13th-note 数学B

Ver1.00(2015-3-29)

目次

第 2 章　数列 91
§2.1　数列とは何か 91
§2.2　等差数列 93
§1.　等差数列の一般項 93
§2.　等差数列の和 96
§2.3　等比数列 98
§1.　等比数列の一般項 98
§2.　等比数列の和 102
§2.4　和の記号 $\sum$ 104
§1.　和の記号 $\sum$（シグマ）の定義 104
§2.　$\sum$ を用いた計算 105
§2.5　階差数列 113
§1.　階差数列 113
§2.　和から一般項を求める 116
§2.6　いろいろな数列とその和 118
§1.　分数式の数列の和 118
§2.　等差数列と等比数列の積 120
§3.　群数列 122
§2.7　漸化式 123
§1.　漸化式とその一般項 123
§2.　漸化式の応用 126
§2.8　数学的帰納法 129
§1.　数学的帰納法によるいろいろな証明 129
§2.　発展 色々な数列の一般項 135

第2章　数列

ある規則に従う数の列をどう考えるべきか．これが，この章のテーマである．

2.1 数列とは何か

A. 数列とは何か

数の列を**数列** (sequence of numbers) といい，数列の数の一つ一つを**項** (term) という．

数列は記号 $\{a_n\}$ や $\{b_n\}$ のように表され，たとえば，数列

$\{a_n\}$: 2, 5, 8, 11, $\cdots$

において，数列 $\{a_n\}$ の項は 2 や 5 や 8 や 11 である．また，最初の項 2 は**初項** (initial term)，2 番目の項 5 を**第 2 項**，3 番目の項 8 を**第 3 項**，$\cdots$ と言い，記号 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ のように表される．つまり，上の例では $a_1 = 2.\ a_2 = 5,\ a_3 = 8,\ a_4 = 11,\ \cdots$ である．

B. 数列の作り方（1）～ 初項と規則

数列は「初項と，次の値を決める規則」さえ与えれば作ることができる．

たとえば，上の数列 $\{a_n\}$: 2, 5, 8, 11, $\cdots$ は「初項 2 に，繰り返し 3 を足して」作ることができる．

$$a_1 = 2, \quad a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5, \quad a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8, \quad a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11, \quad \cdots$$

また，数列 $\{b_n\}$: 2, 6, 18, 54, $\cdots$ は「初項 2 に，繰り返し 3 を掛けて」作ることができる．

$$b_1 = 2, \quad b_2 = 3b_1 = 3 \cdot 2 = 6, \quad b_3 = 3b_2 = 3 \cdot 6 = 18, \quad b_4 = 3b_3 = 3 \cdot 18 = 54, \quad \cdots$$

【例題 1】

1. 初項 1 に 2 を繰り返し足して作られる数列 $\{x_n\}$ の，初項から第 5 項までを書き並べよ．
   また，x_8，x_{10} を求めよ．
2. 数列 $\{y_n\}$ は初項 2 に 2 を繰り返し掛けて作られる．この数列の初項から第 5 項までを書き並べよ．
   また，y_8，y_{10} を求めよ．
3. 数列 $\{z_n\}$ は初項 -1 に -1 を繰り返し掛けて作られる．この数列の初項から第 5 項までを書き並べよ．
   また，z_8，z_{10} を求めよ．

【解答】

1. 初項から第 5 項は **1, 3, 5, 7, 9** である．
   この後，11, 13, 15, 17, 19, $\cdots$ と続くので $\boldsymbol{x_8 = 15,\ x_{10} = 19}$.
2. 初項から第 5 項は **2, 4, 8, 16, 32** である．この後，

64, 128, 256, 512, 1024, $\cdots$ と続くので $\boldsymbol{y_8 = 256,\ y_{10} = 1024}$.

3. 初項から第 5 項は $\mathbf{-1,\ 1, -1,\ 1, -1}$.
この後，1, −1, 1, −1, 1, $\cdots$ と続くので $\boldsymbol{z_8 = 1,\ z_{10} = 1}$.

C. 数列の作り方（2） ～ 一般項

数列の第 n 項を**一般項** (general term) と言い，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項はそれぞれ a_n, b_n となる．
数列は，一般項を与えることによっても，作ることが出来る．
たとえば，数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n = 3n - 1$ が与えられたとしよう．このとき

$n = 1$ を代入して，初項 $a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$,　$n = 2$ を代入して，第 2 項 $a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$,
$n = 3$ を代入して，第 3 項 $a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$，$n = 4$ を代入して，第 4 項 $a_4 = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

となり，数列 $\{a_n\}$ ： 2, 5, 8, 11, $\cdots$ が作られる．また，一般項 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ を与えることによって

$n = 1$ を代入して，初項 $a_1 = 2 \cdot 3^0 = 2$,　$n = 2$ を代入して，第 2 項 $a_2 = 2 \cdot 3^1 = 6$,
$n = 3$ を代入して，第 3 項 $a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$，$n = 4$ を代入して，第 4 項 $a_4 = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$

となり，数列 $\{b_n\}$ ： 2, 6, 18, 54, $\cdots$ が作られる．

【例題 2】

1. 一般項 $x_n = 2n - 1$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ の，初項から第 5 項までを書き並べよ．
また，x_8，x_{10} を求めよ．
2. 一般項 $y_n = 2^n$ で与えられる数列 $\{y_n\}$ の，初項から第 5 項までを書き並べよ．
また，y_8，y_{10} を求めよ．
3. 一般項 $z_n = (-1)^n$ で与えられる数列 $\{z_n\}$ の，初項から第 5 項までを書き並べよ．
また，z_8，z_{10} を求めよ．

【解答】

1. $x_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$，$x_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$，$x_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$,
$x_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$，$x_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$ なので，初項から第 5 項は
1, 3, 5, 7, 9．また，$x_8 = 2 \cdot 8 - 1 = \mathbf{15}$，$x_{10} = 2 \cdot 10 - 1 = \mathbf{19}$.
2. $y_1 = 2^1 = 2$，$y_2 = 2^2 = 4$，$y_3 = 2^3 = 8$，$y_4 = 2^4 = 16$,
$y_5 = 2^5 = 32$ なので，初項から第 5 項は **2, 4, 8, 16, 32**.
また，$y_8 = 2^8 = \mathbf{256}$，$y_{10} = 2^{10} = \mathbf{1024}$.
3. $z_1 = (-1)^1 = -1$，$z_2 = (-1)^2 = 1$，$z_3 = (-1)^3 = -1$,
$z_4 = (-1)^4 = 1$，$z_5 = (-1)^5 = -1$ なので，初項から第 5 項は
$\mathbf{-1,\ 1, -1,\ 1, -1}$．また，$z_8 = (-1)^8 = \mathbf{1}$，$z_{10} = (-1)^{10} = \mathbf{1}$.

正の数と負の数を繰り返す数列の一般項は，負の数の累乗を含むことが多い．

2.2 等差数列

1. 等差数列の一般項

A. 等差数列の定義

数列 $\{a_n\}$ ： 1, 4, 7, 10, 13, $\cdots$ は，初項 1 に繰り返し 3 を足してできており，$a_{n+1} = a_n + 3$ がすべての n で成り立っている．

このように，初項に繰り返し d を足してできる数列，つまり $a_{n+1} = a_n + d$ がすべての n で成り立つ数列を等差数列と言い，d を公差という．たとえば，等差数列 $5, 3, 1, -1, -3, \cdots$ の公差は -2 である．

【例題 3】 次の等差数列の $\boxed{}$ に適する値を入れなさい．また，それぞれの公差を求めよ．

i. $2, 5, \boxed{}, 11, \boxed{}, \cdots$　ii. $9, 6, \boxed{}, 0, \boxed{}, \cdots$　iii. $6, 2, -2, \boxed{}, \boxed{}, \cdots$

iv. $\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}, \boxed{}, \dfrac{8}{5}, \boxed{}, \cdots$　v. $\boxed{}, -3, 0, 3, \boxed{}, \cdots$

【解答】

i. 初項 2，公差 3 より，$2, 5, \mathbf{8}, 11, \mathbf{14}, \cdots$

ii. 初項 9，公差 -3 より，$9, 6, \mathbf{3}, 0, \mathbf{-3}, \cdots$

iii. 初項 6，公差 -4 より，$6, 2, -2, \mathbf{-6}, \mathbf{-10}, \cdots$

iv. 初項 $\dfrac{2}{5}$，公差 $\dfrac{2}{5}$ より，$\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}, \boldsymbol{\dfrac{6}{5}}, \dfrac{8}{5}, \mathbf{2}, \cdots$

v. 公差 3 より，$\mathbf{-6}, -3, 0, 3, \mathbf{6}, \cdots$

B. 等差数列の一般項（第 n 項）

たとえば，数列 $\{a_n\}$ ： 1, 4, 7, 10, 13, $\cdots$ において，$a_5 = 13$ は，1 に公差 3 を 4 回足して求められ，a_{10} は，1 に 3 を 9 回足すと求められる．このように，初項に公差を足した回数は，項数より 1 小さく，一般に，次の事が分かる．

等差数列

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ について，一般項（第 n 項）は d を $n-1$ 回足した結果であり，$a_n = a + d(n-1)$ で求められる．

【例題 4】 初項 1，公差 5 の等差数列を $\{a_n\}$ とする．$a_1 = 1$ に公差 5 を $\boxed{\text{ア}}$ 回足して $a_4 = \boxed{\text{イ}}$ を得る．また，$a_1 = 1$ に公差 5 を $\boxed{\text{ウ}}$ 回足して $a_{10} = \boxed{\text{エ}}$ を得る．

一般項（第 n 項）は，初項 1 に公差 5 を $\boxed{\text{オ}}$ 回足して $a_n = \boxed{\text{カ}}$ を得る．

【解答】 初項 1，公差 5 の等差数列 $\{a_n\}$ は 1, 6, 11, $\cdots$ と続き，$a_1 = 1$ に公差 5 を $_{(ア)}\underline{\mathbf{3}}$回足して $a_4 = 1 + 5 \times 3 = \underline{\mathbf{16}}_{(イ)}$ を得る．

また，$a_1 = 1$ に公差 5 を $_{(ウ)}\underline{\mathbf{9}}$回足して $a_{10} = 1 + 5 \times 9 = \underline{\mathbf{46}}_{(エ)}$ を得る．

一般項（第 n 項）は，初項 1 に公差 5 を $_{(オ)}\underline{\boldsymbol{n-1}}$回足して
$a_n = 1 + 5(n-1) = \underline{\boldsymbol{5n-4}}_{(カ)}$ を得る．

【練習 5：等差数列の一般項】

次の数列の一般項を求めよ．

(1) 初項 2，公差 3 の等差数列　　(2) 初項 5，公差 -2 の等差数列

(3) 正の奇数を小さい順に並べた数列 1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$

【解答】

(1) $2 + 3(n-1) = \boldsymbol{3n-1}$

(2) $5 + (-2)\cdot(n-1) = \boldsymbol{-2n+7}$

(3) 1，3，5，7，9，$\cdots$ は初項 1，公差 2 の等差数列であり，一般項は $1 + 2(n-1) = \boldsymbol{2n-1}$ である．

C.　条件から初項や交差を求める

（例）

第 4 項が 4，第 11 項が -10 である等差数列の第 n 項を求めよ．

(解) 初項を a, 公差を d とおくと, 第 4 項は $a+3d$, 第 11 項は $a+10d$ であるから $\begin{cases} a+3d=4 \\ a+10d=-10 \end{cases}$

これを解いて，公差 $d=-2$，初項 $a=10$ より，一般項は $10+(-2)\cdot(n-1) = \boldsymbol{-2n+12}$.

【例題 6】　以下の $\boxed{}$ に適当な数値・式を入れなさい．

1. 初項が 3，第 7 項が 21 である等差数列がある．公差を d とすると，第 7 項は $3+\boxed{ア}d$ であり，これが 21 に等しいので $d=\boxed{イ}$ である．よって，第 n 項は $\boxed{ウ}$ である．
2. 第 3 項が 3，第 7 項が -7 である等差数列がある．初項を a，公差を d とすると，第 3 項について $a+\boxed{エ}d=3$, 第 7 項について $a+\boxed{オ}d=-7$ である．この連立方程式を解いて $d=\boxed{カ}$, $a=\boxed{キ}$ である．よって，第 n 項は $\boxed{ク}$ である．

【解答】

1. 第 7 項について，$3+{}_{(ア)}\underline{\boldsymbol{6}}d=21$ より，$d=\underline{\boldsymbol{3}}_{(イ)}$ である．よって，第 n 項は $3+3(n-1)=\underline{\boldsymbol{3n}}_{(ウ)}$ である．
2. 第 3 項について，$a+{}_{(エ)}\underline{\boldsymbol{2}}d=3$，第 7 項について $a+{}_{(オ)}\underline{\boldsymbol{6}}d=-7$，ここから $4d=-10 \iff d=\underline{\boldsymbol{-\frac{5}{2}}}_{(カ)}$，$a=\underline{\boldsymbol{8}}_{(キ)}$ である．よって，第 n 項は $8+(n-1)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\underline{\boldsymbol{-\frac{5}{2}n+\frac{21}{2}}}_{(ク)}$ である．

【練習 7：公差を求め，一般項を答える】

(1) 初項が 4，第 10 項が -50 である等差数列の，一般項を求めよ．

(2) 第 4 項が -4，第 10 項が 10 である等差数列の，一般項を求めよ．

【解答】

(1) 公差を d とする．第 10 項が -50 であるから $4+(10-1)d=-50 \iff d=-6$，よって一般項は $4+(n-1)(-6)=\boldsymbol{-6n+10}$.

(2) 初項を a，公差を d とする．第 4 項が -4，第 10 項が 10 より

$\begin{cases} a+3d=-4 \\ a+9d=10 \end{cases}$ となるので，これを解いて $d=\dfrac{7}{3}$，$a=-11$.

よって一般項は $-11+\dfrac{7}{3}(n-1)=\boldsymbol{\dfrac{7}{3}n-\dfrac{40}{3}}$.

D. 等差中項

項数 3 の等差数列 a, b, c において，公差は $b-a$，$c-b$ の両方に等しいことから，以下が導かれる．

等差中項

項数 3 の数列 a, b, c の真ん中の項について，以下が成り立つ．

数列 a, b, c が等差数列 $\iff 2b=a+c\left(\Leftrightarrow b=\dfrac{a+c}{2}\right)$

【例題 8】

1. 3 つの数 3, a, $3a$ が等差数列のとき，a の値を求めよ．
2. 3 つの数 a^2, $2a+1$, 2 が等差数列のとき，a の値を求めよ．

【解答】

1. 等差中項より $2a=3+3a$，これを解いて $\boldsymbol{a=-3}$.
2. 等差中項より $2(2a+1)=a^2+2 \iff a^2-4a=0$，これを解いて $\boldsymbol{a=0,\ 4}$.

E. 等差数列である事の証明

$a_{n+1}=a_n+d$ がすべての n で成り立つ数列が等差数列であったが，これは次のように言い換えられる．

等差数列であることの証明

「数列 $\{a_n\}$ が等差数列である」 $\iff$ 「$a_{n+1}-a_n$ が一定の値である」（一定の値が公差になる）

【暗記 9：等差数列であることの証明】

一般項が $a_n=4n+3$ である数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ．また，その公差と初項を求めよ．

【解答】 $a_{n+1}-a_n=\{4(n+1)+3\}-(4n+3)=4n+4+3-4n-3=4$ より，$a_{n+1}-a_n$ は一定の値 4 を取るので，$\{a_n\}$ は等差数列である．

公差は一定の値 **4** であり，初項は $a_1=\boldsymbol{7}$ である．

【練習 10：一般項が 1 次式の数列】

一般項が 1 次式 $a_n=pn+q$ である数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ．

【解答】　$a_{n+1} - a_n = \{p(n+1)+q\} - (pn+q) = pn + p + q - pn - q = p$ より，$a_{n+1} - a_n$ は一定の値 p を取るので，$\{a_n\}$ は等差数列である．

2. 等差数列の和

A. 等差数列の和の公式

数列において，最後の項を**末項**と言う．

たとえば，1 から 100 までの整数の和 S は，次のように考えると，初項 1 と末項 100 の和 101 をたくさん作る事ができる．

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ +) & S = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$
←101の100個の和

ここから，$S = \dfrac{1}{2} \times 101 \times 100 = 5050$ と計算できる．

同じようにして，初項 a，公差 d，項数 n の等差数列

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad \cdots, \quad a+(n-1)d$$
↑末項を l とおく

の和 S は次のように計算できる．

$$\begin{array}{rrcccccccccc} & S = & a & + & (a+d) & + & (a+2d) & + & \cdots & + & l \\ +) & S = & l & + & (l-d) & + & (l-2d) & + & \cdots & + & a \\ \hline & 2S = & (a+l) & + & (a+l) & + & (a+l) & + & \cdots & + & (a+l) \\ & = & n(a+l) & & & & & & & & \end{array}$$
←初項 a と末項 l の n 個の和

この両辺を 2 で割って，次の公式を得る．

等差数列の和の公式

> 初項 a，末項 l，項数 n の等差数列について，すべての項の和 $S = \dfrac{1}{2}n(a+l)$ である．

公差が d を用いると，末項 $l = a + (n-1)d$ より $S = \dfrac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$ と表す事もできる．

【例題 11】

1. 等差数列の和 $S_1 = 101 + 102 + 103 + 104 + \cdots + 140$ を求めよ．
2. 初項 20，公差 2，項数 100 の等差数列の和 S_2 を求めたい．
   (a) 末項はいくらか．　　(b) S_2 を求めよ．
3. 初項 20，末項 100，公差 4 の等差数列の和 S_3 を求めたい．
   (a) 末項 100 は第何項目か．　　(b) S_3 を求めよ．

【解答】

1. 初項 101，末項 140，項数 40 なので
   $S_1 = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{40}^{20}(101 + 140) = 20 \cdot 241 = \mathbf{4820}$.
2. (a) 末項は第 100 項なので，$20 + (100-1) \cdot 2 = \mathbf{218}$.
   (b) 初項 20，末項 218，項数 100 なので

$S_2 = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{100}^{50}(20 + 218) = 50 \cdot 238 = \mathbf{11900}.$

3. (a) 末項 100 を第 n 項目とすると $20 + (n-1) \cdot 4 = 100$，これを解いて $n = 21$，よって**第 21 項目**.

