13th-note 数学A

（2013 年度卒業生まで）

Ver1.51（2012-3-17）

第１章 Ver1.51，第２章 Ver1.50，第３章 Ver1.50，第４章 Ver1.50

はじめに

13th-note 数学Aは，文部科学省の指導要領（平成２２年度現在）に沿った内容を含む検定外の「高校の教科書」として作られ，ホームページ（http://www.collegium.or.jp/~kutomi/）にて無償公開されています．学ぶ意欲さえあれば，誰でも学ぶことができるように，との意図からです．

また，執筆者と閲覧者がインターネットを介して繋がり，互いの意見を交わすことが出来る関係にあります．

こういった「教科書」の形態は，日本ではあまり見られないことでしょう．

しかし，13th-note 数学Aが既存の教科書と最も異なる点は，その中身でしょう．13th-note 数学Aでは，以下の方針を採用しています．

- 13th-note 数学Aでは全ての問題に，詳細な解答・解説を付ける
- 新出の数学の概念に関して，既存の教科書より詳細な解説が付ける（通常，教師用にしか載っていない内容も載せる）

これらは，以下の考えに基づいています．

- 自学自習がしやすい教科書にしたかった
（学校等とは関係なく自分で勉強したい人のためでもあり，試験前に教科書を開きながら自学自習する高校生のためでもある）
- 隅々まで読めば読むほど，何か得るものがある教科書にしたかった
- 大学受験の数学を意識してはいるが，あくまで数学の知識・感覚（新しい数学の概念を吸収するための土壌，とでも言えるでしょうか）を中心に解説している教科書にしたかった
- 既存の教科書・指導要領の流れに沿わせることよりも，数学の理解に必要かどうかに基づいて内容の選定・配列しようと試みた

詳細な解説を増やしたことは，一方で，作成しながら悩みの種にもなりました．それは，その詳細な解説が，読者の創造力・発想力を妨げないか，という点です．

この点について，私は「詳細な解説を最初に読むか，後で読むか，そもそも読まないか，それは読者が決めればよい．ただ我々は，読者の視点が偏らないよう，最大限の配慮をするのみ」という結論を出し，上記の方針としました．

この教科書の執筆者として，数学の学習について 2 点アドバイスを書いておきます．

(1) 問題を解いて答えが合わないときは，まず，計算ミスを疑いましょう．
(2) 一度理解できた内容を復習するときは，できるだけ暗算で，紙に式変形を書かずに行いましょう．

この 13th-note 数学Aの図や絵のいくつかは，FTEXT 数学シリーズから利用させていただいています．FTEXT 数学シリーズの作成を中心になって進められた吉江弘一氏に，感謝いたします．

この 13th-note 数学Aを作成する際には，TEX という組版ソフトが使われています．TEX のシステムを作られた Donald E. Knuth 氏，それを日本語に委嘱した ASCII Corporation，さらに，（日本の）高校数学に適

した記号・強力な描画環境を実現した「LaTeX 初等数学プリント作成マクロ emath」作者の大熊一弘氏に，感謝いたします．

最後に，13th-note 数学Ａの雰囲気を和らげてくれている**みかちゃんフォント**の作者にも感謝いたします．

この教科書を手にとった人，一人一人に，「数学も，悪くないな」と思っていただければ，幸いです．

久富 望

凡例

1. 【解答】について

【解答】には，問題の解答だけでなく，さらに理解を深めるためのヒントも書かれていることがあります．問題を解いて解答が一致した後，一応**【解答】**をチェックすることをお勧めします．

2. 問題の種類

【例題 2】　**【例題】**は，主に，直前の定義や内容の確認を兼ねた例題です．
はじめて学ぶ人，復習だが理解が足りないと思う人は，解くのが良いでしょう．
逆に，既に理解がある程度できていると思う人は，飛ばしても良いでしょう．

【練習 3：主要になる「練習」問題】
【練習】は，13th-note 教科書の軸と成る問題群です．
基本的に解くようにしましょう．解いていて疑問など見つかれば，直線の説明，**【例題】**を参照したり，答えをよく理解するようにしましょう．

【暗記 4：ただ解けるだけではいけません】
定義・定理を「知っている」と「使える」は違います．
特に，「反射的にやり方を思い出す」べき内容があります．それが，この暗記問題です．
この暗記問題については「解ける」だけでなく，その解き方・考え方をすぐに頭の中で思い浮かべられるようにするべきです．

【発展 5：さらなる次へのステップ】
発展 は，ただ定義や定理が分かるだけでは解けない問題です．
さらに理解を深めたい人，大学入試の数学を意識する人は挑戦し，理解するようにしましょう．

3. 補足

本文中，ところどころに マーク付きの文章があります．このマークのついた文章は，主に，本文とは少し異なる視点から書かれています．理解を深めることに役立つことがあるでしょう．

目次

第 1 章　集合・命題・証明 ～ 数学の基礎

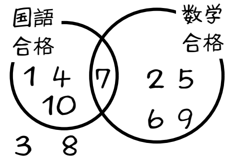
1.1　集合

1.　集合の基礎

A.　集合とは何か

たとえば，出席番号 1 から 10 までの人が受けたテスト結果が左下の表になったとき，右下のようにもまとめられる．

出席番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
国語	○	×	×	○	×	×	○	×	×	○
数学	×	○	×	×	○	○	○	×	○	×

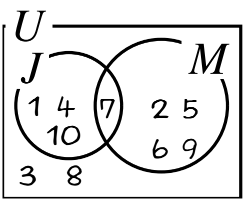


ものや人の集まりを**集合** (set) といい[*1]，集合に含まれるものや人をその集合の**要素** (element) という．

さらに，次のように集合を文字で置こう[*2]．

出席番号 1 から 10 までの 10 人の集合を U

「国語を合格した人」の集合を J，「数学を合格した人」の集合を M



右下のような図を**ベン図** (Venn diagram) という．また，この例では四角の枠内の集合 U の要素のみ考えている．このような集合 U は**全体集合** (universal set) といわれる．

【例題 1】 上の例において，次にあてはまる要素を**すべて**答えよ．

1. M の要素であるもの
2. J の要素でも M の要素でもあるもの
3. M の要素で**ない**もの
4. J の要素ではあるが M の要素では**ない**もの

【解答】

1. **2, 5, 6, 7, 9**　2. **7**　3. **1, 3, 4, 8, 10**　4. **1, 4, 10**

[*1] ただし，数学では集合に含まれるか含まれないか明確にできる場合のみ扱う．「大きい数の集まり」のように，範囲が不明確なものは集合とはいわない．

[*2] たいてい，集合は大文字 $A, B, C, \cdots, Y, Z$ で表され，要素は小文字 $a, b, c, \cdots, y, z$ で表される．

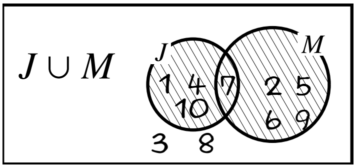
B.　集合の表し方〜外延的定義

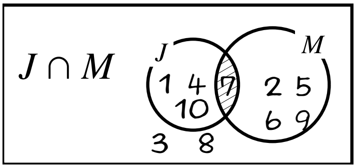
p.1 の例において，集合 J の要素は 1，4，7，10 ですべてである．このことを，次のように表す[*3]．

$J = \{1,\ 4,\ 7,\ 10\}$　←{　}の間にすべての要素を書き出す

C.　「または」を表す記号 ∪,「かつ」を表す記号 ∩

集合 J, M のうち，少なくとも一方には属する要素全体の集合を $J \cup M$（または）で表す．これを集合 J と M の**和集合** (sum of sets) といい，ベン図では右の斜線部分に対応する．





集合 J, M の両方に属する要素全体の集合は $J \cap M$（かつ）で表す．これを集合 J, M の**共通部分** (common part) といい，ベン図では右下の斜線部分に対応する．

右のベン図を用いて，要素を書き並べると，次のようになる．

$J \cup M = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$，　$J \cap M = \{7\}$

要素をもたない集合を**空(くう)集合** (empty set) といい，記号 $\emptyset$ で表す[*4]．もし，集合 A, B に共通の要素がないならば，$A \cap B = \emptyset$ と表す．

【例題 2】 $A = \{1, 3, 4, 5, 8\}$，$B = \{2, 5, 7\}$，$C = \{3, 6\}$ のとき，$A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B \cap C$ を答えよ．

【解答】　$\underbrace{A}_{\{1,3,4,5,8\}} \cup \underbrace{B}_{\{2,5,7\}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

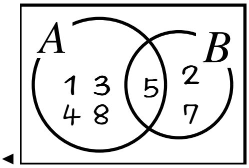
↑ A と B の少なくとも一方に含まれているもの

$\underbrace{A}_{\{1,3,4,5,8\}} \cap \underbrace{B}_{\{2,5,7\}} = \{5\}$

↑ A と B の両方に含まれているもの

$B \cup C = \{2, 3, 5, 6, 7\}$

B と C には共通する要素がないので，$B \cap C = \emptyset$ である．

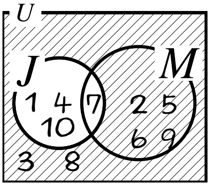


D.　補集合

全体集合 U のうち集合 J に属さ**ない**要素全体の集合を $\overline{J}$ で表す．p.1 の例では

$\overline{J} = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$

である．これを集合 J の**補集合** (complement) といい，ベン図では右の斜線部分に対応する．補集合を考えるときは，必ず全体集合を定める必要がある．



---

*3 このように，要素を書き並べて集合を表すことを**外延(がいえん)的定義** (extensional definition) という．

*4 集合における空集合は，数におけるゼロの役割に近い．．それが由来で，空集合は 0 に斜線をいれた $\emptyset$ で表す．

【例題 3】 全体集合は $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ とする．

1. 1 桁の 2 の倍数の集合を A とするとき，A, $\overline{A}$ を，それぞれ要素を書き並べて表せ．
2. 1 桁の 3 の倍数の集合を B とする．$A \cap B$, $\overline{A} \cap B$ を，それぞれ要素を書き並べて表せ．

【解答】

1. $\boldsymbol{A = \{2, 4, 6, 8\}}$，$\boldsymbol{\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}}$
2. $B = \{3, 6, 9\}$ であるから，$\boldsymbol{A \cap B = \{6\}}$，$\boldsymbol{\overline{A} \cap B = \{3, 9\}}$

◀ 1. の答えのうち 3 の倍数のものだけ選べばよい．

E.　「属する」を表す記号 ∈

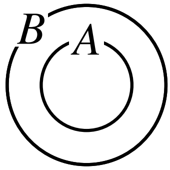
一般に，「a が集合 X の要素である」ことを「a は集合 X に**属する** (in)」という．

p.1 の例において，「1 は集合 J に属する」「3 は集合 J に属さない」．これらを次の記号で表す．

$1 \in J$　（または，$J \ni 1$[*5]），　　　$3 \notin J$　（または，$J \not\ni 3$）

このように，属する・属さないは，記号 $\in$, $\notin$, $\ni$, $\not\ni$ を用いて表される．

$A \subseteqq B$

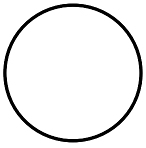


F.　部分集合を表す記号 ⊆，⊇

2 つの集合 A，B について，A の全ての要素が B の要素であるとき，「A は B の**部分集合** (subset) である」「B は A を**含む** (contain)」と言い，次の記号で表す．

記号 $A \subseteqq B$　　（または，$B \supseteqq A$）[*6]

$A = B$



これらを否定するときは，記号 $A \not\subseteqq B$, $B \not\supseteqq A$ で表す．

記号 $\subseteqq$, $\supseteqq$ は，等号を省略して $\subset$, $\supset$ と書かれることも多い[*7]．

一般に，A と B の要素が完全に一致するときは，A と B は**等しい** (equal) といい $A = B$ と表す．また，等しくないときは $A \neq B$ と表す．

空集合 $\emptyset$ は，どんな集合にも含まれていると決められている．実際，空集合のすべての要素（1 つもないのだが）は，どんな集合にも含まれている．

【例題 4】 次のうち，正しいものをすべて選べ．

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \supseteqq \{1,\ 2,\ 3\}$，　$\{1,\ 2,\ 3\} \supseteqq \{2,\ 3\}$，　$\{1,\ 2\} \supseteqq \{2,\ 3,\ 5\}$，　$\{1\} \supseteqq \emptyset$

【解答】　$\boldsymbol{\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \supseteqq \{1,\ 2,\ 3\}}$，　$\boldsymbol{\{1\} \supseteqq \emptyset}$

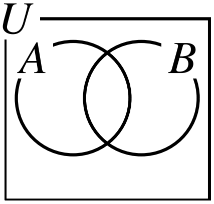
[*5] 記号の広い側が集合の方を向く．読み方は「1 は J に属する」，「1 は J の要素である」，「J は 1 を要素にもつ」など．

[*6] 記号の広い側が大きい集合の方を向く．読み方は「A は B の部分集合である」「B は A を含む」「A は B に含まれる」など．

[*7] $A \subset B$ は，「A が B の**真部分集合** (proper subset) である」ことを表す場合もある．「A が B の真部分集合である」とは，$A \subseteqq B$ であるが $A \neq B$ のときのことをいう．

【練習 5：集合の記号】

全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ とし，そのうち 12 の約数である数の集合を A，10 の約数である数の集合を B とする．



(1) 右のベン図に 1 から 12 までのすべての要素を書き入れなさい．

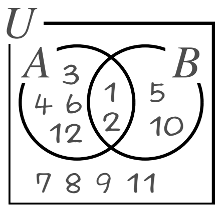
(2) 集合 $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$ を答えなさい．

(3) 次のうち，正しいものをすべて選びなさい．

$3 \in A \cap B$,　$3 \in A \cup B$,　$\overline{B} \ni 4$,　$A \cap B \not\ni 2$,　$A \cup B \supseteqq A$,　$A \supseteqq A \cap B$

【解答】

(1)



(2) $\boldsymbol{\overline{A} = \{5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}}$

また，左のベン図より

$\boldsymbol{A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12\}}$

$\boldsymbol{A \cap B = \{1,\ 2\}}$ である．

(3) $\boldsymbol{3 \in A \cup B,\ \ \overline{B} \ni 4,\ \ A \cup B \supseteqq A,\ \ A \supseteqq A \cap B}$

◀ A, B がどんな集合でも，$A \cup B \supseteqq A$, $A \cup B \supseteqq B$ や，$A \supseteqq A \cap B$, $B \supseteqq A \cap B$ は成り立つ．

····

∪ はコップのような形をしているので水がいっぱい入り，要素の個数が多くなる和集合を表すと覚えると，∪, ∩ の区別をつけやすい．

【練習 6：部分集合】

集合 $\{1,\ 2,\ 3\}$ の部分集合をすべて挙げよ．

【解答】　$\boldsymbol{\{1,\ 2,\ 3\}}$, $\boldsymbol{\{1,\ 2\}}$, $\boldsymbol{\{2,\ 3\}}$, $\boldsymbol{\{1,\ 3\}}$, $\boldsymbol{\{1\}}$, $\boldsymbol{\{2\}}$, $\boldsymbol{\{3\}}$, $\boldsymbol{\emptyset}$

◀ 集合 $\{1,\ 2,\ 3\}$ は $\{1,\ 2,\ 3\}$ 自身を含んでいる．

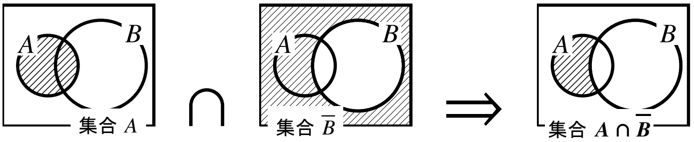
【㊇㊆ 7：どんな集合でも成り立つ法則】

全体集合 U に含まれる集合 A について，集合 $A \cap \overline{A}$, $A \cup \overline{A}$ はどんな集合か．また，$\overline{A}$ の補集合である $\overline{\overline{A}}$ はどんな集合か．

【解答】　U の要素は A か $\overline{A}$ のどちらかにしか属さないので，$\boldsymbol{A \cap \overline{A} = \emptyset}$．
U のすべての要素は，A か $\overline{A}$ のいずれかに属するので $\boldsymbol{A \cup \overline{A} = U}$．
$\overline{A}$ に属さない要素はすべて A に属するので，$\boldsymbol{\overline{\overline{A}} = A}$．

G. 「ベン図」による集合の図示

集合 $A \cap \overline{B}$ は，ベン図の A, $\overline{B}$ のどちらも斜線になる部分であるので，次のように図示できる．



H. ド・モルガンの法則

たとえば，$\overline{A \cap B}$ によって「$A \cap B$ の補集合」を表す．この集合について，重要な法則がある．

【暗記 8：集合の性質〜その１〜】

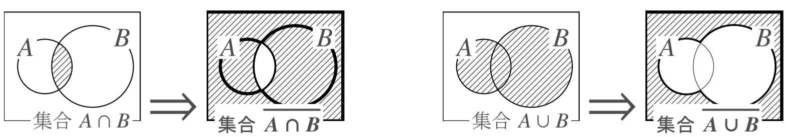
(1) 集合 $\overline{A \cap B}$，$\overline{A \cup B}$ について，それぞれベン図を用いて図示しなさい．

(2) 集合 $\overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A} \cup \overline{B}$，$\overline{A} \cup B$ について，それぞれベン図を用いて図示しなさい．

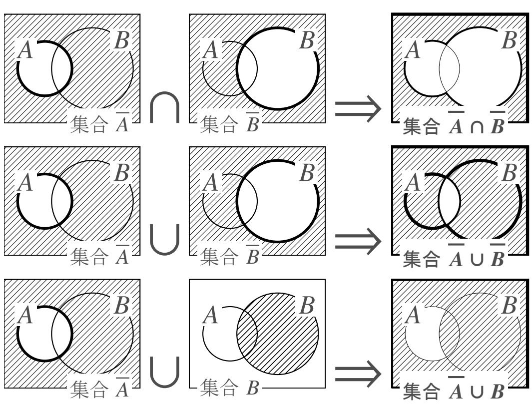
(3) (1)，(2) で図示した集合のうち，等しい集合を 2 組選び，等号で結びなさい．

【解答】

(1)



(2)



(3) ベン図において，(2) の上から 1 番目と (1) の右が同じ図になるので $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$，(2) の上から 2 番目と (1) の左が同じ図になるので $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$.

