leqq 1$ を用い，与えられた条件は

◀ $2s+3t \leqq 6$ の両辺を 6 で割った

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\ (2s+3t \leqq 6,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t)$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{p}=\frac{1}{3}s\cdot 3\vec{a}+\frac{1}{2}t\cdot 2\vec{b}\ \left(\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}t \leqq 1,\ 0 \leqq \frac{1}{3}s,\ 0 \leqq \frac{1}{2}t\right)$$

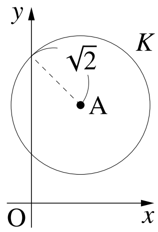
より，位置ベクトル $3\vec{a},\ 2\vec{b}$ が表す 2 点を A'，B' とおくと，P の存在範囲は △OA'B' の内部及び周になっている．
$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので **P の存在範囲は右欄外図の斜線部（境界含む）**になる．



◀

5. 円のベクトル方程式

A. 「中心」と「半径」が与えられた円のベクトル方程式



A を通り半径 $\sqrt{2}$ の円を K とする。この円 K 上の点 P は，必ず $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \sqrt{2}$ を満たしている．これを $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{P}(\vec{p})$ とおき，位置ベクトルを用いて書き換えると，次のようになる．

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \sqrt{2} \iff \left|\vec{p} - \vec{a}\right| = \sqrt{2}$$

式 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \sqrt{2}$ を「円 K のベクトル方程式」と呼ぶ。

円のベクトル方程式

> $\mathrm{A}(\vec{a})$ を中心とし、半径 r の円の周上にある点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は、必ず $\left|\vec{p} - \vec{a}\right| = r$ を満たし，逆も正しい。この $\left|\vec{p} - \vec{a}\right| = r$ を、円 C の**ベクトル方程式** (vector equation) という．

B. x, y で表された「円の方程式」との関係

上の例では A(1, 2) である。そこで、$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\left|\vec{p} - \vec{a}\right| = \sqrt{2}$ に代入しよう。$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2} \iff \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{2} \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$$

となる。これは、座標平面上の「円の方程式」（数学 II）による結果と一致する。

C. 直径が与えられた円のベクトル方程式（１） ～ 中心と半径に着目する

$\mathrm{A}(\vec{a})$、$\mathrm{B}(\vec{b})$ とし、線分 AB を直径とする円のベクトル方程式を考えよう。

この円は、中心が AB の中点 $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ であり、半径は AB の長さの半分 $\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\vec{b} - \vec{a}\right|$ である。よって、この円のベクトル方程式は $\left|\vec{p} - \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\vec{b} - \vec{a}\right|$ となる。

【例題 69】 始点を O とし、$\mathrm{A}(\vec{a})$、$\mathrm{B}(\vec{b})$ とする。以下の円のベクトル方程式の、中心と半径を答えよ。

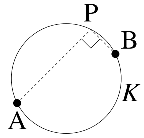
1. $\left|\vec{p} - \vec{b}\right| = 2$
2. $\left|2\vec{p} - 2\vec{a}\right| = 6$
3. $\left|\vec{p} - \vec{a}\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|$
4. $\left|2\vec{p} - \vec{a}\right| = 2$

【解答】

1. **中心 B、半径 2**
2. 両辺を 2 で割って $\left|\vec{p} - \vec{a}\right| = 3$ となるので、**中心 A、半径 3**
3. **中心は A、半径は $\left|\vec{b} - \vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$**
4. 両辺を 2 で割って $\left|\vec{p} - \dfrac{\vec{a}}{2}\right| = 1$ となるので、$\dfrac{\vec{a}}{2}$ の表わす点、つまり **OA の中点が半径、半径は 1**

D. 直径が与えられた円のベクトル方程式（2） ～ 円周角の定理の利用

線分 AB が直径である円 K のベクトル方程式は、次のようにして $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ とも求められる。



(1) 円 K 上にある点 P は、点 A、B に一致しないなら $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ のため、
$\mathrm{AP}\perp\mathrm{BP} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ である。

(2) P が点 A、B に一致する場合も、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{0}$ であるから、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ である。

よって、円 K 上にある点 P は必ず $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ であり、逆も正しい。位置ベクトルを用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0 \iff (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

【例題 70】 O を始点とし、A$(\vec{a})$、B$(\vec{b})$ としたとき、次の円のベクトル方程式を求めよ。

1. AB の中点 M について、AM を直径とする円　　2. OA の中点と B を直径の両端にする円

【解答】

1. M の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ であるから $(\vec{p}-\vec{a})\cdot\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0$

2. OA の中点の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}}{2}$ であるから $\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}}{2}\right)\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

E. 直径が与えられた円のベクトル方程式（3） ～ まとめ・平方完成

ここまでで学んだ次の 2 式は、2 次関数の平方完成のような変形によって一致することが確認できる。

線分 AB が直径である円のベクトル方程式

A$(\vec{a})$、B$(\vec{b})$ を直径の両端とする円のベクトル方程式について、以下の 2 式は一致する。

(I) 中心を AB の中点、半径を線分 AB の半分の長さと考えた式 $\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\vec{b}-\vec{a}\right|$

(II) 円周上の点 P は $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ を満たすことを利用した式 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

（証明）$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ を展開し平方完成すると

$$\left|\vec{p}\right|^2-\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\iff \left(\left|\vec{p}\right|^2-2\vec{p}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2\right)-\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\iff \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2-\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2\right)+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\iff \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2\right)=\frac{1}{4}\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2$$

$$\iff \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{b}-\vec{a}\right|$$

【㊗㊖ 71：平方完成】

定点 A、B に対し、ベクトル方程式 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}})=0$ が表す図形を答えなさい。

【解答】 A$(\vec{a})$、B$(\vec{b})$、C$(\vec{c})$、P$(\vec{p})$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}})=0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a}+\vec{p}-\vec{b})=0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{p}-\vec{a})\cdot(2\vec{p}-\vec{a}-\vec{b})=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\vec{p}\right|^2-\vec{a}\cdot(2\vec{p})-\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\vec{p}\right|^2-\vec{p}\cdot(2\vec{a}+\vec{a}+\vec{b})+\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left\{\left|\vec{p}\right|^2-\frac{1}{2}\vec{p}\cdot(3\vec{a}+\vec{b})\right\}+\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\left|\vec{p}\right|^2-2\vec{p}\cdot\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}+\left|\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right|^2-\left|\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right|^2\right)+\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\vec{p}-\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right|^2-\frac{\left|3\vec{a}+\vec{b}\right|^2}{8}+\frac{8\left|\vec{a}\right|^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}-\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right|^2+\frac{-\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2}{16}=0$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}-\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right|^2=\frac{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}-\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right|=\frac{\left|\vec{b}-\vec{a}\right|}{4}$$

$\dfrac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}$ が表わす、**線分 AB を 1 : 3 に内分する点を中心とし、半径は線分 AB の $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ の長さの円**を表わしている。

B 空間内のベクトル

空間座標について取り上げた後，ベクトルを空間内で考える．

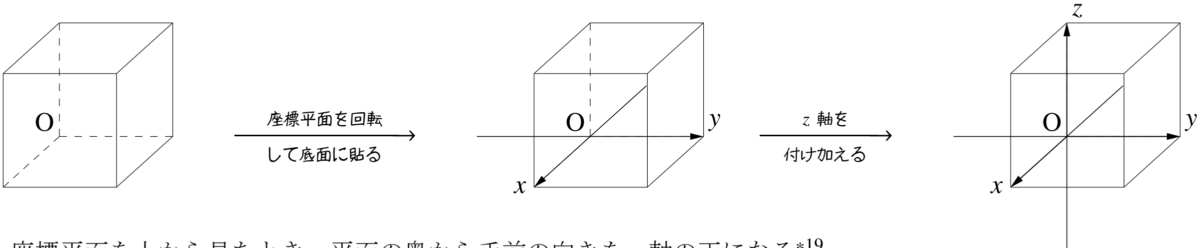
実際には，平面の場合とほぼ同じように考えればよい．その結果，これまででは扱うことができなかった空間内の図形問題を考えることもできるようになる．

1B.1 空間座標

1. 空間座標

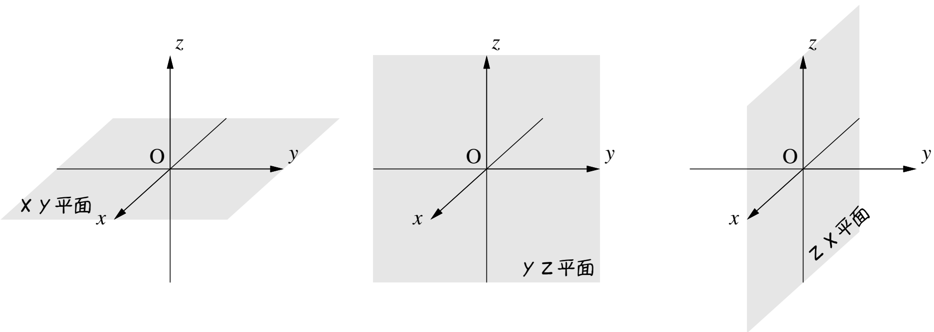
A. z 軸

これまでの xy 座標平面に垂直であり，原点を通る直線を z 軸と定義すると，座標空間を考えることができる．下のように，直方体の縦，横，高さにそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸を対応させると考えてもよい．



座標平面を上から見たとき，平面の奥から手前の向きを z 軸の正になる[*19]．

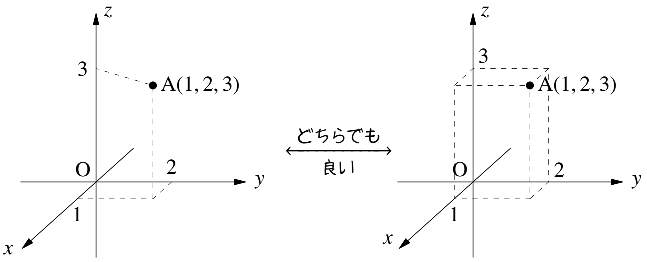
また，
x 軸と y 軸を含む平面を xy 平面，
y 軸と z 軸を含む平面を yz 平面，
z 軸と x 軸を含む平面を zx 平面
という．

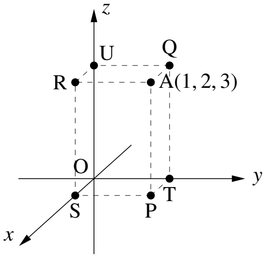


[*19] 右図において，高校数学では z 軸を必ず上向きに取る．これは，右手の親指を x 軸，人差し指を y 軸とした場合，中指を z 軸に定めた場合になる（ただし，指先を正の向きに取る）ため，**右手系** (right-handed) の座標空間という．z 軸を逆向きに取っても空間座標を考えられる（**左手系** (left-handed)）が，高校数学では用いられない．しばしば，コンピューターの画像処理などで用いられることがある．

B.　空間内の座標の図示

たとえば，空間座標内の A(1, 2, 3) は右のように表すことができる．直方体を用いても，用いなくても良い．



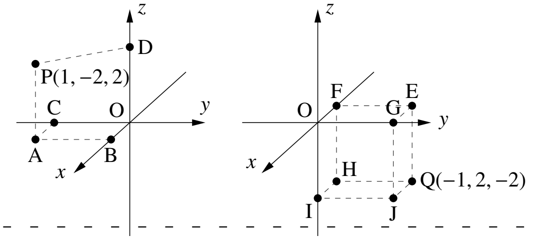


たとえば，左図においては次のようになっている．

- P(1, 2, 0)，Q(0, 2, 3)，R(1, 0, 3)，S(1, 0, 0)，T(0, 2, 0)，U(0, 0, 3)
- P は A から xy 平面に下ろした垂線の足，同様に，Q は yz 平面，R は zx 平面へ A から下ろした垂線の足である．
- A から x 軸，y 軸，z 軸へ下ろした垂線の足は，それぞれ S，T，U である．

【例題 72】　右の 2 つの座標空間について，

1. 点 A から J までの座標を答えなさい．
2. 点 A から J までのうち，次の上にある点を全て答えなさい．
   1) y 軸上　　2) xy 平面上　　3) zx 平面上



【解答】

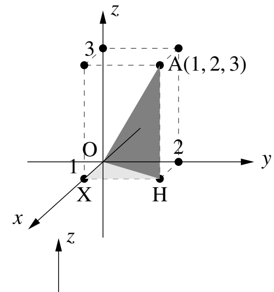
1. **A(1, −2, 0)**，**B(1, 0, 0)**，**C(0, −2, 0)**，**D(0, 0, 2)**，**E(−1, 2, 0)**，**F(−1, 0, 0)**，**G(0, 2, 0)**，**H(−1, 0, −2)**，**I(0, 0, −2)**，**J(0, 2, −2)**
2. 図を見ながら書き出していくと，次のようになる．
   1) **C**，**G**　　2) **A**，**B**，**C**，**E**，**F**，**G**　　3) **B**，**D**，**F**，**H**，**I**

◀ まず、P、Q から z 軸方向の点線をたどり、次に y 軸方向の点線をたどると、空間の感覚が掴みやすい。

◀ または，y 軸上の点は y 座標以外は 0 であり，xy 平面上の点は z 座標は 0 である，と考えてもよい．

C.　空間における距離の公式

原点 O と点 A(1, 2, 3) の距離は，直方体の対角線の長さを求めれば良い．



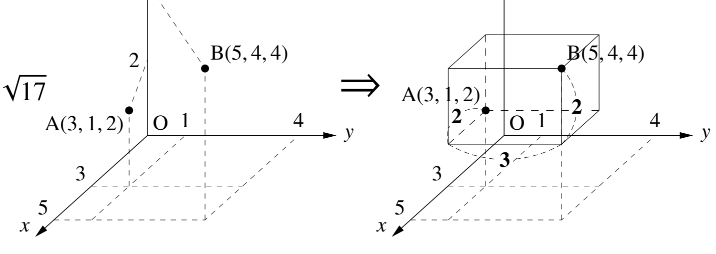
直角三角形 OAH について，三平方の定理より $OA^2 = OH^2 + HA^2$
直角三角形 OHX について，三平方の定理より $OH^2 = OX^2 + XH^2$

よって，$OA^2 = \left(OX^2 + XH^2\right) + HA^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ より $OA = \sqrt{14}$.