◀ 両辺をまず 4 で割ると $5+n-1=25$ となって解きやすい.

(b) 初項 20，末項 100，項数 21 なので

$S_3 = \dfrac{1}{2} \cdot 21(20 + 100) = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot 21 \cdot \cancel{120}^{60} = \mathbf{1260}.$

【練習 12：等差数列の和】

次の等差数列の和を求めよ.

(1) $3 + 8 + 13 + \cdots + 103$　(2) 初項 4，公差 5，項数 30 の等差数列　(3) $1 + 3 + 5 + \cdots + 35$

【解答】

(1) 初項 3，公差が 5 であるから，103 を第 n 項目とすると $3 + 5(n-1) = 103 \iff n = 21$ よって，初項 3，末項 103，項数 21 の和であるから

$\dfrac{1}{2} \cdot 21(3 + 103) = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot 21 \cdot \cancel{106}^{53} = \mathbf{1113}$

(2) 末項は第 30 項目 $4 + 5(30-1) = 149$ であるから，

和は $\dfrac{1}{\cancel{2}}\cancel{30}^{15}(4 + 149) = \mathbf{2295}$

(3) n 番目の奇数は $2n-1$ であるから，$2n - 1 = 35 \iff n = 18$ より項数は 18，よって和は $\dfrac{1}{\cancel{2}}\cancel{18}^{9}(1 + 35) = \mathbf{324}$

B.　余りが等しい整数の和

たとえば，3 で割って 1 余る 2 桁の整数は 10, 13, 16, 19, $\cdots$, 97 となり等差数列になっており

$3 \cdot 3 + 1,\quad 3 \cdot 4 + 1,\quad 3 \cdot 5 + 1,\quad 3 \cdot 6 + 1,\quad \cdots,\quad 3 \cdot 32 + 1$

と書き表すと，$32 - (3 - 1) = 30$ 個存在する．つまり，3 で割って 1 余る 2 桁の整数の和 S は，初項 10，末項 97，項数 30 の等差数列の和であるから $S = \dfrac{1}{2} \cdot 30(10 + 97) = 1605$ である.

【例題 13】 $\boxed{}$ に当てはまる数値を入れ，4 で割って 1 余るような 2 桁の整数の和を求めよ.

4 で割って 1 余る 2 桁の整数のうち，一番小さいものは $4 \cdot \boxed{ア} + 1 = \boxed{イ}$，一番大きいものは $4 \cdot \boxed{ウ} + 1 = \boxed{エ}$ である．よって，求める和は，初項 $\boxed{イ}$，末項 $\boxed{エ}$，項数 $\boxed{オ}$ の等差数列の和となり $\boxed{カ}$ と求められる.

【解答】 4 で割って 1 余る 2 桁の整数のうち，一番小さいものは $4 \cdot \underline{\mathbf{3}}_{(ア)} + 1 = \underline{\mathbf{13}}_{(イ)}$，一番大きいものは $4 \cdot \underline{\mathbf{24}}_{(ウ)} + 1 = \underline{\mathbf{97}}_{(エ)}$ である．よって，求める和は，初項 13，末項 97，項数 $24 - (3 - 1) = \underline{\mathbf{22}}_{(オ)}$ の等差数列の和となり

$\dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{22}^{11}(13 + 97) = \underline{\mathbf{1210}}_{(カ)}$ と求められる.

【練習 14：いろいろな整数の和】

2 桁の整数のうち，以下のものの和を求めよ．

(1) 6 で割って 1 余る数　(2) 4 の倍数　(3) 6 の倍数　(4) 4 で割り切れないもの

(5) 4 または 6 で割り切れるもの

【解答】

(1) $6\cdot 2+1=13$ から $6\cdot 16+1=97$ までの，$16-(2-1)=15$ 個の等差数列の和であるから $\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot 15\cancel{(13+97)}^{55} = \mathbf{825}$

(2) $4\cdot 3=12$ から $4\cdot 24=96$ までの，$24-(3-1)=22$ 個の等差数列の和であるから $\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{22}^{11}(12+96) = \mathbf{1188}$

(3) $6\cdot 2=12$ から $6\cdot 16=96$ までの，$16-(2-1)=15$ 個の等差数列の和であるから $\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot 15\cancel{(12+96)}^{54} = \mathbf{810}$

◀ (1) で足した 15 個の数字を，すべて 1 減らせばよいので $825-15=810$ とも求められる．

(4) 10 から 99 までの和から，(2) の答を引けばよい．
10 から 99 までの和は，初項 10，末項 99，項数 $99-(10-1)=90$ の等差数列であるから，$\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{90}^{45}(10+99)-1188=\mathbf{3717}$

(5) (2) と (3) の和から，4 でも 6 でも割り切れる 12 の倍数を引けば良い．2 桁の 12 の倍数の和は，$12\cdot 1=12$ から $12\cdot 8=96$ までの 8 個の等差数列の和であるから $\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{8}^{4}(12+96)=432$．よって，$1188+810-432=\mathbf{1566}$

2.3 等比数列

1. 等比数列の一般項

A. 等比数列の定義

数列 $\{a_n\}$ ： 3, 6, 12, 24, 48, $\cdots$ は，初項 3 に繰り返し 2 を掛けてできており，$a_{n+1}=2a_n$ がすべての n で成り立っている．

このように，初項に繰り返し r を掛けてできる数列，つまり $a_{n+1}=ra_n$ がすべての n で成り立つ数列を等比数列と言い，r を公比という．たとえば，等比数列 8, 4, 2, 1, $\dfrac{1}{2}$, $\cdots$ の公比は $\dfrac{1}{2}$，等比数列 $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$ の公比は -1 である．

【例題 15】 次の等比数列の $\boxed{}$ に適する値を入れなさい．また，それぞれの公差を求めよ．

i. 1, 3, $\boxed{}$, 27, $\boxed{}$, $\cdots$　ii. 9, 3, 1, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\cdots$　iii. $2, -4, 8$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\cdots$

iv. 9, 6, 4, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\cdots$　v. $\boxed{}$, 3, 9, $\boxed{}$, $\cdots$

【解答】

i. 初項 1，公比 3 より，1, 3, **9**, 27, **81**, $\cdots$

ii. 初項 9，公比 $\dfrac{1}{3}$ より，9, 3, 1, $\mathbf{\dfrac{1}{3}}$, $\mathbf{\dfrac{1}{9}}$, $\cdots$

iii. 初項 2，公比 -2 より，2, -4, 8, $\mathbf{-16}$, $\mathbf{32}$, $\cdots$

iv. 初項 9，公比 $\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$ より，9, 6, 4, $\mathbf{\dfrac{8}{3}}$, $\mathbf{\dfrac{16}{9}}$, $\cdots$

v. 公比 3 より，**1**, 3, 9, **27**, $\cdots$

B. 等比数列の一般項（第 n 項）

たとえば，数列 $\{a_n\}$ ： 3, 6, 12, 24, 48, $\cdots$ において，$a_5=48$ は，3 に公比 2 を 4 回掛けて求められ，a_{10} は，3 に 2 を 9 回掛けると求められる．このように，初項に公比を掛ける回数は，項数より 1 小さく，一般に，次の事が分かる．

等比数列

初項 a，公比 r の等差数列 $\{a_n\}$ について，第 n 項は，a に r を $n-1$ 回掛けた結果であり，$a_n=ar^{n-1}$ で求められる．

【例題 16】 次の $\boxed{}$ に当てはまる適当な数値・式を答えよ．

1. 初項 1，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$ に公比 2 を $\boxed{ア}$ 回掛けて $a_4=\boxed{イ}$ を得る．
   また，$a_1=1$ に公比 2 を $\boxed{ウ}$ 回掛けて $a_6=\boxed{エ}$ を得る．
   一般項（第 n 項）は，初項 1 に公比 2 を $\boxed{オ}$ 回掛けて $a_n=\boxed{カ}$ を得る．
2. a_n の逆数を順に並べた数列 $\{b_n\}$ ： 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$, $\cdots$ は初項 $\boxed{キ}$，公比 $\boxed{ク}$ の等比数列であり，
   一般項 $b_n=\boxed{ケ}$ である．
3. 初項 2，公比 3 の等比数列の一般項は $\boxed{コ}$ である．
4. 初項 5，公比 -2 の等比数列の一般項は $\boxed{サ}$ である．

【解答】

1. 初項 1，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ は 1, 2, 4, $\cdots$ と続き，$a_1=1$ に公比 2 を $_{(ア)}\underline{\mathbf{3}}$ 回掛けて $a_4=1\cdot 2^3=\underline{\mathbf{8}}_{(イ)}$ を得る．
   また，$a_1=1$ に公比 2 を $_{(ウ)}\underline{\mathbf{5}}$ 回掛けて $a_6=1\cdot 2^5=\underline{\mathbf{32}}_{(エ)}$ を得る．
   一般項（第 n 項）は，初項 1 に公比 2 を $_{(オ)}\underline{\boldsymbol{n-1}}$ 回掛けて
   $a_n=1\cdot 2^(n-1)=\underline{\mathbf{2^{n-1}}}_{(カ)}$ を得る．
2. $\{b_n\}$ ： 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$, $\cdots$ は初項 $\underline{\mathbf{1}}_{(キ)}$，公比 $\underline{\mathbf{\dfrac{1}{2}}}_{(ク)}$ の等比数列であり，
   一般項は $1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\underline{\left(\mathbf{\dfrac{1}{2}}\right)^{\boldsymbol{n-1}}}_{(ケ)}$ である．
3. コ : $\mathbf{2\cdot 3^{n-1}}$
4. サ : $\mathbf{5\cdot(-2)^{n-1}}$

◀ $\mathbf{\dfrac{1}{2^{n-1}}}$ でもよい．

C. 等比数列と指数法則

数学 I で学んだように，次のような指数法則が成り立っていた．

指数法則

m，n が自然数のとき[*1]，一般に次のような性質が成り立つ．

i) $a^m a^n = a^{m+n}$　　ii) $(a^m)^n = a^{mn}$　　iii) $(ab)^n = a^n b^n$

また，他にも，$a^0 = 1$，$\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m < n \text{ のとき}) \end{cases}$ なども成り立つ．

このため，次のような計算が可能である．

- 初項 4，公比 2 の等比数列の一般項は，$4 \cdot 2^{n-1} = 2^{2+(n-1)} = 2^{n+1}$
- 初項 3，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列の一般項は，$3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{3}{3^{n-1}} = \dfrac{1}{3^{n-2}} \left(= \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}\right)$
- $6 \cdot 4^{n-1} = 3 \cdot 2 \cdot \left(2^2\right)^{n-1} = 3 \cdot 2^{1+2(n-1)} = 3 \cdot 2^{2n-1}$

【練習 17：等比数列の一般項】

次の等比数列の一般項を求めなさい．

(1) 初項が 2，公比が 2　　(2) 初項が $\dfrac{2}{5}$，公比 5　　(3) 初項が -3，公比 $\dfrac{1}{3}$

【解答】

(1) $2 \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{2^n}$

(2) $\dfrac{2}{\cancel{5}} \cdot 5^{\cancel{n-1}\ n-2} = \boldsymbol{2 \cdot 5^{n-2}}$

(3) $-3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = -3 \cdot \dfrac{1}{3^{n-1}} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{3^{n-2}}}$

D. 条件から初項や公比を求める

(例)

第 3 項が 4，第 7 項が 64 である等比数列の第 n 項を求めよ．

（解）初項を a，公比を r とおくと，第 4 項は ar^{4-1}，第 7 項は ar^{7-1} であるから $\begin{cases} ar^2 = 4 \\ ar^6 = 64 \end{cases}$

2 式より $\dfrac{ar^6}{ar^2} = \dfrac{64}{4} \iff r^4 = 16$ これを解いて，$r = \pm 2$, $a = 1$.

$r = 2$ のときは第 n 項は $1 \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{2^{n-1}}$，$r = -2$ のときは第 n 項は $1 \cdot (-2)^{n-1} = \boldsymbol{(-2)^{n-1}}$.

[*1] 数学 II で学ぶように，m, n は負の整数でも構わない．また，$a > 0$ とすれば，m, n は任意の実数で成り立つ．

【例題 18】 以下の $\boxed{}$ に当てはまる数値・式を答えよ．

1. 初項が 5，第 6 項が 160 である等比数列の一般項を求めたい．公比を r とすると，第 6 項が 160 であるから $\boxed{ア}\, r^{\boxed{イ}} = 160$，これを解いて $r = \boxed{ウ}$ であるから，一般項は $\boxed{エ}$ になる．
2. 第 3 項が 36，第 7 項が $\dfrac{64}{9}$ である等比数列がある．初項を a，公比を r とすると，第 3 項について $ar^{\boxed{オ}} = 36$，第 7 項について $ar^{\boxed{カ}} = \dfrac{64}{9}$ であるから，$r = \boxed{キ}$，$\boxed{ク}$ になる．いずれの場合も $a = \boxed{ケ}$ となるから，一般項は $\boxed{コ}$ または $\boxed{サ}$ となる．
3. 第 2 項が 3，第 5 項が -24 である等比数列の一般項を求めよ．
4. 第 4 項が 4，第 6 項が 16 である等比数列の一般項を求めよ．

【解答】

1. 公比を r とすると，第 6 項が 160 であるから $\underline{\mathbf{5}}_{(ア)} r^{\underline{\mathbf{5}}_{(イ)}} = 160$，
これを解いて $r^5 = 32 \iff r = \underline{\mathbf{2}}_{(ウ)}$ である．
よって，一般項は $\underline{\mathbf{5 \cdot 2^{n-1}}}_{(エ)}$ になる．
2. 第 3 項について $ar^{\underline{\mathbf{2}}_{(オ)}} = 36$ ········ ①，
第 7 項について $ar^{\underline{\mathbf{6}}_{(カ)}} = \dfrac{64}{9}$ であるから，
$\dfrac{ar^6}{ar^2} = \dfrac{\frac{64}{9}}{36} = \dfrac{\cancel{64}^{16}}{9 \cdot \cancel{36}_9} \iff r^4 = \dfrac{16}{81}$ となる．ここから $r^2 = \dfrac{4}{9}$ であるから $r = \underline{\mathbf{\dfrac{2}{3}}}_{(キ)}, \underline{\mathbf{-\dfrac{2}{3}}}_{(ク)}$ になる．
いずれの場合も，$r^2 = \dfrac{4}{9}$ を①に代入して $\dfrac{4}{9}a = 36 \iff a = \underline{\mathbf{81}}_{(ケ)}$ となるから，一般項は $\underline{\mathbf{81 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}}_{(コ)}$ または $\underline{\mathbf{81 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}}_{(サ)}$ となる．
3. 初項を a，公比を r とすると，第 2 項について $ar = 3$ ········ ②，
第 5 項について $ar^4 = -24$ であるから $\dfrac{ar^4}{ar} = \dfrac{-24}{3} \iff r^3 = -8$，
よって $r = -2$．②より $a = -\dfrac{3}{2}$ であるから，一般項は $\mathbf{-\dfrac{3}{2}(-2)^{n-1}}$．
4. 初項 a，公比 r とすると，第 4 項について $ar^3 = 4$ ········ ③，第 6 項について $ar^5 = 16$ であるから，$\dfrac{ar^5}{ar^3} = \dfrac{16}{4} \iff r^2 = 4$ より $r = \pm 2$．
$r = 2$ のとき，③より $a = \dfrac{1}{2}$ なので一般項は $\dfrac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = \mathbf{2^{n-2}}$
$r = -2$ のとき，③より $a = -\dfrac{1}{2}$ なので一般項は $-\dfrac{1}{2} \cdot (-2)^{n-1} = \mathbf{(-2)^{n-2}}$

◀ -2 で約分して $3 \cdot (-2)^{n-2}$ でもよい．

E. 等比中項

項数が 3 の等比数列 a, b, c において，公比は $\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{c}{b}$ の両方に等しいことから，以下が導かれる．

等比中項

項数 3 の数列 a, b, c の真ん中の項について，以下が成り立つ．

数列 a, b, c が等比数列 $\iff b^2 = ac$

【例題 19】

1. 3 項の数列 a, 4, $4a$ が等比数列のとき，a の値を求めよ.
2. $a \neq 0$ とする．3 項の数列 1, a, $2a$ が等比数列のとき，a の値を求めよ.

【解答】

1. 等比中項より $4^2 = a \cdot 4a \iff a^2 = 4$，よって $\boldsymbol{a = \pm 2}$.
2. 等比中項より $a^2 = 1 \cdot 2a \iff a^2 - 2a = 0$，$a \neq 0$ より $\boldsymbol{a = 2}$.

2. 等比数列の和

A. 等比数列の和の公式

たとえば，初項 1 で公比 2 の等比数列の 10 項までの和 $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$ は次のように計算できる.

$$\begin{array}{rrcccccccccc}
S = & 1 & +2 & +2^2 & +2^3 & +2^4 & +2^5 & +2^6 & +2^7 & +2^8 & +2^9 & \\
-)\quad 2S = & & 2 & +2^2 & +2^3 & +2^4 & +2^5 & +2^6 & +2^7 & +2^8 & +2^9 & +2^{10} \\
\hline
(1-2)S = & 1 & & & & & & & & & & -2^{10}
\end{array}$$

ここから，$S = \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \dfrac{1 - 1024}{-1} = 1023$ と計算できる.

同じようにして，初項 a，公比 d，項数 n の等比数列

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad \cdots, \quad ar^{n-1}$$

の和 S は次のように計算できる.

$$\begin{array}{rcccccc}
S = & a & +ar & +ar^2 & +\cdots & +ar^{n-1} & \\
-)\quad S = & & ar & +ar^2 & +\cdots & +ar^{n-1} & +ar^n \\
\hline
(1-r)S = & a & & & & & -ar^n = a(1-r^n)
\end{array}$$

$r \neq 1$ であれば，この両辺を $1 - r$ で割って，次の公式を得る.