ド・モルガンの法則

どんな集合 A，B に関しても，次の**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) が成り立つ．

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

….この法則を「補集合を表す線を切ると，∩ や ∪ がひっくり返る」と覚えてもよい．

【練習 9：ベン図による図示とド・モルガンの法則】

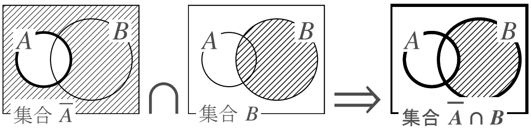
(1) 集合 $\overline{A} \cap B$ をベン図を用いて図示しなさい.

(2) 全体集合を $U = \left\{ n \,\middle|\, n \text{ は 1 桁の整数} \right\}$ とし，$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする.

$\overline{A} \cap B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ を，それぞれ要素を書き並べて表せ.

【解答】

(1)

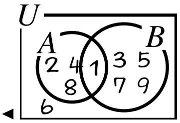


(2) $\overline{A} \cap B = \mathbf{\{3, 5, 7, 9\}}$，$A \cup \overline{B} = \mathbf{\{1, 2, 4, 6, 8\}}$

また，ド・モルガンの法則より

$A \cap B = \{1\}$ であるので，$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \mathbf{\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ であるので，$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \mathbf{\{6\}}$



◀ (1) で塗られた部分の要素だけ選べば，$\overline{A} \cap B$ になっている．また，次のように考えてもよい．

$\underbrace{\overline{A}}_{\{3,5,6,7,9\}} \cap \underbrace{B}_{\{1,3,5,7,9\}} = \{3, 5, 7, 9\}$

$\underbrace{A}_{\{1,2,4,8\}} \cup \underbrace{\overline{B}}_{\{2,4,6,8\}} = \{1, 2, 4, 6, 8\}$

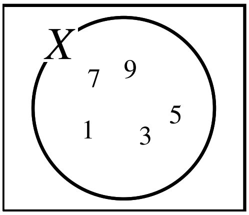
2. いろいろな集合の表現

A. 集合の表し方〜内包的定義

集合 $X = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ は，要素の満たす条件を示す方法を用いて，次のように表すことができる[*8].

$$X = \left\{ a \,\middle|\, a \text{ は 10 以下の正の奇数} \right\}$$

aで要素を代表↑　　　↑要素が満たす条件



【例題 10】 集合 $A = \left\{ a \,\middle|\, a \text{ は 18 の正の約数} \right\}$，$B = \left\{ p \,\middle|\, p \text{ は 20 以下の正の素数} \right\}$ とする.

1. 集合 A, B を要素を書き並べる方法で表せ.
2. $6 \in A$, $6 \in B$ は正しいか，それぞれ答えよ.
3. $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\} = \left\{ y \,\middle|\, y \text{ は} \boxed{} \text{の正の約数} \right\}$ において，$\boxed{}$ に適する数字を答えよ.

【解答】

1. $\boldsymbol{A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}}$，$\boldsymbol{B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}}$
2. $\boldsymbol{6 \in A}$ **は正しい**，$\boldsymbol{6 \in B}$ **は間違い（$\boldsymbol{6 \notin B}$ である）**.
3. **12**

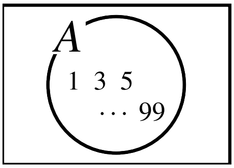
◀ **素数** (prime number) とは，1 より大きい整数で，1 とその数自身以外に約数をもたないような数をいう.

[*8] このような書き方を**内包的定義**（ないほう）(intensional definition) ともいう.

B. 集合のいろいろな表現

たとえば，集合 $A = \left\{ y \,\middle|\, y \text{ は 100 以下の正の奇数} \right\}$ の要素を並べて書き表すと $A = \{1,\ 3,\ 5, \cdots, 99\}$ となる．このように，集合の要素の数が多いときは $\cdots$ を用いて表すことがある[*9]．

また，奇数は一般に $2n-1$ と表すことができ，式 $2n-1$ は



$n=1$ を代入すれば，$2\cdot 1-1=1$　←記号"・"は掛け算を表す
$n=2$ を代入すれば，$2\cdot 2-1=3$
$n=3$ を代入すれば，$2\cdot 3-1=5$
$\vdots$
$n=50$ を代入すれば，$2\cdot 50-1=99$

となるから，$A = \left\{ 2n-1 \,\middle|\, 1 \leqq n \leqq 50,\ n \text{ は自然数} \right\}$ や $A = \{2\cdot 1-1,\ 2\cdot 2-1,\ 2\cdot 3-1,\ \cdots,\ 2\cdot 50-1\}$ と書いてもよい．このように，一つの集合に対していろいろな表現ができる．

また，要素の個数は無限にあってよい[*10]．

$B = \left\{ z \,\middle|\, z \text{ は正の 3 の倍数} \right\} = \left\{ 3n \,\middle|\, n \text{ は自然数} \right\} = \{3, 6, 9, \cdots\} = \{3\cdot 1,\ 3\cdot 2,\ 3\cdot 3, \cdots\}$

【例題 11】 次の $\boxed{}$ に適する値・集合を答えなさい．

1. 式 $3n+1$ は $n=1$ のとき $\boxed{\text{ア}}$，$n=2$ のとき $\boxed{\text{イ}}$，$n=3$ のとき $\boxed{\text{ウ}}$，$n=4$ のとき $\boxed{\text{エ}}$ である．
だから，集合 $C = \left\{ 3n+1 \,\middle|\, n = 1, 2, 3, 4 \right\}$ の要素を書き並べて表すと，$C = \boxed{\text{オ}}$ となる．
2. 式 $3n+1$ は $n=30$ のとき $\boxed{\text{カ}}$ である．
だから，集合 $D = \left\{ 3n+1 \,\middle|\, n \text{ は 30 以下の自然数} \right\}$ の要素を書き並べて表すと，$D = \boxed{\text{キ}}$ となる．

【解答】

1. ア : $3\cdot 1+1=\mathbf{4}$　イ : **7**　ウ : **10**　エ : **13**　オ : $\mathbf{\{4,\ 7,\ 10,\ 13\}}$
2. カ : **91**　キ : $\mathbf{\{4, 7, 10, \cdots, 91\}}$

要素を書き並べるときに $\cdots$ を用いるは，たいてい，$\cdots$ の前に 3 つは要素を書き並べる．

【例題 12】 次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

1. $A = \left\{ 2k \,\middle|\, k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \right\}$
2. $B = \left\{ 2a+1 \,\middle|\, a \text{ は 1 桁の自然数} \right\}$
3. $C = \left\{ 5a \,\middle|\, a \text{ は 100 以下の自然数} \right\}$
4. $D = \left\{ 2n-1 \,\middle|\, n \text{ は正の整数} \right\}$

【解答】

1. $\boldsymbol{A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, 10\}}$
2. $\boldsymbol{B = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}}$
3. $\boldsymbol{C = \{5,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ 500\}}$
4. $\boldsymbol{D = \{1,\ 3,\ 5,\ \cdots\}}$

◀ $a=1$ のとき $2a+1=3$，$a=2$ のとき $2a+1=5$，$\cdots$

[*9] $\cdots$ の部分に厳密さが欠けるという欠点はあるが，表現が具体的で分かり易いという利点を持つ．
[*10] 要素が有限個の集合は**有限集合** (finite set)，要素が無限個存在する集合は**無限集合** (finite set) といわれる．

【練習 13：集合の表し方】

次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

i) $A = \left\{2n-1 \,\middle|\, n \text{ は整数，} 1 \leqq n \leqq 5\right\}$　　ii) $B = \left\{2k \,\middle|\, k \text{ は整数，} 1 \leqq k \leqq 50\right\}$

iii) $C = \left\{2^n \,\middle|\, n \text{ は自然数，} 1 \leqq n \leqq 6\right\}$　　iv) $D = \left\{2a-1 \,\middle|\, 0 \leqq a \leqq 3\text{，} a \text{ は整数}\right\}$

【解答】

(1) $\boldsymbol{A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}}$　　(2) $\boldsymbol{B = \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 100\}}$

(3) $\boldsymbol{C = \{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}}$　　(4) $\boldsymbol{D = \{-1,\ 1,\ 3,\ 5\}}$

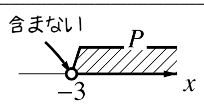
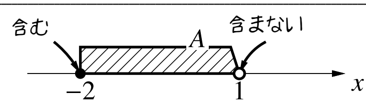
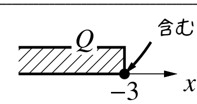
◀ $A = \left\{2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6\right\}$

C.　実数を全体集合とする集合

実数全体を全体集合とした，$A = \left\{x \,\middle|\, -2 \leqq x < 1,\ x \text{ は実数}\right\}$ のような集合を考えることもできる．このような集合では，要素を書き並べることはできない．要素が無数に連続して存在するからである．

$-1 \in A,\ 0 \in A,\ \dfrac{1}{2} \in A,\ -\sqrt{3} \in A,\ -2 \in A$

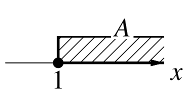
A のような集合を図示するには，数直線を用いて以下のように図示する．

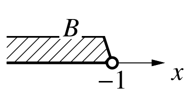
$P = \left\{x \,\middle|\, -3 < x\right\}$	$A = \left\{x \,\middle|\, -2 \leqq x < 1\right\}$	$Q = \left\{x \,\middle|\, x \leqq -3\right\}$
		

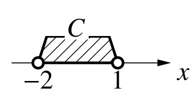
不等号 $<$，$>$ は，境目を「白丸」「斜め線」で表し，不等号 $\leqq$，$\geqq$ は，境目を「黒丸」「垂直線」で表す．

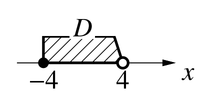
【例題 14】

1. それぞれの図が表す集合を答えなさい．

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

2. 集合 $A = \left\{x \,\middle|\, -1 < x \leqq 2\right\}$ について，次の $\boxed{}$ に $\in$，$\notin$ のいずれかを入れなさい．

$0 \boxed{} A,\ 0.8 \boxed{} A,\ \dfrac{1}{2} \boxed{} A,\ -\sqrt{3} \boxed{} A,\ -1 \boxed{} A,\ 2 \boxed{} A$

【解答】

1. (a) $\boldsymbol{A = \left\{x \,\middle|\, 1 \leqq x\right\}}$　　(b) $\boldsymbol{B = \left\{x \,\middle|\, x < -1\right\}}$

(c) $\boldsymbol{C = \left\{x \,\middle|\, -2 < x < 1\right\}}$　　(d) $\boldsymbol{D = \left\{x \,\middle|\, -4 \leqq x < 4\right\}}$

2. $\boldsymbol{0 \in A,\ 0.8 \in A,\ \dfrac{1}{2} \in A,\ -\sqrt{3} \notin A,\ -1 \notin A,\ 2 \in A}$

【練習 15：集合の表し方〜その２〜】

全体集合を実数全体，$X = \left\{x \,\middle|\, -2 \leqq x \leqq 2\right\}$，$Y$ を右下の数直線で表される集合とする．

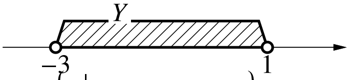
(1) 集合 X を右の数直線上に書き入れなさい．

(2) $X \cap Y$, $X \cup Y$ をそれぞれ求めなさい．

(3) 集合 $\overline{X}$ は次のどれに等しいか，答えなさい．

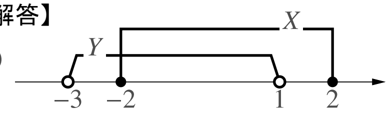
(a) $\left\{x \,\middle|\, x < -2\right\}$ (b) $\left\{x \,\middle|\, 2 \leqq x\right\}$ (c) $\left\{x \,\middle|\, x \leqq -2,\ 2 \leqq x\right\}$ (d) $\left\{x \,\middle|\, x < -2,\ 2 < x\right\}$

(4) 集合 $\overline{Y}$ を答えなさい．



【解答】

(1)



(2) 上の数直線より，$X \cap Y = \left\{x \,\middle|\, -2 \leqq x < 1\right\}$,

$X \cup Y = \left\{x \,\middle|\, -3 < x \leqq 2\right\}$

(3) **(d)**

(4) $\overline{Y} = \left\{x \,\middle|\, x \leqq -3,\ 1 \leqq x\right\}$

◀ $X = \left\{x \,\middle|\, -3 < x < 1\right\}$

◀ $\pm 2 \in X$ なので $\pm 2 \notin \overline{X}$

【発展 16：ド・モルガンの法則】

$A \cap B = \left\{x \,\middle|\, -1 \leqq x < 4\right\}$, $A \cup B = \left\{x \,\middle|\, -3 \leqq x\right\}$ であるとき，$\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ を求めよ．

【解答】 $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \left\{x \,\middle|\, x < -3\right\}$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \left\{x \,\middle|\, x < -1,\ 4 \leqq x\right\}$

◀ $\left\{x \,\middle|\, -3 \leqq x\right\}$ の補集合は，$x = -3$ を含まないので，$\left\{x \,\middle|\, x < -3\right\}$ となることに注意．

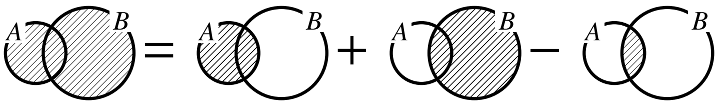
3.　集合の要素の個数

A.　集合の要素の個数

集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す（ただし，集合 A の要素は有限個であるとする）．たとえば，$A = \{1, 3\}$ ならば $n(A) = 2$ である．また，空集合の要素の個数は $n(\emptyset) = 0$ と定める．

B.　和集合の要素の個数（包含と排除の原理）

和集合 $A \cup B$ の要素の個数は $n(A \cup B)$ と表される．これは，下のベン図を用いて，次のように求められる．



包含と排除の原理（2 集合版）

2 つの集合 A，B に関して

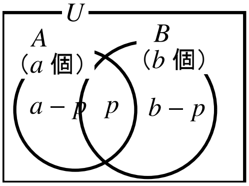
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \underbrace{n(A \cap B)}_{A \cap B \text{ の要素の個数}}$$

が成り立つ．これを**包含と排除の原理**（ほうがん・はいじょ） (principle of inclusion and exclusion) という．
特に，$A \cap B = \emptyset$ のときには，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ となる．

この法則は，$n(A) = a$, $n(B) = b$, $n(A \cap B) = p$ とおいたときに

$$n(A \cap \overline{B}) = a - p,\quad n(\overline{A} \cap B) = b - p$$

であることからも確かめられる．



【例題 17】　40 人がいるクラスでアンケートをとった．

1. 兄がいるのは 12 人，姉がいるのは 8 人，兄も姉もいるのは 3 人だという．兄か姉がいるのは全部で何人か．
2. クラス全員が，電車か自転車で通学しており，電車を使うのは 17 人，自転車を使うのは 30 人だという．電車も自転車も使うのは何人いるか．

【解答】

1. 兄がいる人の集合を A，姉がいる人の集合を B とすると

$$n(A) = 12,\quad n(B) = 8,\quad n(A \cap B) = 3$$

であるので，兄か姉がいる人の集合 $A \cup B$ について

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 12 + 8 - 3 = 17$$

となって，**17 人**であることが分かる．

2. 電車を使う人の集合を A，自転車を使う人の集合を B とすると

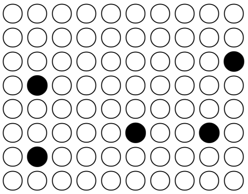
$$n(A) = 17,\quad n(B) = 30,\quad n(A \cup B) = 40$$

であるので，電車も自転車も使う人の集合 $A \cap B$ について

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \iff 40 = 17 + 30 - n(A \cap B)$$

これを解いて $n(A \cap B) = 7$ であるので，**7 人**である．

C. 補集合の要素の個数 ～ “着目しないもの”に着目する



たとえば，右の丸のうち，白丸○の個数は

(全ての丸の個数) − (黒丸●の個数)

$= 10 \times 10 - 5 = 95$ 個

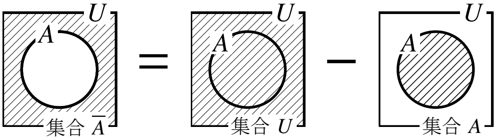
と求めるとよい．この考え方を集合に応用して，次を得る．

補集合の要素の個数

全体集合を U とする集合 A と，その補集合 $\overline{A}$ の要素の個数について次が成り立つ．

$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$

この法則をベン図で表すと右図のようになる．
簡単な法則だが，よく使われる法則である．



【例題 18】 全体集合を $U = \left\{ x \,\middle|\, x \text{ は 100 以下の自然数} \right\}$ とする．

$A = \left\{ x \,\middle|\, x \text{ は 3 の倍数} \right\}$，$B = \left\{ x \,\middle|\, x \text{ は 5 の倍数} \right\}$ とするとき，次の値を求めよ．

1. $n(A)$　2. $n(B)$　3. $n(A \cap B)$　4. $n(A \cup B)$　5. $n(\overline{A})$　6. $n(\overline{B})$

【解答】

1. $100 \div 3 = 33 \cdots 1$ より $A = \{3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 33\}$
   となるのがわかる．よって，$\boldsymbol{n(A) = 33}$ である．
2. $100 \div 5 = 20$ より $B = \{5 \cdot 1,\ 5 \cdot 2,\ \cdots,\ 5 \cdot 20\}$
   となるのがわかる．よって，$\boldsymbol{n(B) = 20}$ である．
3. $A \cap B$ は，3 の倍数かつ 5 の倍数である数，つまり，15 の倍数の集合である．$100 \div 15 = 6 \cdots 10$ より

   $$A \cap B = \{15 \cdot 1,\ 15 \cdot 2,\ \cdots,\ 15 \cdot 6\}$$

   となるのがわかる．よって，$\boldsymbol{n(A \cap B) = 6}$ である．
4. 1.～3. を代入すれば

   $$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 33 + 20 - 6 = \boldsymbol{47} \end{aligned}$$

   ◀『包含と排除の原理』
5. $n(\overline{A}) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = \boldsymbol{67}$
6. $n(\overline{B}) = n(U) - n(B) = 100 - 20 = \boldsymbol{80}$

【練習 19：補集合の要素の個数と包含と排除の原理〜その１〜】

全体集合 U と集合 A, B について，

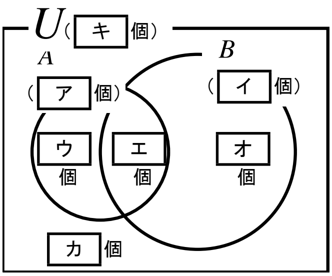
$n(U) = 50,\ n(A) = 20,\ n(A \cup B) = 42,\ n(A \cap B) = 6$

であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 右のベン図の $\boxed{}$ にあてはまる値を入れよ．

(2) 次の値を求めよ．

1) $n(A \cap \overline{B})$　　2) $n(\overline{A} \cap \overline{B})$　　3) $n(A \cup \overline{B})$



【解答】

(1) **キ** : $n(U) = \mathbf{50}$，**ア** : $n(A) = \mathbf{20}$

イ : $n(B)$ を求めればよい．

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\Leftrightarrow\ 42 = 20 + n(B) - 6 \qquad \therefore\ \ n(B) = \mathbf{28}$

ウ : **ア**から**エ**を引けばよいので $20 - 6 = \mathbf{14}$，　**エ** : $n(A \cap B) = \mathbf{6}$

オ : **イ**から**エ**を引けばよいので $28 - 6 = \mathbf{22}$

カ : **キ**から $n(A \cup B)$ を引けばよいので $50 - 42 = \mathbf{8}$

(2) 1) **ウ**の個数に一致するので $n(A \cap \overline{B}) = \mathbf{14}$.