また，A(3, 1, 2)，B(5, 4, 4) について，2 点 A，B 間の距離は右奥のような直方体を考えて，

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (4-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{17}$$

と求められる．



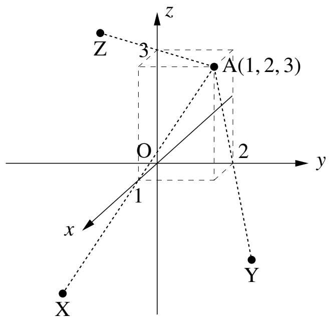
原点 O と A$(p,\ q,\ r)$ があるとき，$\text{OA} = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ である．
また，A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ があるとき，$\text{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ である．

【例題 73】 A$(1, -2, 4)$，B$(-2, 1, 5)$ とする．原点 O に対し，長さ OA，OB，AB をそれぞれ求めよ．

【解答】 $\text{OA} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \boldsymbol{\sqrt{21}}$，$\text{OB} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} = \boldsymbol{\sqrt{30}}$
$\text{AB} = \sqrt{(-2-1)^2 + \{1-(-2)\}^2 + (5-4)^2} = \sqrt{9+9+1} = \boldsymbol{\sqrt{19}}$

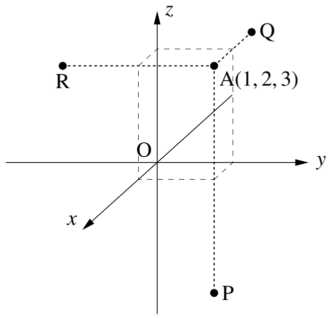
D. 座標空間内における対称移動

平面の場合と同じように，対称移動は，対称の中心となる成分をそのまま，他の符号を反転させれば良い．たとえば，軸に関する移動は次のようになる．



- x 軸について対称移動　A$(1,\ 2,\ 3)$ → X$(1, -2, -3)$　では，対称の中心となる x 座標はそのままにし，y, z 座標の符号を逆転，と同じ
- y 軸について対称移動　A$(1,\ 2,\ 3)$ → Y$(-1,\ 2, -3)$
- z 軸について対称移動　A$(1,\ 2,\ 3)$ → Z$(-1, -2,\ 3)$

同様に，平面に関する対称移動も次のようになる．



- xy 平面について対称移動　A$(1,\ 2,\ 3)$ → P$(1,\ 2, -3)$　では，対称の中心となる x, y 座標はそのままにし，z 座標のみ符号を逆転，と同じである．
- yz 平面について対称移動　A$(1,\ 2,\ 3)$ → Q$(-1,\ 2,\ 3)$
- zx 平面について対称移動　A$(1,\ 2,\ 3)$ → R$(1, -2,\ 3)$

原点についての対称移動はすべての符号を反転させ，
A$(1,\ 2,\ 3)$ → $(-1, -2, -3)$ となる．

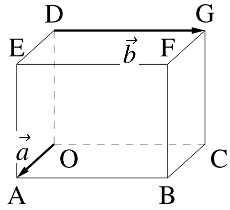
【例題 74】
1. A$(2,\ 3, -4)$ とする．x 軸について A と対称な点 L_x，y 軸について A と対称な点 L_y，z 軸について A と対称な点 L_z，xy 平面について A と対称な点 P_{xy}，yz 平面について A と対称な点 P_{yz}，zx 平面について A と対称な点 P_{zx} をそれぞれ答えなさい．
2. 以下の点について，x 軸対称な 2 点，yz 平面に対称な 2 点，原点対称な 2 点の組を，それぞれ全て答えよ．　A$(1,\ 2,\ 3)$，B$(1, -2,\ 3)$，C$(1,\ 2, -3)$，D$(-1, -2,\ 3)$，E$(-1,\ 2,\ 3)$，F$(-1, -2, -3)$

【解答】
1. $\mathbf{L}_x\mathbf{(2, -3,\ 4)}$，$\mathbf{L}_y\mathbf{(-2,\ 3,\ 4)}$，$\mathbf{L}_z\mathbf{(-2, -3, -4)}$
   $\mathbf{P}_{xy}\mathbf{(2,\ 3,\ 4)}$，$\mathbf{P}_{yz}\mathbf{(-2,\ 3, -4)}$，$\mathbf{P}_{zx}\mathbf{(2, -3, -4)}$
2. x 軸対称：**B と C**，**E と F**，yz 平面対称：**A と E**，**B と D**，
   原点対称：**A と F**，**C と D**

1B.2 空間内のベクトル

1. 空間におけるベクトルの基礎

A. ベクトルの定義



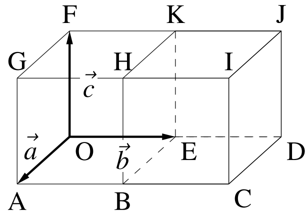
空間内であっても，向きのある線分をベクトルと言い[20]，始点，終点，等しいベクトル，逆ベクトル，大きさ，単位ベクトル，零ベクトルも平面のベクトルと同じように定義される．

また，空間内のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，定数倍 $k\vec{a}$，和 $\vec{a}+\vec{b}$，差 $\vec{a}-\vec{b}$ も，平面の場合と同様に考えることができる．

たとえば，右図の直方体において，以下はすべて正しい．

- $\vec{a}$ の始点 O，終点 A であるから $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であり，同様に $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ である．
- 直方体なので $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ などが成り立つ．
- $\mathrm{OA}=2$, $\mathrm{OC}=4$ ならば，$\left|\vec{a}\right|=2$ であり，$\pm\dfrac{1}{4}\vec{b}$ は単位ベクトルである．また，$\overrightarrow{\mathrm{CC}}=\vec{0}$ である．
- 和について $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ であり，差について $\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-(-\overrightarrow{\mathrm{CB}})=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である．

【例題 75】 右図は，1 辺の長さが 5 の立方体 OABE-FGHK，EBCD-KHIJ である．



1. $\vec{a}$ と等しいベクトル，$2\vec{b}$ と等しいベクトル，$\vec{c}$ の逆ベクトルをすべて選びなさい．

   $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GI}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DJ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{IC}}$

2. $\left|\vec{c}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{FJ}}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{FF}}\right|$ を答えなさい．
3. 以下の $\boxed{}$ に適する文字を答えなさい．

   i. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{\text{サ}}}$　ii. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DJ}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{\text{シ}}}$　iii. $\vec{c}+\overrightarrow{\mathrm{FK}}+\overrightarrow{\mathrm{KI}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\boxed{\text{ス}}}$

   iv. $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{DJ}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\boxed{\text{セ}}}$　v. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{\text{ソ}}}$　vi. $\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{JF}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\boxed{\text{タ}}}$

【解答】

1. $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{FG}}$，$2\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{GI}}$，$-\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{GA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{IC}}$.
2. 1 辺が 5 なので，$\left|\vec{c}\right|=\mathbf{5}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\mathbf{5}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{FJ}}\right|=\mathbf{10}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{FF}}\right|=\mathbf{0}$.
3. i. $\overrightarrow{\mathrm{A}\underline{\mathbf{H}}}_{(\text{サ})}$　ii. (与式) $=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DJ}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\underline{\mathbf{J}}}_{(\text{シ})}$

   iii. (与式) $=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{FK}}+\overrightarrow{\mathrm{KI}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\underline{\mathbf{I}}}_{(\text{ス})}$

   iv. (与式) $=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\underline{\mathbf{H}}}_{(\text{セ})}$

   v. (与式) $=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\underline{\mathbf{H}}}_{(\text{ソ})}$

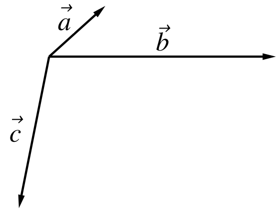
   vi. (与式) $=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-(-\overrightarrow{\mathrm{GI}})=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{GI}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\underline{\mathbf{I}}}_{(\text{タ})}$

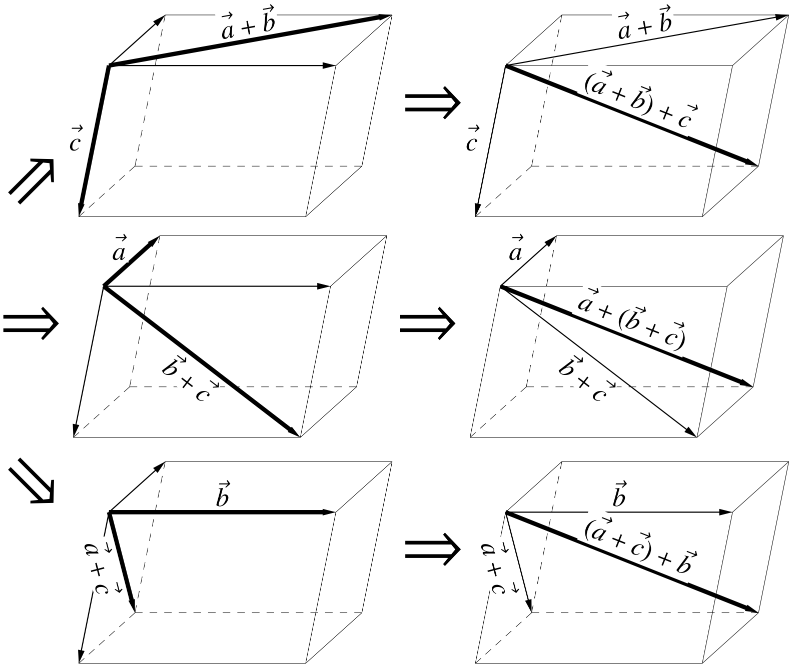
[20] 厳密には，有向線分の定義が向きのある線分であり，ベクトルはもっと広い概念である．

B. ベクトルの和の性質 ～ 3 つベクトルの和と平行六面体

平面の時のように，空間のベクトルの和も交換可能であり，結合法則も成り立つ．

たとえば，次の 3 つのベクトルについて





$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$,

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$,

$(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}$

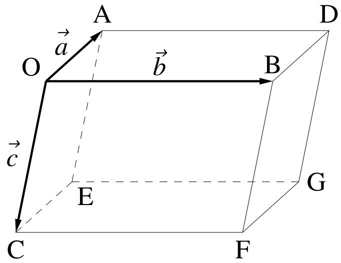
は全て同じベクトルを表し，これら全てが $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ である．

また，3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ に対して，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ から作られる立体 OADB-CEGF の対角線 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ がベクトルの和 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ になっている．

立体 OADB-CEGF の面はすべて平行四辺形であり

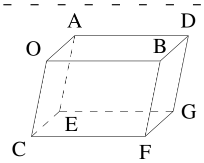
OA // BD // FG // CE, OB // AD // EG // CF