等比数列の和の公式

初項 a，公比 $r (\neq 1)$，項数 n の等比数列について，すべての項の和 $S = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ である.
$r = 1$ のときは，$S = a + a + \cdots + a = na$ である.

……分母が正の数になるよう，$r > 1$ のときは $S = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ を，$r < 1$ のときは $S = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ を用いるとよい.

【例題 20】 次の等比数列の和を求めよ．ただし，指数の値は計算しなくても良い．

1. 初項 2，公比 3，項数 20
2. 初項 3，公比 -2，項数 n
3. $2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{10}$
4. $3+1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^{10}}$

【解答】

1. $\dfrac{\cancel{2}(3^{20}-1)}{\cancel{3-1}} = \mathbf{3^{20}-1}$
2. $\dfrac{\cancel{3}\{1-(-2)^n\}}{\cancel{1-(-2)}} = \mathbf{1-(-2)^n}$
3. 初項 2，公比 2，項数 10 なので，$\dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1} = \mathbf{2(2^{10}-1)}$
4. 初項 3，公比 $\dfrac{1}{3}$，項数 12 なので

$$\frac{3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\right\}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\right\}}{\frac{4}{3}} = \mathbf{\frac{9}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\right\}}$$

◀ $2^{11}-2$ でもよい．

◀ 分母と分子に 3 を掛けた

【例題 21】 等比数列の和 $\dfrac{1}{128}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{32}+\cdots+128$ を求めよ．答の指数は，計算しなくても良い．

【解答】 末項 128 を第 n 項目とする．この等比数列は初項 $\dfrac{1}{128}$，公比 2 であるから

$$\frac{1}{128}\cdot 2^{n-1} = 128 \iff 2^{n-1} = 128\cdot 128 = 2^7\cdot 2^7 = 2^{14}$$

よって，$n=15$ であるから，この和は初項 $\dfrac{1}{128}$，公比 2，項数 15 であり，

$$\frac{\frac{1}{128}(2^{15}-1)}{2-1} = \mathbf{\frac{1}{128}(2^{15}-1)}$$

2.4 和の記号 $\sum$

1. 和の記号 $\sum$（シグマ）の定義

たとえば，次の数列の和 S はいくつだろうか.

$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 12$ ……………………… ①

S を等差数列の和と考えれば $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$ である．しかし，S を 12 の正の約数の和と考えれば $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12$ である．つまり，S の表現①は曖昧さを残している.

このような曖昧さをなくすには，次で定義される和の記号 $\sum$ を用いればよい.

和の記号 $\sum$

> 数列 $\{a_n\}$ の，第 m 項から第 n 項までの全ての項の和は，記号 $\sum$（シグマ）を用いて $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ で表わされる.
>
> つまり，$\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n$ である.

……多くの場合，a_k の部分には，具体的な k の式を入れることが多い．たとえば，次のようになる.

一般項 k の 第 1〜12 項の和 $\rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{12} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$

一般項 $2k$ の 第 1〜10 項の和 $\rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{10} 2k = \underbrace{2}_{k=1\text{の時の }2k} + \overbrace{4}^{k=2\text{の時の }2k} + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + \underbrace{20}_{k=10\text{の時の }2k}$

また，上の定義や例における k は，どのような文字でもよい.

一般項 $i^2 - 6$ の 第 1〜5 項の和 $\rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{5}(i^2 - 6) = (1^2 - 6) + (2^2 - 6) + (3^2 - 6) + (4^2 - 6) + (5^2 - 6)$

【例題 22】 次の式を，（例）のように $\sum$ を使わずに書き並べなさい．各項の累乗は計算しなくて良い.

（例） $\sum\limits_{k=5}^{10}(k^3 - 2k) = (5^3 - 10) + (6^3 - 12) + (7^3 - 14) + (8^3 - 16) + (9^3 - 18) + (10^3 - 20)$

1. $\sum\limits_{k=1}^{7} 3k$　　2. $\sum\limits_{k=1}^{5} k^4$　　3. $\sum\limits_{i=3}^{7}(i^5 + 1)$　　4. $\sum\limits_{k=1}^{5} 2$

【解答】

1. $\sum\limits_{k=1}^{7} 3k = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21$
2. $\sum\limits_{k=1}^{5} k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4$
3. $\sum\limits_{i=3}^{7}(i^5 + 1) = (3^5 + 1) + (4^5 + 1) + (5^5 + 1) + (6^5 + 1) + (7^5 + 1)$
4. $\sum\limits_{k=1}^{5} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

◀ $k = 1$ のとき $3k = 3$，$k = 2$ のとき $3k = 6$，…

2. $\sum$ を用いた計算

A. $\sum_{k=1}^{n} c$ の和

たとえば，$\sum_{k=1}^{n} 3 = 3+3+3+\cdots+3$ は，n 個の 3 の和であり，$3n$ になる．

一般に，$\sum_{k=1}^{n} c = c+c+c+\cdots+c$ は n 個の c の和であるから，$\sum_{k=1}^{n} c = cn$ が成り立つ．

B. $\sum_{k=1}^{n} k$ の和

$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n$ は，初項 1，末項 n，項数 n 等差数列の和であるから $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ である．

たとえば，$\sum_{k=1}^{20} k = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{20}^{10}(20+1) = 210$，$\sum_{k=1}^{200} k = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{200}^{100}(200+1) = 20100$ である．

【例題 23】 $\sum_{k=1}^{n} 1 = \boxed{シ}$，$\sum_{k=1}^{100} 2 = \boxed{ス}$，$\sum_{k=1}^{100} k = \boxed{セ}$，$\sum_{k=1}^{40} k = \boxed{ソ}$ のうち，値 $\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ を用いて

$$\sum_{k=41}^{100} k = 41+42+43+\cdot\cdot+100 = (1+2+3+\cdot\cdot+100)-(1+2+3+\cdot\cdot+40)$$
$$= \sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{40} k = \boxed{タ}$$

【解答】 $\sum_{k=1}^{n} 1 =$ （n 個の 1 の和）$= \underline{\boldsymbol{n}}$（シ），$\sum_{k=1}^{100} 2 = 2\times 100 = \underline{\mathbf{200}}$（ス）

$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{100}^{50}(1+100) = \underline{\mathbf{5050}}$（セ），$\sum_{k=1}^{40} k = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{40}^{20}(1+40) = \underline{\mathbf{820}}$（ソ）

$\sum_{k=41}^{100} k = \sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{40} k = 5050 - 820 = \underline{\mathbf{4230}}$（タ）

◀ $\sum_{k=1}^{100} 2 =$（100 個の 2 の和）

C. $\sum_{k=1}^{n} 2^k$，$\sum_{k=1}^{n} 3^k$ などの和

$\sum_{k=1}^{n} 3^k$ のように，一般項が 3^k であり指数部分が変化する場合の和は，次のように，等比数列の和の公式を用いると良い．

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = 3+3^2+3^3+\cdots+3^n = \frac{3(3^n-1)}{3-1} = \frac{3}{2}(3^n-1) \quad \Leftarrow$$ 初項３，公比３，項数ｎの等比数列の和

【例題 24】 次の和を求めよ．　1. $\sum_{k=1}^{n} 2^k$　2. $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$　3. $\sum_{k=1}^{n-1} 5^k$　4. $\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$

【解答】

1. $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n = \frac{2(2^n-1)}{2-1} = \mathbf{2(2^n-1)}$

◀ 初項 2，公比 2，項数 n

2. $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n$ は初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$，項

数 n なので $\dfrac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 5^k = 5^1 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{5(5^{n-1}-1)}{5-1} = \boldsymbol{\frac{5}{4}(5^{n-1}-1)}$ ◀ 初項 5，公比 5，項数 $n-1$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1} = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1(5^n-1)}{5-1} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(5^n-1)}$ ◀ 初項 1，公比 5，項数 n

D. $\sum$ の分配

記号 $\sum$ には，文字式の分配法則のような計算規則が成り立ち，たとえば，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3) = 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}3$ である．これは，次のようにして分かる．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(4k+3) &= (4\cdot1+3)+(4\cdot2+3)+(4\cdot3+3)+\cdots+(4n+3)\\ &= 4\cdot1+4\cdot2+4\cdot3+\cdots+4n+3+3+3+\cdots+3 \quad \Leftarrow +3\text{は}n\text{個}\\ &= 4(1+2+3+\cdots+n)+(3+3+3+\cdots+3) = 4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}n(n+1)$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3 = 3n$ であるから $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3) = 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n = 2n^3+5n$ と分かる．

同様に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-1) = 3\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1 = 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n = \frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n-n = \frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$ と計算できる．

【例題 25】 次の和を計算しなさい．

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$　2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+1)$　3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2k+3)$　4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(2k+3)$

【解答】

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1 = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}n(n+1)-n = n^2+n-n = \boldsymbol{n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+1) = 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = \cancel{4}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}n(n+1)+n = \boldsymbol{2n^2+3n}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2k+3) = -2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}3 = -\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}n(n+1)+3n = \boldsymbol{-n^2+2n}$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(2k+3) = 2\sum_{k=1}^{n+1}k + \sum_{k=1}^{n+1}3 = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(n+1)(n+2)+3(n+1) = \boldsymbol{(n+1)(n+5)}$ ◀ 展開して n^2+6n+5 でもよい．

$\sum$ の分配・定数倍

任意の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$，実数 p, q について，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k) = p\sum_{k=1}^{n}a_k + q\sum_{k=1}^{n}b_k$ が成り立つ[*2]．

（証明）
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k) &= (pa_1+qb_1)+(pa_2+qb_2)+\cdots+(pa_n+qb_n)\\ &= pa_1+pa_2+\cdots+pa_n+qb_1+qb_2+\cdots+qb_n\\ &= p(a_1+a_2+\cdots+a_n)+q(b_1+b_2+\cdots+b_n) = p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

[*2] これを線形性（ある操作 P に対し，$P(ax+by) = aP(x)+bP(y)$ のような恒等式が成り立つこと）という．

E. $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ の和

Σ の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ の証明}\right)$　$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ に対し，$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ とする．

このとき $a_1 = S_1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$ であり，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\} \\ &= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - (n-1)(2n-1)\} = \frac{1}{6}n\{(2n^2+3n+1) - (2n^2-3n+1)\} = n^2 \end{aligned}$$

である．$n = 1$ でも成立しているので，$a_n = n$ であり，$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が示された．

【例題 26】 $\sum_{k=1}^{15} k^2 = \boxed{\text{ア}}$，$\sum_{k=1}^{30} k^2 = \boxed{\text{イ}}$，$\sum_{k=1}^{10} k^3 = \boxed{\text{ウ}}$，$\sum_{k=1}^{20} k^3 = \boxed{\text{エ}}$ である．これらの値を使い，以下の値を求められる．

$$\begin{aligned} \sum_{k=16}^{30} k^2 = 16^2 + 17^2 + \cdots + 30^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 30^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 15^2) \\ &= \sum_{k=1}^{30} k^2 - \sum_{k=1}^{15} k^2 = \boxed{\text{オ}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=11}^{20} k^3 = 11^3 + 12^3 + \cdots + 20^3 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 20^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3) \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^3 - \sum_{k=1}^{10} k^3 = \boxed{\text{カ}} \end{aligned}$$

【解答】 $\sum_{k=1}^{15} k^2 = \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot (15+1) \cdot (2 \cdot 15 + 1) = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \cancel{15}^5 \cdot \cancel{16}^8 \cdot 31 = \underline{\mathbf{1240}}$（ア）

$\sum_{k=1}^{30} k^2 = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \cancel{30}^5 \cdot 31 \cdot 61 = \underline{\mathbf{9455}}$（イ），$\sum_{k=1}^{10} k^3 = \left\{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{10}^5 \cdot 11\right\}^2 = \underline{\mathbf{3025}}$（ウ）

$\sum_{k=1}^{20} k^3 = \left\{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{20}^{10} \cdot 21\right\}^2 = \underline{\mathbf{44100}}$（エ）

$\sum_{k=16}^{30} k^2 = \sum_{k=1}^{30} k^2 - \sum_{k=1}^{15} k^2 = 9455 - 1240 = \underline{\mathbf{8215}}$（オ）

$\sum_{k=11}^{20} k^2 = \sum_{k=1}^{20} k^3 - \sum_{k=1}^{10} k^3 = 44100 - 3025 = \underline{\mathbf{41075}}$（カ）

F.　いろいろな $\sum$ の和

これまで学んだ $\sum$ に関する公式をすべてまとめると，以下のようになる．

$\sum$ の公式

- 一般項が定数，k，k^2，k^3 の場合，和は以下のようになる．

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c = cn, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

- 一般項が 2^k，3^k のように指数部分が変化する場合の和は，等比数列の和の公式を用いると良い．

例：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3(3^n-1)}{3-1} = \frac{3}{2}(3^n-1)$ ⇐ 初項3，公比3，項数n の等比数列の和

（例）

$$\sum_{k=1}^{n}(2^k - 6k^2) = \sum_{k=1}^{n} 2^k - 6\sum_{k=1}^{n} k^2$$

↙初項2，公比2，項数nの等比数列の和

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - 6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{2(2^n-1)}{2-1} - n(n+1)(2n+1) = \mathbf{2(2^n-1) - n(n+1)(2n+1)}$$

【例題 27】　次の和を計算しなさい．　1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5^k + 2k)$　2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4^k + 4k^3)$　3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1} + 3k^2)$

【解答】

1. （与式）$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} 5^k + 2\sum_{k=1}^{n} k$

$$= (5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^n) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{5(5^n-1)}{5-1} + n(n+1) = \mathbf{\frac{5}{4}(5^n-1) + n(n+1)}$$

2. （与式）$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} 4^k + 4\sum_{k=1}^{n} k^3$

$$= (4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n) + 4\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$= \frac{4(4^n-1)}{4-1} + 4\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \mathbf{\frac{4}{3}(4^n-1) + n^2(n+1)^2}$$

3. （与式）$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} + 3\sum_{k=1}^{n} k^2$

$$= (2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1}) + 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{2^2(2^n-1)}{2-1} + \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \mathbf{4(2^n-1) + \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)}$$

G. 多項式の $\sum$ の計算と因数分解

多項式の和を $\sum$ を用いて計算するとき，共通因数 n, $n+1$ でまとめたり，通分を使って計算すると良い．

（例）

和 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-k-1)$, (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2+k)$ を計算しなさい．

(1)（与式）$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) - n$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}\cdot 3n(n+1) - \frac{1}{6}\cdot 6n$ ⇐ 6で通分した

$\displaystyle = \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 3(n+1) - 6\}$ ⇐ $\frac{1}{6}n$ でまとめた

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1-3n-3-6)$ ⇐ (　) の中を計算，可能なら因数分解

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(2n^2-8) = \frac{1}{6}n\cdot 2(n^2-4) = \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n-2)(n+2)}$

(2)（与式）$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}k^3 + \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle = \frac{3}{12}n^2(n+1)^2 + \frac{2}{12}n(n+1)(2n+1) + \frac{6}{12}n(n+1)$

$\displaystyle = \frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1) + 2(2n+1) + 6\}$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+8)}$ ⇐ 因数分解できないので終わり

【練習 28：Σの計算】

次の和を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k^2+2k+5)$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(2k^2+1)$　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+2)(k-1)$

【解答】

(1)（与式）$\displaystyle = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle = \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_2}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)+1\}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+2) = \boldsymbol{n(n+1)^2}$

(2)（与式）$\displaystyle = 6\sum_{k=1}^{n}k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}5$

$\displaystyle = \cancel{6}\cdot\frac{1}{\cancel{6}}n(n+1)(2n+1) + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}n(n+1) + 5n$

$= n\{(n+1)(2n+1) + (n+1) + 5\}$

$= \boldsymbol{n(2n^2+4n+7)}$

(3)（与式）$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}(2k^3+k) = 2\sum_{k=1}^{n}k^3 + \sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle = 2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + \frac{1}{2}n(n+1)$

$$= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1)\{n(n+1)+1\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)(n^2+n+1)}$$

(4) （与式）$= \sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2-2k)$
$$= \sum_{k=1}^{n}k^3 + \sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{3}{12}n^2(n+1)^2 + \frac{2}{12}n(n+1)(2n+1) - \frac{12}{12}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+2(2n+1)-12\}$$
$$= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n-10) = \boldsymbol{\frac{1}{12}n(n+1)(3n+10)(n-1)}$$

H.　色々な数列の和

n 個の数の和は $\sum_{k=1}^{n} a_k$ の形にすれば求められる．この際，第 k 項 a_k さえ求められればよい．

【練習 29：n 個の数の和】

(1) 和 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$ を求めよ．

(2) 和 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$ を求めよ．

【解答】

(1) 第 k 項が $k(k+1)$ である数列を，第 n 項目まで足しているので
$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4) = \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$$

(2) 第 k 項が $k(k+1)(k+2)$ である数列を，第 n 項目まで足しているので
$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k) = \sum_{k=1}^{n}k^3 + 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + n(n+1)$$
$$= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$$
$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6) = \boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

【練習 30：和の和】

(1) 次の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，第 k 項が，1 つの等差数列の初項から第 k 項の和になっている．

$\{a_n\}$: 1，$1+3$，$1+3+5$，$1+3+5+7$，$\cdots$，　$\{b_n\}$: 2，$2+5$，$2+5+8$，$2+5+8+11$，$\cdots$

（a）a_k を求めよ．　（b）和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．　（c）和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ を求めよ．

(2) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k} 2^l\right)$ を求めよ．

【解答】

(1)（a）a_k は，初項 1，公差 2，項数 k の等差数列の和である．その末項は $1+2(k-1)=2k-1$ であるから $a_k=\dfrac{1}{2}k\{1+(2k-1)\}=\boldsymbol{k^2}$

（b）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} k^2=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

（c）b_k は，初項 2，公差 3，項数 k の等差数列の和である．その末項は $2+3(k-1)=3k-1$ であるから $b_k=\dfrac{1}{2}k\{2+(3k-1)\}=\dfrac{1}{2}k(3k+1)$.

よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(3k+1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k\right)\\ &= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{6}\,2}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{4}n(n+1)\{(2n+1)+1\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)^2}\end{aligned}$$

(2)（与式）$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^k)$ であり，括弧内は初項 2，公比 2，項数 k の等比数列の和であるから $\dfrac{2(2^k-1)}{2-1}=2(2^k-1)$．よって

$$\begin{aligned}（与式）&= \sum_{k=1}^{n}2(2^k-1)=2\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}2\\ &= 2(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-2n\\ &= 2\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}-2n\\ &= 4(2^n-1)-2n=\boldsymbol{2^{n+2}-2n-4}\end{aligned}$$

◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}-\sum_{k=1}^{n}2$ でもよい．

◀ 括弧内は初項 2，公比 2，項数 n の等比数列の和

◀ 答は $4(2^n-1)-2n$ のままでもよい

【発展 31：階差数列の階差数列】

次の数列 $\{a_n\}$ は，階差数列の階差数列が等差数列になっている．一般項 a_n を n の式で表わせ．

$\{a_n\}$: 2, 3, 5, 9, 16, 27, $\cdots$

【解答】 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は 1, 2, 4, 7, 11, $\cdots$ であり，$\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ は 1, 2, 3, 4, $\cdots$ である．つまり，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + (c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1}) \\ &= 1 + \{1 + 2 + 3 + \cdot + (n-1)\} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 \end{aligned}$$

これは $n = 1$ でも $b_1 = 1$ に適する．同様に，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1\right) \\ &= 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + (n-1) \\ &= 2 + \frac{1}{12}n(2n^2 - 3n + 1) - \frac{1}{4}(n^2 - n) + n - 1 \\ &= \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{12}n - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n + n + 1 \\ &= \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{4}{3}n + 1 \end{aligned}$$

◀ この式は，定数項があり因数分解できるか分からない．そのため，展開する．

これは，$a_1 = 2$ に適する．よって，$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{4}{3}n + 1}$.

【発展 32：一般項に項数を含む数列】

和 $1\cdot n + 2\cdot(n-1) + 3\cdot(n-2) + \cdots + n\cdot 1$ を求めよ．

【解答】 この数列は，第 k 項が $k(n-k+1)$ である数列の和であるから

◀ 数列 n, $n-1$, $n-2$, $\cdots$, 1 の第 k 項は，$n-(k-1) = n-k+1$

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n}\{-k^2 + (n+1)k\} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)\sum_{k=1}^{n} k \\ &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1) + 3(n+1)\} = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

◀ k についての降べきの順

◀ n は k に無関係な定数であり，$\sum$ の外に出せる．

2.5 階差数列

1. 階差数列

A. 階差数列とは

数列 $\{a_n\}$: 3, 5, 9, 15, 23, $\cdots$, $\{b_n\}$: 2, 4, 6, 8, $\cdots$ を考えよう．このとき，右のように，$\{a_n\}$ の項の差 $a_{n+1} - a_n$ を書き出していくと，数列 $\{b_n\}$ になっている．

$\{a_n\}$: 3, 5, 9, 15, 23, $\cdots$

2 4 6 8 10

言い換えると，数列 $\{a_n\}$ は，初項 3 に $+b_1$，$+b_2$，$+b_3$，$\cdots$ を加えていって作られる数列である．

階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う項の差 $a_2 - a_1$，$a_3 - a_2$，$a_4 - a_3$，$\cdots$ を並べてできる数列を，$\{a_n\}$ の**階差数列**という．$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，一般に，$b_n = a_{n+1} - a_n$ となる．

$\{a_n\}$: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, $\cdots\cdots\cdots\cdots$, a_n, a_{n+1}, $\cdots$

b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_{n-1} b_n b_{n+1}

【例題 33】 以下の数列について，適当な言葉を選び，$\boxed{}$ に当てはまる値を答えなさい．

1. 数列 1, 4, 8, 13, $\cdots$ の階差数列を書き並べると $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, $\cdots$ であり，
   これは初項 $\boxed{エ}$，$\left\{\begin{matrix}公差\\公比\end{matrix}\right\}$ が $\boxed{オ}$ の $\left\{\begin{matrix}等差\\等比\end{matrix}\right\}$ 数列である．
2. 数列 2, 3, 5, 9, $\cdots$ の階差数列を書き並べると $\boxed{カ}$, $\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$, $\cdots$ であり，
   これは初項 $\boxed{ケ}$，$\left\{\begin{matrix}公差\\公比\end{matrix}\right\}$ が $\boxed{コ}$ の $\left\{\begin{matrix}等差\\等比\end{matrix}\right\}$ 数列である．
3. 数列 $-10, -8, -2$, 16, $\cdots$ の階差数列を書き並べると $\boxed{サ}$, $\boxed{シ}$, $\boxed{ス}$, $\cdots$ であり，
   これは初項 $\boxed{セ}$，$\left\{\begin{matrix}公差\\公比\end{matrix}\right\}$ が $\boxed{ソ}$ の $\left\{\begin{matrix}等差\\等比\end{matrix}\right\}$ 数列である．

【解答】

1. 階差数列は $\underline{3}_{(ア)}$, $\underline{4}_{(イ)}$, $\underline{5}_{(ウ)}$, $\cdots$ であるから，
   初項 $\underline{3}_{(エ)}$，**公差** $\underline{1}_{(オ)}$ の**等差**数列である．
2. 階差数列は $\underline{1}_{(カ)}$, $\underline{2}_{(キ)}$, $\underline{4}_{(ク)}$, $\cdots$ であるから，
   初項 $\underline{1}_{(ケ)}$，**公比** $\underline{2}_{(コ)}$ の**等比**数列である．
3. 階差数列は $\underline{2}_{(サ)}$, $\underline{6}_{(シ)}$, $\underline{18}_{(ス)}$, $\cdots$ であるから，
   初項 $\underline{2}_{(セ)}$，**公比** $\underline{3}_{(ソ)}$ の**等比**数列である．

◀ 階差数列は順に，$4 - 1 = 3$，$8 - 4 = 4$，$13 - 8 = 5$ である．

B. 階差数列を用いて一般項を求める

たとえば右の数列の第 5 項目 23 は，初項 $a_1 = 3$ に，階差数列の

$\{a_n\}$: 3, 5, 9, 15, 23, $\cdots$

2 4 6 8 10

第 1〜4 項を足し

$$3 + (2 + 4 + 6 + 8) = 23$$

と計算できる．同様にして，以下のことが分かる．

階差数列を用いた一般項の計算

階差数列が $\{b_n\}$ である数列 $\{a_n\}$ は，$n \geqq 2$ のとき，以下で求められる．

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) \quad \left(= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \right)$$

$$a_1 \xrightarrow{b_1} a_2 \xrightarrow{b_2} a_3 \xrightarrow{b_3} \cdots\cdots\cdots\cdots \xrightarrow{b_{n-1}} a_n \xrightarrow{b_n} \cdots$$

この節においては，特に断りがなければ $\{a_n\}$ の階差数列は等差または等比数列とする．

（例）

数列 $\{a_n\}$ ： 3, 5, 9, 15, 23, $\cdots$ の一般項を求めよ．

（解）$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は 2, 4, 6, 8 であり，初項 2，公差 2 の等差数列である．よって，一般項 $b_n = 2 + 2(n-1) = 2n$ である．

つまり，$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$ は初項 2，末項 $b_{n-1} = 2(n-1)$，項数 $n-1$ の等差数列の和であるから

$$a_n = 3 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) = 3 + \frac{1}{2}(n-1)\{2 + 2(n-1)\} = 3 + \frac{1}{2}(n-1)\cdot 2n = n^2 - n + 3 \quad (n \geqq 2)$$

これは，$n = 1$ のとき 3 であり，$a_1 = 3$ に適する．よって，$a_n = n^2 - n + 3$.

$n = 1$ のときに適することの確認は，階差数列の一般項を求める時には必ず必要である．

【例題 34】 $\boxed{}$ に適する式・値を入れ，数列 $\{a_n\}$ ： 4, 7, 12, 19, $\cdots$ の一般項を求めよ．

（解）$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$, $\cdots$ であり，初項 $\boxed{\text{エ}}$，$\left\{\begin{matrix}\text{公差}\\\text{公比}\end{matrix}\right\}$ が $\boxed{\text{オ}}$ の $\left\{\begin{matrix}\text{等差}\\\text{等比}\end{matrix}\right\}$ 数列であるので，一般項 $b_n = \boxed{\text{カ}}$ である．つまり

$$a_n = \boxed{\text{エ}} + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) = \boxed{\text{キ}} \quad (n \geqq 2)$$

これは，$n = \boxed{\text{ク}}$ のとき $\boxed{\text{ケ}}$ であり，$a_1 = \boxed{\text{エ}}$ に適する．よって，$a_n = \boxed{\text{キ}}$.

【解答】 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は $\underline{\mathbf{3}}_{(\text{ア})}$, $\underline{\mathbf{5}}_{(\text{イ})}$, $\underline{\mathbf{7}}_{(\text{ウ})}$, $\cdots$ であり，初項 $\underline{\mathbf{3}}_{(\text{エ})}$，**公差**が $\underline{\mathbf{2}}_{(\text{オ})}$ の**等差**数列であるので，一般項 $b_n = 3 + 2(n-1) = \underline{\mathbf{2n+1}}_{(\text{カ})}$ である．つまり，和 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$ は初項 3，末項 $b_{n-1} = 2(n-1)+1 = 2n-1$，項数 $n-1$ の等差数列の和であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n = 4 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) &= 4 + \frac{1}{2}(n-1)\{3 + (2n-1)\} \\ &= 4 + \frac{1}{2}(n-1)(2n+2) = \underline{\mathbf{n^2+3}}_{(\text{キ})} \end{aligned}$$

これは，$n = \underline{\mathbf{1}}_{(\text{ク})}$ のとき $n^2 + 3 = 1^2 + 3 = \underline{\mathbf{4}}_{(\text{ケ})}$ であり，$a_1 = 4$ に適する．よって，$a_n = n^2 + 3$.

【例題 35】 次の数列の一般項を求めよ．

a) 1, 4, 11, 22, $\cdots$　　b) $-2, -1$, 1, 5, 13, $\cdots$　　c) $-5, -3$, 3, 13, $\cdots$

【解答】

a) 階差数列は 3, 7, 11, $\cdots$ となって初項 3，公差 4 の等差数列であり，一般項は $3+4(n-1)=4n-1$ である．

階差数列の初項から第 $n-1$ 項までの和は，初項 3，末項 $4(n-1)-1=4n-5$，項数 $n-1$ の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}(n-1)\{3+(4n-5)\}=\frac{1}{2}(n-1)(4n-2)=(n-1)(2n-1)$$

よって，$n \geqq 2$ のとき，元の数列の一般項は

$$1+(n-1)(2n-1)=2n^2-3n+2$$

である．これは，$n=1$ のとき $2-3+2=1$ となり初項に一致し，適する．よって，一般項は $\boldsymbol{2n^2-3n+2}$.

b) 階差数列は 1, 2, 4, 8, $\cdots$ となって初項 1，公比 2 の等比数列であり，一般項は $1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ である．

階差数列の初項から第 $n-1$ 項までの和は，初項 1，公比 2，項数 $n-1$ の等差数列の和であるから

$$\frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^{n-1}-1$$

よって，$n \geqq 2$ のとき，元の数列の一般項は

$$-2+(2^{n-1}-1)=2^{n-1}-3$$

である．これは，$n=1$ のとき $1-3=-2$ となり初項に一致し，適する．よって，一般項は $\boldsymbol{2^{n-1}-3}$.

c) 階差数列は 2, 6, 10, $\cdots$ となって初項 2，公差 4 の等差数列であり，一般項は $2+4(n-1)=4n-2$ である．

階差数列の初項から第 $n-1$ 項までの和は，初項 2，末項 $4(n-1)-2=4n-6$，項数 $n-1$ の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}(n-1)\{2+(4n-6)\}=\frac{1}{2}(n-1)(4n-4)=(n-1)(2n-2)=2(n-1)^2$$

よって，$n \geqq 2$ のとき，元の数列の一般項は

$$-5+2(n-1)^2=2n^2-4n-3$$

である．これは，$n=1$ のとき $2-4-3=-5$ となり初項に一致し，適する．よって，一般項は $\boldsymbol{2n^2-4n-3}$.

2. 和から一般項を求める

A. 和の階差は一般項

数列 $\{a_n\}$ について，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．a_n は分からないが S_n は分かる時，a_n を次のように求められる．

和から一般項を求める

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ に対し，$a_n = \begin{cases} S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2) \\ S_1 & (n = 1) \end{cases}$ が成り立つ．

（証明）$n = 1$ のとき，$S_1 = a_1$ より明らか．$n \geqq 2$ であれば S_{n-1} は存在し

$$S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = S_{n-1} + a_n \iff S_n - S_{n-1} = a_n$$

（例）

数列 $\{a_n\}$ について，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 - 3n + 1$ の時，一般項 a_n を求めよ．

（解）まず，$a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ である．また，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 3n + 1) - \{(n-1)^2 - 3(n-1) + 1\} = 2n - 4$$

これは，$n = 1$ のとき $2 \cdot 1 - 4 = -2$ となって $a_1 = -1$ に適さない．よって，$a_n = \begin{cases} 2n - 4 & (n \geqq 2) \\ -1 & (n = 1) \end{cases}$

もし，$n = 1$ のとき適する場合は，まとめて，単に $a_n =$（n の式）と答えれば良い．

【例題 36】 数列 $\{a_n\}$ について，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．以下の $\boxed{}$ に適する式・値を答えよ．

1. $S_n = n^2 + n$ とするとき，a_n を求めよう．
   まず，$a_1 = \boxed{ア}$ である．また，$n \geqq 2$ のとき，$a_n = \boxed{イ}$ と計算でき，この結果は $n = 1$ のとき $\left\{\begin{array}{l}\text{成り立つ}\\ \text{成り立たない}\end{array}\right\}$．よって，$a_n = \boxed{ウ}$ である．
2. $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$ とするとき，a_n を求めよう．
   まず，$a_1 = \boxed{エ}$ である．また，$n \geqq 2$ のとき，$a_n = \boxed{オ}$ と計算でき，この結果は $n = 1$ のとき $\left\{\begin{array}{l}\text{成り立つ}\\ \text{成り立たない}\end{array}\right\}$．よって，$a_n = \boxed{カ}$ である．

【解答】

1. まず，$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = \underline{\mathbf{2}}_{(ア)}$ である．また，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} &= (n^2 + n) - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= n^2 + n - (n^2 - 2n + 1 + n - 1) = \underline{\mathbf{2n}}_{(イ)} \end{aligned}$$

と計算でき，この結果は $n = 1$ のとき $2n = 2 = a_1$ となり，**成り立つ**．

よって，$a_n = \underline{\boldsymbol{2n}}_{(ウ)}$ である．

2. まず，$a_1 = 2\cdot 3^1 - 2 = \underline{\mathbf{4}}_{(エ)}$ である．また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} &= (2\cdot 3^n - 2) - (2\cdot 3^{n-1} - 2) \\ &= 2\cdot 3^n - 2\cdot 3^{n-1} = 2\cdot 3\cdot 3^{n-1} - 2\cdot 3^{n-1} = \underline{\boldsymbol{4\cdot 3^{n-1}}}_{(オ)} \end{aligned}$$

と計算でき，この結果は $n = 1$ のとき $4\cdot 3^{n-1} = 4 = a_1$ となり**成り立つ**．よって，$a_n = \underline{\boldsymbol{4\cdot 3^{n-1}}}_{(カ)}$ である．

【練習 37：和から一般項を求める】

数列 $\{a_n\}$ について，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．S_n が以下の式で表わされる時，一般項 a_n を求めよ．

(1) $S_n = 2n^2 - 5n$　(2) $S_n = n^2 + 6n - 1$　(3) $S_n = 5^n - 1$　(4) $S_n = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

【解答】

(1) まず，$a_1 = S_1 = 2 - 5 = -3$．また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} &= (2n^2 - 5n) - \{2(n-1)^2 - 5(n-1)\} \\ &= \cancel{2n^2} - \cancel{5n} - (\cancel{2n^2} - 4n + 2 - \cancel{5n} + 5) \\ &= -(-4n + 7) = 4n - 7 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき $4\cdot 1 - 7 = -3 = a_1$ となり適する．よって，$\boldsymbol{a_n = 4n - 7}$．

(2) まず，$a_1 = S_1 = 1 + 6 - 1 = 6$．また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} &= (n^2 + 6n - 1) - \{(n-1)^2 + 6(n-1) - 1\} \\ &= \cancel{n^2} + \cancel{6n} - 1 - (\cancel{n^2} - 2n + 1 + \cancel{6n} - 6 - 1) \\ &= -1 - (-2n - 6) = 2n + 5 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき $2\cdot 1 + 5 = 7$ となり，$a_1 = 6$ に適さない．

よって，$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} 2n + 5 & (n \geqq 2) \\ 6 & (n = 1) \end{cases}}$

(3) まず，$a_1 = S_1 = 5^1 - 1 = 4$．また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} &= (5^n - 1) - (5^{n-1} - 1) \\ &= 5^n - 5^{n-1} = 5\cdot 5^{n-1} - 5^{n-1} = 4\cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき $4\cdot 5^0 = 4 = a_1$ となり適する．よって，$\boldsymbol{a_n = 4\cdot 5^{n-1}}$．

(4) まず，$a_1 = S_1 = \left(\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\right)^2 = 1$．また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} &= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}(n-1)n\right\}^2 \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{4}n^2(n-1)^2 \\ &= \frac{1}{4}n^2\left\{(n+1)^2 - (n-1)^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}n^2\cdot 4n = n^3 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき $1^3 = 1$ となり適する．よって，$\boldsymbol{a_n = n^3}$．