2) $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = 50 - 42 = \mathbf{8}$.

3) 全体から**オ**を除けばよいので，$50 - 22 = \mathbf{28}$.

◀『ド・モルガンの法則 (p.20)』

【練習 20：補集合の要素の個数と包含と排除の原理〜その２〜】

総世帯数が 191 のある地区では，新聞をとっている世帯が 170 ある．このうち A 新聞をとっている世帯は 89，B 新聞をとっている世帯は 108 ある．その他の新聞はこの地区には無いものとして，以下の問に答えよ．

(1) この地区では新聞をとっていない世帯はいくつか．

(2) A，B 両方の新聞をとっている世帯はいくつか．

【解答】

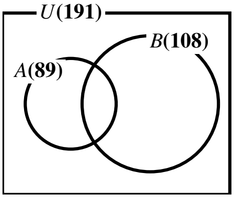
U :「ある地区の総世帯」

A :「A 新聞をとっている世帯」　B :「B 新聞をとっている世帯」

とおく．問題文より，次のことが分かる．

$n(U) = 191,\ n(A \cup B) = 170,\ n(A) = 89,\ n(B) = 108$

◀



◀「新聞を取っている世帯」は，A か B のどちらかをとっている．

(1) $n(\overline{A \cup B})$ を求めればよい．

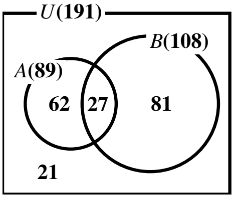
$n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 191 - 170 = 21$ なので，**21 世帯**.

(2) $n(A \cap B)$ を求めればよい．

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ に代入して，

$170 = 89 + 108 - n(A \cap B)$

より，**27 世帯**.



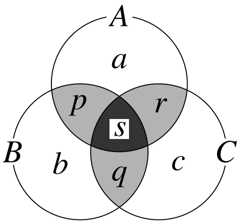
◀

4.　3つの集合による関係

A.　3つの集合によるベン図

【暗記 21：3つ以上の集合によるベン図】

右の図のように，a, b, c, p, q, r, s に分かれている．次の集合が表す部分を答えよ（たとえば，集合 A が表す部分は a, p, r, s になる）．



1. $(A \cup B) \cup C$　　2. $A \cup (B \cup C)$　　3. $(A \cap B) \cap C$
4. $A \cap (B \cap C)$　　5. $A \cup (B \cap C)$　　6. $A \cap (B \cup C)$
7. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$　　8. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

【解答】

1. 「a, b, p, q, r, s」「c, q, r, s」の和集合なので，$\boldsymbol{a, b, c, p, q, r, s}$.
2. 「a, p, r, s」「b, c, q, r, p, s」の和集合なので，$\boldsymbol{a, b, c, p, q, r, s}$.
3. 「p, s」「c, q, r, s」の共通部分なので，$\boldsymbol{s}$.
4. 「a, p, r, s」「q, s」の共通部分なので，$\boldsymbol{s}$.
5. 「a, p, r, s」「q, s」の和集合なので，$\boldsymbol{a, q, r, p, s}$.
6. 「a, p, r, s」「b, c, p, q, r, s」の共通部分なので，$\boldsymbol{p, r, s}$.
7. 「a, b, p, q, r, s」「a, c, p, q, r, s」の共通部分なので，$\boldsymbol{a, p, q, r, s}$.
8. 「p, s」「p, r」の和集合なので，$\boldsymbol{p, r, s}$.

集合の性質〜その１〜

集合 A，B，C に関して次のことが成り立つ．

i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　　←括弧を省略して $A \cup B \cup C$ と書く

ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$　　←括弧を省略して $A \cap B \cap C$ と書く

iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

iii) は式の分配法則 $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ と関連付けて理解できる．

B.　3つの集合によるド・モルガンの法則

3集合の場合もド・モルガンの法則が成り立つ．たとえば

$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{(A \cup B) \cup C}$　　　← $A \cup B$ を 1 かたまりとして考える

$\qquad = \overline{A \cup B} \cap \overline{C}$　　　← $A \cup B$ と C について『ド・モルガンの法則』

$\qquad = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$　　　←『ド・モルガンの法則』より，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

【暗記 22：3 集合の場合のド・モルガンの法則】

先の例にならって，$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ を示せ．

【解答】 $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{(A \cap B) \cap C}$

$= \overline{A \cap B} \cup \overline{C}$

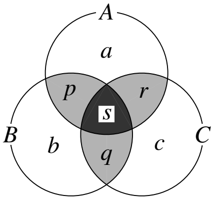
$= \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ ■

◀ $A \cap B$ を 1 かたまりとして考える

◀ $A \cap B$ と C について『ド・モルガンの法則』

C. 3 つの集合による包含と排除の原理

$n(A \cup B \cup C)$ を求めるには，3 集合の場合の『包含と排除の法則 (p.10)』を用いる．この等式について，右図を見ながら理解しよう．



$$n(A \cup B \cup C)$$
$$= \underbrace{n(A) + n(B) + n(C)}_{p,\ q,\ r\ \text{を 2 重に，}\ s\ \text{を 3 重に足してしまう}} - \underbrace{n(A \cap B)}_{p,\ s\ \text{を引く}} - \underbrace{n(B \cap C)}_{q,\ s\ \text{を引く}} - \underbrace{n(C \cap A)}_{r,\ s\ \text{を引く}} + \underbrace{n(A \cap B \cap C)}_{\text{引きすぎた}\ s\ \text{を足す}}$$

包含と排除の原理（3 集合版）

3 つの集合 A，B，C に関して，次の等式が成り立つ．

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

【練習 23：補集合の要素の個数と包含と排除の原理（3 集合版）〜その 1 〜】

3，5，7 の少なくとも一つで割り切れる 1000 以下の自然数は，全部で何個あるか．

【解答】 全体集合 U：「1000 までの自然数」

集合 A：「3 の倍数」 B：「5 の倍数」 C：「7 の倍数」

とおいて，$n(A \cup B \cup C)$ を求めればよい．

A の要素は 3 の倍数なので，$1000 \div 3 = 333 \cdots 1$ より $n(A) = 333$．

B の要素は 5 の倍数なので，$1000 \div 5 = 200$ より $n(B) = 200$．

C の要素は 7 の倍数なので，$1000 \div 7 = 142 \cdots 6$ より $n(C) = 142$．

◀ p.11 の【例題】と同じようにして求めた．

$A \cap B$ の要素は 3 と 5 の公倍数，つまり 15 の倍数である．

よって，$1000 \div 15 = 66 \cdots 10$ より $n(A \cap B) = 66$．

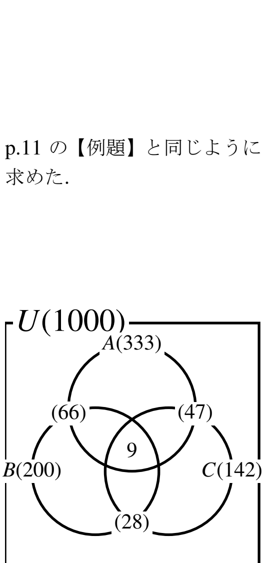
$B \cap C$ の要素は 5 と 7 の公倍数，つまり 35 の倍数である．

よって，$1000 \div 35 = 28 \cdots 20$ より $n(A \cap B) = 28$．

$C \cap A$ の要素は 7 と 3 の公倍数，つまり 21 の倍数である．

よって，$1000 \div 21 = 47 \cdots 13$ より $n(A \cap B) = 47$．

$A \cap B \cap C$ の要素は 3 と 5 と 7 の公倍数，つまり 105 の倍数である．よって，$1000 \div 105 = 9 \cdots 55$ より $n(A \cup B) = 9$．



◀

以上の値を代入して

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$
$$- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

◀『包含と排除の原理（3 集合版）』(p.14)

$= 333 + 200 + 142 - 66 - 28 - 47 + 9 = 543$

よって，**543 個**である．

【発展 24：補集合の要素の個数と包含と排除の原理（3 集合版）〜その２〜】

300 人の高校生に A，B，C の 3 種のテストを行った．A テストに 102 人，B テストに 152 人，C テストに 160 人が合格したが，これらの中で，A，B 両テストに 42 人，B，C 両テストに 62 人，C，A 両テストに 32 人が合格している．3 種のテストのどれにも合格しなかった人は 10 人であった．このとき，3 種のテストにすべて合格した人は何人か．

【解答】

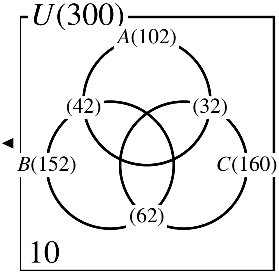
全体集合 U :「テストを受けた高校生全員」

集合 A :「A テストに合格した人」

集合 B :「B テストに合格した人」

集合 C :「C テストに合格した人」

とおくと，$n(A \cap B \cap C)$ を求めればよい．



問題文から次のことが分かる．

$n(A) = 102,\quad n(B) = 152,\quad n(C) = 160$

$n(A \cap B) = 42,\quad n(B \cap C) = 62,\quad n(C \cap A) = 32$

「3 種のテストのどれにも合格しなかった人」は $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$ で表され，その人数は 10 人である．

$$n\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = n(U) - n(A \cup B \cup C)$$
$$\Leftrightarrow\ 10 = 300 - n(A \cup B \cup C)$$

◀『補集合の要素の個数』(p.11)

から，$n(A \cup B \cup C) = 290$ である．

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

◀『包含と排除の原理（3 集合版）』(p.14)

に，それぞれ値を代入して

$$290 = 102 + 152 + 160 - 42 - 62 - 32 + n(A \cap B \cap C)$$
$$\Leftrightarrow 290 = 278 + n(A \cap B \cap C)$$
$$\Leftrightarrow n(A \cap B \cap C) = 12$$

よって，**12 人**である．

1.2 命題

1.3 命題

1. 命題の基礎

A. 数学とは何か？

「数学とは何か？」この質問に対する一つの答えとして，次のように言うことができる[*11].

「正しいか間違っているかが確定できる方法のみを用い，物事を扱う学問である」

たとえば「20 歳という年齢は，若いと言えるか」という問題の答えは確定できない．答える人の価値観によって答えが異なる．だから，この問いは数学では扱われない[*12].

正しいか間違っているかが定まる問題のことを**命題**（めいだい） (proposition) という[*13]．つまり，数学で扱う問題は命題に限る.

【例題 25】 次の問題は命題ではないので，数学では扱われない．なぜ命題でないか，説明しなさい.

1. 身長 190 cm のバスケットボールの選手がいる．この人の身長は高いだろうか？
2. 2003 年にアメリカはイラクに侵攻した．これは正しい判断だったろうか？

【解答】

1. （例）ほとんどの人は「身長が高い（正しい)」と言うだろうが，2 m 以上の身長がある人にとってはそうとは限らないだろうから.
2. （例）戦争をすると決めたブッシュ大統領にとっては「正しい」であろうが，「間違い」と言うイラク人は少なからずいるだろうから.

B. 真偽と反例

命題が正しいとき，その命題は**真**（しん） (true) であるといい，命題が正しくないとき，その命題は**偽**（ぎ） (false) であるという．命題が偽であるとき，その命題が正しくない例を**反例** (counterexample) という.

例えば，命題「実数 x が $x^2 = 1$ を満たすなら $x = 1$ に限る」は偽であり，その反例は $x = -1$ である.

【例題 26】 次の命題について真偽を答え，偽であるものには反例を一つ挙げなさい.

1. 1 m 40 cm は 1 m よりも長い
2. 自然数は無限個存在する.
3. 奇数を 2 倍すれば偶数である.
4. 奇数と奇数を足すと奇数になる.

[*11] 物理学，化学，生物学など，多くの自然科学においても「正しいか間違っているか」は重要であるが，いつも確定できるとは限らない．これらの科学においては，たとえば「実験の結果と一致しているか」もやはり重要である.

[*12] 世の中には，正しいか間違っているか，完全に決定することができない問題も多い．しかし，正しいか間違っているかを完全に決定できる範囲だけで物事を考えても，有用なことがたくさんある.

[*13] 未解決問題のように，将来的に正しいか間違っているかを確定できると考えられている問題も命題と言われる.

【解答】

(1) **真**　　(2) **真**　　(3) **真**

(4) **偽**である．反例は，$3 + 5 = 8$ など多数ある．

2. 命題を構成する「条件」

A. 「仮定」の役割

「ab は 0 に等しいか？」という問いには真偽が定まらないが，次の 2 つはいずれも真偽が定まる．

i) 「$a = 0$ であるとき，ab は 0 に等しいか？」（真）
ii) 「a, b とも正の数ならば，ab は 0 に等しいか？」（偽）

命題において，前提となる事柄を**仮定** (assumption)，真偽を確定するべき事柄を**結論** (conclusion) という．また，単独では真偽が定まらないが，命題の仮定や結論になりうる内容を**条件** (condition) という．

たとえば，上の 2 つの命題は次のように表される．

i) 「$a = 0$」 $\Longrightarrow$「ab は 0 に等しい」（真）
ii) 「a, b とも正の数」$\Longrightarrow$「ab は 0 に等しい」（偽）
（仮定）　　（結論）

このように，仮定と結論を結ぶ「であるとき」「ならば」などの言葉を，記号「$\Rightarrow$」で表すこともある．

【例題 27】 以下のように仮定と結論が与えられた命題の，真偽を答えよ，偽であれば反例を一つあげよ．
1. 「仮定：a, b は整数」「結論：ab は整数」
2. 「仮定：$a + b$ は整数」「結論：ab は整数」

【解答】
1. 「a, b は整数ならば ab は整数である」，この命題は**真**である．
2. 「$a + b$ は整数ならば ab は整数である」
この命題は**偽**，**反例は** $\boldsymbol{a = b = \frac{1}{2}}$

◀ 反例は，$a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ など多数ある

B. 命題「$p \Rightarrow q$」

条件 p を「$x > 0$」，条件 q を「$x + 10 > 0$」とすると，命題「$p \Rightarrow q$」とは命題「$x > 0$ ならば $x + 10 > 0$ である」のことであり，これは真である．

このように，一般に命題を「$p \Rightarrow q$」と表すことが多い．ここで，文字 p, q は条件を表す．

p：「$x>0$」，q：「$x+10>0$」のとき
命題 $p \Rightarrow q$ とは
↓ ↓
命題「$x>0$」ならば「$x+10>0$」のこと

【例題 28】
1. p :「$a = b$」，q :「$a^2 = b^2$」のとき，命題「$p \Rightarrow q$」の真偽を答え，偽である場合は反例をあげよ．
2. p :「$ac = bc$」，q :「$a = b$」のとき，命題「$p \Rightarrow q$」の真偽を答え，偽である場合は反例をあげよ．

【解答】
1. **真**　　2. **偽**，**反例は** $\boldsymbol{(a, b, c) = (1, 2, 0)}$

◀ $c = 0$ とおけば多数の反例を作ることができる．

3.　条件と集合

A.　「全体集合」の役割

命題「a は自然数とする．$a+1$ は正である．」は真である．

しかし，「$a+1$ は正である．」の一文に真偽を定めることはできない．a を自然数だと考えた人にとっては真であるが，a を整数だと考えた人には $a=-2$ という反例があって偽となるからである．

このように，与えられた文字をどの範囲で考えているかを明示する必要がある[*14]．

B.　条件の否定

条件 p に対し，条件「p でない」を p の**否定** (negation) といい，記号 $\overline{p}$ で表される．

例えば，自然数 m について，条件 p「m は 3 の倍数」の否定 $\overline{p}$ は「m は 3 の倍数でない」である．

また，実数 a について，条件 q「$a \leqq 10$」の否定 $\overline{q}$ は「a は 10 以下ではない」，つまり「$10<a$」である．

【例題 29】　a は実数，n は自然数とする．以下の条件を述べよ．

1. 条件 p「n は 10 の倍数」の否定 $\overline{p}$
2. 条件 q「n は奇数」の否定 $\overline{q}$
3. 条件 r「$3 \leqq a$」の否定 $\overline{r}$
4. 条件 s「$4<a$」の否定 $\overline{s}$

【解答】

1. $\overline{p}$「n は 10 の倍数でない」
2. $\overline{q}$「n は偶数」
3. $\overline{r}$「$a<3$」
4. $\overline{s}$「$a \leqq 4$」

C.　条件の「または」と「かつ」

たとえば，条件「$a>0$ または $b>0$」は，「$a>0$ か $b>0$ のどちらかは成立する」ことを意味する．

一方，条件「$a>0$ かつ $b>0$」は，「$a>0$ と $b>0$ のどちらも成立する」ことを意味する．

「または」「かつ」をまとめると，右のようになる[*15]．

「p または q」には「p も q も成立」する場合も含まれることに注意しよう，

○：「成立する」　×：「成立しない」

	p	q	p または q	p かつ q
i)	○	○	○	○
ii)	○	×	○	×
iii)	×	○	○	×
iv)	×	×	×	×

【例題 30】　実数 $a,\ b$ について，条件 p：「$a>0$」，q：「$b>0$」とする．

1. $a=3,\ b=-1$ のとき，条件「$\overline{p}$」「p または q」「p かつ q」が成立するかどうか，それぞれ答えよ．
2. $a=2,\ b=2$ のとき，条件「$\overline{p}$」「p または q」「p かつ q」が成立するかどうか，それぞれ答えよ．
3. $a=0,\ b=0$ のとき，条件「$\overline{p}$」「p または q」「p かつ q」が成立するかどうか，それぞれ答えよ．