などが成り立っている．このような，向かい合う 2 辺の組はすべて平行である立体を**平行六面体** (parallelepiped) という．



【例題 76】 右図の平行六面体 OADB-CEGF において，次のベクトルを $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ．

1. $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$　2. $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$　3. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　4. $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$　5. $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　6. $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$



【解答】

1. $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{c}}$
3. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}}$
4. $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{-\vec{b}+\vec{c}}$
5. $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$
6. $\overrightarrow{\mathrm{EB}}=\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\overrightarrow{\mathrm{FB}}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}$

2. ベクトルの成分表示

A. ベクトルを空間座標内に配置する

空間内のベクトルにおける成分表示は，空間座標内になるため，成分が 3 つになる．

ベクトルの成分表示（空間）

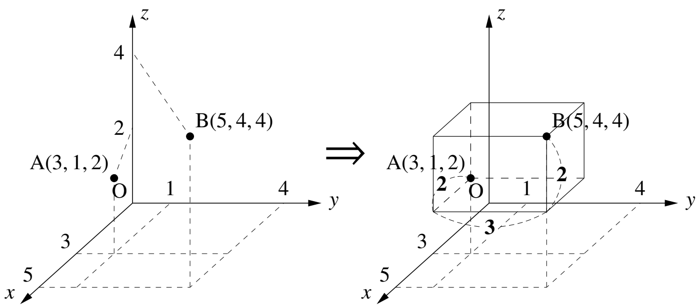
座標空間内のベクトル $\vec{a}$ が，始点から x 軸方向に p，y 軸方向に q，z 軸方向に r 進んで終点に一致するならば

$\vec{a}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ と表す[*21]．これを $\vec{a}$ の**成分表示** (component expression) といい，p は **x 成分**，q は **y 成分**，r は **z 成分**と言われる．

B. 「終点（まで）」引く「始点（から）」

平面の場合と同じように，座標空間上において A から B までの $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，「B（まで）」引く「A（から）」で求められる．右図のように A(3, 1, 2)，B(5, 4, 4) であれば

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}5\\4\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$$



となり，大きさは $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{2^2+3^2+2^2}=\sqrt{17}$ と分かる．

成分表示されたベクトルの大きさ（空間）

A(a_1, a_2, a_3)，B(b_1, b_2, b_3) ならば $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

【例題 77】

O を原点とし，A(1, 2, −1)，B(−2, 1, 3)，C(4, −2, 1) とする．

1. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を成分表示しなさい．
2. $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ を求めなさい．

【解答】

1. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{-4}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ より，

◀ 1. の結果を利用

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+4^2}=\boldsymbol{\sqrt{26}}$

[*21] これを縦ベクトル表示という．一方，$\vec{a}=(p,\ q,\ r)$ と表すこともあり，これを横ベクトル表示という．

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2+(-4)^2+2^2} = \mathbf{\sqrt{29}}$

また，$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ より，$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6^2+(-3)^2+(-2)^2} = \mathbf{7}$

C. 空間における成分表示されたベクトルの演算

平面の場合と同じように，空間内の成分表示された 2 つのベクトルの演算ができる.

成分表示されたベクトルの演算（空間）

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, 実数 k について，$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$, $k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$ である[*22].

【例題 78】 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき，以下のベクトルを答えよ.

1. $\vec{a}+\vec{b}$
2. $\vec{a}-\vec{b}$
3. $2\vec{a}+\vec{b}$
4. $3\vec{a}-2\vec{b}$
5. $\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$
6. $s\vec{a}+t\vec{b}$（s, t を用いて答えよ）
7. $2(\vec{a}+\vec{b})+3(\vec{a}-\vec{b})-5\vec{a}$
8. $3(\vec{a}-2\vec{b})-2(\vec{a}-3\vec{b})$

【解答】

1.（与式）$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix}$

2.（与式）$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

3.（与式）$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{10} \end{pmatrix}$

4.（与式）$= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{8} \end{pmatrix}$

5.（与式）$= \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{\frac{4}{5}} \\ \mathbf{\frac{8}{5}} \end{pmatrix}$

6.（与式）$= \begin{pmatrix} s \\ 2s \\ 4s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s-3t} \\ \mathbf{2s+t} \\ \mathbf{4s+2t} \end{pmatrix}$

7.（与式）$= -\vec{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

8.（与式）$= \vec{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$

【練習 79：平行四辺形～その２～】

座標平面上に A(1, 3, 2)，B(2, −1, −3)，C(4, 4, 1) があるとき

(1) 平行四辺形 ABCD となるよう D の座標を定めよ.

(2) 4 点 A，B，C，E を結んで平行四辺形ができるとき，E の座標をすべて求めよ.

---

*22 横ベクトルで書けば，$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ と実数 k について $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$，$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$，$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$ である.

【解答】

(1) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}$ であるから

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\8\\6\end{pmatrix}$$

よって，**D(3, 8, 6)**.

(2) 平行四辺形 ABCE になるのは，(1) より E(3, 8, 6).

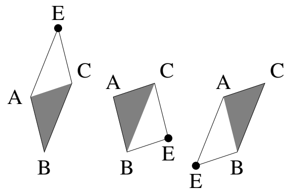
平行四辺形 ABEC になるとき，$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ より

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\-4\end{pmatrix}$$

平行四辺形 AEBC になるとき，$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\-4\end{pmatrix}$ より

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-5\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

よって，**E(3, 8, 6), (5, 0, −4), (−1. − 2, −2)**.



◀ △ABC の辺のどれか 1 つだけが，平行四辺形の対角線になるので，3 点しかない．

◀ $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$ から (1) を利用

空間内においては，座標空間内に図示することは困難であるが，上のように図の概略は書いた方がよい．

3. ベクトルの一次独立 〜 平行・同一平面上

A. 空間におけるベクトルの「平行」

空間においても，$\vec{a} = k\vec{b}$ となる実数 k が存在するとき，$\vec{a}, \vec{b}$ は**平行** (parallel) であると言い，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ と表される．ただし，$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, k \neq 0$ とする．

平面の場合（11）と異なり，空間内のベクトルにおいては，成分表示のあるなしに関わらず比例定数 k を用いて解くことが必要となる．

（例） $\vec{a} = \begin{pmatrix}-6\\-2\\3b\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\a-2\\b+1\end{pmatrix}$ が平行であるとき，定数 a, b の値を求めよ．

（解） $\vec{a} \parallel \vec{b}$ より，$\vec{a} = k\vec{b}$ となる定数 k が存在する．よって，$\begin{pmatrix}-6\\2\\-3b\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}3\\a-2\\b+1\end{pmatrix}$ であるから

x 成分より $-6 = 3k$，y 成分より $-2 = k(a-2)$，z 成分より $3b = k(b+1)$

である．x 成分より $k = -2$，y 成分より $2 = -2(a-2)$ であるから $a = 1$，z 成分より $-3b = -2(b+1)$ であるから $b = 2$．つまり，$(a, b) = (1, 2)$ である．

【例題 80】 $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\-2a\\-5b+2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2b\end{pmatrix}$ が平行であるとき，定数 a, b の値を求めよ．

【解答】 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}$ となる定数 k が存在する．

よって，$\begin{pmatrix}-3\\-2a\\-5b+2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\2b\end{pmatrix}$ であるから

$$-3=k,\quad -2a=-2k,\quad -5b+2=k(2b)$$

である．これを解いて，$k=-3$，$\boldsymbol{(a,\ b)=(-3,-2)}$ である．

ベクトルの平行（空間）

$k\neq 0$ を実数とする．2 つのベクトル $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ が平行であることは

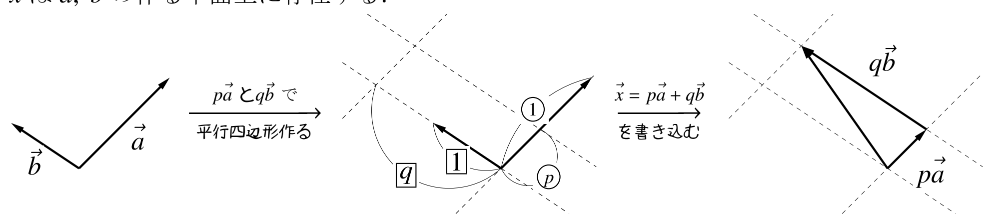
(1) $\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k が存在すること

と定義される．もし，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ と成分表示されていれば，次のようになる．

(2) $\vec{a}=k\vec{b}$，つまり，$a_1=kb_1$ かつ $a_2=kb_2$ かつ $a_3=kb_3$ となる実数 k が存在すること

B. 同一平面上にある 3 つのベクトル

$\vec{0}$ でない $\vec{a}$, $\vec{b}$ は平行でないとする．ここで，$\vec{x}=p\vec{a}+q\vec{b}$ となる実数 p, q が存在するとき，次のようにして，$\vec{x}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ の作る平面上に存在する．



このとき，$\vec{x}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ は**同一平面上**に存在できるという．

3 つのベクトルが同一平面上にあることは，後で詳しく取り上げる．

C. ベクトルの一次独立

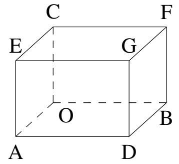
3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は $\vec{0}$ でないとする．

$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ となる実数 p, q が存在しないとき，3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は**一次独立** (linear independence) という．$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が一次独立である事は，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が同一平面上に存在できないことに等しい．

平面上のベクトルの場合，一次独立は「2 つのベクトルが平行でない」ことであった．空間の場合の一次独立は「3 つのベクトルが同一平面上に存在できない」ことであるが，この違いは，次元が 2 か 3 であるかに，本質的に依存している．

【例題 81】

右図について，次のベクトルの組のうち一次独立な組を全て答えなさい．



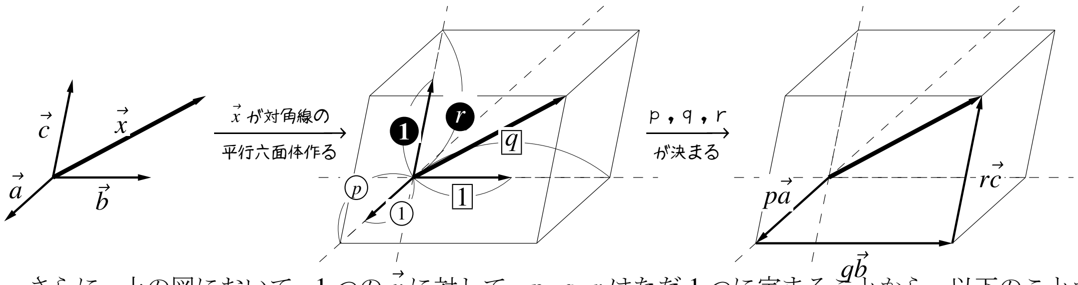
1. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$　　2. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}$　　3. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$
4. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{DG}$　　5. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{BE}$　　6. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}$

【解答】 2. は，3 つのベクトルが 1 つの平面 OABD 上に存在するため，6. は，3 つのベクトルが 1 つの平面 OAGF 上に存在するため，一次独立でない．一次独立なものは **1**，**3**，**4**，**5**.