◀ ここから，$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が示せた（p.108）．

1. 分数式の数列の和

A. 部分分数分解

分数式の差 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{x+3}{(x+1)(x+3)}-\dfrac{x+1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$ の両辺を 2 で割って，両辺を入れ替えて，等式 $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$ を得る．これは，分数式 $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$ が，2 つの分数式 $\dfrac{1}{x+1}$，$\dfrac{1}{x+3}$ の差に分けられたと考えられる．このように，ある分数式を複数の分数式の和や差にに分解する操作を，**部分分数分解** (partial fraction decomposition) という．

【練習 38：分数式の計算の逆利用】

次の $\boxed{}$ に当てはまる数値を答えよ．

$$\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x+3}=\frac{\boxed{ア}}{(2x+1)(2x+3)},\quad \frac{1}{(2x+3)(2x+5)}=\boxed{イ}\left(\frac{1}{2x+\boxed{ウ}}-\frac{1}{2x+\boxed{エ}}\right)$$

【解答】

$$\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x+3}=\frac{2x+3}{(2x+1)(2x+3)}-\frac{2x+1}{(2x+1)(2x+3)}=\frac{{}_{(ア)}\mathbf{2}}{(2x+1)(2x+3)}$$

$\dfrac{1}{2x+3}-\dfrac{1}{2x+5}=\dfrac{(2x+5)-(2x+3)}{(2x+3)(2x+5)}=\dfrac{2}{(2x+3)(2x+5)}$ より，

$$\frac{1}{(2x+3)(2x+5)}={}_{(イ)}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{1}{2x+\mathbf{3}_{(ウ)}}-\frac{1}{2x+\mathbf{5}_{(エ)}}\right)$$

B. 分数式の数列の和

和 $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を計算するには，部分分数分解を用いる．分解 $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$ から，右下が成り立つので，これらを用いて

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\\
&\quad+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right.\\
&\quad\left.+\cdots+\cancel{\frac{1}{2n-3}}-\cancel{\frac{1}{2n-1}}+\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{2n}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}
\end{aligned}$$

$k=1$ のとき，$\dfrac{1}{1\cdot3}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)$

$k=2$ のとき，$\dfrac{1}{3\cdot5}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$

$k=3$ のとき，$\dfrac{1}{5\cdot7}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)$

$\vdots$

$k=n-1$ のとき，

$\dfrac{1}{(2n-3)(2n-1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}\right)$

$k=n$ のとき，

$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

…… 慣れてきたら $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$ と変形できる．

【練習 39：分数式の数列の和】

(1) (a) $\boxed{}$ の中に適する値・文字を入れよ．$\dfrac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \boxed{ア}\left(\dfrac{1}{\boxed{イ}} - \dfrac{1}{\boxed{ウ}}\right)$

(b) $\dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 8} + \dfrac{1}{8\cdot 11} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ を求めよ．

(2) 次の和を求めよ．

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$　(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$　(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} i}$

【解答】

(1) (a) $\dfrac{1}{3k-1} - \dfrac{1}{3k+2} = \dfrac{(3k+2)-(3k-1)}{(3k-1)(3k+2)} = \dfrac{3}{(3k-1)(3k+2)}$ より

$$\frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \underbrace{\mathbf{\frac{1}{3}}}_{(ア)}\left(\frac{1}{\underbrace{\mathbf{3k-1}}_{(イ)}} - \frac{1}{\underbrace{\mathbf{3k+2}}_{(ウ)}}\right)$$

(b)

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3n+2)-2}{2(3n+2)} = \boldsymbol{\frac{n}{2(3n+2)}}$$

(2) (a) $\dfrac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4k+1} - \dfrac{1}{4k+5}\right)$ であるから

◀ $\dfrac{1}{4k+1} - \dfrac{1}{4k+5}$
$= \dfrac{(4k+5)-(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)}$
$= \dfrac{4}{(4k+1)(4k+5)}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{17}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4n+5}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{(4n+5)-5}{5(4n+5)} = \boldsymbol{\frac{n}{5(4n+5)}}$$

(b) $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$ であるから

◀ $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2} = \dfrac{(k+2)-k}{k(k+2)} = \dfrac{2}{k(k+2)}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{6}}\right)\right.$$
$$\left. + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{3n^2+9n+6-2n-4-2n-2}{4(n+1)(n+2)} = \boldsymbol{\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}}$$

◀ 分子は n でくくってもよい

(c)

◀ 分母は $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1)$ である

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= 2\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{n+1}}$$

2. 等差数列と等比数列の積

等差数列 $a_n = 2n-1$，等比数列 $b_n = 4^n$ に対し，各項の積の和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を書き並べると

$$S_n = 1\cdot 4 + 3\cdot 4^2 + 5\cdot 4^3 + 7\cdot 4^4 + \cdots + (2n-1)\cdot 4^n$$

となる．この和は，等比数列の和の公式を導いた式変形と同様にして計算できる．つまり，等比数列 $\{b_n\}$ の公比 4 を掛けてずらして引く．

$$\begin{array}{rrl}
 & S_n = & 1\cdot 4 + 3\cdot 4^2 + 5\cdot 4^3 + 7\cdot 4^4 + \cdots + (2n-1)\cdot 4^n \\
-) & 4S_n = & \qquad\quad 1\cdot 4^2 + 3\cdot 4^3 + 5\cdot 4^4 + \cdots + (2n-3)\cdot 4^n + (2n-1)\cdot 4^{n+1} \\ \hline
 & -3S_n = & 1\cdot 4 + \underbrace{2\cdot 4^2 + 2\cdot 4^3 + 2\cdot 4^4 + \cdots + 2\cdot 4^n} - (2n-1)\cdot 4^{n+1}
\end{array}$$

←4倍して4の指数が全て＋1

←ずれた分，公差の2が並んだ

ここで，波線部は初項 $2\cdot 4^2$，公比 4，項数 $n-1$ の等比数列の和であるから

$$\begin{aligned}
-3S_n &= 1\cdot 4 + \frac{2\cdot 4^2(4^{n+1}-1)}{4-1} - (2n-1)\cdot 4^{n+1} \\
&= 4 + 2\cdot 4^{n+1} - 2\cdot 4^2 - (2n-1)\cdot 4^{n+1} \\
&= 4 - 32 + \{2-(2n-1)\}\cdot 4^{n+1} = -28 + (-2n+3)\cdot 4^{n+1}
\end{aligned}$$

この両辺を -3 で割って $S_n = \frac{1}{3}\{28 + (2n-3)\cdot 4^{n+1}\}$ を得る．

【例題 40】 $\boxed{}$ に適する値・式を入れ，和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2k\cdot 3^k = 2\cdot 3 + 4\cdot 3^2 + 6\cdot 3^3 + \cdots + 2n\cdot 3^n$ を求めよう．S_n の等比数列の部分は公比が 3 であるから，次のように計算できる．

$$\begin{array}{rrl}
 & S_n = & 2\cdot 3 + 4\cdot 3^2 + 6\cdot 3^3 + 8\cdot 3^4 + \cdots + 2n\cdot 3^n \\
-) & \boxed{ア}S_n = & \qquad\quad \boxed{イ}\cdot 3^2 + \boxed{ウ}\cdot 3^3 + \boxed{エ}\cdot 3^4 + \cdots + (2n-2)\cdot 3^n + \boxed{オ}\cdot 3^{n+1} \\ \hline
 & \boxed{カ}S_n = & \underbrace{\boxed{キ}\cdot 3 + \boxed{ク}\cdot 3^2 + \boxed{ケ}\cdot 3^3 + \boxed{コ}\cdot 3^4 + \cdots + \boxed{サ}\cdot 3^n} - \boxed{オ}\cdot 3^{n+1}
\end{array}$$

この式の破線部は，初項 $\boxed{シ}$，公比 $\boxed{ス}$，項数 $\boxed{セ}$ の等比数列の和であるから

$$\boxed{カ}S_n = \boxed{ソ} - \boxed{オ}\cdot 3^{n+1}$$

この右辺を整頓し，両辺を $\boxed{カ}$ で割って，$S_n = \boxed{タ}$ を得る．

【解答】 公比 3 なので，$S_n - 3S_n$ を考えて

ア～サ：

$$\begin{array}{rrl}
 & S_n = & 2\cdot 3 + 4\cdot 3^2 + 6\cdot 3^3 + 8\cdot 3^4 + \cdots + 2n\cdot 3^n \\
-) & \mathbf{3}S_n = & \qquad\quad \mathbf{2}\cdot 3^2 + \mathbf{4}\cdot 3^3 + \mathbf{6}\cdot 3^4 + \cdots + (2n-2)\cdot 3^n + \mathbf{2n}\cdot 3^{n+1} \\ \hline
 & \mathbf{-2}S_n = & \underbrace{\mathbf{2}\cdot 3 + \mathbf{2}\cdot 3^2 + \mathbf{2}\cdot 3^3 + \mathbf{2}\cdot 3^4 + \cdots + \mathbf{2}\cdot 3^n} - \mathbf{2n}\cdot 3^{n+1}
\end{array}$$

最後の項を除いた $2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 + \cdots + 2\cdot 3^n$ は初項 $\underline{\mathbf{6}}_{(シ)}$，公比 $\underline{\mathbf{3}}_{(ス)}$，項数 $\underline{\boldsymbol{n}}_{(セ)}$ の等比数列なので

$$-2S_n = \underbrace{\frac{\mathbf{6(3^n-1)}}{\mathbf{3-1}}}_{(ソ)} - 2n\cdot 3^{n+1}$$

◀ 項数 n は，$2\cdot 3$ から $2\cdot 3^n$ までの指数部分が，1 から n であることから判断するとよい．

$$= 3(3^n-1) - 2n\cdot 3^{n+1} = 3^{n+1} - 3 - 2n\cdot 3^{n+1} = -3 + (-2n+1)3^{n+1}$$

よって，$\underline{\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}\{3+(2n-1)3^{n+1}\}}}$ (タ) .

【練習 41：等差数列と等比数列の積】

次の和をそれぞれ求めなさい．

(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + n\cdot 2^n$

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} (3k-1)\cdot 4^k = 2\cdot 4 + 5\cdot 4^2 + 8\cdot 4^3 + \cdots + (3n-1)\cdot 4^n$

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$

【解答】

(1)
$$\begin{array}{rrl} & S_n = & 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + 4\cdot 2^4 + \cdots + \quad n\cdot 2^n \\ -) & 2S_n = & \quad 1\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + \cdots + (n-1)\cdot 2^n + n\cdot 2^{n+1} \\ \hline & -S_n = & 1\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^4 + \cdots + \quad 1\cdot 2^n - n\cdot 2^{n+1} \end{array}$$

波線部は初項 2，公比 2，項数 n であるから

$$-S_n = \frac{2(2^n-1)}{2-1} - n\cdot 2^{n+1}$$
$$= 2^{n+1} - 2 - n\cdot 2^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow\ S_n = -2^{n+1} + 2 + n\cdot 2^{n+1} = \boldsymbol{(n-1)2^{n+1} + 2}$$

(2)
$$\begin{array}{rrl} & S_n = & 2\cdot 4 + 5\cdot 4^2 + 8\cdot 4^3 + 11\cdot 4^4 + \cdots + (3n-1)\cdot 4^n \\ -) & 4S_n = & \quad 2\cdot 4^2 + 5\cdot 4^3 + 8\cdot 4^4 + \cdots + (3n-4)\cdot 4^n + (3n-1)\cdot 4^{n+1} \\ \hline & -3S_n = & 2\cdot 4 + 3\cdot 4^2 + 3\cdot 4^3 + 3\cdot 4^4 + \cdots + \quad 3\cdot 4^n - (3n-1)\cdot 4^{n+1} \end{array}$$

波線部は初項 $3\cdot 4^2$，公比 4，項数 $n-1$ であるから

$$-3S_n = 8 + \frac{\cancel{3}\cdot 4^2(4^{n-1}-1)}{\cancel{4-1}} - (3n-1)\cdot 4^{n+1}$$
$$= 8 + 4^{n+1} - 16 + (-3n+1)\cdot 4^{n+1}$$
$$= -8 + (-3n+2)4^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{S_n = \frac{1}{3}\{8+(3n-2)4^{n+1}\}}$$

(3)
$$\begin{array}{rrl} & S_n = & \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \\ -) & \frac{1}{2}S_n = & \quad \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ \hline & \frac{1}{2}S_n = & \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \end{array}$$

波線部は初項 $\frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$，項数 $n-1$ であるから

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{\cancel{1-\frac{1}{2}}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{4}{2^{n+1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2^{n+1}} \quad \Leftrightarrow\ \boldsymbol{S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}}$$

3. 群数列

下のように，ある規則に従って群に分けた数列を群数列という．

2,　4,	6,　8,　10,	12,　14,　16,　18,	20,　22,　24,　26,　28,	30, $\cdots$
第 1 群	第 2 群	第 3 群	第 4 群	第 5 群

上の群数列において，この数列の第 n 群の最初の数を求めよう．

項数	1　2	3　4　5	6　7　8　9	10　11　$\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$　?	?　$\cdots$
	2,　4,	6,　8,　10,	12,　14,　16,　18,	20,　22,　$\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$　n−1群の最後	n群の最初　$\cdots$
群数	①	②	③	④		n-1	n
群内の項数	2	3	4	5		n	$n+1$

群数列を考えるとき，基本的には，各群の最後の数に注目するとよい．というのも，

第 2 群の最後は全体の 5 項目（$= 2 + 3$），
第 3 群の最後は全体の 9 項目（$= 2 + 3 + 4$），
第 4 群の最後は全体の 14 項目（$= 2 + 3 + 4 + 5$），$\cdots$

となっており，初めから群内の項数を足していくと，群の最後が何項目が表われるからである．

たとえば，第 n 群目の最初の数は，次のように求められる．

第 $n-1$ 群目の最後の数は，全体の $2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}(n-1)(2+n)$ 項目（ただし，$n \geqq 2$）

よって，第 n 群目の最初の数は $\dfrac{1}{2}(n-1)(2+n) + 1$ 項目であり，その値は $2 \cdot \left\{\dfrac{1}{2}(n-1)(2+n)+1\right\} =$ $(n-1)(2+n) + 2 = n^2 + n$（$n = 1$ でも成立）

【練習 42：群数列】

次の群数列において，下の問いに答えなさい．

3,	6,　9,	12,　15,　18,	21,　24,　27,　30,	33, $\cdots$
第 1 群	第 2 群	第 3 群	第 4 群	第 5 群

(1) 第 n 群の最初と最後の数を求めよ．　(2) 第 n 群の数の和を求めよ．

【解答】

(1) 第 $n-1$ 群目の最後は，全体の $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \dfrac{1}{2}(n-1)n$ 項目（$n \geqq 2$）である．つまり，第 n 群目の最初は $\dfrac{1}{2}(n-1)n + 1$ であり，その値は $3 \cdot \left\{\dfrac{1}{2}(n-1)n+1\right\} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{3}{2}n + 3}$ となり，$n \geqq 1$ でも成立する．

(2) n 群目の最後は，全体の $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \dfrac{1}{2}n(n+1)$ 項目であり，その値は $\dfrac{3}{2}n(n+1)$ である．

よって，第 n 群目は初項 $\dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{3}{2}n + 3$，末項 $\dfrac{3}{2}n(n+1)$，項数 n であるから，和は $\dfrac{1}{2}n\left\{\dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{3}{2}n + 3 + \dfrac{3}{2}n(n+1)\right\} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}n(n^2+1)}$

◀ 第 n 群は等差数列であり，初項と項数は分かっているので，分かっていない末項を求めている．

2.7 漸化式

1. 漸化式とその一般項

A. 漸化式とは

$n+1$ 項目の値を，n 項目（まで）の値を用いて定める式を，**漸化式** (recurrence relation) という．

たとえば，初項 $a_1 = 1$ である数列 $\{a_n\}$ は，漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 3$ によって，左下のようになる．

$\{a_n\}$: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3$

$$\begin{aligned}
&& a_1 &= 1\\
a_2 &= 2a_1 + 3, & \therefore\ a_2 = 2\cdot 1 + 3 &= 5\\
a_3 &= 2a_2 + 3, & \therefore\ a_3 = 2\cdot 5 + 3 &= 13\\
a_4 &= 2a_3 + 3, & \therefore\ a_4 = 2\cdot 13 + 3 &= 29\\
a_5 &= 2a_4 + 3, & \therefore\ a_5 = 2\cdot 29 + 3 &= 61\\
&&&\vdots
\end{aligned}$$

$\{b_n\}$: $b_1 = -1,\ b_{n+1} = 2b_n + n$

$$\begin{aligned}
&& b_1 &= -1\\
b_2 &= 2b_1 + 1, & \therefore\ b_2 = 2\cdot(-1) + 1 &= -1\\
b_3 &= 2b_2 + 2, & \therefore\ b_3 = 2\cdot(-1) + 2 &= 0\\
b_4 &= 2b_3 + 3, & \therefore\ b_4 = 2\cdot 0 + 3 &= 3\\
b_5 &= 2b_4 + 4, & \therefore\ b_5 = 2\cdot 3 + 4 &= 10\\
&&&\vdots
\end{aligned}$$

また，初項 $b_1 = -1$ である数列 $\{b_n\}$ は，漸化式 $b_{n+1} = 2b_n + n$ によって，右上のようになる．

【例題 43】 次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ を，第 5 項まで書き並べなさい．

1. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$
2. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n - 3$
3. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$
4. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n - n$

【解答】

1. $a_2 = 2\cdot 1 + 1 = 3,\ a_3 = 2\cdot 3 + 1 = 7,\ a_4 = 2\cdot 7 + 1 = 15,$
   $a_5 = 2\cdot 15 + 1 = 31$ より，**1, 3, 7, 15, 31**.
2. $a_2 = 2\cdot 1 - 3 = -1,\ a_3 = 2\cdot(-1) - 3 = -5,\ a_4 = 2\cdot(-5) - 3 = -13,$
   $a_5 = 2\cdot(-13) - 3 = -29$ より，**1, −1, −5, −13, −29**.
3. $a_2 = 2\cdot 1 - 1 = 1,\ a_3 = 2\cdot 1 - 1 = 1,\ a_4 = 2\cdot 1 - 1 = 1,$
   $a_5 = 2\cdot 1 - 1 = 1$ より，**1, 1, 1, 1, 1**.
4. $a_2 = 2\cdot 1 - 1 = 1,\ a_3 = 2\cdot 1 - 2 = 0,\ a_4 = 2\cdot 0 - 3 = -3,$
   $a_5 = 2\cdot(-3) - 4 = -10$ より，**1, 1, 0, −3, −10**.