【解答】

1. $\overline{p}$：成立しない，p または q：成立する，　p かつ q：成立しない

[*14] 文脈から明らかなときは省略されることもある．とはいえ，書く必要があるか迷ったら書いた方がよい．

[*15] 論理学などにおいては，条件の「または」「かつ」を記号 ∨, ∧ で表すこともある．高校数学ではほとんど用いられない．

2. $\overline{p}$：成立しない，p または q：成立する，　p かつ q：成立する

3. $\overline{p}$：成立する，　p または q：成立しない，p かつ q：成立しない

◀ $a > 0$ の否定は $a \leqq 0$ である．

【例題 31】　次の $\boxed{\quad}$ に，「または」「かつ」のどちらかを入れなさい．

1. 「$a = 3$, $b = -1$ のとき $a + b = 2$」は「$a = 3$ $\boxed{\quad}$ $b = -1$ のとき $a + b = 2$」と同じ意味である．
2. 「実数 a, b について」は「a が実数 $\boxed{\quad}$ b が実数のときについて」と同じ意味である．
3. 「$x^2 = 1$ の解は $x = 1$, -1」は「$x^2 = 1$ の解は $x = 1$ $\boxed{\quad}$ $x = -1$」と同じ意味である．

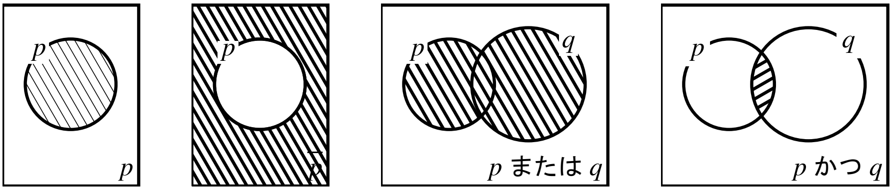
【解答】

1. かつ　　2. かつ　　3. または

カンマ（,）は「かつ」を意味することが多い．ただし，方程式の解を列挙するときなどは「または」を意味する．条件の意味を考えて判断しよう．

D.　条件と集合

全体集合 U のうち，条件 p が成立する U の要素の集合を，同じく p で表して，ベン図で図示することができる．



こうして，条件も集合と同じように考えることができ，特に次の事実を得る．

ド・モルガンの法則

どんな条件 p，q に関しても，次の**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) が成り立つ．

$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$,　　$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}$

「$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$」の具体例として，条件「$a = 0$ または $b = 0$ が成り立たない」ときを考えよう．これは，$a \neq 0$, $b \neq 0$ の両方が成り立つときに限る．つまり「$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$」でないといけない．

【例題 32】　a, b は実数，m, n は整数とする．次の条件の否定を述べよ．

1. $a = 1$ かつ $b = 1$　　2. $a = 2$ または $b = 2$　　3. $a \neq 3$ かつ $b = 3$　　4. m, n は偶数
5. m または n が 5 で割り切れる　　6. $a > 0$ または $b < 0$

【解答】

1. $\boldsymbol{a \neq 1}$ **または** $\boldsymbol{b \neq 1}$　　2. $\boldsymbol{a \neq 2}$ **かつ** $\boldsymbol{b \neq 2}$
3. $\boldsymbol{a = 3}$ **または** $\boldsymbol{b \neq 3}$　　4. $\boldsymbol{m}$ **は奇数または** $\boldsymbol{n}$ **は奇数**
5. $\boldsymbol{m}$ **も** $\boldsymbol{n}$ **も 5 で割り切れない**　　6. $\boldsymbol{a \leqq 0}$ **かつ** $\boldsymbol{b \geqq 0}$

◀「m, n は偶数」ということは，m も n も偶数ということである．

【練習 33：または・かつ・否定】

（例）にならって右の表を埋めなさい．
ただし，○は「成立する」，×は「成立しない」を表す．

	p	q	p かつ q	$\overline{p \text{ かつ } q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$ または $\overline{q}$
（例）	○	○	○	×	×	×	×
i)	○	×					
ii)	×	○					
iii)	×	×					

【解答】

	p	q	p かつ q	$\overline{p \text{ かつ } q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$ または $\overline{q}$
（例）	○	○	○	×	×	×	×
i)	○	×	×	○	×	○	○
ii)	×	○	×	○	○	×	○
iii)	×	×	×	○	○	○	○

◀ この表から，$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p}$ または $\overline{q}$ を確かめることができる．

【練習 34：または・かつ・否定〜その２〜】

自然数 a, b について，以下の命題の真偽を答えよ．偽である場合は反例を一つあげよ．

(1) a, b が奇数ならば，ab は奇数である．

(2) a または b が奇数ならば，ab は奇数である．

(3) a が 3 で割り切れないならば，$2a$ は 3 で割り切れない．

(4) $2a = 3b$ ならば，a は 3 の倍数，b は 2 の倍数である．

【解答】

(1) 真

(2) 偽，反例は $a = 1, b = 2$

(3) 真

(4) 真

◀ $a = 2k + 1, b = 2l + 1$ とおけば $ab = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1$

◀ a か b のどちらかを偶数にすればよい．

◀ $a = 3k \pm 1$ とおけば，$2a = 6k \pm 2$ となって 3 では割り切れないと分かる．

◀ $2a$ が 3 の倍数となるには a は 3 の倍数となり，$3b$ が 2 の倍数になるには b は 2 の倍数とならなければいけない．

E. ㊐㊗ 「すべての」「ある」の否定

「すべての新幹線は事故を起こさない」ことは，ある新幹線が事故を起こせば否定される[16]．

一方，「行方不明者がいる」ことは，「すべての人が行方が分かっている」ことによって否定される[17]．

一般に，「すべての〜」の否定は「ある〜」となり，「ある〜」の否定は「すべての〜」となる．

【発展 35：「すべての」「ある」の否定】

① 条件「すべての自然数 n について，$(n + 1)(n - 1)$ は 4 で割り切れる」の否定を述べよ．

② 条件「ある実数 x について，$x^2 + 1 = 0$ である」の否定を述べよ．

【解答】

① ある自然数 n について，$(n + 1)(n - 1)$ は 4 で割り切れない

② すべての実数 x について，$x^2 + 1 \neq 0$ である

◀ $(n+1)(n-1)$ が 4 で割り切れない n が 1 つでも存在すれば，条件の否定になる．

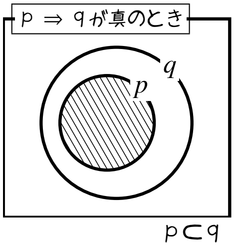
*16 すべての新幹線が事故を起こさなくても，否定になる．

*17 ある人の行方がわかるだけでは否定にならない．すべての人の行方が分からないといけない．

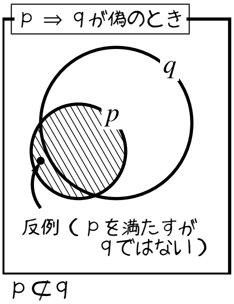
4. 必要条件と十分条件

A. 命題 $p \Rightarrow q$ の真偽の図示

命題 $p \Rightarrow q$ が真であるとは，全体集合内の「p を満たす要素は全て q を満たす」ことになる．ベン図で表すと左下図のように，条件 p, q は集合として $p \subset q$ である．



逆に，命題 $p \Rightarrow q$ が偽ならば，その反例は「p を満たすが q を満たさない要素」である．それは，ベン図で表すと右図の ● に相当する．



B. 逆

仮定と結論を交換してできる命題を，**逆** (converse) の命題という．たとえば

「$a = 1$ ならば，$a^2 = 1$ である」　（真）

という命題の逆は，次のようになる．

「$a^2 = 1$ ならば，$a = 1$ である」　（偽）

上の例のように，もとの命題の真偽と，逆の命題の真偽が一致するとは限らない．

文字を使って表せば，命題「$p \Rightarrow q$」の逆は，命題「$q \Rightarrow p$」となる．

【例題 36】 以下の命題の真偽を答えよ．次に，逆の命題を書き，その真偽も答えよ．

1. $x = 0$ ならば，$x^3 = 0$ である．
2. x, y が有理数ならば，$x + y$ は有理数である．

【解答】

1. もとの命題は**真**．逆の命題は「$x^3 = 0$ **ならば**，$x = 0$ **である**」，これは**真**．
2. もとの命題は**真**．逆の命題は「$x + y$ **が有理数ならば**，x, y **は有理数である**」，これは**偽**．反例は $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$.

【発展 37：逆はいつも正しいとは限らない】

もとの命題が真であっても，逆の命題が偽であるかもしれないことは，次のように説明できる．$\boxed{}$ に適する式を答えなさい．

命題 P： $p \Rightarrow q$ が真であるとき，条件 p, q には，集合として $\boxed{ア}$ という関係が成り立つ．一方，命題 P の逆 $\boxed{イ}$ が成り立つには，条件 p, q には，集合として $\boxed{ウ}$ という関係が成り立たないといけない．

しかし，$\boxed{ア}$ のときに $\boxed{ウ}$ が成り立つとは限らないので，逆が成り立つとは限らない．

【解答】 ア：$p \subset q$，イ：$q \Rightarrow p$，ウ：$q \subset p$

C. 必要条件と十分条件

たとえば,「試験に通るには必ず努力しないといけない」としよう．このとき,「試験に通る」には「努力する」ことが必要である.

一方,「努力すれば必ず試験に通る」としよう．このとき,「試験に通る」には「努力する」ことで十分である[*18].

数学においても，真になる命題「$p \Rightarrow q$」があれば，条件 p と，条件 q に「必要」「十分」と呼ばれる論理的な関係を考えることができる.

必要条件と十分条件

命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき,（p に対して）q は**必要条件** (neccessary condition) であるといい,
命題「$q \Rightarrow p$」が真であるとき,（p に対して）q は**十分条件** (sufficient condition) であるという.
命題「$p \Rightarrow q$」も「$q \Rightarrow p$」も真であるときは,（p に対して）q は**必要十分条件** (neccessary and sufficient condition) である，または，p と q は**同値** (equivalence) である，という.

【例題 38】 a, b は整数とする．条件 p :「a, b はともに奇数」, q :「ab は奇数」, r :「$a+b$ は偶数」とする．次の $\boxed{\quad}$ に,「真」「偽」「ある」「ない」のいずれかで答えよ.

1. 命題 $p \Rightarrow q$ は $\boxed{ア}$ であり，命題 $q \Rightarrow p$ は $\boxed{イ}$ である.
   よって,（p に対して）q は必要条件で $\boxed{ウ}$．また，十分条件で $\boxed{エ}$.
2. 命題 $q \Rightarrow r$ は $\boxed{オ}$ であり，命題 $r \Rightarrow q$ は $\boxed{カ}$ である.
   よって，r は（q に対して）必要条件で $\boxed{キ}$．また，十分条件で $\boxed{ク}$.
3. r は，p について必要条件で $\boxed{ケ}$．また，十分条件で $\boxed{コ}$.
   なぜなら，命題 $p \Rightarrow r$ は $\boxed{サ}$ であり，命題 $r \Rightarrow p$ は $\boxed{シ}$ であるから.
4. p と q は同値で $\boxed{ス}$．q と r は同値で $\boxed{セ}$．r と p は同値で $\boxed{ソ}$.

「（p に対して）q は必要条件」という表現は，以下のいずれとも同じ意味である.

- q は p に対して必要条件
- q は p の必要条件
- q は p について必要条件

何は必要条件であるのかを，読み間違えないようにしよう.

【解答】

1. ア : 真，イ : 真，ウ : ある，エ : ある
2. オ : 真，カ : 偽，キ : ある，ク : ない
3. ケ : ある，コ : ない，サ : 真，シ : 偽
4. ス : ある，セ : ない，ソ : ない

[*18] もちろん，これがいつも成り立つとは限らない．試験が難しすぎれば,「試験に通る」には「努力する」ことで十分とは限らない.

p が q の必要条件・十分条件であるかを調べるには，2 つの命題 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ の真偽を求めればよい．

【例題 39】 次の $\boxed{}$ に，①から④のいずれかを選んで答えなさい．

1. $a = b$ であることは，$ac = bc$ であることの $\boxed{}$.
2. $x^2 = 4$ であることは，$x = 2$ であることの $\boxed{}$.
3. a が 4 の倍数であることは，a が 6 の倍数であることの $\boxed{}$.
4. $a = b = 0$ であることは，$a^2 + b^2 = 0$ であることの $\boxed{}$.

① 必要十分条件である　② 必要条件であるが十分条件でない
③ 十分条件であるが必要条件でない　④ 必要条件でも十分条件でもない

【解答】

1. 命題「$a = b \ \Rightarrow\ ac = bc$」は真なので，十分条件である．
   命題「$ac = bc \ \Rightarrow\ a = b$」は偽なので，必要条件でない．答えは③
2. 命題「$x^2 = 4 \ \Rightarrow\ x = 2$」は偽なので，十分条件でない．
   命題「$x = 2 \ \Rightarrow\ x^2 = 4$」は真なので，必要条件である．答えは②
3. 命題「a が 4 の倍数 $\Rightarrow a$ が 6 の倍数」は偽なので，十分条件でない．
   命題「a が 6 の倍数 $\Rightarrow a$ が 4 の倍数」は偽なので，十分条件でない．
   答えは④
4. 命題「$a = b = 0 \ \Rightarrow\ a^2 + b^2 = 0$」は真なので，十分条件である．
   命題「$a^2 + b^2 = 0 \ \Rightarrow\ a = b = 0$」は真なので，必要条件である．
   答えは①

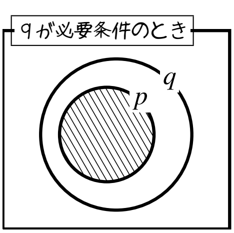
◀ $p \Rightarrow q$ が真ならば p は十分条件

◀ 反例は $x = -2$

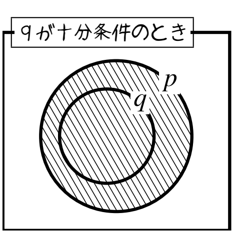
◀ 反例は $a = 8$

◀ 反例は $a = 6$

D. 必要条件・十分条件の図示



q が（p に対して）必要条件ならば，命題 $p \Rightarrow q$ が真なので左のベン図のように表される．



また，q が（p に対して）十分条件ならば，命題 $p \Rightarrow q$ が真なので左のベン図のように表される．

もし，左右どちらの図も成立すれば，結局，条件 p と条件 q は一致することになる．これが，必要十分条件のことを「同値*19」とも言われる理由である．

*19 本来，「同値」を意味する"equivalence"は「同等」と訳された方が分かり易かったかもしれない．しかし，「同値」という訳語が一般的なので今後もこれを用いる．

【練習 40：必要条件と十分条件〜その１〜】

次の$\boxed{}$に，①から④のいずれかを選んで答えなさい．

(1) $x^2 < 1$ は，$x < 1$ であることの$\boxed{}$.

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形であることは，AB$/\!/$DC であることの$\boxed{}$.

(3) $a < 1,\ b < 1$ であることは，$ab < 1$ であることの$\boxed{}$.

① 必要十分条件である　② 必要条件であるが十分条件でない

③ 十分条件であるが必要条件でない　④ 必要条件でも十分条件でもない

【解答】

(1) 命題「$x^2 < 1 \ \Rightarrow\ x < 1$」は真なので，十分条件である．
命題「$x < 1 \ \Rightarrow\ x^2 < 1$」は偽なので，必要条件でない．答えは③

◀ 反例は $x = -3$

(2) 命題「四角形 ABCD が平行四辺形 ⇒AB$/\!/$DC」は真なので，十分条件である．
命題「AB$/\!/$DC⇒ 四角形 ABCD が平行四辺形」は偽なので，必要条件でない．答えは③

◀ AD$\not\!/\!/$BC とすれば反例になる

(3) 命題「$a < 1,\ b < 1 \ \Rightarrow\ ab < 1$」は偽なので，十分条件でない．

◀ 反例は $a = -1,\ b = -2$

命題「$ab < 1 \ \Rightarrow\ a < 1,\ b < 1$」は偽なので，必要条件でない．
答えは④

◀ 反例は $a = -1,\ b = -2$

E. 必要条件・十分条件の調べ方

5. 逆・裏・対偶

命題「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」を $p \Rightarrow q$ の**裏** (converse of contraposition) という．たとえば

「$a = 1$ ならば，$a^2 = 1$ である」　（真）

という命題の裏は，次のようになる．

「$a \neq 1$ ならば，$a^2 \neq 1$ である」　（偽）

上の例のように，もとの命題の真偽と，裏の命題の真偽が一致するとは限らない．

【例題 41】 以下の命題の真偽を答えよ．次に，裏の命題を書き，その真偽も答えよ．

1. $x = 0$ ならば，$x^3 = 0$ である．
2. $x,\ y$ が有理数ならば，$x + y$ は有理数である．

【解答】

1. もとの命題は**真**．裏の命題は「$x \neq 0$ **ならば**，$x^3 \neq 0$」，これは**真**．
2. もとの命題は**真**．裏の命題は「x **または** y **が無理数ならば**，$x + y$ **は無理数である**」，これは**偽**，**反例は** $x = \sqrt{2},\ y = -\sqrt{2}$.