◀ たとえば，3 は $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}$ が平面 OAEC 上に存在するが，$\overrightarrow{OF}$ は平面 OAEC 上に存在できない．そのため，一次独立である．

D.　空間内の「全ての」ベクトルを一意に表す 〜 係数比較

空間内に一次独立な $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ があるとき，空間内のどんなベクトル $\vec{x}$ にも，$\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ となる実数 p, q, r が存在することが，次のような図から分かる．



さらに，上の図において，1 つの $\vec{x}$ に対して，p, q, r はただ 1 つに定まることから，以下のことが分かる．

空間内のベクトルの係数比較

空間内の一次独立な $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ について，以下が成立する．

$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = p'\vec{a} + q'\vec{b} + r'\vec{c} \qquad p = p',\ q = q',\ r = r'$

この事実から，空間内の一次独立な 3 つのベクトルに対し，係数比較して方程式を立てられる．

（例） $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は空間内の一次独立なベクトルとする．$\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + r\vec{c}$，$\vec{y} = p\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ が平行であるとき，p, r を求めよ．

（解） $\vec{x} \parallel \vec{y}$ より，$\vec{x} = k\vec{y}$ となる実数 k が存在する．$k\vec{y} = k(p\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = kp\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$ より

$$\vec{a} - 2\vec{b} + r\vec{c} = kp\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$$

が成り立つ．$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから係数を比較して　　$\vec{a}$ の係数より $1 = kp$，$\vec{b}$ の係数より $-2 = k$，$\vec{c}$ の係数より $r = k$

である．これを解くと，$k = -2$ より，$r = -2$, $p = -\dfrac{1}{2}$ である．

【例題 82】 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は空間内の一次独立なベクトルとし，$\vec{x} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + r\vec{c}$，$\vec{y} = \vec{a} + q\vec{b} + \vec{c}$ とする．

1. $\vec{x} \parallel \vec{y}$ のとき，q, r を求めよ．　　2. $\left(\vec{x} + \vec{y}\right) \parallel \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ のとき，q, r を求めよ．

【解答】

1. $\vec{x} \parallel \vec{y}$ より，$\vec{x} = k\vec{y}$ となる実数 k が存在するので

$$2\vec{a} - 4\vec{b} + r\vec{c} = k\vec{a} + kq\vec{b} + k\vec{c}$$

が成り立つ．$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから係数を比較して

$\begin{cases} 2 = k \\ -4 = kq \\ r = k \end{cases}$ である．これを解くと，$\boldsymbol{q = -2,\ r = 2}$ である．

◀ $k = 2$ を利用

2. $\left(\vec{x} + \vec{y}\right) \parallel \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ より，$\vec{x} + \vec{y} = k(\vec{a} + \vec{b})$ となる実数 k が存在するので

$$\begin{aligned} & (2\vec{a} - 4\vec{b} + r\vec{c}) + (\vec{a} + q\vec{b} + \vec{c}) &= k(\vec{a} + \vec{b}) \\ \Leftrightarrow \quad & 3\vec{a} + (-4 + q)\vec{b} + (r + 1)\vec{c} &= k\vec{a} + k\vec{b} \end{aligned}$$

◀ 右辺の $\vec{c}$ の係数は 0

が成り立つ．$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから係数を比較して

$\begin{cases} 3 = k \\ -4 + q = k \\ r + 1 = 0 \end{cases}$ である．これを解くと，$\boldsymbol{q = 7,\ r = -1}$ である．

◀ $k = 3$ を利用

E. 成分表示を用いたベクトルの分解

平面の場合と同じように（p.12），成分表示を用いると，どんな $\vec{x}$ に対しても $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ となる p, q, r を計算で求められる．

たとえば，$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ について $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ とおくと，

$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \begin{pmatrix} 2p + r \\ -q + 2r \\ p - 3q + r \end{pmatrix}$ であり，これが $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ と等しいので，連立方程式 $\begin{cases} 2p + r = 3 \\ -q + 2r = 0 \\ p - 3q + r = -4 \end{cases}$ が成り立つ．これを解いて $p = 1,\ q = 2,\ r = 1$ を得るから，$\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ であると分かる．

【例題 83】

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ.
2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ について, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ.

【解答】 いずれも $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ とおく．

1. $p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \begin{pmatrix} q + r \\ -2p - 2r \\ p + q + r \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ より，$\begin{cases} q + r = 0 \\ -2p - 2r = -4 \\ p + q + r = 1 \end{cases}$ が成り立つ．これを解いて $(p, q, r) = (1, -1, 1)$ であるから，$\boldsymbol{\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}$.
2. $p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \begin{pmatrix} p + 2q + r \\ -2p - q \\ 3p + r \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ より，$\begin{cases} p + 2q + r = -1 \\ -2p - q = -4 \\ 3p + r = 3 \end{cases}$ が成り立つ．これを解いて $(p, q, r) = (2, 0, -3)$ であるから，$\boldsymbol{\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{c}}$.

1B.3 空間における内積

1. ベクトルの内積の定義

内積の定義は，平面の場合も空間の場合もほとんど変わらず，以下のようになる．

ベクトルの内積（空間）

2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，次の 2 つの値は一致し，**内積** (inner product) と呼ばれる．

(1) （成分表示使わない）$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

ただし，$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角は平面と同じように，始点を揃えたときにできる角のことである．

(2) （成分表示使う）$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき，$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

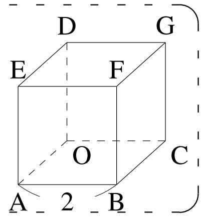
この内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表される．つまり，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ である．

【例題 84】 右図のように，1 辺が 2 の立方体がある．

内積の定義 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を用いて，次の内積の値を求めよ．

1. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　3. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}$　4. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$

5. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{GC}$　6. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CF}$　7. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BG}$　8. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$



【解答】

1. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{4}$
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{4}$
3. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathbf{-4}$

◀ $\overrightarrow{OA}$ を始点 A になるよう平行移動するとよい．または，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$ と考えてもよい．

4. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = 2\cdot 2\cdot\cos 90^\circ = \mathbf{0}$
5. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{GC} = 2\cdot 2\cdot\cos 90^\circ = \mathbf{0}$
6. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CF} = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{4}$
7. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BG} = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathbf{-4}$
8. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 60^\circ = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \mathbf{4}$

◀ △DAC は正三角形になる

【例題 85】 内積の定義 (2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ を用いて，次の内積を計算しなさい．

1. $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ のときの内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$
2. $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}$ のときの内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$
3. $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ のときの内積 $\vec{x}\cdot\vec{y}$
4. $\vec{p}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\b\\c\end{pmatrix}$ のときの内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$

【解答】

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4+1\cdot(-1)+(-2)\cdot2=\mathbf{7}$
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3)\cdot0+2\cdot1+0\cdot6=\mathbf{2}$
3. $\vec{x}\cdot\vec{y}=0+0+0=\mathbf{0}$
4. $\vec{p}\cdot\vec{q}=0+0+0=\mathbf{0}$

2. ベクトルの内積の利用

A. ベクトルの垂直条件・なす角の計算

$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}, \vec{b}$ は**垂直** (perpendicular) であると言い，$\vec{a}\perp\vec{b}$ と表される．

ベクトルの垂直

$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について， $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ が成り立つ．

【例題 86】

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\3\\x\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\4\\-1\end{pmatrix}$ が $\vec{a}\perp\vec{b}$ を満たすとき，x の値を求めよ．

【解答】 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow-2x+12-x=0\Leftrightarrow12=3x \qquad \therefore \boldsymbol{x=4}$

【練習 87：ベクトルの垂直条件】

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ とし，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ とする．

(1) $\vec{p}$ を t を用いて成分表示しなさい． (2) $\vec{a}\perp\vec{p}$ となる t を求めなさい．

【解答】

(1) $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1-t}\\\mathbf{2+t}\\\mathbf{3+3t}\end{pmatrix}$

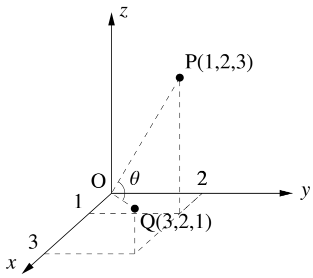
(2) $\vec{a}\cdot\vec{p}=0 \Leftrightarrow 1(1-t)+2(2+t)+3(3+3t)=0$

$\Leftrightarrow 14+10t=0 \qquad \therefore \boldsymbol{t=-\frac{7}{5}}$

◀ この式は，A(1, 2, 3) を通り $\vec{d}$ を方向ベクトルとした直線の，ベクトル方程式となっている．

B. 空間内のベクトルのなす角

2 つのベクトルのなす角も，平面の場合と同じように求められる．右図の $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ について
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3+4+3=10$



である．一方，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}\cdot\cos\theta=14\cos\theta$$

である．こうして，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を 2 通りで求められたので

$$14\cos\theta=10 \iff \cos\theta=\frac{5}{7}$$

と分かる．このように，内積を用いてベクトルのなす角を計算できる．

【例題 88】 以下のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ について，$\cos\theta$ をそれぞれ求めよ．また，θ が求められる場合は θ の値も求めよ．

1. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$
2. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
3. $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$

【解答】

1. 成分を用いて $\vec{a}\cdot\vec{b}=3-2+6=7$.
   一方，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{14}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{14}\sqrt{14}\cos\theta=14\cos\theta$. よって
   $$14\cos\theta=7 \iff \boldsymbol{\cos\theta=\frac{1}{2}}\text{ であり，}\boldsymbol{\theta=60^\circ}$$
2. 成分を用いて $\vec{a}\cdot\vec{b}=1+0+0=1$.
   一方，$\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot\sqrt{3}\cos\theta$.
   よって
   $$\sqrt{3}\cos\theta=1 \iff \boldsymbol{\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
3. 成分を用いて $\vec{a}\cdot\vec{b}=3-8-10=-15$.
   一方，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=3$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5\sqrt{2}\cdot3\cos\theta=15\sqrt{2}\cos\theta$. よって
   $$15\sqrt{2}\cos\theta=-15 \iff \boldsymbol{\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}}\text{ であり，}\boldsymbol{\theta=135^\circ}$$

◀ これは，x 軸と $\vec{b}$ のなす角を計算していることになる．

2 つのベクトルのなす角（空間）

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ のなす角 θ は，内積の定義 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ に，$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$,
$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$ を代入すれば求められる．

【練習 89：2 つのベクトルに直交するベクトル】

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ の両方に直交し，大きさ $\sqrt{14}$ のベクトル $\vec{p}$ を求めよ．

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ の両方に直交する単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ．

【解答】

(1) $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおく．$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ と直交するので

$$\vec{a}\cdot\vec{p}=0 \iff 2x-z=0 \iff z=2x \quad \cdots\cdots ①$$

$$\vec{b}\cdot\vec{p}=0 \iff 3x+y=0 \iff y=-3x \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，$\left|\vec{p}\right|=\sqrt{14}$ であるから

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{14} \iff x^2+y^2+z^2=14 \quad \cdots\cdots ③$$

①，②を③に代入して

$$x^2+(-3x)^2+(2x)^2=14 \iff 14x^2=14$$

よって，$x^2=1$ となるから $x=\pm1$．$x=1,-1$ を $y=-3x$, $z=2x$ に代入して，$\boldsymbol{\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}}$.

◀ ①，②

(2) $\vec{e}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおく．$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ と直交するので

$$\vec{a}\cdot\vec{e}=0 \iff x+3y-z=0 \quad \cdots\cdots ④$$

$$\vec{b}\cdot\vec{e}=0 \iff x-2y+0=0 \iff x=2y \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤を④に代入して $2y+3y-z=0 \iff z=5y$ $\cdots\cdots$ ⑥.

一方，$\left|\vec{e}\right|=1$ であるから

◀ 単位ベクトルとは，長さ 1 のベクトルのこと

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1 \iff x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑤，⑥を⑦に代入して

$$(2y)^2+y^2+(5y)^2=1 \iff 30y^2=1$$

よって，$y^2=\dfrac{1}{30}$ となるから $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

$y=\dfrac{1}{\sqrt{30}},-\dfrac{1}{\sqrt{30}}$ を $x=2y$, $z=5y$ に代入して，$\boldsymbol{\vec{e}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{30}}\\\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{5}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{30}}\\-\frac{1}{\sqrt{30}}\\-\frac{5}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}}$.