◀ $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n$ でも同じ数列になる．

B. 等差数列・等比数列の漸化式 $a_{n+1} = a_n + d,\ a_{n+1} = ra_n$

公差 d の等差数列が満たす式 $a_{n+1} - a_n = d$ を移項して，漸化式 $a_{n+1} = a_n + d$ を得る．

たとえば, $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2$ から, 公差 2 の等差数列 3, 5, 7, 9, $\cdots$ が得られ, 一般項 $a_n = 3+2(n-1) = 2n+1$ となる．

また，公比 r の等比数列が満たす式 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ から，漸化式 $a_{n+1} = ra_n$ を得る．

たとえば，$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n$ から，公比 3 の等比数列 2, 6, 18, 54, $\cdots$ が得られ，一般項 $a_n = 2\cdot 3^{n-1}$ となる．

【例題 44】 次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい.

1. $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3$
2. $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-2$
3. $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n$
4. $a_1=1$，$a_{n+1}=-4a_n$

【解答】

1. $1, 4, 7, \cdots$ となる初項 1，公差 3 の等差数列なので
   $a_n=1+3(n-1)=\mathbf{3n-2}$
2. $1, -1, -3, \cdots$ となる初項 1，公差 -2 の等差数列なので
   $a_n=1-2(n-1)=\mathbf{-2n+3}$
3. $1, 2, 4, \cdots$ となる初項 1，公差 2 の等比数列なので $a_n=1\cdot 2^{n-1}=\mathbf{2^{n-1}}$
4. $1, -4, 16, \cdots$ となる初項 1，公差 -4 の等差数列なので
   $a_n=1\cdot(-4)^{n-1}=\mathbf{(-4)^{n-1}}$

C. 階差数列と漸化式 $a_{n+1}=a_n+$（n の式）

数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は，$b_n=a_{n+1}-a_n$ で定義された．これを移項して漸化式 $a_{n+1}=a_n+b_n$ を得る.

たとえば，漸化式 $a_{n+1}=a_n+2n$ を考えよう．これを移項して $a_{n+1}-a_n=2n$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は，一般項が $b_n=2n$ と分かる．もし，$a_1=1$ であったなら，一般項 a_n は次で求められる.

$$a_n=a_1+\{2+4+6+\cdots+2(n-1)\}=a_1+\frac{1}{2}(n-1)\{2+2(n-1)\}=1+\frac{1}{2}(n-1)2n=n^2-n+1\ (n=1 \text{ でも成立})$$

【例題 45】 次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい.

1. $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3n$
2. $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n$

【解答】

1. $a_{n+1}-a_n=3n$ が階差数列の一般項であるから，$n\geqq 2$ で

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\{3+6+\cdots+3(n-1)\} \\ &= 1+\frac{1}{2}(n-1)\{3+3(n-1)\}=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1 \end{aligned}$$

◀ { } 内は初項 3，末項 $3(n-1)$，項数 $n-1$ の等差数列

   これは $n=1$ でも成立する．よって，$\boldsymbol{a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1}$.

2. $a_{n+1}-a_n=2^n$ が階差数列の一般項であるから，$n\geqq 2$ で

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}) \\ &= 1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1 \end{aligned}$$

◀ ( ) 内は初項 2，公比 2，項数 $n-1$ の等比数列

   これは $n=1$ でも成立する．よって，$\boldsymbol{a_n=2^n-1}$.

D.　1 次式の漸化式 〜 特性方程式

たとえば，$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n - 4$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ を考えよう．

この漸化式は，$a_{n+1} = a_n = t$ として作られる方程式 $t = 3t - 4$ の解 $t = 2$ を利用した，次の式と同値になる．

$a_{n+1} = 3a_n - 4 \iff a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$　　←整頓すると，左の等式に一致する

右の等式から，$b_n = a_n - 2$ ……… ① で定義される数列 $\{b_n\}$ は，$b_{n+1} = 3b_n$ となり，公比 3 の等比数列と分かる．$b_1 = 1 - 2 = -1$ であるから，数列 $\{b_n\}$ は初項 -1，公比 3 の等比数列となり $b_n = -1 \cdot 3^{n-1}$ である．これを①に代入して，次のように一般項 a_n を得る．

$-3^{n-1} = a_n - 2 \iff a_n = -3^{n-1} + 2$

1 次式の漸化式

数列 $a_{n+1} = pa_n + q$ において，$a_{n+1} = a_n = t$ として作られる方程式を**特性方程式**といい，その解が $t = c$ であれば，次の同値な式が得られる．

$a_{n+1} = pa_n + q \iff a_{n+1} - c = p(a_n - c)$

右の式は，$b_n = a_n - c$ とおいた数列 $\{b_n\}$ が公比 p の等比数列であることを示している．

……慣れてきたら，b_n を定義せずに，数列 $\{a_n - c\}$ が等比数列であると考えてもよい．

（証明）特性方程式 $t = pt + q$ の解を $t = c$ とすると，c は等式 $c = pc + q$ を満たしている．
右のように，もとの漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ と $c = pt + q$ を連立して，等式 $a_{n+1} - c = p(a_n - c)$ が得られる．

$$\begin{array}{rrcrr} & a_{n+1} & = & pa_n & +q \\ -) & c & = & pc & +q \\ \hline & a_{n+1} - c & = & p(a_n - c) & \end{array}$$

【例題 46】　次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい．

1. $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2a_n + 3$
2. $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 4a_n - 3$

【解答】

1. 特性方程式 $t = 2t + 3$ の解は $t = -3$ であるから

　（与式）$\iff a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$

　よって，$b_n = a_n + 3$ とおくと，$b_{n+1} = 2b_n$ から $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列である．その初項は $b_1 = a_1 + 3 = 5$ なので，$b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$．つまり $5 \cdot 2^{n-1} = a_n + 3$ だから $\boldsymbol{a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3}$.

2. 特性方程式 $t = 4t - 3$ の解は $t = 1$ であるから

　（与式）$\iff a_{n+1} - 1 = 4(a_n - 1)$

　よって，$b_n = a_n - 1$ とおくと，$b_{n+1} = 4b_n$ から $\{b_n\}$ は公比 4 の等比数列である．その初項は $b_1 = a_1 - 1 = 1$ なので，$b_n = 1 \cdot 4^{n-1}$．つまり $1 \cdot 4^{n-1} = a_n - 1$ だから $\boldsymbol{a_n = 4^{n-1} + 1}$.

◀ 慣れると次のように書ける．「よって，数列 $\{a_n + 3\}$ は初項 $a_1 + 3 = 5$，公比 2 の等比数列だから $a_n + 3 = 5 \cdot 2^{n-1}$，よって $\boldsymbol{a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3}$.

2. 漸化式の応用

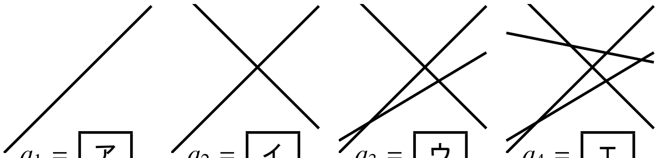
1 つの規則・手順が繰り返される行為には，漸化式を応用することができる．

A. n 本の直線

【例題 47】 $\boxed{}$ に適当な値・式を入れ，同一平面上の n 本の直線が作る交点の数を求めなさい．ただし，どの 2 本の直線も交点を 1 つだけ持ち，3 本以上の直線が同一の点を通らないとする．

上の条件で n 本の直線を引いて交点は a_n 個あるとおく．
n 本の線が引かれて a_n 個の交点がある状態に，$n+1$ 本目の直線 l を引く．すると l は，交点を $\boxed{オ}$ 個増やす．というのも，l はどの直線とも 1 点で交わり，他の交点を通らないからである．つまり

$a_{n+1} = a_n + \boxed{オ}$



$a_1 = \boxed{ア}$　$a_2 = \boxed{イ}$　$a_3 = \boxed{ウ}$　$a_4 = \boxed{エ}$

を満たす．$a_1 = \boxed{ア}$ であるから，この漸化式を解いて $a_n = \boxed{カ}$ である．

【解答】 $a_1 = \underline{\mathbf{0}}_{(ア)}$, $a_2 = \underline{\mathbf{1}}_{(イ)}$, $a_3 = \underline{\mathbf{3}}_{(ウ)}$, $a_4 = \underline{\mathbf{6}}_{(エ)}$ である．

$n+1$ 本目の直線 l は，n 本の直線と 1 回ずつ交わるので，交点は $\underline{\boldsymbol{n}}_{(オ)}$ 個増やす．よって

$a_{n+1} = a_n + n$

この漸化式は階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が n なので，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 0 + \frac{1}{2}(n-1)n$$

$n = 1$ で $a_1 = 0$ を満たすので $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}n(n-1)}$.

【練習 48：平面分割】

同一平面上の n 本の直線によって，平面がいくつに分割されるか求めなさい．ただし，どの 2 本の直線も交点を 1 つだけ持ち，3 本以上の直線が同一の点を通らないとする．

【解答】 問題の条件で n 本の直線を引いて，a_n 個の平面に分割されているとする．

n 本が引かれているとき，$n+1$ 本目の直線 l は，$n-1$ 本の線分と 2 本の半直線に分けられ，$n+1$ 個の分割された平面を通るので，l は分割された平面を $n+1$ 個増やす．つまり

◀ l によって交点は n 個できる

$a_{n+1} = a_n + (n+1)$

この漸化式から，a_n の階差数列の一般項が $n+1$ と分かり，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

◀ $a_1 = 2$

$$= 2 + \frac{1}{2}(n-1)n + (n-1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$$

$n = 1$ でも $a_1 = 2$ となって正しいので，$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1}$.

B. 確率への応用

【練習 49：n 回の操作がある確率への応用】

次の $\boxed{}$ に適する値・式を入れ，さいころを n 回投げ，出た目の和が 7 の倍数である確率を求めよ．

求める確率を p_n とする．出る目は 6 までなので $p_1 = \boxed{\text{ア}}$ である．ここで，p_{n+1} を求めるため，$n+1$ 回のさいころを投げて出た目の和が 7 の倍数であるかを考える．

(A) n 回目の時点で，出た目の和が 7 の倍数のとき，$n+1$ 回目は何が出ても，$n+1$ 回目までの出た目の和は 7 の倍数にならない．

(B) n 回目の時点で，出た目の和が 7 で割って

- 1 余るとき，$n+1$ 回目は $\boxed{\text{イ}}$ が出れば，$n+1$ 回の出た目の和が 7 の倍数になる．
- 2 余るとき，$n+1$ 回目は $\boxed{\text{ウ}}$ が出れば，$n+1$ 回の出た目の和が 7 の倍数になる．
- 3 余るとき，$n+1$ 回目は $\boxed{\text{エ}}$ が出れば，$n+1$ 回の出た目の和が 7 の倍数になる．
- 4 余るとき，$n+1$ 回目は $\boxed{\text{オ}}$ が出れば，$n+1$ 回の出た目の和が 7 の倍数になる．
- 5 余るとき，$n+1$ 回目は $\boxed{\text{カ}}$ が出れば，$n+1$ 回の出た目の和が 7 の倍数になる．
- 6 余るとき，$n+1$ 回目は $\boxed{\text{キ}}$ が出れば，$n+1$ 回の出た目の和が 7 の倍数になる．

つまり，どの場合も $n+1$ 回目までの出た目の和が 7 の倍数になる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(A) の確率は p_n，(B) の確率は $\boxed{\text{ケ}}$ であるから

$$p_{n+1} = 0 \cdot p_n + \boxed{\text{ク}} \cdot \boxed{\text{ケ}}$$

である．この漸化式を $p_1 = \boxed{\text{ア}}$ のもとで解いて，$p_n = \boxed{\text{コ}}$ である．

【解答】 $p_1 = \underline{\mathbf{0}}_{(ア)}$ である．$n+1$ 回の出た目の和が 7 の倍数になるのは

(A) n 回目までの和が 7 の倍数ならばありえない．

(B) n 回目までの和が 7 で割って

余り 1 なら $n+1$ 回目に $\underline{\mathbf{6}}_{(イ)}$ ならばよく，余り 2 なら $\underline{\mathbf{5}}_{(ウ)}$，

余り 3 なら $\underline{\mathbf{4}}_{(エ)}$，余り 4 なら $\underline{\mathbf{3}}_{(オ)}$，余り 5 なら $\underline{\mathbf{2}}_{(カ)}$，

余り 6 なら $\underline{\mathbf{1}}_{(キ)}$ が $n+1$ 回目に出ればよく，いずれも確率 $\underline{\boldsymbol{\frac{1}{6}}}_{(ク)}$ である．

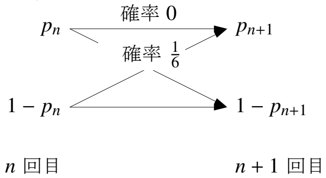
(A) の確率は p_n，(B) の確率は $\underline{\boldsymbol{1 - p_n}}_{(ケ)}$ であるから

$$p_{n+1} = 0 \cdot p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n)$$

である．この漸化式の特性方程式は $t = \frac{1}{6}(1-t) \iff t = \frac{6}{7}$ であるから

$$p_{n+1} - \frac{6}{7} = -\frac{1}{6}\left(p_n - \frac{6}{7}\right)$$

◀ 現在の状況をまとめると以下のようになる．



と変形でき，数列 $\left\{p_n - \frac{6}{7}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{6}{7} = -\frac{6}{7}$，公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列である．よって

$$p_n - \frac{6}{7} = -\frac{6}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p_n = \frac{6}{7} - \frac{6}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}$$

【発展 50：確率】

n 回のさいころを振り，6 の出た回数が奇数回である確率を求めなさい．

【解答】 求める確率を p_n とする．$n = 1$ のときは，1 回目で 6 が出れば良いので $p_1 = \frac{1}{6}$.

$n+1$ 回で奇数回 6 が出るのは，以下の場合である．

(A) n 回目までで奇数回出ており（確率 p_n），
　$n+1$ 回目は 6 が出ない（確率 $\frac{5}{6}$）

(B) n 回目までで偶数回出ており（確率 $1 - p_n$），
　$n+1$ 回目は 6 が出る（確率 $\frac{1}{6}$）

よって，$p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}p_n$．この特性方程式は $t = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}$ であるから

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}(p_n - \frac{1}{2})$$

となる．数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$

2.8 数学的帰納法

1. 数学的帰納法によるいろいろな証明

A. 数学的帰納法とは何か

数学的帰納法とは証明方法の一つであり，次の方法で作られる集合 A が，自然数全体の集合になることと深い関係がある．

(I) まず，A には 1 だけ含まれている．
(II) A に数 k が含まれていたら，$k+1$ も A に含まれるようにする．

たとえば，A に 4 が含まれていることは次のようにして分かる．

- (I) より A には 1 が含まれている．
- $k=1$ で (II) を考えて，A に数 1 が含まれているから，2 も A に含まれる．
- $k=2$ で (II) を考えて，A に数 2 が含まれているから，3 も A に含まれる．
- $k=3$ で (II) を考えて，A に数 3 が含まれているから，4 も A に含まれる．

同様に，たとえば「どんな自然数 n についても $f(n)=n(n+3)$ は偶数である」ことは，以下から分かる．

(I) $f(1)$ は偶数である．　←これは $f(1)=4$ より正しい
(II) どんな k でも，$f(k)$ が偶数ならば $f(k+1)$ も偶数である．
　↑これは $f(k+1)=(k+1)(k+4)=k^2+5k+4=(k^2+3k)+2k+4=f(k)+2(k+2)$ より正しい

【例題 51】 $\boxed{}$ に適当な数字を入れ，上の (I)，(II) から $f(4)$ であることが偶数を確認しなさい．

- (I) より $f(\boxed{ア})$ は偶数である．
- $k=\boxed{イ}$ で (II) を考えて，$f(\boxed{ウ})$ が偶数だから，$f(\boxed{エ})$ も偶数．
- $k=\boxed{オ}$ で (II) を考えて，$f(\boxed{カ})$ が偶数だから，$f(\boxed{キ})$ も偶数．
- $k=\boxed{ク}$ で (II) を考えて，$f(\boxed{ケ})$ が偶数だから，$f(4)$ も偶数である．

【解答】

- (I) より $f(\underline{\mathbf{1}}_{(ア)})$ は偶数である．
- $k=\underline{\mathbf{1}}_{(イ)}$ で (II) を考えて，$f(\underline{\mathbf{1}}_{(ウ)})$ が偶数だから，$f(\underline{\mathbf{2}}_{(エ)})$ も偶数．
- $k=\underline{\mathbf{2}}_{(オ)}$ で (II) を考えて，$f(\underline{\mathbf{2}}_{(カ)})$ が偶数だから，$f(\underline{\mathbf{3}}_{(キ)})$ も偶数．
- $k=\underline{\mathbf{3}}_{(ク)}$ で (II) を考えて，$f(\underline{\mathbf{3}}_{(ケ)})$ が偶数だから，$f(4)$ も偶数である．

数学的帰納法

命題 P はすべての自然数 n において正しいことは，以下の (I)，(II) を示せば，示されたことになる．
(I) 命題 P は，$n=1$ のとき正しい．
(II) 命題 P は，$n=k$ のとき正しいならば $n=k+1$ のときも正しい．
このような証明方法を，**数学的帰納法** (mathematical induction) という．

(I) や (II) を少し変更する場合もある．

また，（紛らわしい点ではあるが）論理的推論としては，数学的帰納法は帰納法（個別の事例から一般的な規則を見出そうとする論理的推論方法のこと）でなく，演繹法に分類される．

B. 数学的帰納法による等式の証明

（例）

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ を示せ．

（証明） 数学的帰納法より，次の (I)，(II) を示せばよい．

(I) $n = 1$ のとき，（左辺）$= \displaystyle\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$，（右辺）$= \left\{\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)\right\}^2 = 1$ より正しい．