◀「有理数ではない」ことが，無理数の定義である．

A. 対偶とは何か

命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」を $p \Rightarrow q$ の**対偶**（たいぐう） (contraposition) という．たとえば

「$a = 1$ ならば，$a^2 = 1$ である」　**（真）**

という命題の対偶は，次のようになる．

「$a^2 \neq 1$ ならば，$a \neq 1$ である」　**（真）**

【例題 42】 以下の命題の対偶を書き，その真偽も答えよ．

1. $x = 0$ ならば，$x^3 = 0$ である．
2. x, y が有理数ならば，$x + y$ は有理数である．

【解答】

1. 対偶の命題は「$x^3 \neq 0$ **ならば**，$x \neq 0$」，これは**真**．
2. 対偶の命題は「$x + y$ **が無理数ならば**，x **または** y **は無理数である**」，これは**真**．

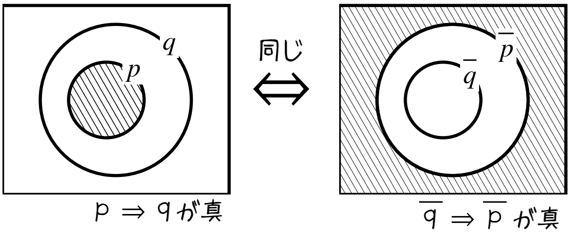
◀真であることを示すには，『対偶を用いた証明』が必要になる．

B. 対偶の真偽は保たれる

もとの命題の真偽と，対偶の命題の真偽は必ず一致する．

p.22 の A. のような図を用いて，右の 2 つの図から考えてみよう．どちらも，条件 p（斜線部分）が q に含まれていることがわかる．

補足 (p.35) に，より詳しい証明がある．

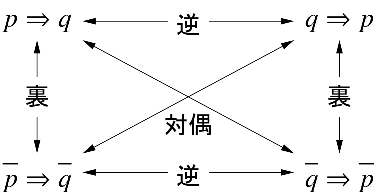


C. 逆・裏・対偶のまとめ

命題 $\overline{p}$，$\overline{q}$ の否定は，もとの命題 p，q であるから，命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の対偶は $p \Rightarrow q$ である．つまり，対偶の対偶はもとに戻る．

また，命題 $q \Rightarrow p$ の対偶は命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ になる．このことから，逆の対偶は裏になることも分かる．

逆・裏・対偶の関係をまとめると，右図のようになる．



【例題 43】 命題「$x = 2$ ならば $x^2 = 4$ である」を P とし，P の逆・裏・対偶の命題をそれぞれ P_1，P_2，P_3 とする．P_1，P_2，P_3 の命題を書き，それらの真偽も答えよ．

【解答】 逆 P_1：「$x^2 = 4$ **ならば** $x = 2$ **である**」，この命題は**偽**，**反例は** $x = -2$

裏 P_2：「$x \neq 2$ **ならば** $x^2 \neq 4$ **である**」，この命題は**偽**，**反例は** $x = -2$

対偶 P_3：「$x^2 \neq 4$ **ならば** $x \neq 2$ **である**」，この命題は**真**

◀$x = -2$ は，$x \neq 2$ であるのに $x^2 = 4$ になってしまう．

【練習 44：対偶の真偽は保たれる】

「背が高い友人A」と待ち合わせしている人の考えとして正しくなるよう，選択肢から選びなさい．

「向こうから誰かが来る．その誰かは，背が $\left\{\begin{array}{l}\text{高い}\\\text{低い}\end{array}\right\}$ ので，友人Aで $\left\{\begin{array}{l}\text{ある}\\\text{ない}\end{array}\right\}$.」

【解答】　「友人A」⇒「背が高い」ので，「背が高くない」⇒「友人Aではない」も正しい．よって，「背が**低い**ので友人Aで**ない**」が正しい考えになる．

【練習 45：逆・裏・対偶】

以下の命題の，逆・裏・対偶の命題を書きなさい．また，それぞれについて真偽を答えなさい．

ただし，(4) の「$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{POR}$」は「$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積が等しい」を意味する．

(1)　「$x=1$」⇒「$x^2-x=0$」

(2)　「x, y は整数」⇒「xy は整数」

(3)　「$x+y=5$」⇒「$x=2$ かつ $y=3$」

(4)「$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{POR}$」⇒「$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{POR}$」

【解答】

(1) 逆：**「$x^2-x=0$」⇒「$x=1$」**これは**偽**，反例は $x=0$.

裏：**「$x \fallingdotseq 1$」⇒「$x^2-x \fallingdotseq 0$」**これは**偽**，反例は $x=0$.

対偶：**「$x^2-x \fallingdotseq 0$」⇒「$x \fallingdotseq 1$」**，これは**真**.

(2) 逆：**「xy は整数」⇒「x, y は整数である」**

これは**偽**，反例は $x=y=\sqrt{2}$.

裏：**「x または y は整数でない」⇒「xy は整数でない」**

これは**偽**，反例は $x=y=\sqrt{2}$.

対偶：**「xy は整数でない」⇒「x または y は整数でない」**，これは**真**.

◀ x, y のどちらかは整数にはならない.

(3) 逆：**「$x=2$ かつ $y=3$」⇒「$x+y=5$」**これは**真**.

裏：**「$x+y \fallingdotseq 5$」⇒「$x \fallingdotseq 2$ または $y \fallingdotseq 3$」**これは**真**.

対偶：**「$x \fallingdotseq 2$ または $y \fallingdotseq 3$」⇒「$x+y \fallingdotseq 5$」**

これは**偽**，反例は $x=0, y=5$.

(4) 逆：**「$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{POR}$」⇒「$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{POR}$」**これは**真**.

裏：**「$\triangle\mathrm{ABC} \fallingdotseq \triangle\mathrm{POR}$」⇒「$\triangle\mathrm{ABC} \not\equiv \triangle\mathrm{POR}$」**これは**真**.

対偶：**「$\triangle\mathrm{ABC} \not\equiv \triangle\mathrm{POR}$」⇒「$\triangle\mathrm{ABC} \fallingdotseq \triangle\mathrm{POR}$」**

これは**偽**，反例は，底辺と高さは異なるが面積は等しい 2 つの三角形.

◀ 底辺も高さが等しくても，面積の異なる 2 つの三角形は多数ある

1.4　証明

どんな命題にも通用する証明方法は無い．

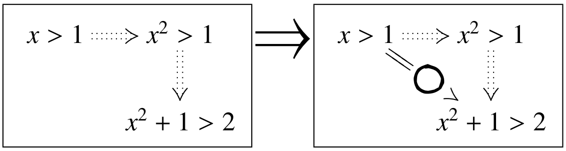
しかし，多くの証明に使われる基本的な方法や，ある形の命題にはきわめて有効な証明方法はある．

それらの中には，普段，人に説明する場面でも有効な方法論もある．

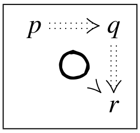
1.　証明の基礎

A.　$p \Rightarrow q \Rightarrow r$

たとえば，次の 2 つの命題は真である．



- $x > 1$ ならば $x^2 > 1$ である．
- $x^2 > 1$ ならば $x^2 + 1 > 2$ である．



上の 2 つの命題から出来る，新しい命題「$x > 1$ ならば $x^2 + 1 > 2$ である」も真になる．一般に，命題 $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow r$ が真ならば，新しい命題 $p \Rightarrow r$ も真である．

【例題 46】　次の 2 つの正しい命題から，新しい命題を作りなさい．

1. 「$x^2 - x - 2 = 0$ ならば $x = 2,\ -1$ である」「$x = 2,\ -1$ ならば $x^3 - 3x - 2 = 0$ である」
2. 「$\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{5}$ ならば，定数 k を用いて $a = 3k,\ b = 2k,\ c = 5k$ と表せる」
「定数 k を用いて $a = 3k,\ b = 2k,\ c = 5k$ と表せるならば，$a : b : c = 3 : 2 : 5$ である」

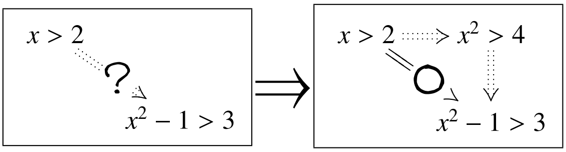
【解答】

1. **「$x^2 - x - 2 = 0$ ならば $x^3 - 3x - 2 = 0$ である」**
2. **「$\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{5}$ ならば，$a : b : c = 3 : 2 : 5$ である」**

B.　三段論法

たとえば，命題「$x > 2$ ならば $x^2 - 1 > 3$」を証明するには，次の 2 段階に分けて考えればよい．

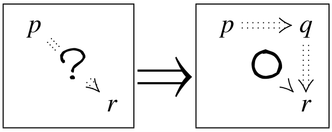
- $x > 2$ ならば $x^2 > 4$ であり，
- $x^2 > 4$ ならば $x^2 - 1 > 3$ である．



この考え方のポイントは，条件「$x^2 > 4$」を間に挟んだことにある．

命題 $p \Rightarrow r$ が真であることを示すために，新たな条件 q を考え，命題 $p \Rightarrow q$ と命題 $q \Rightarrow r$ の両方を示してもよいと分かる．

この命題の証明方法を**三段論法** (syllogism) という．



【例題 47】　命題「a が偶数ならば a^2 は偶数である」の証明が完成するよう，$\boxed{}$ に適する語句を答えなさい．

仮定より，整数 k を用いて $a = 2k$ と表すことができる．

$a = 2k$ ならば $a^2 = \boxed{ア}$ となって a^2 は $\boxed{イ}$ と分かる．よって，命題は正しいと証明された．

【解答】　ア : **$4k^2$**，イ : **偶数**

……三段論法における中間的な条件 q を見つけることは，問題によって異なる．

C. 同値であることの証明

「p と q が同値である」という命題を示すには，2 つの命題「$p \Rightarrow q$」「$q \Rightarrow p$」を証明すればよい．

命題「$p \Rightarrow q$」と「$q \Rightarrow p$」はまとめて，命題「$p \Leftrightarrow q$」とも表される．

【例題 48】 a, b を整数とする．2 つの条件「$a-b$ が偶数である」「$a+b$ が偶数である」は同値であることを示そう．

まず，「$a-b$ が偶数ならば $a+b$ が偶数である」ことを示す．

$a-b$ は偶数なので $a-b=2m$（m は整数）とおく．$a-b$ に $\boxed{\text{ウ}}$ を足せば $a+b$ になるので

$$a+b=2m+\boxed{\text{ウ}}=2\left(\boxed{\text{エ}}\right)$$

である．$\boxed{\text{エ}}$ は整数なので，$a+b$ は偶数である．

次に，逆の「$a+b$ が偶数ならば $a-b$ が偶数である」ことを示す．

$a+b$ は偶数なので，$a+b=2n$（n は整数）とおくと

$$a-b=2n-\boxed{\text{ウ}}=2\left(\boxed{\text{オ}}\right)$$

であり，$\boxed{\text{オ}}$ は整数なので $a-b$ も偶数である．

以上から，2 つの条件「$a-b$ が偶数である」「$a+b$ が偶数である」は同値であることが示された．

【解答】 ウ : $\boldsymbol{2b}$，エ : $\boldsymbol{m+b}$，オ : $\boldsymbol{n-b}$

【練習 49：同値であることの証明】

a, b を整数とする．$a+2b$ が 4 の倍数であることと $a-2b$ が 4 の倍数であることは，同値な条件であることを示せ．

【解答】 まず，「$a+2b$ が 4 の倍数ならば $a-2b$ が 4 の倍数」を示す．
$a+2b$ は 4 の倍数なので $a+2b=4m$（m は整数）とおく．このとき

$$a-2b=(a+2b)-4b=4m-4b=4(m-b)$$

である．$m-b$ は整数なので，$a-2b$ も 4 の倍数である．

次に，逆の命題「$a-2b$ が 4 の倍数ならば $a+2b$ が 4 の倍数」を示す．
$a-2b$ は 4 の倍数なので $a-2b=4n$（n は整数）とおく．このとき

$$a+2b=(a-2b)+4b=4n+4b=4(n+b)$$

である．$n+b$ は整数なので，$a-2b$ も 4 の倍数である．

以上から，$a+2b$ が 4 の倍数であることと $a-2b$ が 4 の倍数であることが同値であると示された． ■

2.　対偶を用いた証明

もとの命題と対偶の命題は真偽が一致した (p.26)．そこで，命題 $p \Rightarrow q$ の証明が難しいときには，命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を証明してもよい．

【例題 50】 a^2 が奇数ならば a が奇数であることを，対偶法を用いて示せ．

【解答】　対偶「a が偶数ならば，a^2 は偶数である」を示せばよい．

a が偶数ならば, $a = 2k$ (整数 k) と表すことができる．このとき, $a^2 = 4k^2$ なので a^2 は奇数である．よって，もとの命題は示された．■

【例題 51】 平面上の 3 点 A, B, P がある．以下の$\boxed{}$に当てはまる文章・言葉を答えよ．「$\angle\mathrm{APB} \fallingdotseq 90^\circ$ ならば，線分 AB を直径とする円の周上に P はない」の対偶は$\boxed{\text{カ}}$であり，これは$\boxed{\text{キ}}$の定理から正しい．よって，もとの命題も正しいことが分かる．

【解答】　カ :「線分 **AB** を直径とする円の周上に **P** があれば，$\angle\mathbf{APB} = 90^\circ$ である」

キ : 円周角

【暗記 52 : $x = a$ かつ $y = b$ と同値な条件】

実数 x, y について，命題「$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$ ならば $x = 1$ かつ $y = 1$」を対偶を用いて示せ．

【解答】 与えられた命題の対偶「$x \fallingdotseq 1$ または $y \fallingdotseq 1$ ならば $(x-1)^2+(y-1)^2 \fallingdotseq 0$」を示せばよい．

$x \fallingdotseq 1$ とすると，$(x-1)^2 > 0$ である．一方，$(y-1)^2 \geqq 0$ なので $(x-1)^2 + (y-1)^2 > 0$ になるから $(x-1)^2 + (y-1)^2 \fallingdotseq 0$ と分かる．

$y \fallingdotseq 1$ とすると，$(y-1)^2 > 0$ である．一方，$(x-1)^2 \geqq 0$ なので $(x-1)^2 + (y-1)^2 > 0$ になるから $(x-1)^2 + (y-1)^2 \fallingdotseq 0$ と分かる．

以上より，対偶が示されたので元の命題も示された．■

◀「対称性より，$y \fallingdotseq 1$ のときも同様にして $(x-1)^2 + (y-1)^2 \fallingdotseq 0$ となる」と書くこともできる．

上の命題の逆も成立する．同じようにして，一般に，実数 x, y, a, b について「$x = a$ かつ $y = b$」と「$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$」は同値と示され，この事実自体が証明に用いることもある．詳しくは p.36 を参照のこと．

3. 背理法

A. 背理法とは何か

命題 $p \Rightarrow q$ を示すのに，以下のように証明を進めてもよい．

i. 仮定 p のもと，条件 q が成り立たないと仮定する．

ii. i. のとき，つじつまが合わないこと，すなわち**矛盾**(むじゅん) (contradiction) を導く．

iii. 条件 q が成り立たないと仮定したのが間違いだったので，条件 q が成り立っている，と結論づける．

この証明方法を**背理法**(はいりほう) (reduction to absurdity) という[*20]．

【例題 53】 $a+b=2$ のとき，a, b のどちらかは 1 以上であることを示せ．

【解答】 「a, b のどちらかは 1 以上」ではないと仮定（ $\cdots\cdots$ ①）し，背理法で示す．つまり，a も b も 1 より小さいとする．

このとき，$a<1$ かつ $b<1$ から $a+b<2$ であるから，$a+b=2$ に矛盾するので仮定①は間違っている．

よって，a, b のどちらかは 1 以上であることが示された． ■

命題 $p \Rightarrow q$ を背理法で示すとき，条件 q が成り立たないと仮定して話を進めるが，仮定である p を否定しないように注意しよう．結果的には，条件 p と条件 $\overline{q}$ が同時に成り立つと仮定して，話を進めることになる．

【暗記 54：$x=a$ または $y=b$ と同値な条件】

実数 x, y について，命題「$(x-1)(y-1)=0$ ならば $x=1$ または $y=1$」を背理法を用いて示せ．

【解答】 「$x=1$ または $y=1$」でないと仮定（ $\cdots\cdots$ ①）し，背理法で示す．つまり，「$x \neq 1$ かつ $y \neq 1$」とする．

◀『ド・モルガンの法則 (p.20)』

このとき，$x-1 \neq 0$ かつ $y-1 \neq 0$ となるので $(x-1)(y-1) \neq 0$ となる．これは $(x-1)(y-1)=0$ に矛盾し，仮定①が間違っていると分かる．

よって，$x=1$ または $y=1$ であることが示された． ■

上の命題の逆も成立する．同じようにして，一般に，実数 x, y, a, b について「$x=a$ または $y=b$」と「$(x-a)(y-b)=0$」は同値と示され，この事実自体が証明に用いることもある．詳しくは p.37 を参照のこと．

[*20] この証明が有効であるのは，命題は真か偽かに定まることに由来する．
命題「$p \Rightarrow q$」か命題「$p \Rightarrow \overline{q}$」のどちらかは真である．そこで，「$p \Rightarrow q$」の真を示すために，「$p \Rightarrow \overline{q}$」の偽を示すのである．

B.　無理数であることの証明

ある数が無理数であることを示すには，背理法を用いる[*21].

無理数どうしの足し算や引き算が無理数になるとは，書かないようにしよう[*22].
一方，有理数どうしの四則計算が有理数になることは，断りなく用いても良い.

【暗記 55：無理数であることの証明】

$2\sqrt{2}-3$ が無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい.

【解答】　$a=2\sqrt{2}-3$ は有理数（……… ①）と仮定し，背理法で示す.

$a=2\sqrt{2}-3$ を変形すると

$$a+3=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{a+3}{2}=\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．②の左辺 $\dfrac{a+3}{2}$ は有理数，$\sqrt{2}$ は無理数であるから，等式②は矛盾している．よって，仮定①は誤っているので $2\sqrt{2}-3$ は無理数であることが示された. ■

【練習 56：背理法～その１～】

$\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ が無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは用いてもよい.

【解答】　$a=\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ は有理数（……… ①）と仮定し，背理法で示す.

$a=\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ を変形すると

$$4a=\sqrt{3}+2 \Leftrightarrow 4a-2=\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．②の左辺 $4a-2$ は有理数，$\sqrt{3}$ は無理数であるから，等式②は矛盾している．よって，仮定①は誤っているので $\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ は無理数であることが示された. ■

[*21] ある数 x が無理数であることの定義が「x が分数では表せないこと」である．だから，x が無理数であることを示すには，基本的に「x が有理数である（分数で表すことができる）」と仮定して矛盾を導くしかない.

[*22] たとえば，2 つの無理数 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ について，互いに足しても掛けても割っても無理数にならない.

【㊥㊦ 57：背理法～その２～】

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{6}$ が無理数であることは用いてもよい．

【解答】 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は有理数（……… ①）と仮定し，背理法で示す．

$a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の両辺を 2 乗して変形すると

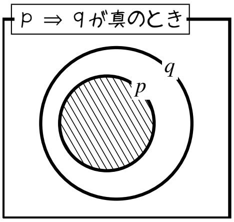
$$a^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow a^2=5+2\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-5}{2}=\sqrt{6} \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．②の左辺 $\dfrac{a^2-5}{2}$ は有理数，$\sqrt{6}$ は無理数であるので，等式②は矛盾している．よって，仮定①は誤っているので $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数であることが示された．■

1.5　第 1 章の補足

1.「対偶の真偽は保たれる」ことの証明



A.「$p \Rightarrow q$ は真である」の言い換え

「$p \Rightarrow q$ が真である」は「条件 $\overline{p} \cup q$ は常に真である」と言い換えられる．
これは，p.22 で学んだベン図でも確認することが出来る．

定義としては、むしろ逆であることが多い。つまり「$p \Rightarrow q$ が真である」は「条件 $\overline{p} \cup q$ は常に真である」として定義される。

B.「すべての命題は真か偽か定まる」ことの言い換え

p.16「数学とは何か？」にあるように，数学においては「真偽が定まる命題」しか考えない．
このことは，次のように表すことができる．

「どんな命題 p についても，$p \cup \overline{p}$ は必ず真である」

これを**排中律** (law of excluded middle) といい，これを用いて，次が成立すると分かる．

「条件 p の否定の否定は，条件 p と同値である」

直感的に，これが正しいことは分かるだろうが，排中律を使って厳密に示すことは，かなり難しい[*23].