◀ ⑤，⑥

C. 結合法則・交換法則・分配法則〜内積と掛け算の類似

平面ベクトルの場合と同じように，空間のベクトルでも，内積では結合法則・交換法則・分配法則が成り立ち，ベクトル $\vec{a}$ の 2 乗は存在しない．

内積の結合法則・交換法則・分配法則・同じベクトルの内積

どんなベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ についても，次の等式が成り立つ．

(I) **（定数倍）** 実数 k について，$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\quad \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(II) **（交換法則）** $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

(III) **（分配法則）** $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\quad (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(IV) **（同じベクトルの内積）** どんなベクトル $\vec{a}$ についても，$\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$ になる．

これらの性質により，空間のベクトルの内積も，文字式の展開と類似した等式が成り立つ．また，3 つのベクトルについて，次の等式も成り立つ．

3 つのベクトルの和の大きさ 2 乗

任意の $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して等式 $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$ が成り立つ．

展開公式 $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ に類似した等式である．証明は，下の例題を参照のこと．

【例題 90】 以下の，等式変形について，$\boxed{}$ にあてはまるものを，以下の①〜④で答えよ（同じ番号を繰り返し選んでもよい）．

① **（定数倍）** $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(k\vec{b})$ ② **（交換法則）** $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

③ **（分配法則）** $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ ④ $\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2 &= (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) && \leftarrow \boxed{\text{ア}}\text{を用いた}\\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c} && \leftarrow \boxed{\text{イ}}\text{を用いた}\\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c} && \leftarrow \boxed{\text{ウ}}\text{を用いた}\\
&= \left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a} && \leftarrow \boxed{\text{エ}}\text{を用いた}
\end{aligned}
$$

【解答】 ア：④，イ：③，ウ：②，エ：④

【例題 91】 $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3}$, $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{5}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = 2$, $\vec{c}\cdot\vec{a} = -1$ とするとき，以下の値を計算しなさい．

1. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$
2. $(\vec{a}-3\vec{b})\cdot\vec{a}$
3. $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2$
4. $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2$

【解答】

1. （与式）$= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} = 1-1 = \mathbf{0}$ ◀ $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = -1$
2. （与式）$= \left|\vec{a}\right|^2-3\vec{b}\cdot\vec{a} = 2-3 = \mathbf{-1}$
3. （与式）$= \left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2 = 2+4\cdot1+4\cdot3 = \mathbf{18}$ ◀ つまり $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right| = 3\sqrt{2}$ である

4.（与式）$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$= 2 + 3 + 5 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot(-1) = \mathbf{14}$

◀ つまり $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{14}$ である

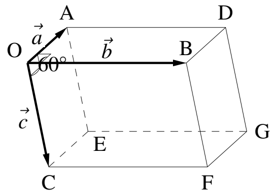
【練習 92：平行六面体の対角線の長さ】

右の平行六面体 OADB-CEGF において，OA = 3，OB = 6，OC = 4，$\angle$AOB = $\angle$AOC = 90°，$\angle$BOC = 60° とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{FD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|$ を求めよ．



【解答】

(1) $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$，$\vec{b}\cdot\vec{c} = 6\cdot 4\cos 60^\circ = \mathbf{12}$，$\boldsymbol{\vec{c}\cdot\vec{a} = 0}$

◀ 垂直ならば内積 0

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FD}} = \overrightarrow{\mathrm{FG}} + \overrightarrow{\mathrm{GD}} = \boldsymbol{\vec{a} - \vec{c}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} = \boldsymbol{-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{FD}}| = |\vec{a} - \vec{c}|$ であり，

$$|\vec{a} - \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = 3^2 - 0 + 4^2 = 25$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{FD}}| > 0$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{FD}}| = \sqrt{25} = \mathbf{5}$．また

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2 &= |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= 3^2 + 6^2 + 4^2 + 0 + 2\cdot 12 + 0 = 85\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}| > 0$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}| = \boldsymbol{\sqrt{85}}$．同様に

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|^2 &= |-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= 3^2 + 6^2 + 4^2 - 0 + 2\cdot 12 - 0 = 85\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AF}}| > 0$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AF}}| = \boldsymbol{\sqrt{85}}$．

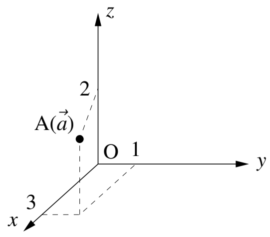
1B.4 空間における位置ベクトル

1. 座標と位置ベクトル

A. 座標と位置ベクトルの同一視

始点を固定して考えられたベクトルを**位置ベクトル** (position vector) と言う（p.22）[*23]ことは，空間のベクトルでも同じであり，次の 2 つの文章は同じ意味である．

同じ意味 $\begin{cases} \cdot\ \text{O を始点とした位置ベクトルを考え，} \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c} \text{ とする} \\ \cdot\ \text{O を始点とし，} \mathrm{A}(\vec{a}),\ \mathrm{B}(\vec{b}),\ \mathrm{C}(\vec{c}) \text{ とする} \end{cases}$ ←簡略化された



また，平面の場合と同じように，座標空間内で，位置ベクトルの始点として原点 (0, 0, 0) を固定すると，「位置ベクトル」と「座標」は一致する．

たとえば，原点を始点とした右図の A($\vec{a}$) について，A(3, 1, 2) であるが，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるから，「$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である」と言ってもよい．

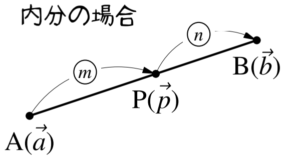
平面上の位置ベクトルで成り立っていた，以下の公式もそのまま成り立つ．

位置ベクトルの公式

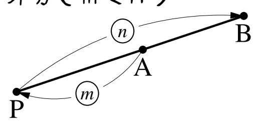
O を始点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) とするとき，以下が成り立つ．

1. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ である（p.56, 23）．　←「まで」引く「から」
2. 線分 AB を $m : n$ に内分する点 P($\vec{p}$) について $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$（p.24）
3. 線分 AB を $m : n$ に外分する点 P($\vec{p}$) は，AP : PB を $m : (-n)$ または $(-m) : n$ に内分する点 P を考えることと同じことであり，$\vec{p} = \dfrac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$ または $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} - m\vec{b}}{-m+n}$ である（p.25）．
4. △ABC の重心 G($\vec{g}$) は $\vec{g} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ となる（p.26）．

内分の場合

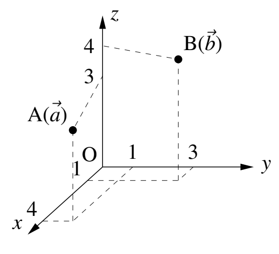


外分（m＜n）



【例題 93】 $\boxed{}$ に適当な文字・数字を入れなさい．

1. A を始点として D($\vec{d}$)，F($\vec{f}$) とすると，$\vec{d} = \overrightarrow{\boxed{ア}\boxed{イ}}$，$\vec{f} = \overrightarrow{\boxed{ウ}\boxed{エ}}$ である．
2. 右の座標空間内で，原点 O を始点として A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とする．
$\vec{a} = \begin{pmatrix} \boxed{オ} \\ \boxed{カ} \\ \boxed{キ} \end{pmatrix}$ であり，$\vec{b} = \begin{pmatrix} \boxed{ク} \\ \boxed{ケ} \\ \boxed{コ} \end{pmatrix}$ である．



1. $\vec{d} = \underline{\overrightarrow{\mathbf{AD}}}_{アイ}$，$\vec{f} = \underline{\overrightarrow{\mathbf{AF}}}_{ウエ}$　　2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$ ─オカキ，$\vec{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$ ─クケコ

[*23] 位置ベクトルにおいて，始点として固定された点は**基点**とも言う．

【練習 94：位置ベクトルの公式〜その１〜】

O を始点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，X($\vec{x}$)，Y($\vec{y}$) とする．$\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$，$\vec{y}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ であるとき

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ のとき，$\vec{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ を成分表示しなさい．

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boldsymbol{\vec{c}-\vec{a}}$,　　$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\boldsymbol{2\vec{b}+\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{XY}}=(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-2\vec{a}-\vec{b}}$

(2) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{XY}}=-2\vec{a}-\vec{b}=-2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{4}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$

【練習 95：位置ベクトルの公式〜その２〜】

O を始点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) とする．

(1) 線分 AB を 1 : 3 に内分する点 E($\vec{e}$)，2 : 5 に内分する点 F($\vec{f}$) について，$\vec{e}$, $\vec{f}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．

(2) 線分 AC を 7 : 3 に外分する点 P($\vec{p}$)，2 : 3 に外分する点 Q($\vec{q}$) について，$\vec{p}$, $\vec{q}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．

(3) △EPC の重心 G($\vec{g}$) を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．

(4) 始点 O が (0, 0) であり，A(1, 2, 1)，B(−2, 1, 0)，C(0, 1, 1) であるとき，

$\vec{a}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{ア}}\\\boxed{\text{イ}}\\\boxed{\text{ウ}}\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{エ}}\\\boxed{\text{オ}}\\\boxed{\text{カ}}\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{キ}}\\\boxed{\text{ク}}\\\boxed{\text{ケ}}\end{pmatrix}$ を (1)，(3) の結果に代入して $\vec{e}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{コ}}\\\boxed{\text{サ}}\\\boxed{\text{シ}}\end{pmatrix}$, $\vec{g}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{ス}}\\\boxed{\text{セ}}\\\boxed{\text{ソ}}\end{pmatrix}$ を得る．

よって，E，G の座標は E($\boxed{\text{コ}}$, $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$)，G($\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{ソ}}$) となる．

【解答】

(1) $\vec{e}=\dfrac{3\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}}{1+3}=\boldsymbol{\dfrac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}}$，$\vec{f}=\dfrac{5\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{2+5}=\boldsymbol{\dfrac{5\vec{a}+2\vec{b}}{7}}$

(2) 7 : (−3) に内分すると考え $\vec{p}=\dfrac{(-3)\cdot\vec{a}+7\cdot\vec{c}}{7+(-3)}=\boldsymbol{\dfrac{-3\vec{a}+7\vec{c}}{4}}$,

(−2) : 3 に内分すると考え $\vec{q}=\dfrac{3\cdot\vec{a}+(-2)\cdot\vec{c}}{-2+3}=\boldsymbol{3\vec{a}-2\vec{c}}$

(3) (1) の結果から

$$\vec{g}=\frac{\vec{e}+\vec{p}+\vec{c}}{3}=\frac{\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}+\frac{-3\vec{a}+7\vec{c}}{4}+\vec{c}}{3}=\frac{\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{11}{4}\vec{c}}{3}=\boldsymbol{\frac{\vec{b}+11\vec{c}}{12}}$$

(4) $\vec{a}=\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}}_{\text{アイウ}}$, $\vec{b}=\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}}_{\text{エオカ}}$, $\vec{c}=\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}}_{\text{キクケ}}$ であり，これを代入して

$$\vec{e}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}=\frac{1}{4}\left\{3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{\frac{1}{4}}\\\mathbf{\frac{7}{4}}\\\mathbf{\frac{3}{4}}\end{pmatrix}}_{\text{コサシ}}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{b} + 11\vec{c}}{12} = \frac{1}{12}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2\\12\\11\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{-\frac{1}{6}}\\ \mathbf{1}\\ \boldsymbol{\frac{11}{12}}\end{pmatrix}}_{\text{スセソ}}$$

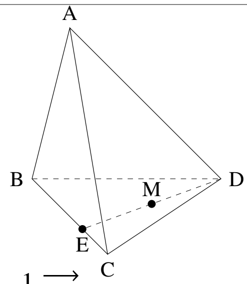
よって，$E\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$，$G\left(-\frac{1}{6}, 1, \frac{11}{12}\right)$ である．

2. 位置ベクトルと幾何ベクトルとの関係

始点をそろえれば，幾何ベクトルであっても位置ベクトルの公式が使えることは，時に図を描くのが困難な空間において，いっそう重要になる．

A. 幾何ベクトルにおいて，内分・外分の公式を用いる

（例） 四面体 ABCD において，線分 BC を 2 : 1 に内分する点を E，線分 DE の中点を M，△ACM の重心を G とするとき，$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ で表せ．



【解】 A を始点として内分の公式より

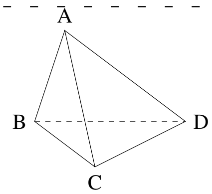
$$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$ ←始点揃えればOK

さらに，$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

また，$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{0} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

【例題 96】 四面体 ABCD において，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を E，辺 DE の中点を M，△ABM の重心を G とする．

1. $\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ で表せ．
2. 辺 BM を 5 : 1 に外分する点を P とする $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ で表せ．



【解答】

1. A を始点として揃え，内分や重心の公式を用いると

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{3+2} = \boldsymbol{\frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{5}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\vec{0} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{10}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}}\end{aligned}$$

2. 5 : (−1) に内分すると考えて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{5+(-1)}\\ &= \frac{1}{4}\left\{-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AD}}}\end{aligned}$$

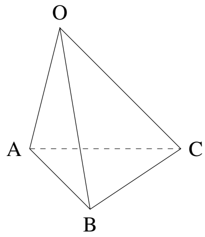
◀ 結果的に，辺 CD を 5:3 に内分した点が P になっていると分かる．

B. 幾何ベクトルの問題を位置ベクトルで考える

始点が揃ってないときは「ベクトルの差 〜 位置ベクトルへの変換」を用いれば良い．

（例） 四面体 OABC において，線分 AB を 2 : 1 に内分する点を L，線分 OC の中点を M とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ．

【解】 O を始点として内分の公式より $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$.



【例題 97】 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ である四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 AB，BC を 3 : 1 に内分する点をそれぞれ E，F とする．

1. $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．　2. △DEF の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

【解答】

1. $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}$ であるから

◀ O を始点に内分の公式を用いた

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}-\vec{c}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}-\vec{c}}$$

◀ $\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}}{4}$ と答えてもよい．以下も同様である．

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}-\frac{1}{2}\vec{a}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}}$$

2.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}+\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

◀ O を始点に重心の公式を用いた

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}-\vec{a}=\boldsymbol{-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}}$.