(II) 次の（仮定）が成り立つとき，（結論）が正しいことを示す．

（仮定）$n = k$ のとき正しく，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2$

（結論）$n = k+1$ のとき正しく，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right\}^2$

$$
\begin{aligned}
\text{（結論の左辺）} &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3) + (k+1)^3 \\
&= \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + (k+1)^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 \qquad \leftarrow \text{仮定を代入した} \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2 + 4(k+1)\} = \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4) \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2 = \text{（結論の右辺）}
\end{aligned}
$$

よって，$n = k$ のとき正しいならば，$n = k+1$ のときが正しいと示せた．

(I)，(II) より命題が示された．

【例題 52】 次の等式を数学的帰納法で示せ．

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

【解答】

1. 数学的帰納法より，次の (I)，(II) を示せばよい．

(I) $n = 1$ のとき，（左辺）$= \displaystyle\sum_{i=1}^{1} i = 1$，（右辺）$= \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$ より正しい．

(II) 次の（仮定）が成り立つとき，（結論）が正しいことを示す．

（仮定）$n = k$ のとき正しく，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$

（結論）$n = k+1$ のとき正しく，

$\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$．

$$
\begin{aligned}
\text{（結論の左辺）} &= (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k+1) \\
&= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)
\end{aligned}
$$

◀ 仮定を代入した

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \text{（結論の右辺）}$$

◀ $\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$
$= \frac{1}{2}(k+1)k + \frac{2}{2}(k+1)$

(I)，(II) より命題が示された．

2. 数学的帰納法より，次の (I)，(II) を示せばよい．

(I) $n=1$ のとき，（左辺）$= \sum_{i=1}^{1} 2^i = 2^1 = 2$

（右辺）$= 2^{1+1} - 2 = 2$ より正しい．

(II) 次の（仮定）が成り立つとき，（結論）が正しいことを示す．

（仮定）$n=k$ のとき正しく，$\sum_{i=1}^{k} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2$

（結論）$n=k+1$ のとき正しく，

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2^i = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2.$$

$$\begin{aligned}\text{（結論の左辺）} &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2^k) + 2^{k+1}\\ &= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 2 = \text{（結論の右辺）}\end{aligned}$$

◀ 仮定を代入した

(I)，(II) より命題が示された．

3. 数学的帰納法より，次の (I)，(II) を示せばよい．

(I) $n=1$ のとき，（左辺）$= \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$

（右辺）$= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(2+1) = 1$ より正しい．

(II) 次の（仮定）が成り立つとき，（結論）が正しいことを示す．

（仮定）$n=k$ のとき正しい，つまり

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

（結論）$n=k+1$ のとき正しい，つまり

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2\\ &= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\} = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{（結論の左辺）} &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2\\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2\\ &= \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}\\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6)\\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) = \text{（結論の右辺）}\end{aligned}$$

◀ 仮定を代入した

(I)，(II) より命題が示された．

C. 数学的帰納法による整数問題の証明

（例）

自然数 n に対して，$3^{2n}-5$ は必ず 4 で割り切れることを示せ．

（証明）数学的帰納法により示す．

(I) $n=1$ のとき，$3^{2n}-5=3^2-5=4$ より示された．

(II) 次の（仮定）が成り立つとき，（結論）が正しいことを示す．

（仮定）$n=k$ のとき正しく，$3^{2k}-5$ は 4 で割り切れて $3^{2k}-5=4m$（m は整数）とおける

（結論）$n=k+1$ のとき正しく，$3^{2(k+1)}-5$ は 4 で割り切れる

（仮定）より，$3^{2k}-5=4m \iff 3^{2k}=4m+5$ であるから

$$\begin{aligned}3^{2(k+1)}-5=3^{2k+2}-5 &= 3^2\cdot 3^{2k}-5\\ &= 9(4m+5)-5=36m+40=4(9m+5)\end{aligned}$$

$9m+5$ は整数なので，これは 4 の倍数であり，（結論）が示された．

(I)，(II) より命題が示された．

【練習 53：数学的帰納法による整数問題の証明】

n が自然数のとき，以下の命題を数学的帰納法で示せ．

(1) 4^n を 3 で割った余りは必ず 1 である　　(2) n^3-4n は必ず 3 の倍数である

【解答】

(1) 数学的帰納法により示す．

(I) $n=1$ のとき，$4^n=4$ より，3 で割った余りは 1 と示せた．

(II) 次の（仮定）が成り立つとき，（結論）が正しいことを示す．

（仮定）$n=k$ のとき正しく，4^k を 3 で割った余りは 1 である

（結論）$n=k+1$ のとき正しく，4^{k+1} を 3 で割った余りが 1 である

（仮定）より $4^k=3m+1$ とおける（m は整数）ので

$$4^{k+1}=4\cdot 4^k=4(3k+1)=12k+4=3(4k+1)+1$$

◀ $12k+4=12k+3+1$

$4k+1$ は整数なので，（結論）が示された．

(I)，(II) より命題が示された．

(2) 数学的帰納法により示す．

(I) $n=1$ のとき，$n^3-4n=1-4=-3$ より 3 の倍数と示せた．

(II) 次の（仮定）が成り立つとき，（結論）が正しいことを示す．

（仮定）$n=k$ のとき正しく，k^3-4k は 3 の倍数

（結論）$n=k+1$ のとき正しく，$(k+1)^3-4(k+1)$ は 3 の倍数

（仮定）より $k^3-4k=3m$ とおける（m は整数）ので

$$\begin{aligned}(k+1)^3-4(k+1) &= k^3+3k^2+3k+1-4k-4\\ &= (k^3-4k)+3k^2+3k+1-4\\ &= 3m+3k^2+3k-3=3(m+k^2+k-1)\end{aligned}$$

◀ 3 乗の展開の公式

$m+k^2+k-1$ は整数なので，（結論）が示された．

(I)，(II) より命題が示された．

D.　数学的帰納法による不等式の証明

（例）

3 以上のすべての自然数 n に対して，$2^n > n^2 - 2$ がを示せ．

（証明）数学的帰納法により示す．

(I) $n = 3$ のとき，（左辺）$= 8$,（右辺）$= 7$ より正しい．

(II) 次の（仮定）が成り立つとき，（結論）が正しいことを示す．

（仮定）$n = k$ のとき正しく，$2^k > k^2 - 2$

（結論）$n = k + 1$ のとき正しく，$2^{k+1} > (k+1)^2 - 2$

$$\text{（結論の左辺）} - \text{（結論の右辺）} = 2^{k+1} - \{(k+1)^2 - 2\}$$
$$= 2 \cdot 2^k - k^2 - 2k + 1$$

ここで，（仮定）より $2 \cdot 2^k > 2(k^2 - 2)$ であるから

$$> 2(k^2 - 2) - k^2 - 2k + 1 = k^2 - 2k - 3 = (k-1)^2 - 4$$

$k \geqq 3$ より $(3-1)^2 - 4 \geqq 0$．よって，（結論の左辺）>（結論の右辺）となり示された．

(I)，(II) より命題が示された．　　↑途中で＞があり，結論の両辺は等しくならない

【練習 54：数学的帰納法による不等式の証明】

(1) 3 以上のすべての自然数 n に対して，$2^n > 2n$ が成り立つことを示せ．

(2) 4 以上のすべての自然数 n に対して，$n! > 2^n$ が成り立つことを示せ．

【解答】

(1) 数学的帰納法により示す．

(I) $n = 3$ のとき，（左辺）$= 8$,（右辺）$= 6$ より正しい．

(II) 次の（仮定）が成り立つとき，（結論）が正しいことを示す．

（仮定）$n = k$ のとき正しく，$2^k > 2k$（ただし，$k \geqq 3$）

（結論）$n = k + 1$ のとき正しく，$2^{k+1} > 2(k+1)$

$$\text{（結論の左辺）} - \text{（結論の右辺）} = 2^{k+1} - 2(k+1)$$
$$= 2 \cdot 2^k - 2k - 2$$

ここで，（仮定）より $2 \cdot 2^k > 2 \cdot 2k$ であるから

$$= 2 \cdot 2k - 2k - 2 = 2k - 2$$

$k \geqq 3$ より $2k - 2 > 0$ であるから，（結論）は正しい．

(I)，(II) より命題が示された．

(2) 数学的帰納法により示す．

(I) $n = 4$ のとき，（左辺）$= 24$,（右辺）$= 16$ より正しい．　◀ $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

(II) 次の（仮定）が成り立つとき，（結論）が正しいことを示す．

（仮定）$n = k$ のとき正しく，$k! > 2^k$（ただし，$k \geqq 4$）

(結論) $n=k+1$ のとき正しく，$(k+1)!>2^{k+1}$

$$\begin{aligned}(\text{結論の左辺})-(\text{結論の右辺}) &= (k+1)!-2^{k+1}\\ &= (k+1)\cdot k!-2k+1\end{aligned}$$

ここで，(仮定) より $(k+1)\cdot k!>(k+1)2^k$ であるから

$$\begin{aligned}&= (k+1)2^k-2^{k+1}\\ &= (k+1)2^k-2\cdot 2^k=(k-1)2^k\end{aligned}$$

$k \geqq 3$ より $(k-1)2^k>0$ であるから，(結論) は正しい．

(I)，(II) より命題が示された．

【発展 55：不等式の証明】

n を自然数とする．$n \geqq 3$ のとき，不等式 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)>\dfrac{1}{2^{n-1}}$ を示せ．

【解答】 数学的帰納法により示す．

(I) $n=3$ のとき，(左辺) $=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{7}{8}=\dfrac{21}{64}$，(右辺) $=\dfrac{1}{4}=\dfrac{16}{64}$ より

(左辺) $>$ (右辺) が示された．

(II) 次の (仮定) が成り立つとき，(結論) が正しいことを示す．

(仮定) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)>\dfrac{1}{2^{k-1}}$

(結論) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)>\dfrac{1}{2^k}$

(仮定) と $1-\dfrac{1}{2^{k+1}}>0$ より

$\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)>\dfrac{1}{2^{k-1}}\left(1-\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)$

が成り立つので

(結論の左辺) $-$ (結論の右辺)

$$\begin{aligned}&= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)-\frac{1}{2^k}\\ &> \frac{1}{2^{k-1}}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)-\frac{1}{2^k}\\ &= \frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{2^{2k}}-\frac{1}{2^k}\\ &= \frac{2^{k+1}-1-2^k}{2^{2k}}=\frac{2^k-1}{2^{2k}}>0\end{aligned}$$

(I)，(II) より命題が示された．

2. 発展 色々な数列の一般項

A. 一般項の推測と数学的帰納法による証明

数学的帰納法は，自然数 n に関する問題全般に使える．たとえば，数列の一般項が推測できたなら，その証明に数学的帰納法は有効である．

（例）

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$ で与えられる数列を $\{a_n\}$ とする．a_n を求めよ．

（解）$a_2 = \sqrt{a_1^2 + 1} = \sqrt{2},\ a_3 = \sqrt{a_2^2 + 1} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3},\ a_4 = \sqrt{a_3^2 + 1} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$ より，

$a_n = \sqrt{n}$ と推測できるので，これを数学的帰納法で証明する．

(I) $n = 1$ のとき，（左辺）$= a_1 = 1$，（右辺）$= \sqrt{1} = 1$ より正しい．

(II) 命題「$a_k = \sqrt{k}$ ならば $a_{k+1} = \sqrt{k+1}$」を示す．

$n = k$ における漸化式 $a_{k+1} = \sqrt{a_k^2 + 1}$ に仮定 $a_k = \sqrt{k}$ を代入すると

$$a_{k+1} = \sqrt{\left(\sqrt{k}\right)^2 + 1} = \sqrt{k+1}$$

であるから，命題は正しい．

(I)，(II) より，$a_n = \sqrt{n}$ が示された．

【練習 56：一般項の推測と数学的帰納法による証明】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法で示せ．

【解答】 $a_2 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2},\ a_3 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{1}{3},\ a_4 = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \dfrac{1}{4}$ より，

$a_n = \dfrac{1}{n}$ と推測できるので，これを数学的帰納法により示す．

(I) $n = 1$ のとき，（左辺）$= a_1 = 1$，（右辺）$= \dfrac{1}{1} = 1$ より正しい．

(II) 命題「$a_k = \dfrac{1}{k}$ ならば $a_{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$」を示す．

$n = k$ における漸化式 $a_{k+1} = \dfrac{a_k}{a_k + 1}$ に仮定 $a_k = \dfrac{1}{k}$ を代入すると

$a_{k+1} = \dfrac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1} = \dfrac{1}{k+1}$ であるから，命題は正しい．

◀ 分母・分子に k を掛けた

(I)，(II) より，$a_n = \dfrac{1}{n}$ が示された．

上の練習問題は，実際には分数型の漸化式とみなして，解くこともできる．

B.　分数型の漸化式

漸化式が分数式で与えられたときは，漸化式の逆数をとると求められることがある．

たとえば，漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2}$ であれば，数学的帰納法から $a_n \neq 0$ が示せるので，両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{2}{a_n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} + 1$$

となる．$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1} = 2b_n + 1$ となり，b_n が求められ，それに伴い a_n も求められる．

【練習 57：分数型の漸化式〜その１〜】

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2}$ で与えられる数列を $\{a_n\}$ とする．

（a） $a_n \neq 0$ を示せ．

（b） 上の説明を利用し，一般項 a_n を求めよ．

(2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n - 4}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

【解答】

(1)（a） 数学的帰納法で示す．

(I) $a_1 = 1$ より $n = 1$ で成り立つ．

(II) $a_k \neq 0$ とすると，$a_{k+1} = \dfrac{a_k}{a_k + 2} \neq 0$ となるから，$n = k$ で成立すれば $n = k + 1$ でも成立する．

よって，すべての自然数 n で $a_n \neq 0$ が示された．

（b） $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2}$ の両辺の逆数をとって $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2}{a_n} + 1$ となり，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1} = 2b_n + 1$ となる．特性方程式を考えて $t = 2t + 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1$ であるから

$$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$$

となる．よって，数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = \dfrac{1}{a_1} + 1 = 2$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad b_n = 2^n - 1$$

$2^n - 1 \neq 0$ であるから．$a_n = \dfrac{1}{b_n} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2^n - 1}}$

(2) $a_1 \neq 0$ であり，$a_k \neq 0$ とすると $a_{k+1} = \dfrac{a_k}{3a_k - 4} \neq 0$ である（k は自然数）から，数学的帰納法よりすべての自然数 n について $a_n = 0$ である．

よって，漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n - 4}$ の両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 4}{a_n} = 3 + \frac{4}{a_n}$$

よって，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1} = 4b_n + 3$ となる．特性方程式を考えて $t = 4t + 3 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1$ であるから

$$b_{n+1} + 1 = 4(b_n + 1)$$

よって，数列 $\{b_n + 1\}$ は公比 4，初項 $b_1 + 1 = \dfrac{1}{a_1} + 1 = 2$ の等比数列

であるから

$$b_n + 1 = 2 \cdot 4^{n-1} \iff b_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 1$$

$2 \cdot 4^{n-1} - 1 \neq 0$ であるから．$a_n = \dfrac{1}{b_n} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2 \cdot 4^{n-1} - 1}}$.

【発展 58：分数型の漸化式〜その２〜】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 4}{a_n + 1}$ で与えられる数列を a_n とする．

① $a_n = a_{n+1} = t$ を代入した特性方程式を解け．　② 一般項 a_n を求めよ．

【解答】

① $t = \dfrac{t+4}{t+1}$ となるので

$$t(t+1) = t + 4 \iff t^2 = 4 \ \therefore\ \boldsymbol{t = \pm 2}$$

② 漸化式の両辺から 2 を引いて

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n + 4}{a_n + 1} - 2 = \frac{a_n + 4 - 2(a_n + 1)}{a_n + 1} = \frac{-a_n + 2}{a_n + 1}$$

◀ −2 も特性方程式の解であるから，−2 を引いてもよい．

よって，$a_{n+1} - 2 = -\dfrac{a_n - 2}{a_n + 1}$ ……… ① である．

ここで，$a_n \neq 2$ である．というのも，$a_1 = 1 \neq 2$ であり，$a_k \neq 2$ のとき①から $a_{k+1} \neq 2$ であり，数学的帰納法によりすべての n で $a_n \neq 2$ と示されるからである．

そこで，①の両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1} - 2} = -\frac{a_n + 1}{a_n - 2} = -\frac{(a_n - 2) + 3}{a_n - 2} = -1 - \frac{3}{a_n - 2}$$

よって，$b_n = \dfrac{1}{a_n - 2}$ とすると $b_{n+1} = -1 - 3b_n$ であり

$$b_{n+1} + \frac{1}{4} = -3\left(b_n + \frac{1}{4}\right)$$

◀ 特性方程式 $t = -1 - 3t$ を解いて $t = -\dfrac{1}{4}$

となる．数列 $\left\{b_n + \dfrac{1}{4}\right\}$ は初項 $b_1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{a_1 - 2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{1-2} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{4}$，公比 −3 の等比数列であるから

$$\begin{aligned} b_n + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}(-3)^{n-1} &\iff b_n = \frac{(-3)^n - 1}{4} \\ &\iff \frac{1}{a_n - 2} = \frac{(-3)^n - 1}{4} \\ &\iff a_n - 2 = \frac{4}{(-3)^n - 1} \quad ((-3)^n - 1 \neq 0 \text{ より}) \\ &\iff a_n = 2 + \frac{4}{(-3)^n - 1} = \frac{2 \cdot (-3)^n - 2 + 4}{(-3)^n - 1} \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a_n = \dfrac{2\{(-3)^n + 1\}}{(-3)^n - 1}}$.