C.「対偶の真偽は保たれる」ことの証明

次の 3 つの事実から，命題 $p \Rightarrow q$ の真偽と命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する．

(I)（上の A. より）「$p \Rightarrow q$ が真である」と「条件 $\overline{p} \cup q$ は常に真である」は同値である．
(II)（上の B. より）どんな命題 p についても，同値関係 $p \iff \overline{\overline{p}}$ が成り立つ
(III) どんな命題 p, q についても，$p \cup q$ と $q \cup p$ の真偽は必ず一致する

[*23]「厳密に」とは，ベン図などを使わず，記号の定義のみ用いることを意味する．この $p \iff \overline{\overline{p}}$ を示すには，「$q \Rightarrow r$ が真ならば，$p \cup q \Rightarrow p \cup r$ が真である　……… ③」を認める必要がある．
そのうえで，概略は示しておく．まず，「排中律が等しい事」を言い換えて「$p \Rightarrow \overline{\overline{p}}$」が正しいと示される．逆の「$\overline{\overline{p}} \Rightarrow p$」を示すには「$\overline{\overline{\overline{p}}} \cup p$」が正しい事を示せばよい．それには，たった今示した $p \Rightarrow \overline{\overline{p}}$ と③から $\overline{p} \cup p \Rightarrow \overline{p} \cup \overline{\overline{p}}$ が正しいので，これに排中律などを用いればよい．

対偶の真偽は保たれる

どんな条件 p，q に関しても，命題「$p \Rightarrow q$」と，その対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」は真偽が一致する．

（証明）「命題 $p \Rightarrow q$ が真である」$\Longleftrightarrow$「$\overline{p} \cup q$ は常に正しい」（上の (I) より）

$\Longleftrightarrow$「$q \cup \overline{p}$ は常に正しい」（上の (III) より）

$\Longleftrightarrow$「$\overline{\overline{q}} \cup \overline{p}$ は常に正しい」（上の (II) より）

$\Longleftrightarrow$「命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ は真である」（上の (I) より） ■

2.　「または」「かつ」の証明

「q かつ r」を示す方が，「q または r」を示すよりも，分かりやすい．

A.　基本的な「q かつ r」の証明

一般に，「q かつ r を示す」ためには，「q であること」「r であること」をどちらも示せばよい．

B.　$x = a$ かつ $y = b$ の証明

p.30 で学んだように，「$x = a$ かつ $y = b$」と「$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$」は同値である．
そのため，「$x = a$ かつ $y = b$」を示すために，「$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$」を示してもよい．
特に，$x = y = z$ を示すために，「$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$」を示すこともある．

【練習 58：「かつ」の証明】

(1) k は自然数とする．$n = 2k+1$ のとき，$n^2 - n$ は偶数であり，かつ，$n^2 - 1$ は 8 で割り切れることを示せ．かつ，$n^4 - 1$ も 16 で割り切れることを示せ．

(2) $x^2 + y^2 = x + y = 2$ のとき，$x = 1$ かつ $y = 1$ であることを示せ．

(3) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ のとき，$x = y = z$ であることを示せ．

【解答】

(1) まず，$n^2 - n$ について

$$n^2 - n = (2k+1)^2 - (2k+1) = 4k^2 + 2k = 2k(2k+1)$$

であるから偶数になる．また，$n^2 - 1$ について

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$$

である．k と $k+1$ は必ずどちらかが偶数であるから，$k(k+1)$ は偶数になる．よって，$4k(k+1) = n^2 - 1$ は 8 の倍数になる．

◀ $n^2 - n = n(n-1)$ であり，n と $n-1$ は必ずどちらかが偶数であることからも示される．

(2) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-1)^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1\\ &= (x^2 + y^2) - 2(x+y) + 2 = 2 - 4 + 2 = 0\end{aligned}$$

となって，示された．

【別解】$y = 2 - x$ を $x^2 + y^2 = 2$ に代入して

$$x^2 + (x-2)^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

よって，$x = 1$ である．$y = 2 - x$ に代入して $y = 1$ も成り立つ．

(3) $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 &= 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy - 2yz - 2zx\\ &= 2(xy + yz + zx) - 2xy - 2yz - 2zx = 0\end{aligned}$$

となって，示された．

C.　基本的な「q または r」の証明

一般に，「q または r を示す」ためには，「条件 q が成り立たないならば r である」ことを示せばよい[*24].

【練習 59：「または」の証明〜その１〜】

(1) $ac = bc$ ならば，$c = 0$ または $a = b$ を示せ.

(2) $ab = 0$ ならば，$a = 0$ または $b = 0$ を示せ.

【解答】

(1) $c \neq 0$ ならば $a = b$ を示せばよい．$c \neq 0$ のとき，$ac = bc$ の両辺を c で割って $a = b$ を得る.

(2) $a \neq 0$ ならば $b = 0$ を示せばよい．$a \neq 0$ のとき，$ab = 0$ の両辺を a で割って $b = 0$ を得る.

D.　$x = a$ または $y = b$ の証明

p.31 で学んだように，「$x = a$ または $y = b$」と「$(x - a)(y - b) = 0$」は同値である.

そのため，「$x = a$ または $y = b$」を示すために「$(x - a)(y - b) = 0$」を示してもよい.

【練習 60：「または」の証明〜その２〜】

$ab + 1 = a + b$ のとき，$a = 1$ または $b = 1$ を示せ.

【解答】　$(a - 1)(b - 1) = ab - a - b + 1 = (ab + 1) - a - b = a + b - a - b = 0$ であるから，$a = 1$ または $b = 1$ が成り立つ.

【発展 61：「少なくとも 1 つは 1」の証明】

$a + b + c = abc,\ ab + bc + ca = -1$ のとき，$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 つは 1 であることを示せ.

【解答】「$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 つは 1 である」ことと，「$(a-1)(b-1)(c-1) = 0$ が成り立つ」ことは同値である．ここで

$$\begin{aligned}(a - 1)(b - 1)(c - 1) &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1\\ &= abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1\\ &= abc - (-1) + abc - 1 = 0\end{aligned}$$

よって，$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 つは 1 であることが示された.

[*24] もしくは「条件 r が成り立たないならば q である」ことを示せばよい.

第2章　場合の数

場合の数 (number of cases) とは「何通りの場合が起こりうるか数える」ことである.

2.1　場合の数の基礎

起こりうる場合の数を正しく数えるには次のことが必要条件になる.
「数えもらさない」　「同じものを繰り返して数えない」

1.　積の法則

A.　試行とは

＜＜試行は，確率の用語！
「数えもらさない」「同じものを繰り返して数えない」ための基本的な手段は，表を用いることである.
たとえば，大小 2 個のさいころを投げたときの出る目を表でまとめると，右のようになる.
このとき，すべての場合の数は $6 \times 6 = 36$ 通りと分かる.

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
2	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
3	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
5	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
6	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全部で6通り

全部で6通り

【例題 1】 4 種類のカード $\boxed{\text{A}}\boxed{\text{B}}\boxed{\text{C}}\boxed{\text{D}}$ を用いて 2 枚並べる．ただし，同じカードを繰り返し並べてよいとする．右の表を完成させ，全部で何通りあるか答えなさい.

1 枚目＼2 枚目	A	B		
A	AA	AB		

【解答】
よって，$4 \times 4 =$ **16通り** ある.

1 枚目＼2 枚目	A	B	C	D
A	**AA**	**AB**	**AC**	**AD**
B	**BA**	**BB**	**BC**	**BD**
C	**CA**	**CB**	**CC**	**CD**
D	**DA**	**DB**	**DC**	**DD**

3 枚以上選ぶ並べる場合には表で書き表すことが難しくなるので，樹形図を用いる.

B. 辞書順に並べる

場合の数の問題では，辞書と同じように，アルファベット順，あいうえお順，数字の小さい順などで，結果を並べるとよい．

(例 1) 5 枚のカード

$\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, $\boxed{E}$

のうち 3 枚を使った，A から始まる文字列は，右のように書き出すことができる．その結果，場合の数は $4 \times 3 = 12$ 通りと求められる．

悪いやり方(×)			辞書順並べ(○)			
ABC	AEB	ACD	ABC	ABD	ABE	(←ABで始まる文字列)
ACB	ABE	ADC	ACB	ACD	ACE	(←ACで始まる文字列)
ADE	ABD	AEC	ADB	ADC	ADE	(←ADで始まる文字列)
AED	ADB	ACE	AEB	AEC	AED	(←AEで始まる文字列)

(例 2) 大小 2 つのさいころを振ったとき，出た目を

(大きいさいころの目, 小さいさいころの目)

で表そう（このテキストでは以後，同じとする）．

出た目の和が 6 になる場合を辞書順並べで書き出すと，右図のようになって容易に，5 通りあると分かる．

悪いやり方(×)	辞書順並べ(○)
(1, 5)	(1, 5)
(5, 1)	(2, 4)
(4, 2)	(3, 3)
(2, 4)	(4, 2)
(3, 3)	(5, 1)

↑上から1，2，3，4，5

【例題 2】

1. 上の (例 1) において，C から始まる文字列を辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．
2. 上の (例 2) において，目の和が 7 になる場合を，辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．
3. $a + b + c = 5$ となる自然数 (a, b, c) の組を辞書順で全て書き出し，何通りあるか答えなさい．

【解答】

1. **CAB　CAD　CAE**
   CBA　CBD　CBE
   CDA　CDB　CDE
   CEA　CEB　CED

   1. は $4 \times 3 =$ **12通り** ある．
   2. は **6通り** ある．
   3. は **6通り** ある．

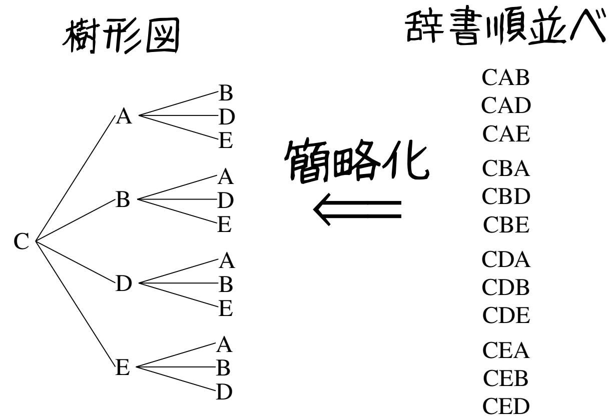
2. **(1, 6)**
   (2, 5)
   (3, 4)
   (4, 3)
   (5, 2)
   (6, 1)

3. $\boldsymbol{(a, b, c)}$
   =(1, 1, 3),
   (1, 2, 2),
   (1, 3, 1),
   (2, 1, 2),
   (2, 2, 1),
   (3, 1, 1)

C.　樹形図

辞書順並べを少し簡略化した書き方が，**樹形図** (tree diagram) である．

たとえば，前ページ左下の (1) の問題を樹形図で書き出すと，右のようになる．



D.　積の法則

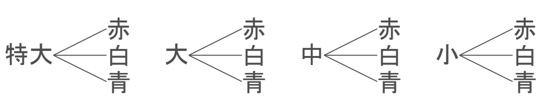
前ページの樹形図において，○<△▲▽ という形が 4 回現われることが分かる．これは，「2 番目の文字は 4 種類あり，2 番目の文字がどんな場合でも，3 番目の文字は 3 種類ある」ことを意味しており，場合の数は $3 \times 4 = 12$ 通りとなる．

【例題 3】

1. A 社のかばんには，特大，大，中，小の 4 種類あり，いずれも，赤，白，青の 3 色から選べるという．樹形図を書いて，何種類のかばんがあるか答えなさい．
2. 1 から 4 の数字を用いた，2 桁の数字を樹形図で書き出し，何通りあるか答えなさい．

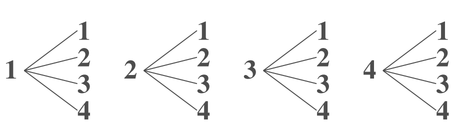
【解答】

1. (大きさ – 色) で樹形図を書けば，以下のようになる．



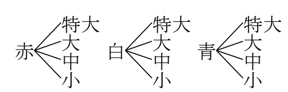
全部で $4 \times 3 =$ **12通り** ある．

2. (十の位 – 一の位) で樹形図を書けば，以下のようになる．



全部で $4 \times 4 =$ **16通り** ある．

◀ 樹形図によるまとめ方は複数ある．たとえば，(色, 大きさ) の順で書けば，以下のような樹形図を書くことができる．



積の法則

2 つの事柄 A，B について，A の起こり方が a 通り，Aがどんな場合でも，B の起こり方が b 通りあるとする．このとき

A と B がともに起こる場合は $a \times b$ 通り

ある．このことを**積の法則** (multiplication law) という．

【練習 4：積の法則〜その１〜】

(1) 男子が 5 人，女子が 4 人のクラスから，男女一人ずつを選ぶ方法は何通りあるか.

(2) 1 から 9 までの数字を用いた，2 桁の数は何通りあるか.

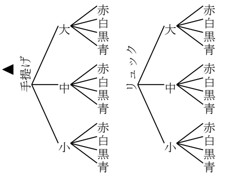
(3) B 社のかばんには，手提げとリュックの 2 種類があり，大きさは大中小の 3 種類から赤，白，黒，青の 4 色から選べるという．何種類のかばんがあるか.

【解答】

(1) 5 人のうちどの男子を選んでも，女子の選び方は 4 通りあるので，$5 \times 4 =$ **20通り** と求められる.

(2) 10 の位は 9 通り，10 の位がいくつであっても，1 の位は 9 通りある．つまり，$9 \times 9 =$ **81通り** である.

(3) かばんは 2 種類あり，どちらの場合でも大きさは 3 種類あり，さらに，どの場合も色は 4 種類ずつある．
つまり，全部で $4 \times 3 \times 2 =$ **24 通り**ある.

◀ 

積の法則を用いるかどうかわからないときは，樹形図をイメージしよう.

E. 正の約数の個数

積の法則 (p.41) の応用例として，12 の約数について考えよう．$12 = 2^2 \times 3$ であるので，12 の約数は

$2^0 \times 3^0$，$2^0 \times 3^1$，　$2^1 \times 3^0$，$2^1 \times 3^1$，　$2^2 \times 3^0$，$2^2 \times 3^1$

ですべてとなる．これを樹形図にすれば，次のようになり，$3 \times 2 = 6$ 個の約数があるとわかる.

$2^0 \left\langle \begin{array}{l} 3^0 \\ 3^1 \end{array} \right.$　$2^1 \left\langle \begin{array}{l} 3^0 \\ 3^1 \end{array} \right.$　$2^2 \left\langle \begin{array}{l} 3^0 \\ 3^1 \end{array} \right.$

また，12 の約数の和は，$(2^0 + 2^1 + 2^2) \times (3^0 + 3^1) = (1 + 2 + 4) \times (1 + 3) = 7 \times 4 = 28$ で計算できる．これは，次の等式から分かる.

$$\begin{aligned} 2^0 \times 3^0 + 2^0 \times 3^1 + 2^1 \times 3^0 + 2^1 \times 3^1 + 2^2 \times 3^0 + 2^2 \times 3^1 &= 2^0 \times (3^0 + 3^1) + 2^1 \times (3^0 + 3^1) + 2^2 \times (3^0 + 3^1) \\ &= (2^0 + 2^1 + 2^2) \times (3^0 + 3^1) \end{aligned}$$

【発展 5：正の約数の個数】

上のやり方を参考に，288 の約数の個数を求めよ．また，約数の和を求めよ.

【解答】　$288 = 2^5 \times 3^2$ である．よって，288 の約数は

◀ 素因数分解した

$2^0 \left\langle \begin{array}{l} 3^0 \\ 3^1 \\ 3^2 \end{array} \right.$　$2^1 \left\langle \begin{array}{l} 3^0 \\ 3^1 \\ 3^2 \end{array} \right.$　$2^2 \left\langle \begin{array}{l} 3^0 \\ 3^1 \\ 3^2 \end{array} \right.$　$2^3 \left\langle \begin{array}{l} 3^0 \\ 3^1 \\ 3^2 \end{array} \right.$　$2^4 \left\langle \begin{array}{l} 3^0 \\ 3^1 \\ 3^2 \end{array} \right.$　$2^5 \left\langle \begin{array}{l} 3^0 \\ 3^1 \\ 3^2 \end{array} \right.$

よって，約数の個数は $6 \times 3 =$ **18個** ある．また，約数の和は

$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) \times (3^0 + 3^1 + 3^2)$

$= (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) \times (1 + 3 + 9) = 63 * 13 =$ **819**

◀ 慣れたら，素因数分解の指数部を見るだけで，$(5 + 1) \times (2 + 1) = 18$ と計算できる.

2. 集合と場合の数

A. 操作の結果を集合で表す

たとえば，大きさの異なる立方体のさいころ 2 個を振って「目の和が 5 になる場合」について，次のように書くことができる．

「目の和が 5 になる場合」の集合 A は，$A=\{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$ であり，$n(A)=4$ である．

【例題 6】 大小 2 個のさいころを投げるとき，以下の集合の要素を書き出し，(4) の問いに答えよ．

1. 出た目の和が 10 になる場合の集合 B
2. 出た目の差が 4 になる場合の集合 C
3. 出た目の積が 12 になる場合の集合 D
4. $n(B),\ n(C),\ n(D)$ はいくらか．

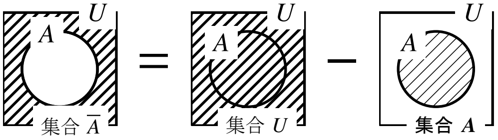
【解答】

1. $\boldsymbol{B=\{(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)\}}$
2. $\boldsymbol{C=\{(6,\ 2),\ (5,\ 1),\ (2,\ 6),\ (1,\ 5)\}}$
3. $\boldsymbol{D=\{(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)\}}$
4. $\boldsymbol{n(B)=3,\ n(C)=4,\ n(D)=4}$

◀「差」とは「2 つの値の違い」なので，(5, 1), (1, 5) の差はいずれも 4.