1B.5 空間におけるベクトル方程式

1. 空間における直線のベクトル方程式

A. 空間における直線の方程式

以下の内容は，平面のベクトル方程式 (p.42) で学んだことが，空間においてもそのまま成り立つ．

直線のベクトル方程式（空間）

(1) $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り $\vec{d}$ に平行な直線 l のベクトル方程式は $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$（$t$ は実数）である．
$\vec{d}$ を**方向ベクトル**である．　↑（Ｐの座標）＝（Ａの座標）＋ $\vec{d}$ の定数倍

(2) 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線 AB 上のベクトル方程式は $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$（$t$ は実数）である．
この式は $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ $(s + t = 1)$ とも表せる．　↑ＡＰ：ＰＢ＝ｔ：（１－ｔ）の内分点
また，$0 \leqq t \leqq 1$（または $0 \leqq s,\ 0 \leqq t$）に制限すると，これは線分 AB を表わす．

いずれの場合も t を**媒介変数** (parameter) という．

B. 空間における直線の方程式の成分表示

たとえば，A(3, 4, −2) を通り $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に平行な直線 l の方程式は，$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ を利用して

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ 4+2t \\ -2+3t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{とおくと} \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

となる．これは，直線 l の成分表示と呼ばれる．

上の事実から，「P が直線 l 上にある」ことを「$\mathrm{P}(3-t,\ 4+2t, -2+3t)$ と表せる」と言い換えても良い．

また，A(3, 4, −2)，B(−1, 3, 1) を通る直線の成分表示は，$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{d}$ を利用して以下となる．

$$\vec{p} = (1-t)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3t \\ 4-4t \\ -2+2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4t \\ 4-t \\ -2+3t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{とおくと} \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 4 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

…… 平面の場合，成分表示から t を消去して $x,\ y$ の 1 つの方程式を求めることができた．空間の場合，たとえば上の l から t を消去すると，$3 - x = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ のようになり，1 つの等式にまとめることができない．

【例題 98】 A(2, 1, −3), B(−2, 1, 3) とする．次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて答えよ．

1. A を通り $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ に平行な直線 l　　2. 直線 AB　　3. 原点 O と B を通る直線

【解答】

1. $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ に $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ を代入して

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3t\\1+2t\\-3+t\end{pmatrix}$$

よって，l の方程式は $\begin{cases}\boldsymbol{x=2+3t}\\ \boldsymbol{y=1+2t}\\ \boldsymbol{z=-3+t}\end{cases}$ （t は実数）である．

2. $\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ に $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ を代入して

$$\vec{p}=(1-t)\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-4t\\1\\-3+6t\end{pmatrix}$$

よって，直線 AB の方程式は $\begin{cases}\boldsymbol{x=2-4t}\\ \boldsymbol{y=1}\\ \boldsymbol{z=-3+6t}\end{cases}$ （t は実数）である．

3. $\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ に $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ を代入して

$$\vec{p}=(1-t)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2t\\t\\3t\end{pmatrix}\quad\therefore\quad\begin{cases}\boldsymbol{x=-2t}\\ \boldsymbol{y=t}\\ \boldsymbol{z=3t}\end{cases}$$ （t は実数）

◀ 直線 AB の A を原点におきかえればよい

【練習 99：空間内の直線に下ろした垂線の足】

A(1, 2, −1) を通り $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に平行な直線 l，B(2, 0, −1) を通り $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ に平行な直線 m がある．

(1) l 上の点 P を媒介変数表示で表わせ．

(2) BP と直線 l が垂直であるとき，P の座標を求めよ．

(3) A から直線 m へ下ろした垂線の足を求めよ．

【解答】

(1) P(x, y, z) とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\vec{d_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1+t} \\ \mathbf{2-3t} \\ \mathbf{-1+2t} \end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \vec{d_1} = 0$ であればよい．$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-3t \\ -1+2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+t \\ 2-3t \\ 2t \end{pmatrix}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \vec{d_1} = 0 \Leftrightarrow (-1+t) \cdot 1 + (2-3t)(-3) + 2t \cdot 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow -1 + t - 6 + 9t + 4t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

よって，(1) の結果に代入して $\mathbf{P\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)}$．

(3) 直線 m 上の点を Q とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \cdot \vec{d_2} = 0$ であるような Q を求めればよい．Q の座標 (x, y, z) について，直線 m の媒介変数表示より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2s \\ s \\ -1-3s \end{pmatrix} \cdots\cdots ①$$ とおけるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \begin{pmatrix} 2+2s \\ s \\ -1-3s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2s \\ s-2 \\ -3s \end{pmatrix}$$ となり

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \cdot \vec{d_2} = 0 \Leftrightarrow (1+2s) \cdot 2 + (s-2) \cdot 1 + (-3s) \cdot (-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 + 4s + s - 2 + 9s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = 0$$

①に代入して $\mathbf{Q(2,\ 0,\ -1)}$．

◀つまり、Q と B が一致して AB ⊥ m

2. 空間における平面の方程式

A. 平面 $z = c$，$y = b$，$x = a$

たとえば，xy 平面上の点は z 座標が必ず 0 であり，逆に，z 座標が 0 である点は必ず xy 平面上にある．このため，xy 平面は「平面 $z = 0$」と表す事もできる．

また，z 座標が 2 である点を集めると，xy 平面に平行な平面になるので，これは「平面 $z = 2$」と表わす．

平面 $z = c$，$y = b$，$x = a$

xy 平面に平行で z 座標が c の平面を「平面 $z = c$」，zx 平面に平行で y 座標が b の平面を「平面 $y = b$」，yz 平面に平行で x 座標が a の平面を「平面 $x = a$」と表わす．

たとえば yz 平面に平行な面は，y, z 軸方向に広がり，広がっていない x 座標だけが定まっている．

【例題 100】 A(2, 3, −1) を通る，以下の平面を表す式を答えよ．

1. xy 平面に平行な平面　　2. yz 平面に平行な平面　　3. zx 平面に平行な平面

【解答】

1. $z=-1$　　2. $x=2$　　3. $y=3$

B. 発展 空間における法線ベクトル

平面において，法線ベクトル $\vec{n}$ をもつ直線はすべて同じ向きであった．

空間の場合，法線ベクトル $\vec{n}$ をもつ直線は様々な向きをもつが，それらはすべて，ある平面にすべて平行である．このため，$\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り $\vec{n}$ に垂直な図形は平面を表わす．

一般に，$\vec{n}$ が平面 α に垂直なとき，$\vec{n}$ を平面 α の法線ベクトルという．

C. 発展 平面の方程式

A(2, 1, −3) とする．空間内の点 P が，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$ が垂直になるよう動くとき，P は A を通り $\vec{n}$ に垂直な平面上を動く．そこで P(x, y, z) とおくと，次のようにして x, y, z の満たす等式が得られる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0\ \Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z+3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow(x-2)+4(y-1)-2(z+3)=0\Leftrightarrow x+4y-2z=12$$

これが，A を通り $\vec{n}$ に垂直な平面の方程式になっている．また，x, y, z の係数 1, 4, −2 が，この平面の法線ベクトル $\vec{n}$ の成分になっている．

一般に，以下の事実が成り立つ．

平面の方程式

座標空間における平面の方程式は，1 次式 $ax+by+cz=d$ で表わされる（ただし，$(a,\ b,\ c)\neq(0,\ 0,\ 0)$ とする）．また，係数を各成分に書き並べたベクトル $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ は，その平面の法線ベクトルになる．

3. 空間内の球の方程式

球は，中心と半径のみで定まる．

中心が C で半径 r の球面を K とする．K 上に点 P があることは，式 $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$ と同値である．この式を球のベクトル方程式といい，座標表示に書き直すと次のようになる．

球面の方程式

中心 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$，半径 r の球面 K の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ である．

（証明）球面 K のベクトル方程式 $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$ について，K 上の点 P を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r \iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

この両辺を 2 乗して，球面の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ を得る．

【例題 101】 中心が $(-1,\ 2,\ 3)$，半径 4 の球面を K とする．

1. 球面 K の方程式を答えよ．
2. K と平面 $x=1$ が交わってできる円の方程式を $y,\ z$ で表し，中心と半径を答えよ．
3. K と xy 平面が交わってできる円の方程式を $x,\ y$ で表し，中心と半径を答えよ．

【解答】

1. $\boldsymbol{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16}$
2. K の方程式 $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ に $x=1$ を代入して

$$(1+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16 \iff (y-2)^2+(z-3)^2=12$$

よって，**中心は $\boldsymbol{(1,\ 2,\ 3)}$**，**半径は $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$**．

◀ 中心は平面 $x=1$ 上にあるので，中心の x 座標は 1 である．

3. xy 平面を表す式 $z=0$ を，K の式に代入して

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(0-3)^2=16 \iff (x+1)^2+(y-2)^2=7$$

よって，**中心は $\boldsymbol{(-1,\ 2,\ 0)}$**，**半径は $\boldsymbol{\sqrt{7}}$**．

【練習 102：球面の方程式】

$a>0$ とする．球面 K が式 $x^2+y^2+z^2+2x-2az=a^2-1$ で表されているとする．

(1) 球面 K の中心と半径を，a を用いて表せ．

(2) xy 平面と交わってできる円の半径が 3 のとき，a の値を求めよ．

【解答】

(1) 式を平方完成すると

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2+2x-2az=a^2-1\\
\iff\ &(x^2+2x+1)-1+y^2+(z^2-2az+a^2)-a^2=a^2-1\\
\iff\ &(x+1)^2+y^2+(z-a)^2=2a^2
\end{aligned}$$

$a>0$ より $\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a$ なので，K の**中心は $\boldsymbol{(-1,\ 0,\ a)}$**，**半径は $\boldsymbol{\sqrt{2}a}$**．

(2) xy 平面を表す $z=0$ を代入して

$$(x+1)^2+y^2+(0-a)^2=2a^2 \iff (x+1)^2+y^2=a^2$$

この円の半径 a が 3 になればよいので $\boldsymbol{a=3}$．

1B.6 ベクトルの空間図形への応用

1. 応用（１）～平面上のベクトルの拡張

以下の内容は，平面上のベクトルと同じように考える事ができる．

空間内における平面上のベクトル

(1)「2 点 C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) が一致する」⇔「$\vec{c}=\vec{d}$」（位置ベクトルの場合）⇔「$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$」（始点 A の場合）

(2) 「DE // FG」⇒ $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=k\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ となる実数 k がある

(3)「3 点 A，B，C が同一直線上にある」⇔「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 k がある」

(4) 2 直線の交点「AB，CD の交点 P($\vec{p}$)」⇒「AP : PB $= s : (1-s)$, CP : PD $= t : (1-t)$ とおく」など

(5) 「AB ⊥ CD」⇒ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$

(6) （面積）$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}$

A. 点の一致

【練習 103：点の一致～その１～】

四面体 ABCD において，辺 AB，AC，BD，CD の中点を P，Q，R，S とする．また，O を始点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$)，P($\vec{p}$)，Q($\vec{q}$)，R($\vec{r}$)，S($\vec{s}$) とする．

(1) $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表わせ．

(2) 線分 PS の中点 M_1，QR の中点 M_2 が一致することを示せ．

(3) 辺 AD，BC の中点を T，U とする．線分 TU の中点も M_1，M_2 に一致することを示せ．

【解答】

(1) P，Q，R，S は辺 AB，AC，BD，CD の中点であるから

$$\boldsymbol{\vec{p}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{q}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2},\ \vec{r}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2},\ \vec{s}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}}$$

(2) $\mathrm{M}_1(\vec{m_1})$，$\mathrm{M}_2(\vec{m_2})$ とすると

$$\vec{m_1}=\frac{1}{2}\left(\vec{p}+\vec{s}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

$$\vec{m_2}=\frac{1}{2}\left(\vec{q}+\vec{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

よって，$\vec{m_1}=\vec{m_2}$ であるから，M_1 と M_2 は一致する．

(3) T($\vec{t}$)，U($\vec{u}$) とすると，線分 TU の中点の位置ベクトルは

$$\frac{1}{2}\left(\vec{t}+\vec{u}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

となり $\vec{m_1}$，$\vec{m_2}$ と等しいので，M_1 と M_2 に一致する．

【練習 104：点の一致～その２～】

四面体 OABC において，△ABC の重心を G，辺 OA，OB，OC の中点を P，Q，R とする．OG の中点と，△PQR の重心が一致することを示せ．

【解答】 O を基点とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，G($\vec{g}$)，P($\vec{p}$)，Q($\vec{q}$)，R($\vec{r}$) とする．

OG の中点の位置ベクトルは $\dfrac{1}{2}\vec{g}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{6}$

△PQR の重心の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3}=\dfrac{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}{3}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{6}$

よって，位置ベクトルが一致するので，OG の中点と △PQR の重心は一致する．

B. 平行，同一直線上 ～ k 倍

【練習 105：2 直線の平行】

四面体 OABC において，△OAB，△OBC の重心を P，Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ としたとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ． (2) PQ // AC を示せ．

(3) D を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\vec{b}$ となる点とし，△DAC の重心を R とする．線分 PQ の中点を M としたとき，3 点 O，M，R が一直線上にあることを示せ．

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{(\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+\vec{b})}{3}=\dfrac{\vec{c}-\vec{a}}{3}$ であり，

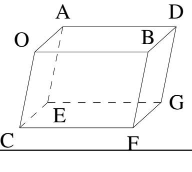
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}-\vec{a}$ となるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と分かり，PQ // AC が示された．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{a}+\vec{c}}{3}$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}=\dfrac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{3}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{6}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と分かり，3 点 O，M，R が一直線上にあることが示された．

【練習 106：同一直線上】

右図の平行六面体において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．△DEF の重心を P とすると，3 点 O，P，G が同一直線上にあることを示せ．
また，OP : OG を求めよ．



【解答】 まず，P が △DEF の重心であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$

$$= \frac{1}{3}\left\{(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{c}+\vec{a})+(\vec{b}+\vec{c})\right\}$$
$$= \frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ となる．よって，3 点 O, P，G が同一直線上にあることが示された．

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ より $\mathbf{OP : OG = 2 : 3}$.