◀ $\boldsymbol{a_n = 2 + \dfrac{4}{(-3)^n - 1}}$ でもよい．

C. 指数型の漸化式

たとえば，$a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+2}$ のような漸化式であれば，両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{6a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} \iff \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 3 \cdot \frac{a_n}{2^n} + 2$$

となるので，$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_{n+1} = 3b_n + 2$ となり，b_n が求められ，それに伴い a_n も求められる．

【練習 59：指数型の漸化式】

直前の説明を利用し，$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+2}$ で与えられる数列 a_n の一般項を求めよ．

【解答】 両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{6a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} \iff \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 3 \cdot \frac{a_n}{2^n} + 2$$

となるので，$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_{n+1} = 3b_n + 2$ となる．この特性方程式から $t = 3t + 2 \iff t = -1$ であるから

$$b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$$

よって，数列 $\{b_n + 1\}$ は公比 3，初項 $b_1 + 1 = \dfrac{a_1}{2^1} + 1 = 2$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} b_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1} &\iff b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1 \\ &\iff \frac{a_n}{2^n} = 2 \cdot 3^{n-1} - 1 \\ &\iff \boldsymbol{a_n = 2^{n+1} \cdot 3^{n-1} - 2^n} \end{aligned}$$

◀ $4 \cdot 6^{n-1} - 2^n$ でもよい．

【発展 60：指数型の漸化式〜その２〜】

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

① $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 3^{n+1}$　　② $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 4^n$

【解答】

① 両辺を 3^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{3a_n}{3^{n+1}} + \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} \iff \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + 1$$

となるので，$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，$b_{n+1} = b_n + 1$ となる．

よって，数列 $\{b_n\}$ は公差 1，初項 $b_1 = \dfrac{a_1}{3^1} = \dfrac{1}{3}$ となるから

$$b_n = \frac{1}{3} + (n-1)$$

$$\iff \frac{a_n}{3^n} = n - \frac{2}{3} \qquad \therefore a_n = 3^n\left(n - \frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{3^{n-1}(3n-2)}$$

◀ $a_n = 3^n\left(n - \dfrac{2}{3}\right)$ でもよい

② 両辺を 4^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{3a_n}{4^{n+1}} + \frac{4^n}{4^{n+1}} \iff \frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{4}$$

となるので，$b_n = \dfrac{a_n}{4^n}$ とおくと，$b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}$ となる．この特性方程式から $t = \dfrac{3}{4}t + \dfrac{1}{4} \iff t = 1$ であるから

$$b_{n+1} - 1 = \frac{3}{4}(b_n - 1)$$

よって，数列 $\{b_n - 1\}$ は公比 $\dfrac{3}{4}$，初項 $b_1 - 1 = \dfrac{a_1}{4^1} - 1 = -\dfrac{3}{4}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} b_n - 1 = -\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} &\iff b_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1 \\ &\iff \frac{a_n}{4^n} = 1 - \frac{3^n}{4^n} \\ &\iff \boldsymbol{a_n = 4^n - 3^n} \end{aligned}$$

D.　$a_{n+1} = pa_n +$（n の 1 次式）の漸化式

たとえば，漸化式 $a_{n+1} = 3a_n + 4n$ を考えよう．

漸化式 $a_{n+1} = 3a_n + 4$ であれば，特性方程式を解いて $a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$ を考えたが，今回は，$a_n + 2$ の代わりに $a_n +$（n の式）を用いる．

……この問いには別解があり，右のような差を取り，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ について $b_{n+1} = 3b_n + 4$ が成り立つことから b_n を求め，a_n も求める方法である．しかし，次の練習の解答に比べ手順が多くなる．

$$\begin{array}{rrll} & a_{n+2} & = 3a_{n+1} & +4(n+1) \\ -) & a_{n+1} & = 3a_n & +4n \\ \hline & a_{n+2} - a_{n+1} & = 3(a_{n+1} - a_n) + 4 & \end{array}$$

【練習 61：1 次式型の漸化式〜その１〜】

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 4n$ で与えられる数列を $\{a_n\}$ とする．

(1) 与えられた漸化式が $a_{n+1} + \{p(n+1) + q\} = 3[a_n + \{pn + q\}]$ と一致するよう，p, q の値を定めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

【解答】

(1) $a_{n+1} + \{p(n+1) + q\} = 3[a_n + \{pn + q\}]$ を a_{n+1} について解くと

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3(a_n + pn + q) - p(n+1) - q \\ &= 3a_n + 2pn + (2q - p) \end{aligned}$$

これを漸化式 $a_{n+1} = a_n + 4n$ と係数比較して

$$2p = 4,\ 2q - p = 0$$

これを解いて $\boldsymbol{(p,\ q) = (2,\ 1)}$.

(2) (1) より $a_{n+1} + 2(n+1) + 1 = 3(a_n + 2n + 1)$ であるから，数列 $\{a_n + 2n + 1\}$ は初項 $a_1 + 2\cdot 1 + 1 = 4$，公比 3 の等比数列である．よって

$$a_n + 2n + 1 = 4\cdot 3^{n-1} \iff \boldsymbol{a_n = 4\cdot 3^{n-1} - 2n - 1}$$

【発展 62：1 次式型の漸化式〜その２〜】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 4n - 1$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

【解答】 $a_{n+1} + p(n+1) + q = 2(a_n + pn + q)$ を a_{n+1} について解くと

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2(a_n + pn + q) - p(n+1) - q \\ &= 2a_n + pn + (q - p) \end{aligned}$$

よって，$a_{n+1} = 2a_n + 4n - 1$ と係数を比較して

$p = 4,\ q - p = -1$

$q = 3$ と分かるので，与えられた漸化式は

$a_{n+1} + 4(n+1) + 3 = 2(a_n + 4n + 3)$

となる．数列 $\{a_n + 4n + 3\}$ は初項 $a_1 + 4 \cdot 1 + 3 = 8$，公比 2 の等比数列であるから

$a_n + 4n + 3 = 8 \cdot 2^{n-1} \iff \boldsymbol{a_n = 2^{n+2} - 4n - 3}$

E. 隣接 3 項間漸化式

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$ のように，a_{n+2}，a_{n+1}，a_n に関する漸化式を**隣接 3 項間漸化式**と言う．

$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$ を満たす a_n を求めるには，$a_{n+2} = t^2$，$a_{n+1} = t$，$a_n = 1$ とおいた特性方程式を解き，その解から右のように漸化式を変形する．

$$\begin{aligned} t^2 - t - 6 &= 0 \\ (t-3)(t+2) &= 0 \\ t &= 3, -2 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) \\ a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) \end{cases}$$

特性方程式の解 α，β に対し
$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$
を２通り作る

ここから，$\{a_{n+1} - 3a_n\}$，$\{a_{n+1} + 2a_n\}$ はそれぞれ -2，3 の等比数列と分かり一般項が求められる．その結果から a_{n+1} を消去して，a_n を導くことができる．

‥‥ 実際，$a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n)$，$a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n)$ も，展開して整頓すると $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$ になると確かめられる．

【発展 63：隣接 3 項間漸化式〜その１〜】

1. 上のやり方を続け，$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
2. 次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(a) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} - 4a_n = 0$　　(b) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0$

【解答】

1 $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) & \cdots\cdots\ ① \\ a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$ と

する．まず，①から，$\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は公比 -2，初項は $a_2 - 3a_1 = 2 - 3 = -1$ の等比数列と分かるので

$a_{n+1} - 3a_n = -1 \cdot (-2)^{n-1}$ ………………… ③

また，②から，$\{a_{n+1} + 2a_n\}$ は公比 3，初項は $a_2 + 2a_1 = 2 + 2 = 4$ の等

比数列と分かるので

$$a_{n+1}+2a_n=4\cdot 3^{n-1} \qquad \cdots\cdots ④$$

④ − ③ を考えると

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1}+2a_n &= 4\cdot 3^{n-1} \\ -) & a_{n+1}-3a_n &= -1\cdot(-2)^{n-1} \\ \hline & 5a_n &= 4\cdot 3^{n-1}+(-2)^{n-1} \end{array} \qquad \therefore\ \boldsymbol{a_n=\frac{4\cdot 3^{n-1}+(-2)^{n-1}}{5}}$$

② (a) 特性方程式を解くと $t^2-3t-4=0 \iff t=4,-1$ であるから

$$a_{n+2}-4a_{n+1}=-(a_{n+1}-4a_n), \quad a_{n+2}+a_{n+1}=4(a_{n+1}+a_n) \quad \cdots ⑤$$

⑤の左の式から $\{a_{n+1}-4a_n\}$ は公比 -1，初項 $a_2-4a_1=2-4=-2$ の等比数列であるので

$$a_{n+1}-4a_n=-2\cdot(-1)^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

となる．また，⑤の右の式から $\{a_{n+1}+a_n\}$ は公比 4，初項 $a_2+a_1=2+1=3$ の等比数列であるので

$$a_{n+1}+a_n=3\cdot 4^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

となる．以上から，⑦ − ⑥ を考えると

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1}+a_n &= 3\cdot 4^{n-1} \\ -) & a_{n+1}-4a_n &= -2\cdot(-1)^{n-1} \\ \hline & 5a_n &= 3\cdot 4^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1} \end{array} \qquad \therefore\ \boldsymbol{a_n=\frac{3\cdot 4^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}}{5}}$$

(b) 特性方程式を解くと $t^2+3t-4=0 \iff t=-4,\ 1$ であるから

$$a_{n+2}+4a_{n+1}=a_{n+1}+4a_n, \quad a_{n+2}-a_{n+1}=-4(a_{n+1}-a_n) \quad \cdots ⑧$$

⑧の左の式から

$$a_{n+1}+4a_n=a_2+4a_1=2+4=6 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

◀ 公比 1．初項 $a_2+4a_1=6$ の等比数列だから．すべての項が 6 と等しい．と考えてもよい．

となる．また，⑧の右の式から $\{a_{n+1}-a_n\}$ は公比 -4，初項 $a_2-a_1=2-1=1$ の等比数列であるので

$$a_{n+1}-a_n=1\cdot(-4)^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑩$$

となる．以上から，⑨ − ⑩ を考えると

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1}+4a_n &= 6 \\ -) & a_{n+1}-a_n &= (-4)^{n-1} \\ \hline & 5a_n &= 6-(-4)^{n-1} \end{array} \qquad \therefore\ \boldsymbol{a_n=\frac{6-(-4)^{n-1}}{5}}$$

隣接 3 項間漸化式

隣接 3 項間漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ について，$a_{n+2}=t^2$, $a_{n+1}=t$, $a_n=1$ を代入してできる特性方程式 $t^2+pt+q=0$ の解を α, β とすると，次の同値な式が得られる．

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0 \iff \begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$

右の式は，数列 $\{a_{n+2}-\alpha a_{n+1}\}$ は公比 β の，数列 $\{a_{n+2}-\beta a_{n+1}\}$ は公比 α の，等比数列であることを示している．

$\alpha=\beta$ の場合は，式が 1 つしか得られないが，次の発展問題のようにして解く．また，α, β は複素数でもよいが，高校数学では扱われない．

（証明）$t^2+pt+q=0$ の解 α, β について，解と係数の関係より $p=-(\alpha+\beta)$, $q=\alpha\beta$ が成り立つから $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ である．これを変形して

$$\begin{aligned} a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0 &\iff a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta a_{n+1}-\alpha\beta a_n \\ &\iff a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \end{aligned}$$

となる．同様にして $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ も得られる．

【発展 64：隣接 3 項間漸化式〜その２〜】

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めたい．以下の $\boxed{}$ に当てはまる値・式を求めなさい．

与えられた漸化式 $a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ の特性方程式を解くと $t=\boxed{\text{ア}}$ と重解になる．与えられた漸化式は $a_{n+2}-\boxed{\text{ア}}a_{n+1}=\boxed{\text{ア}}(a_{n+1}-\boxed{\text{ア}}a_n)$ と変形でき，数列 $\{a_{n+1}-\boxed{\text{ア}}a_n\}$ は公比 $\boxed{\text{イ}}$，初項 $\boxed{\text{ウ}}$ の等比数列と分かり

$$a_{n+1}-\boxed{\text{ア}}a_n=\boxed{\text{エ}} \qquad \cdots\cdots ①$$

と求められる．特性方程式の解が重解のため，①の一式しかないが，①を指数型の漸化式とみなし，①の両辺を $\boxed{\text{イ}}^{n+1}$ で割れば，$b_n=\dfrac{a_n}{\boxed{\text{イ}}^n}$ についての漸化式を考えることができる．この計算を進め，最終的に $a_n=\boxed{\text{オ}}$ と求められる．

【解答】 特性方程式より $t^2-6t+9=0 \iff (t-3)^2=0$ から $t=\underline{\mathbf{3}}_{(ア)}$ と重解になる．よって

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形でき，$\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比 $\underline{\mathbf{3}}_{(イ)}$，初項 $a_2-3a_1=\underline{\mathbf{-1}}_{(ウ)}$ の等比数列と分かり

$$a_{n+1}-3a_n=-1\cdot 3^{n-1}=\underline{\mathbf{-3^{n-1}}}_{(エ)} \iff a_{n+1}=3a_n-3^{n-1}$$

と求められる．この両辺を 3^{n+1} で割って $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{a_n}{3^n}-\dfrac{1}{3^2}$ となる．$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，$b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{9}$ となり，$\{b_n\}$ は公差 $-\dfrac{1}{9}$，初項 $b_1=\dfrac{1}{3^1}=\dfrac{1}{3}$

の等差数列であるから

$$b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(n-1) \iff \frac{a_n}{3^n} = -\frac{1}{9}n + \frac{4}{9}$$
$$\iff a_n = \underline{\boldsymbol{3^{n-2}(-n+4)}}_{(オ)}$$

F. 連立漸化式

たとえば $a_1 = 1,\ b_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + b_n,\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ のように，$a_{n+1},\ b_{n+1}$ が $a_n,\ b_n$ の式で与えられる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について考えよう．

これは，$a_{n+1} = 2a_n + b_n$ から得られる 2 式 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$，$b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1}$ を代入し

$$b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \iff a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3a_n + 4(a_{n+1} - 2a_n)$$

となる．これを整頓して得られる隣接 3 項間漸化式 $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = 0$ を解けばよい．

【発展 65：連立漸化式】

① 上のやり方を利用し，$a_1 = 1,\ b_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + b_n,\ b_{n+1} = 3_n + 4b_n$ を満たす数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めなさい．

② $a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2b_n,\ b_{n+1} = 4a_n + b_n$ を満たす数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めなさい．

【解答】

① $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ から得られる 2 式 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$，$b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1}$ を代入し

$$b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \iff a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = 0$$

となる．この漸化式の特性方程式は $t^2 - 6t + 5 = 0 \iff t = 1,\ 5$ であるから，次のように変形できる．

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 5(a_{n+1} - a_n),\quad a_{n+2} - 5a_{n+1} = a_{n+1} - 5a_n \quad \cdots\cdots ①$$

②の右の式より，

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} = a_{n+1} - 5a_n = a_2 - 5a_1$$

である．ここで，$a_2 = 2a_1 + b_1 = 2 + 1 = 3$ であるから

$$a_{n+1} - 5a_n = 3 - 5 = -2 \quad \cdots\cdots ②$$

◀ 問題文の 1 つ目の漸化式である $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ に $n = 1$ を代入した

となる．また，②の左の式より，$\{a_{n+1} - a_n\}$ は公比 5，初項 $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ の等比数列であるから

◀ 漸化式 $a_{n+1} - 5a_n = -2$ を解いて求めてもよい．

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 5^{n-1} \quad \cdots\cdots ③$$

となる．③ − ② より

$$4a_n = 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \iff \boldsymbol{a_n = \frac{5^{n-1}+1}{2}}$$

これを $a_{n+1} = 2a_n + b_n \iff b_n = a_{n+1} - 2a_n$ に代入して

$$b_n = \frac{5^n + 1}{2} - 2 \cdot \frac{5^{n-1}+1}{2}$$
$$= \frac{5 \cdot 5^{n-1} + 1 - 2 \cdot 5^{n-1} - 2}{2} = \boldsymbol{\frac{3 \cdot 5^{n-1} - 1}{2}}$$

② $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \iff b_n = \dfrac{1}{2}(a_{n+1} - 3a_n)$ であり，また，$b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_{n+2} - 3a_{n+1})$ であるから

$$\begin{aligned} b_{n+1} = 4a_n + b_n &\iff \frac{1}{2}(a_{n+2} - 3a_{n+1}) = 4a_n + \frac{1}{2}(a_{n+1} - 3a_n) \\ &\iff a_{n+2} - 3a_{n+1} = 8a_n + a_{n+1} - 3a_n \\ &\iff a_{n+2} - 4a_{n+1} - 5a_n = 0 \end{aligned}$$

となる．この漸化式の特性方程式は $t^2 - 4t - 5 = 0 \iff t = 5, -1$ であるから，次のように変形できる．

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} = -(a_{n+1} - 5a_n),\ \ a_{n+2} + a_{n+1} = 5(a_{n+1} + a_n) \qquad \cdots ④$$

④の左の式より，$\{a_{n+1} - 5a_n\}$ は公比 -1，初項 $a_2 - 5a_1$ の等比数列である．ここで，$a_2 = 3a_1 + 2b_1 = 2$ であるから

$$a_{n+1} - 5a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

また，④の右の式より，$\{a_{n+1} + a_n\}$ は公比 5，初項 $a_2 + a_1 = 2$ の等比数列であるから

$$a_{n+1} + a_n = 2 \cdot 5^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

となる．以上から，⑥ − ⑤ を考えると

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} + a_n = 2 \cdot 5^{n-1} \\ -) & a_{n+1} - 5a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1} \\ \hline & 6a_n = 2 \cdot 5^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-1} \end{array}$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{5^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3}}$$

これを $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \iff b_n = \dfrac{1}{2}(a_{n+1} - 3a_n)$ に代入して

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{5^n - (-1)^n}{3} - 3 \cdot \frac{5^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3}\right) \\ &= \frac{5 \cdot 5^{n-1} + (-1)^{n-1} - 3 \cdot 5^{n-1} + 3 \cdot (-1)^{n-1}}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{\cdot 5^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1}}{3}} \end{aligned}$$

索引

一般項, 92

階数数列, 113

項, 91

初項, 91
第 2 項, 91
第 3 項, 91
末項, 96

数学的帰納法, 129

数列, 91

漸化式, 123

部分分数分解, 118