B. 1 対 1 対応と問題の置き換え

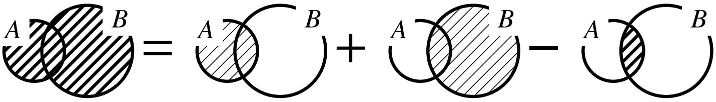
場合の数を集合を用いて考えれば，『集合の要素の個数』で学ぶ次の法則を用いることができる．



『補集合の要素の個数』

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

『包含と排除の原理』



$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$A\cap B=\emptyset$ のとき，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ となる．これは『和の法則』とも呼ばれる．

【例題 7】 大きさは大中小の 3 種類，赤，白，黒，青の 4 色がある D 社のかばんを買いにいったところ，大きいかばんと，黒のかばんは気に入らなかったが，他は気に入った．大きなかばんの集合を A，黒いかばんの集合を B とするとき，以下の問に答えよ．

1. $n(A),\ n(B),\ n(A\cap B)$ の値をそれぞれ求めよ．
2. 気に入らなかったかばんは何通りか．
3. 気に入ったかばんは何通りか．

【解答】

(1) $\boldsymbol{n(A)=4},\ \boldsymbol{n(B)=3},\ \boldsymbol{n(A\cap B)=1}$

(2) 気に入らなかったかばんは $A\cup B$ に一致するので

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=4+3-1=6$ から **6通り**．

(3) D 社のかばんは全部で $4\times 3=12$ 通りある．(2) 以外のかばんの種類なので，$12-6=$ **6通り** ある．

◀ $A\cap B$「大きくて黒いかばんの集合」，そのようなかばんは 1 つしかない

C. 場合分け

【例題 8】 大小 2 個のさいころを投げたとき，出た目の和が 5 の倍数となるのは次の場合がある．

- 「出た目の和が 5 になる場合」これは $\boxed{\text{ア}}$ 通りある
- 「出た目の和が $\boxed{\text{イ}}$ になる場合」これは $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある

この場合分けから，出た目の和が 5 の倍数となる場合は $\boxed{\text{エ}}$ 通りあるとわかる．

【解答】 ア：(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) の **4** 通りある．　イ：**10**
ウ：(4, 6), (5, 5), (6, 4) の **3** 通りある．　エ：$4 + 3 = \mathbf{7}$

出た目の和が 5 となる場合を A，出た目の和が 10 となる場合を B とすれば，$A \cap B = \emptyset$ であるので，（出た目の和が 5 の倍数となる場合の数）$= n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ である．

【練習 9：場合の数における集合】

1 から 50 までが書かれたカード 50 枚の中から，無作為に 1 枚引く．引いたカードが
　2 の倍数である場合の集合を Z_2，3 の倍数である場合の集合を Z_3
また，すべての場合の集合を U とする．つまり，$n(U) = 50$ である．

(1) $n(Z_2)$, $n(Z_3)$, $n(Z_2 \cap Z_3)$ の値を求めなさい．

(2) 「奇数である場合の集合」を A，「6 の倍数である場合の集合」を B，「2 または 3 で割り切れる場合の集合」を C とする．それぞれ一致するものを選びなさい．
　① Z_2　② Z_3　③ $\overline{Z_2}$　④ $\overline{Z_3}$　⑤ $Z_2 \cap Z_3$　⑥ $Z_2 \cup Z_3$

(3) $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ をそれぞれ答えなさい．

【解答】

(1) たとえば「1 を引いた場合」を「1」と表せば

$$Z_2 = \{2,\ 4,\ 6, \cdots,\ 50\ (= 2 \times 25)\}$$
$$Z_3 = \{3,\ 6,\ 9, \cdots,\ 48\ (= 3 \times 16)\}$$
$$Z_2 \cap Z_3 = \{6,\ 12,\ 18, \cdots,\ 48\ (= 6 \times 8)\}$$

なので，$\boldsymbol{n(Z_2) = 25}$，$\boldsymbol{n(Z_3) = 16}$，$\boldsymbol{n(Z_2 \cap Z_3) = 8}$

(2) A は ③，B は ⑤，C は ⑥

(3) $n(A) = n(\overline{Z_2}) = \mathbf{25}$，$n(B) = n(Z_2 \cap Z_3) = \mathbf{8}$
　$n(C) = n(Z_2 \cup Z_3) = 25 + 16 - 8 = \mathbf{33}$

【練習 10：場合分けと積の法則】

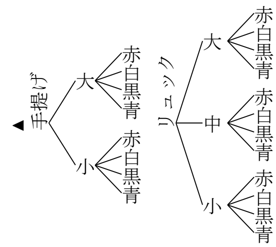
(1) 1 から 5 までの数字を用いてできる 2 桁以下の数は何通りあるか.

(2) C 社のかばんには，手提げは大中の 2 種類，リュックは大中小の 3 種類あり，どの種類も赤，白，黒，青の 4 色から選べるという．何種類のかばんがあるか.

【解答】

(1) 2 桁の数は $5 \times 5 = 25$ 通り，1 桁の数は 5 通りある.
つまり，全部で $25 + 5 =$ **30通り** の数がある.

(2) 手提げは 2×4 通り，リュックは，3×4 通りある.
よって，全部で $4 \times 2 + 4 \times 3 =$ **20 種類**ある.

◀

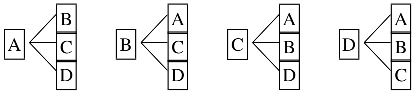
3. 「重複を許す」，「順列と組合せ」

A. 「重複を許す」とは

同じ操作を繰り返してもよいことを「重複を許す」という.

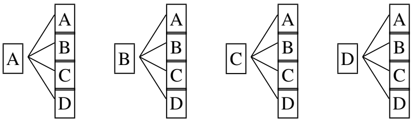
たとえば，4 種類のカード A B C D を用いて 2 枚の列を作るとき

「重複を許さない」ならば



$4 \times 3 = 12$ 通りの並べ方がある.

「重複を許す」ならば



$4 \times 4 = 16$ 通りの並べ方がある.

【例題 11】 1 から 5 までの数字を用いて，2 桁の数字を作ろうと思う.

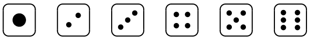
1. 重複を許して作るなら，何通りあるか.
2. 重複がないよう作るなら，何通りできるか.

【解答】

1. 10 の位は 5 通り，そのいずれの場合も，1 の位は 5 通りあるので，$5 \times 5 =$ **25通り**
2. 10 の位は 5 通り，そのいずれの場合も，1 の位は 4 通りあるので，$5 \times 4 =$ **20通り**

◀2. において，1 の位は，10 の位と同じ数を入れることができない

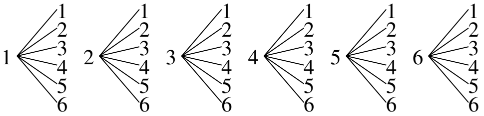
B. 「順列」とは，「組合せ」とは



たとえば，さいころを 2 回投げた場合の目の出方は，次の 2 通りの方法でまとめることができる．

a) 1 回目と 2 回目を区別する場合

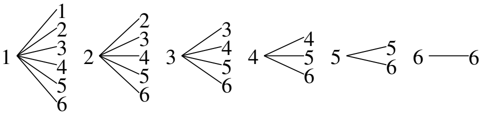
1 回目－2 回目の順に樹形図を書けば，次のようになる．



この場合は，試行順に結果を列挙した**順列** (permutation) を考えている．

b) 1 回目と 2 回目を区別しない場合

小さい目－大きい目の順で樹形図を書けば，次のようになる．



この場合は，試行した結果の**組合せ** (combination) を考えている．

順列か組合せのいずれで考える問題なのか，注意して樹形図を書こう．

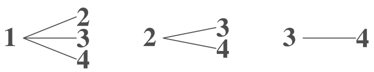
【例題 12】 1，2，3，4 の数字が書いてある 4 枚のカードがある．次の試行について，それぞれ樹形図を用いてすべて書き出し，何通りあるか答えよ．　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

1. 続けて 2 枚引く場合のカードの順列
2. 続けて 2 枚引いたときの，カードの組合せ

【解答】

1\.


$4 \times 3 =$ **12通り**

2\.


$3 + 2 + 1 =$ **6通り**

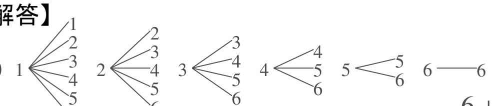
◀ (2) は，§2.3『組合せ』において学ぶことを用い，${}_4C_2 = 6$ 通りとも求められる．

【練習 13：さいころの区別】

(1) 同じ大きさの立方体のさいころ 2 個を振るとき，目の出方は何通りあるか．

(2) 大きさが異なる立方体のさいころ 2 個を振るとき，目の出方は何通りあるか．

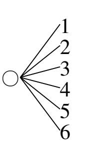
【解答】

(1)


$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$ **21通り**

(2) 大きいさいころは 6 通り．そのいずれの場合も，小さいさいころが 6 通りあるので，$6 \times 6 =$ **36通り**

◀ 右のような樹形図が 6 つ書ける．（○には 1 から 6 が入る）



【練習 14：足して 5 になる数】

(1) 足して 5 になるような 2 つの自然数の組をすべて求めよ．

(2) $x + y = 5$ になるような，2 つの自然数 x, y の解をすべて求めよ．

【解答】

(1) **1 と 4**，**2 と 3** の 2 組

◀ 2 つの数字の組合せを考えている

(2) $(x, y) = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$

◀ 2 つの数字を x, y で区別した結果として順列を考えている

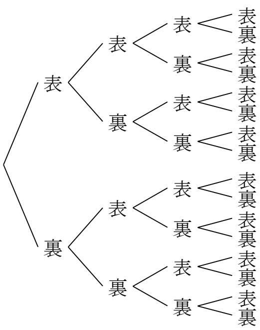
1. 重複順列

A. 重複順列とは

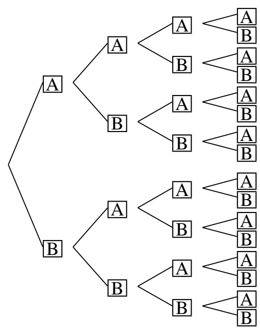
同じことを繰り返してできる順列のことを**重複順列**（ちょうふく）(permutation with repetitions) という．
次の問題について，それぞれ樹形図を書いて，何通りあるか考えてみよう．

1) 表と裏があるコインを 4 回振るときの，出た目の順列は何通りあるか.
2) $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ の 2 枚から 1 枚引いて記録し，元に戻す操作を 4 回行ったとき，引いたカードの順列
3) 1 か 2 のみで作ることのできる，4 桁の整数

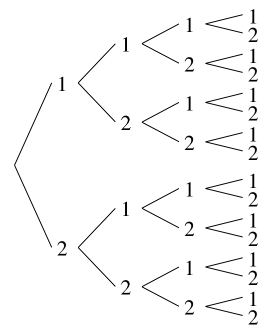
1) 1回目—2回目—3回目—4回目



2) 1枚目—2枚目—3枚目—4枚目



3) 千の位—百の位—十の位—一の位



⇓ 簡略化 ⇓ 簡略化 ⇓

1) 1回目 2回目 3回目 4回目
$\square$ $\square$ $\square$ $\square$
2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り

2) 1枚目 2枚目 3枚目 4枚目
$\square$ $\square$ $\square$ $\square$
2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り

3) 千の位 百の位 十の位 一の位
$\square$ $\square$ $\square$ $\square$
2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り　それぞれ 2 通り

結果，いずれも $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 通りと分かる.

【例題 15】 $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ の 3 枚のカードから 1 枚引いて記録し，元に戻す操作を 4 回行った．右の $\boxed{}$ にあてはまる数字を答えよ.

1 枚目　2 枚目　3 枚目　4 枚目
$\square$ $\square$ $\square$ $\square$
$\boxed{ア}$通り　それぞれ $\boxed{イ}$通り　それぞれ $\boxed{ウ}$通り　それぞれ $\boxed{エ}$通り
並べ方は全部で $\boxed{オ}$ 通り

【解答】 ア : **3**, イ : **3**, ウ : **3**, エ : **3**, オ : $3 \times 3 \times 3 \times 3 =$ **81**

重複順列

n 通りの可能性のある操作を，r 回繰り返したときに得られる順列を重複順列といい，その場合の数は
$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{r\text{ 回}} = n^r$ 通りである.

【練習 16：重複順列】

(1) 表と裏があるコインを 6 回振るときの，出た目の順列は何通りあるか.

(2) $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$ の 4 枚のカードから，1 枚引いて元に戻す操作を 3 回行ったとき，引いたカードの順列は何通りあるか.

(3) 5 人 1 組のグループ 3 組から，リーダーを 1 人ずつ選ぶ方法は何通りあるか.

(4) 1, 2, 3 のみを用いた，4 桁以下の整数は何通りあるか.

【解答】

(1)

1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	6 回目
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り	それぞれ 2 通り

よって，$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^6 =$ **64通り**

(2)

1 枚目	2 枚目	3 枚目
$\square$	$\square$	$\square$
4 通り	それぞれ 4 通り	それぞれ 4 通り

よって，$4^3 =$ **64通り**

(3)

1 組目	2 組目	3 組目
$\square$	$\square$	$\square$
5 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 5 通り

よって，$5^3 =$ **125通り**

(4) 4 桁の数は $3^4 = 81$ 通り，3 桁の数は $3^3 = 27$ 通り，
2 桁の数は $3^2 = 9$ 通り，1 桁の数は $3^1 = 3$ 通り
あるので，全部で $81 + 27 + 9 + 3 =$ **120通り** ある.

◀ $3^4 = 9 \times 9 = 81$ で計算するとよい.

B. 重複順列に置き換えられる問題

たとえば，集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ の部分集合は，何通りあるか考えてみよう.

A の部分集合には，$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\emptyset$, $\{1, 2, 3, 4\}$ などがあるが，これらを，右図の方法で順列に対応させることができる．結局

「A の部分集合を挙げる」
$\Longleftrightarrow$「○か×を 4 回並べる」

ことは 1 対 1 に対応し，「A の部分集合の数」と「○か×を 4 回並べる重複順列の場合の数」は一致する．つまり，A の部分集合は $2^4 = 16$ 通りあると求められる.

$\{1, 2\}$	$\Longleftrightarrow$	○	○	×	×
$\{1, 3\}$	$\Longleftrightarrow$	○	×	○	×
$\{2, 3, 4\}$	$\Longleftrightarrow$	×	○	○	○
$\emptyset$	$\Longleftrightarrow$	×	×	×	×
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\Longleftrightarrow$	○	○	○	○
Aの部分集合	$\Longleftrightarrow$	1の有無	2の有無	3の有無	4の有無

【例題 17】 集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ の部分集合は何通りあるか.

【解答】 X の部分集合を挙げることは，○か×を 5 回並べることに置き換えられるので，部分集合は $2^5 =$ **32通り** ある.

A. 繰り返しのない順列

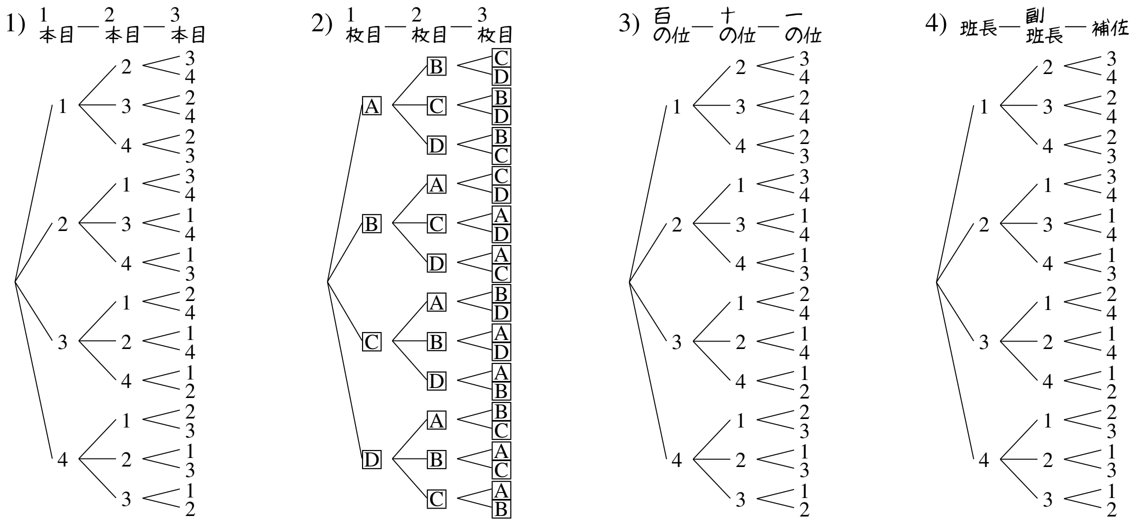
次の 2 つの問題について，樹形図を書いて，何通りあるか考えてみよう．

1) 1, 2, 3, 4 が書いてある 4 本の旗のうち，3 本を用いた旗の並べ方は何通りあるか．

2) $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$ の 4 枚のカードのうち，3 枚を用いてできる順列は何通りあるか．

3) 1 から 4 を重複なく使ってできる，3 桁の整数は何通りあるか．

4) 出席番号 1 から 4 の 4 人から，班長，副班長，補佐を決める方法は何通りあるか．



⇓ 簡略化 ⇓ 簡略化 ⇓ 簡略化 ⇓

1) 1本目 □ 4 通り，2本目 □ それぞれ 3 通り，3本目 □ それぞれ 2 通り

2) 1枚目 □ 4 通り，2枚目 □ それぞれ 3 通り，3枚目 □ それぞれ 2 通り

3) 百の位 □ 4 通り，十の位 □ それぞれ 3 通り，一の位 □ それぞれ 2 通り

4) 班長 □ 4 通り，副班長 □ それぞれ 3 通り，補佐 □ それぞれ 2 通り

結果，いずれも $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通りと分かる．

特に，1) から 3) の問題はいずれも「4 つの異なるものから，重複なしに 3 つを一列に並べる」操作によって得られる．

【例題 18】 $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$, $\boxed{\mathrm{E}}$ の 5 枚のカードから 1 枚ずつ引いて記録する操作を 3 回行った．右の □ にあてはまる数字を答えよ．ただし，一度引いたカードは元に戻さないとする．