C. 2 直線の交点

【練習 107：2 直線の交点】

四面体 OABC において，BC を 2 : 1 に内分する点を D，△ABC の重心を G，直線 AD と BG の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする．

(1) AP : PD = $s : (1-s)$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, s で表せ．

(2) BP : PG = $t : (1-t)$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, t で表せ．　(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．

【解答】　点 D は BC を 2 : 1 に内分するので，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2+1} = \dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$ ……… ①

点 G は △ABC の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ ……… ②

(1) AP : PD = $s : (1-s)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$= (1-s)\vec{a} + s\cdot\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3} = \boldsymbol{(1-s)\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}s\vec{c}}$$

(2) BP : PG = $t : (1-t)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$
$$= (1-t)\vec{b} + t\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \boldsymbol{\frac{t}{3}\vec{a} + \left(1-\frac{2}{3}t\right)\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c}}$$

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立なので，(1)，(2) の結果を係数比較して

$$\begin{cases} 1-s = \dfrac{t}{3} & \cdots\cdots\cdots ③ \\ \dfrac{s}{3} = 1-\dfrac{2}{3}t & \cdots\cdots\cdots ④ \\ \dfrac{2}{3}s = \dfrac{t}{3} & \cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$
，　③，⑤より $1-s = \frac{2}{3}s \Leftrightarrow 1 = \frac{5}{3}s$

より $s = \frac{3}{5}$．⑤より $t = 2s = \frac{6}{5}$．これは④を満たす．

よって，$s = \frac{3}{5}$ を (1) の結果に代入して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}}$.

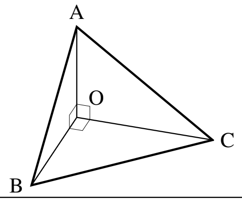
◀ $t = \frac{6}{5}$ を (2) の結果に代入してもよい．

【練習 108：2 直線の垂直〜その１〜】

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ である直角三角錐 OABC があり，
$\left|\overrightarrow{OA}\right| = 1,\ \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{2},\ \left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{3}$ とする．

(1) $AB \perp OC$ を示せ．

(2) 辺 AB を $1:2$ に内分する点を D とする．$AB \perp CD$ を示せ．



【解答】 $\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = \sqrt{2},\ |\vec{c}| = \sqrt{3} \quad \cdots\cdots ②$$

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} = (\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$（①を代入）

◀ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$ を示せばよい．

よって，$AB \perp OC$ が示された．

(2) $\overrightarrow{OD} = \dfrac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2} = \dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ であり，①，②を代入すると

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} &= (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{c})\\
&= (\vec{b}-\vec{a})\cdot\left(\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}-\vec{c}\right)\\
&= \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 - \frac{2}{3}|\vec{a}|^2\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

◀ ①を代入

◀ ②を代入

よって，$AB \perp CD$ が示された．

【練習 109：垂直の証明】

すべての辺の長さが等しい平行六面体 OADB-CEGF において，$OD \perp EF$, $AC \perp BG$ を示せ．

【解答】 $\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とすると，$\overrightarrow{OD} = \vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a}$ であるから

$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{EF} = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2$$

ここで，辺の長さがすべて等しいので $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ であるから $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{EF} = 0$ となり $OD \perp EF$ が示された．同様に，

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BG} = (\vec{c}-\vec{a})(\vec{c}+\vec{a}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$$

より，$AC \perp BG$ が示された．

2. 応用（2）～平面上に存在する点・直線と平面の交点

A. 平面 ABC 上に点 D が存在する条件（1） ～ 幾何ベクトルによる表現

空間内の 3 点 A，B，C を通る平面を，平面 ABC と言い*24，D が平面 ABC 上に存在する条件は次のように考えられる．

$$\begin{aligned}\text{D が平面 ABC 上にある} &\iff 3\text{ つのベクトル } \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}} \text{ が同一平面上にある}\\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \text{ となる実数 } s,\ t \text{ が存在する（p.59）}\end{aligned}$$

始点を A 以外とし，「$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = s\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ となる実数 s, t が存在する」のようにしてもよい．

また，この条件は，次の事実と関連づけて理解すると良い．

「3 点 A，B，C が一直線上に存在する」 $\Longleftrightarrow$ 「$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる k が存在する」

【例題 110】

1. A(0, 0, 0)，B(1, 2, 3)，C(2, −1, 1) とする．D(2, 4, z) が平面 ABC 上にあるとき，z の値を求めよ．
2. 4 点 A(0, 0, 0)，B(3, −1, −2)，C(0, 3, −1)，D(x, −2, 3) が同一平面上にあるとき，x の値を求めよ．

【解答】

1. $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s. t が存在すればよいので

$$\begin{pmatrix}2\\4\\z\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2 = s + 2t & \cdots\cdots\cdots ①\\ 4 = 2s - t & \cdots\cdots\cdots ②\\ z = 3s + t & \cdots\cdots\cdots ③\end{cases}.$$

①，②を解いて $s = 2$, $t = 0$．これを③代入して $\boldsymbol{z = 6}$.

◀ 結果的に，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となり，D は直線 AB 上に存在している．

2. $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s. t が存在すればよいので

$$\begin{pmatrix}x\\-2\\3\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x = 3s & \cdots\cdots\cdots ④\\ -2 = -s + 3t & \cdots\cdots\cdots ⑤\\ 3 = -2s - t & \cdots\cdots\cdots ⑥\end{cases}.$$

⑤，⑥を解いて $s = -1$, $t = -1$．これを④に代入して $\boldsymbol{x = -3}$.

【例題 111】 4 点 A(2, 1, −3)，B(−1, −1, 0)，C(5, 0, −5)，D(2, 4, z) が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ．

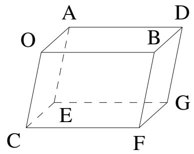
【解答】 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s. t が存在すればよい．$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix}2\\4\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\z+3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix}0\\3\\z+3\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} \iff \begin{cases}0 = -3s + 3t & \cdots\cdots\cdots ①\\ 3 = -2s - t & \cdots\cdots\cdots ②\\ z + 3 = 3s - 2t & \cdots\cdots\cdots ③\end{cases}.$$

①，②を解いて $s = -1$, $t = -1$．これを③に代入して $\boldsymbol{z = -4}$.

*24 平面 ABC は必ず存在し，A，B，C が一直線上に存在しないなら，ただ 1 つに定まる．

B. 直線と平面の交点（1）



（例） 右図の平行六面体において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．直線 AF と平面 ODE の交点 R について，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．

（解） R は，次の 2 つの条件を満たしている．

(I) R は直線 AF 上にある．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = k\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ となる k が存在する．

(II) R は平面 ODE 上にある．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ となる s, t が存在する．

まず，条件 (I) について始点を O に揃えると $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$ より

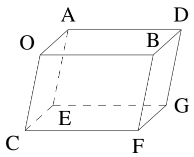
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} - \vec{a} = k(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \iff \overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-k)\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{a} + \vec{c}$ であるから，条件 (II) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s(\vec{a} + \vec{b}) + t(\vec{a} + \vec{c}) = (s+t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立なので①，②より $\begin{cases} 1-k = s+t \\ k = s \\ k = t \end{cases}$　よって，$1 - k = k + k \iff k = \dfrac{1}{3}$.

これを①に代入して $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$.



【例題 112】 右図の平行六面体において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．

1. 直線 CD と平面 OEF の交点 R について，以下の $\boxed{}$ に当てはまる文字，文字式，数字を答え，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．

   （解） R は，次の 2 つの条件を満たしている．

   (I) R は直線 $\boxed{ア}$ 上にある．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = k\overrightarrow{\mathrm{C}\boxed{イ}}$ となる k が存在する．

   (II) R は平面 $\boxed{ウ}$ 上にある．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{O}\boxed{エ}}$ となる s, t が存在する．

   条件 (I) を整理して $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boxed{オ}\vec{a} + \boxed{カ}\vec{b} + \boxed{キ}\vec{c} \cdots\cdots\cdots$ ① と表せる．

   また，条件 (II) を整理して $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boxed{ク}\vec{a} + \boxed{ケ}\vec{b} + \boxed{コ}\vec{c} \cdots\cdots\cdots$ ② と表せる．

   $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は $\boxed{サ}$ なので①，②より $\begin{cases} \boxed{オ} = \boxed{ク} \\ \boxed{カ} = \boxed{ケ} \\ \boxed{キ} = \boxed{コ} \end{cases}$

   これを解くと $k = \boxed{シ}$ になるので，①に代入して $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boxed{ス}$.

2. CF の中点を M とする．直線 AM と平面 OEF の交点 S について，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．

【解答】

1. R は，次の 2 つの条件を満たしている．

   (I) R は直線<u>**CD**</u>$_{(ア)}$上にある．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = k\overrightarrow{\mathrm{C\underline{D}}}_{(イ)}$ となる k が存在する．

   (II) R は平面<u>**OEF**</u>$_{(ウ)}$上にある．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{O\underline{F}}}_{(エ)}$ となる

s, t が存在する.

まず，条件 (I) について始点を O に揃えると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = k(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OR}} = {}_{(\text{オ})}\underline{\boldsymbol{k}}\vec{a} + {}_{(\text{カ})}\underline{\boldsymbol{k}}\vec{b} + {}_{(\text{キ})}\underline{\boldsymbol{(1-k)}}\vec{c} \cdots\cdots ①$$

また，条件 (II) を整理して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= s(\vec{a} + \vec{c}) + t(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= {}_{(\text{ク})}\underline{\boldsymbol{s}}\vec{a} + {}_{(\text{ケ})}\underline{\boldsymbol{t}}\vec{b} + {}_{(\text{コ})}\underline{\boldsymbol{(s+t)}}\vec{c} \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は**<u>一次独立</u>**(サ)なので①，②より $\begin{cases} k = s \\ k = t \\ 1 - k = s + t \end{cases}$

s, t を消去して解くと，$1 - k = k + k \Leftrightarrow k = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}_{(\text{シ})}$ になる.

①に代入して $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = {}_{(\text{ス})}\underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}}}$.

2. S は直線 AM 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{AS}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ となる実数 k が存在し

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AS}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \vec{a} = k\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OS}} = (1-k)\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b} + k\vec{c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③\end{aligned}$$

◀ $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$

また，S は平面 OEF 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = s\overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ となる実数 s, t が存在し

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{OF}} \\ &= s(\vec{a} + \vec{c}) + t(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= s\vec{a} + t\vec{b} + (s+t)\vec{c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④\end{aligned}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立なので③，④より $\begin{cases} 1 - k = s \\ \dfrac{k}{2} = t \\ k = s + t \end{cases}$

s, t を消去して $k = (1-k) + \frac{k}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}k = 1$，よって $k = \frac{2}{3}$ となり③より $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}}$.

C. 平面 ABC 上に点 D が存在する条件（2） 〜 位置ベクトルによる表現

「D が平面 ABC 上にある」ための条件「$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s, t が存在する」を位置ベクトルで書き換えてみよう．$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$，$\mathrm{D}(\vec{d})$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d} - \vec{a}$ であるから

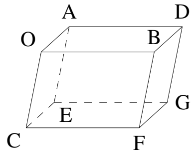
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} &\Leftrightarrow \vec{d} - \vec{a} = s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})\\ &\Leftrightarrow \vec{d} = s\vec{b} - s\vec{a} + t\vec{c} - t\vec{a} + \vec{a} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

と変形できる．ここで，$1 - s - t = r$ とおいて次のように分かる．

「D が平面 ABC 上にある」 $\Longleftrightarrow$ 「$\vec{d} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\ (r + s + t = 1)$ となる実数 r，s，t が存在する」

または，「$\vec{d}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表わすと，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の係数の和が 1 になる」と言い換えても良い．

D. 直線と平面の交点（2）



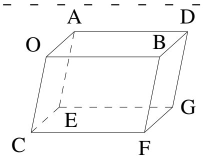
（例）右図の平行六面体において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．直線 OG と平面 ABC の交点 R について，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ．

（解）R は，次の 2 つの条件を満たしている．

(I) R は直線 OG 上にある．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ となる k が存在する．

(II) R は平面 ABC 上にある．つまり，$\vec{r}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表わすと係数の和が 1 である．

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ であるから，条件 (I) より $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$ であるが，条件 (II) より係数の和 $k + k + k = 1$ になる．よって，$k = \dfrac{1}{3}$ とわかり，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ である．



【例題 113】 右図の平行六面体において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．

1. 線分 EF の中点を M とする．直線 OM と平面 ABC の交点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ．
2. $\triangle$OBC の重心を Q とする．直線 DQ と平面 ABC の交点 R について，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ．

【解答】

1. P は直線 OM 上にあるので，実数 k が存在し

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= k \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{OE}} + \overrightarrow{\mathrm{OF}}}{2}\\ &= \frac{k}{2}\left\{(\vec{a} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c})\right\}\\ &= \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b} + k\vec{c} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

一方，P は平面 ABC 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表わすと係数の和が 1 であるから，①より $\dfrac{k}{2} + \dfrac{k}{2} + k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \dfrac{1}{2}$．

これを①に代入して $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}}$.

2. R は直線 DQ 上にあるので，実数 k が存在し

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1 - k)\overrightarrow{\mathrm{OD}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

◀ $\overrightarrow{\mathrm{DR}} = k\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$ で始めても，同じ式になる．

$$= (1-k)(\vec{a}+\vec{b}) + k\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$
$$= (1-k)\vec{a} + (1-k)\vec{b} + \frac{k}{3}\vec{b} + \frac{k}{3}\vec{c}$$
$$= (1-k)\vec{a} + \left(1-\frac{2}{3}k\right)\vec{b} + \frac{k}{3}\vec{c} \quad \cdots\cdots ②$$

一方，R は平面 ABC 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表わすと係数の和が 1 であるから，②より $(1-k)+\left(1-\frac{2}{3}k\right)+\frac{k}{3}=1 \iff 2-\frac{4}{3}k=1 \iff k=\frac{3}{4}$．これを②に代入して $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$.

直線上に，平面上に点がある条件は，以下のようにまとめられる．

平面上に点がある条件

P が平面 ABC 上にあるための条件は，ベクトルを用いて次のように表わされる．
(I) （幾何ベクトルの考えを用いて）$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる s, t が存在する．
ここで，始点は B や C であってもよい．
(II) （位置ベクトルの考えを用いて）$\vec{p} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\ (r+s+t=1)$ となる r, s, t が存在する．
他の位置ベクトルの公式と同じように，始点を揃えた幾何ベクトルにおいても，この公式は成り立つ．たとえば，適当な M に対して $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = r\overrightarrow{\mathrm{MA}} + s\overrightarrow{\mathrm{MB}} + t\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ が成り立つ．

【練習 114：直線と平面の交点〜その４〜】

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である四面体 OABC について，OC の中点を M，△ABC の重心を G とする．直線 OG と平面 ABM の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ．また，OP : OG を求めよ．

【解答】 P は直線 OG 上にあるので，実数 k が存在し

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$
$$= \frac{k}{3}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c} \quad \cdots\cdots ①$$

また，P は平面 ABM 上にあるので，実数 r, s, t が存在し

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}}\ (r+s+t=1)$$
$$= r\vec{a}+s\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}\ (r+s+t=1) \quad \cdots\cdots ②$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立なので，①，②より，次の 4 式の連立方程式となる．

$$\frac{k}{3}=r, \quad \frac{k}{3}=s, \quad \frac{k}{3}=\frac{t}{2}, \quad r+s+t=1$$

$r=\frac{k}{3}$, $s=\frac{k}{3}$, $t=\frac{2k}{3}$ を $r+s+t=1$ に代入して

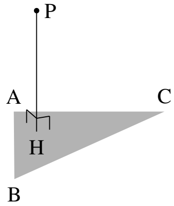
$$\frac{k}{3}+\frac{k}{3}+\frac{2k}{3}=1 \iff \frac{4}{3}k=1 \iff k=\frac{3}{4}$$

これを，①に代入して $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$.

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ であるから，**OP : OG = 3 : 4**.

3. 応用（3）～線分と平面の垂直条件

右図のように，点 P から平面 ABC へ引いた垂線の足を H とするとき，H は次の 2 条件を満たす.



(I) H は平面 ABC 上にある.

(II) 線分 PH と平面 ABC は垂直に交わっている．これは，PH ⊥ AB, PH ⊥ BC, PH ⊥ CA のうち，2 つの垂直が成り立てば必要十分である.

【練習 115：点から平面への垂線】

OA = 2, OB = 3, OC = 1, ∠AOB = 60°, ∠BOC = 90°, ∠COA = 120° である四面体 OABC があり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする.

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ.

(2) O から平面 ABC に引いた垂線の足を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.

(3) A から平面 OBC に引いた垂線の足を I とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.

【解答】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{3}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BOC}=3\cdot1\cdot0=\mathbf{0}$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos\angle\mathrm{COA}=1\cdot2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$

(2) H は平面 ABC 上に存在するので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ $(r+s+t=1)$ となる実数 r, s, t が存在する.

また，直線 OH が平面 ABC と垂直であるから OH ⊥ AB, OH ⊥ BC が成り立ち

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\end{cases}\iff\begin{cases}(r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0\\ (r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0\end{cases}$$

これを展開し，(1) の結果と $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=1$ を代入して

$$\begin{cases}r\cdot3-r\cdot2^2+s\cdot3^2-s\cdot3+t\cdot0-t\cdot(-1)=0\\ r\cdot(-1)-r\cdot3+s\cdot0-s\cdot3^2+t\cdot1^2-t\cdot0=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}-r+6s+t=0\\ -4r-9s+t=0\end{cases}$$

これと $r+s+t=1$ を合わせて連立方程式を解くと $(r,\ s,\ t)=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{15},\ \dfrac{11}{15}\right)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{15}\vec{b}+\dfrac{11}{15}\vec{c}}$.

◀ r を消去して解くと
$r+s+t=1$, $-r+6s+t=0$ より $7s+2t=1$
$r+s+t=1$, $-4r-9s+t=0$ より $-5s+5t=4$
これより $s=-\dfrac{1}{15}$, $t=\dfrac{11}{15}$ であり，$r+s+t=1$ より $r=\dfrac{1}{3}$.

(3) I は平面 OBC 上に存在するので，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ となる実数 s, t が存在する.

また，直線 AI が平面 OBC と垂直であるから AI ⊥ OB, AI ⊥ OC が成り立つので

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0\end{cases}\iff\begin{cases}(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0\\ (s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{c}=0\end{cases}$$

◀ $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{a}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s \cdot 3^2 + t \cdot 0 - 3 = 0 \\ s \cdot 0 + t \cdot 1^2 - (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9s - 3 = 0 \\ t + 1 = 0 \end{cases}$$

よって $(s,\ t) = \left(\dfrac{1}{3}, -1\right)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}}$.

C 第１章の解答

1C.1 第１章の解答

【練習：点の一致〜その３〜】(p.31)

A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$)，P($\vec{p}$)，Q($\vec{q}$)，R($\vec{r}$)，S($\vec{s}$)，M($\vec{m}$)，N($\vec{n}$) とする．
AB，BC，CD，DA の中点が P，Q，R，S なので

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{q}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \vec{r}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},\ \vec{s}=\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}$$

である．また，線分 PR の中点が M なので

$$\vec{m}=\frac{\vec{p}+\vec{r}}{2}=\frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

◀ 分母と分子に 2 を掛けた

線分 QS の中点が N なので

$$\vec{n}=\frac{\vec{q}+\vec{s}}{2}=\frac{\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{a}}{4}$$

◀ 分母と分子に 2 を掛けた

よって，$\vec{m}=\vec{n}$ なので，M と N は一致することが示された．

【発展：2 直線の平行〜その３〜】(p.32)

① $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\vec{x}$ より

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\vec{x}-\vec{y}}$$

また，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{y}+\frac{a}{a+1}\vec{x}$ であり

◀ $\overrightarrow{AC}=\vec{x}+\vec{y}$ であるから，内分の公式より $\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AC}}{a+1}$ としてもよい．

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}=\frac{\vec{x}+(\vec{x}+\vec{y})+\vec{y}}{3}=\frac{2}{3}\vec{x}+\frac{2}{3}\vec{y}$$

となるから，

$$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AF}=\left(\frac{2}{3}\vec{x}+\frac{2}{3}\vec{y}\right)-\left(\vec{y}+\frac{a}{a+1}\vec{x}\right)=\boldsymbol{\left(\frac{2}{3}-\frac{a}{a+1}\right)\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}}$$

② $\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{FG}$ とおくと

◀ $\vec{y}$ の係数を見比べて，DE // FG であるには $\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{FG}$ でなければならない，としてもよい．

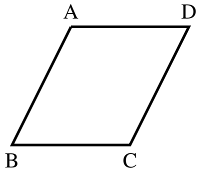
$$\frac{3}{4}\vec{x}-\vec{y}=k\left(\frac{2}{3}-\frac{a}{a+1}\right)\vec{x}-\frac{k}{3}\vec{y}$$

$\vec{x}$, $\vec{y}$ は一次独立なので，係数を見比べて $\begin{cases}\frac{3}{4}=k\left(\frac{2}{3}-\frac{a}{a+1}\right) & \cdots\cdots ① \\ -1=-\frac{k}{3} & \cdots\cdots ②\end{cases}$

を得る．②から $k=3$ を得るので①に代入して

$$\frac{3}{4}=3\left(\frac{2}{3}-\frac{a}{a+1}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{3}{4}=2-\frac{3a}{a+1}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{3a}{a+1}=\frac{5}{4}$$
$$\Leftrightarrow\ 12a=5a+5 \quad \therefore\ \boldsymbol{a=\frac{5}{7}}$$

【発展：3 点が同一直線上～その２～】(p.33)



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{y}$ とする．

E は辺 BC を 3 : 2 に内分する点なので，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{x} + \dfrac{3}{5}\vec{y}$.

F は辺 CD を 3 : 2 に内分する点なので，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{y} + \dfrac{2}{5}\vec{x}$.

ここで，E，F，P が同一直線上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{EP}} = k\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ となる実数 k が存在する．

$$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = t\vec{x} - \left(\vec{x} + \frac{3}{5}\vec{y}\right) = (t-1)\vec{x} - \frac{3}{5}\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \left(\vec{y} + \frac{2}{5}\vec{x}\right) - \left(\vec{x} + \frac{3}{5}\vec{y}\right) = -\frac{3}{5}\vec{x} + \frac{2}{5}\vec{y}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = k\overrightarrow{\mathrm{EF}} \Leftrightarrow (t-1)\vec{x} - \frac{3}{5}\vec{y} = k\left(-\frac{3}{5}\vec{x} + \frac{2}{5}\vec{y}\right)$$

$\vec{x}$, $\vec{y}$ は一次独立であるから $\begin{cases} t-1 = -\dfrac{3}{5}k \cdots\cdots\cdots ① \\ -\dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}k \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ となる．②より $k = -\dfrac{3}{2}$

であるから，①に代入して

$$t - 1 = -\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{10} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{t = \frac{19}{10}}$$

索引