1 枚目 □ $\boxed{\text{ア}}$通り，2 枚目 □ それぞれ$\boxed{\text{イ}}$通り，3 枚目 □ それぞれ$\boxed{\text{ウ}}$通り

並べ方は全部で$\boxed{\text{エ}}$通り

【解答】 ア : **5**，イ : **4**，ウ : **3**，エ : $5 \times 4 \times 3 = \mathbf{60}$

【練習 19：順列〜その１〜】

1 から 6 までのカードが 1 枚ずつ，計 6 枚ある．次の順列は何通りあるか．

(1) 2 枚を用いた順列　(2) 3 枚を用いた順列　(3) 4 枚を用いた順列

【解答】

(1) 1つ目 □ 6 通り，2つ目 □ それぞれ 5 通り

よって，$6 \times 5 =$ **30通り**

(2) 1つ目 □ 6 通り，2つ目 □ それぞれ 5 通り，3つ目 □ それぞれ 4 通り

よって，$6 \times 5 \times 4 =$ **120通り**

(3) 1つ目 □ 6 通り，2つ目 □ それぞれ 5 通り，3つ目 □ それぞれ 4 通り，4つ目 □ それぞれ 3 通り

よって，$6 \times 5 \times 4 \times 3 =$ **360通り**

B. 順列 ${}_n\mathrm{P}_r$

ここまで学んだ順列の場合の数は，記号 ${}_n\mathrm{P}_r$ を用いて表されることがある[*1]．

順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ の定義

「n 個の異なるものから r 個を用いて一列に並べる順列」の場合の数を，記号 ${}_n\mathrm{P}_r$（エヌピーアール）で表す（自然数 n と r は $n \geqq r$ とする）．

1 番目	2 番目	3 番目	……	$r-1$ 番目	r 番目
□	□	□	……	□	□
n 通り	それぞれ $n-1$ 通り	それぞれ $n-2$ 通り	……	それぞれ $n-(r-2)$ 通り	それぞれ $n-(r-1)$ 通り

右上の図から，${}_n\mathrm{P}_r$（エヌピーアール） $= \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}_{n\text{ から始まる }r\text{ 個の数の積}}$ で計算できる．

たとえば，p.49 の 1) から 4) はすべて，${}_4\mathrm{P}_3$（よんピーさん） $= \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2}_{4\text{ から始まる }3\text{ 個の数の積}} = 24$ である．

【例題 20】

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 個の数字を使ってできる 3 桁の整数は，${}_{\boxed{ア}}\mathrm{P}_{\boxed{イ}} = \boxed{ウ}$ 通りある．
2. 5 色の旗を 1 列に並べるときの場合の数は ${}_{\boxed{エ}}\mathrm{P}_{\boxed{オ}} = \boxed{カ}$ 通りある．

【解答】

1. ア：**6**，イ：**3**，ウ：${}_6\mathrm{P}_3 = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}_{6\text{ から始まる }3\text{ 個の数の積}} =$ **120**
2. エ：**5**，オ：**5**，カ：${}_5\mathrm{P}_5 = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{1\text{ から }5\text{ までの積}} =$ **120**

[*1] ただし，${}_n\mathrm{P}_r$ はあまり有用な記号ではない．応用範囲が狭く，後に学ぶ記号 ${}_n\mathrm{C}_r$ と混同しやすい．順列の問題は，これまで通り『積の法則』(p.41) で処理するのがよい．

C.　階乗 $n!$

階乗 $n!$ の定義

「異なる n 個すべてを一列に並べる順列」の場合の数を n の**階乗** (factorial) といい，$n!$ で表す．
下の図から，$n! = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}_{1\text{ から } n \text{ までの自然数の積}}$ となる．

1 番目	2 番目	3 番目	……	$n-1$ 番目	n 番目
□	□	□	……	□	□
n 通り	それぞれ $n-1$ 通り	それぞれ $n-2$ 通り	……	それぞれ 2 通り	それぞれ 1 通り

（例）

$1! = 1$
$2! = 2\cdot1 = 2$
$3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$
$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$

【例題 21】 ${}_7\mathrm{P}_3$，${}_{10}\mathrm{P}_5$，$6!$ の値を計算せよ．

【解答】 ${}_7\mathrm{P}_3 = \underbrace{7\cdot6\cdot5}_{\substack{7\text{ から始まる}\\3\text{ 個の数の積}}} = \mathbf{210}$，　${}_{10}\mathrm{P}_5 = \underbrace{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}_{\substack{10\text{ から始まる}\\5\text{ 個の数の積}}} = \mathbf{30240}$

$6! = \underbrace{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}_{1\text{ から }6\text{ までの積}} = \mathbf{720}$

掛け算の順番に気をつけて，順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ の値を計算しよう．たとえば

$${}_8\mathrm{P}_4 = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 56\cdot6\cdot5 = 336\cdot5 = 1680$$
$${}_8\mathrm{P}_4 = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 56\cdot30 = 1680$$

のように，5 と偶数を利用して計算すると，手間が大きく変わる．

D.　${}_n\mathrm{P}_0$，$0!$

0 を含む順列，階乗は，${}_n\mathrm{P}_0 = 1$，$0! = 1$ と定義される[*2]．

[*2] 直感的には，次の関係からも簡単に確認できる．

$$4! \xrightarrow{\div4} 3! \xrightarrow{\div3} 2! \xrightarrow{\div2} 1! \xrightarrow{\div1} 0! \qquad {}_n\mathrm{P}_3 \xrightarrow{\div(n-2)} {}_n\mathrm{P}_2 \xrightarrow{\div(n-1)} {}_n\mathrm{P}_1 \xrightarrow{\div n} {}_n\mathrm{P}_0$$

また，「n 個のものから 0 個を用いて並べる」順列も，「異なる 0 個すべてを一列に並べる」順列も，「何も並べない」という 1 通りしか存在しないことから理解することもできる．

E. 順列 $_nP_r$ と重複順列

同じものを繰り返し用いるときは重複順列になるため，順列 $_nP_r$ を用いることはできない．

【例題 22】 7 色の絵の具で 3 つの場所を塗る．次の 2 つの場合について□に数字を入れよ．

1. 同じ色を使わず塗る場合は

1つ目	2つ目	3つ目
□	□	□
ア通り	それぞれ イ通り	それぞれ ウ通り

であるから，全部で エ 通りある．

2. 同じ色を使って塗る場合は

1つ目	2つ目	3つ目
□	□	□
オ通り	それぞれ カ通り	それぞれ キ通り

であるから，全部で ク 通りある．

【解答】

1. ア : **7**，イ : **6**，ウ : **5**，エ : $7 \times 6 \times 5 =$ **210**
2. オ : **7**，カ : **7**，キ : **7**，ク : $7 \times 7 \times 7 =$ **343**

F. 順列と和の法則・積の法則

【練習 23：条件を満たす整数の個数〜その１〜】

(1) 1 から 7 までの数字を重複なく用い，4 桁の数字を作る．

1) 千の位が 5 である整数は何通りか．
2) 5000 以上の整数は何通りか．
3) 一の位が 2 である整数は何通りか．
4) 偶数は何通りか．
5) 奇数は何通りか．

(2) 1 から 7 までの数字を用いて，4 桁の数字を作る．**ただし，同じ数字を繰り返し用いてよい**．

1) 偶数は何通り作れるか．
2) 5 の倍数は何通り作れるか．
3) 6666 より大きな数は何通り作れるか．

【解答】

(1) 1)

千の位	百の位	十の位	一の位
5	□	□	□
1 通り	6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り

$1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 =$ **120通り**

2)

千の位	百の位	十の位	一の位
5以上	□	□	□
3 通り	それぞれ 6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り

$3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 =$ **360通り**

◀ 千の位が 5, 6, 7 のいずれかであればよい

3)

千の位	百の位	十の位	一の位
□	□	□	2
6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り	1 通り

$1 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) =$ **120通り**

4)

千	百	十	一
□	□	□	2, 4, 6
それぞれ 6 通り			3 通り

⇒

千	百	十	一
□	□	□	2, 4, 6
それぞれ 6 通り	それぞれ 5 通り	それぞれ 4 通り	3 通り

$3 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) =$ **360通り**

◀ 一の位が偶数であればよい

◀ 一の位がいくつでも，千の位は 6 通りある

◀ 順列を用いれば $3 \times {}_6P_3$ となる

5) 偶数でなければよいので，$840 - 360 =$ **480通り**．

◀ 【別解】一の位が奇数であればよいので，5) と同様に考えて $4 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) =$ **480通り**．

(2) 1)

千の位	百の位	十の位	一の位
$\square$	$\square$	$\square$	2, 4, 6
それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	3 通り

$3\cdot(7\cdot7\cdot7)=$ **1029通り**

2)

千の位	百の位	十の位	一の位
$\square$	$\square$	$\square$	5
それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	それぞれ 7 通り	1 通り

$1\cdot(7\cdot7\cdot7)=$ **343通り**

◀ 一の位が 5 であればよい

3) 6666 より大きい数は，

千の位	百の位	十の位	一の位	
7	$\square$	$\square$	$\square$	$\Leftarrow 7\times7\times7=7^3$ 通り
6	7	$\square$	$\square$	$\Leftarrow 7\times7=7^2$ 通り
6	6	7	$\square$	$\Leftarrow 7$ 通り
6	6	6	7	$\Leftarrow 1$ 通り

◀ 7000 番台
◀ 6700 番台
◀ 6670 番台
◀ 6667

で全てなので，$7^3+7^2+7+1=$ **400通り**

【練習 24：条件を満たす整数の個数～その２～】

0 から 5 までの数字を重複なしに使って，3 桁の数字を作る．

(1) 一の位が 0 のとき，何通りの数字作れるか．
(2) 一の位が 2 のとき，何通りの数字作れるか．
(3) 偶数は何通り作れるか．
(4) 5 の倍数は何通り作れるか．

【解答】

(1)

百の位	十の位	一の位
$\square$	$\square$	0
5 通り	それぞれ 4 通り	1 通り

$1\cdot(5\cdot4)=$ **20通り**

(2)

百の位	十の位	一の位
$\square$	$\square$	2
0以外の 4 通り	それぞれ 4 通り	1 通り

$1\cdot(4\cdot4)=$ **16通り**

◀ たとえば，百の位が 3 ならば，十の位には 0, 1, 4, 5 の 4 通りを入れることができる．

(3) 1 の位が 0, 2, 4 のいずれかであればよい．
1 の位が 0 のとき，(1) より 20 通り
1 の位が 2 のとき，(2) より 16 通り
1 の位が 4 のとき，(2) と同様にして 16 通り
以上より，$20+16\times2=$ **52通り**．

(4) 1 の位が 0, 5 のいずれかであればよい．
1 の位が 0 のとき，(1) より 20 通り
1 の位が 5 のとき，(2) と同様にして 16 通り
以上より，$20+16=$ **36通り**．

【練習 25：並べ方に条件のある順列〜その１〜】

1 から 7 までの 7 つの数を一列に並べる.

(1) 6 と 7 が隣り合うものは何通りあるか.　(2) 5 と 6 と 7 が隣り合うものは何通りあるか.

(3) 両端が 1 と 2 になるものは何通りあるか.

【解答】

(1) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6,\ 7\text{ の組}}$ の順列で 6! 通り．それぞれについて，6, 7 の並び方は 2! 通りあるので，$6! \times 2 =$ **1440通り**.

◀ 具体的には，$\boxed{67}$ か $\boxed{76}$

(2) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5,\ 6,\ 7\text{ の組}}$ の順列で 5! 通り．それぞれについて，5, 6, 7 の並び方は，3! 通りあるので，$5! \times 3! =$ **720通り**.

(3) 両端には 1 と 2 の順列を考え 2 通り．それぞれについて，両端でない文字は 5! 通りの並び方があるので，$5! \times 2 =$ **240通り**

◀ 1○○○○○2
2○○○○○1

【発展 26：並べ方に条件のある順列〜その２〜】

男子 5 人と女子 4 人を一列に並べる.

① 男子は男子で，女子は女子で固まる並べ方は何通りあるか.

② 男子のみ固まる並べ方は何通りあるか.

③ 両端が女子になる並べ方は何通りあるか.

④ どの女子どうしも隣り合わないような並べ方は何通りあるか.

【解答】

① $\boxed{\text{男子 5 人}}$, $\boxed{\text{女子 4 人}}$ の順列で 2! 通り.
どちらの場合も，$\boxed{\text{男子 5 人}}$ の並び方は 5! 通り，
どちらの場合も，$\boxed{\text{女子 4 人}}$ の並び方は 4! 通り，
よって，$2! \times 5! \times 4! =$ **5760通り**.

◀ 具体的には，$\boxed{\text{男子 5 人}}$ と $\boxed{\text{女子 4 人}}$ のどちらが左か

② $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{女}}$, $\boxed{\text{男子の組}}$ の並び方で 5! 通り.
それぞれについて，$\boxed{\text{男子の組}}$ の並び方は 5! 通り，
よって，$5! \times 5! =$ **14400通り**.

③ 左端には 4 通りの女子，右端には 3 通りの女子，
それ以外の 7 人が真ん中に並ぶ順列は 7! 通り.
よって，$4 \times 3 \times 7! =$ **60480通り**.

◀ 順列を用いれば，${}_4P_2 \times 7!$

④ まず男子だけを並べる．この並べ方は 5! 通り.
1 人目の女子が入れる場所は 6 ヶ所ある.
いずれの場合も 2 人目の女子が入れる場所は 5 ヶ所，
3 人目の女子は 4 ヶ所，4 人目の女子は 3 ヶ所あるので，
$5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 =$ **43200通り**.

◀ ↑のある場所に女子は入れる.
$\boxed{\text{男}}$ $\boxed{\text{男}}$ $\boxed{\text{男}}$ $\boxed{\text{男}}$ $\boxed{\text{男}}$
↑　↑　↑　↑　↑　↑

◀ 順列を用いれば，${}_6P_4$ 通り

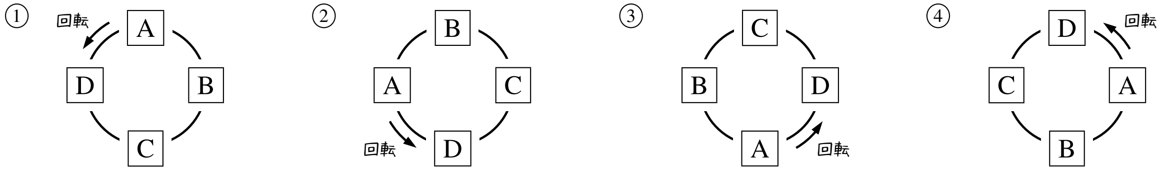
ものを並べる問題で，“隣り合う”ものを考える場合には，その隣り合うものをひとまとめにして考えるとよい.

一方，ものを並べる問題で，3 つ以上のものが“隣り合わない”ものを考える問題では，隣り合ってもよいものを先に並べるとよい場合が多い.

3.　円順列と商の法則

A.　円順列とは

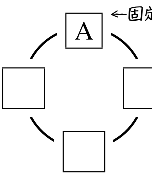
円順列 (circular permutation) とは，複数のものを円形に並べることを意味する．ただし，下の①から④のように，回転させて同じになる場合はすべて同じ並べ方とみなす．



円順列を考えるときは，どれか 1 つを固定して，他を並べればよい．

たとえば，$\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$を円形に並べ方法を考えるとき，どんな円形の並べ方も，回転させて$\boxed{A}$を一番上の位置にできる．

そこで，$\boxed{A}$を固定し，他の$\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$を並べればよい．結局，$\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$の 3 つを 3 ヶ所に並べる順列となり，3! で求められる．



以上の結果は，次のようにしてまとめられる．

円順列

「n 個のものを円形に並べた列」のことを，n 個の**円順列** (circular permutation) といい，n 個のものがすべて区別できる場合，$(n-1)!$ 通りの並べ方がある．

円順列の問題では「誰か 1 人を固定」して考えるようにしよう．

【例題 27】

1. 5 人が円形に並ぶ方法は何通りあるか．
2. 6 個の区別できる石を円形に並べるとき，その円順列は何通りあるか．

【解答】

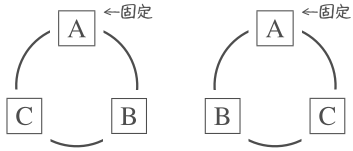
1. 1 人の場所を固定して，他の 4 人を並べればよいので，$4! =$ **24通り**．
2. 1 個の場所を固定して，他の 5 個を並べればよいので，$5! =$ **120通り**．

【例題 28】 円形のテーブルがある．ここに，男子 3 人と女子 3 人が男女交互に座る場合の数を考える．男子のうち 1 人を固定すると，残り 2 人の座り方は $\boxed{\text{ケ}}$ 通りある．男子がどのように座っても，女子 3 人の座り方は $\boxed{\text{コ}}$ 通りある．よって，求める場合の数は $\boxed{\text{サ}}$ 通りと分かる．

【解答】　ケ : **2**，コ : $3! =$ **6**，サ : $2 \times 6 =$ **12**

【例題 29】 $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$ の 3 枚による円順列を考える．$\boxed{A}$ の位置を固定して，作ることのできる円順列をすべて図示しなさい．

【解答】 $\boxed{A}$ を固定して考えれば，次のようになる．



【練習 30：円順列〜その３〜】

両親と 4 人の子供，計 6 人が円形のテーブルに座る．ただし，回転して一致する座り方は同じとする．

(1) 座り方は全部で何通りか．

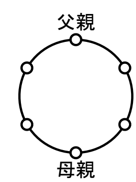
(2) 両親が真正面に向かい合う座り方は何通りか．

(3) 両親が隣り合う座り方は何通りか．

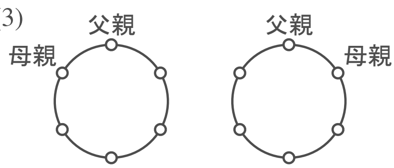
【解答】

(1) 6 人のうち 1 人を固定して考えて，$(6-1)! = 5! =$ **120通り**

(2) 父親の場所を固定すると，母親の場所は右欄外のように 1 通りに決まる．残りの 4 ヶ所に，4 人の子供が入るので，$4! =$ **24通り** になる．



(3)

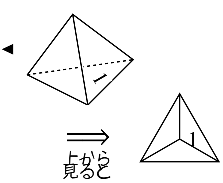


父親の場所を固定する．母親の位置は次の 2 通りがある．いずれの場合も，子供の並び方は 4! 通りあるので，全部で $2 \cdot 4! =$ **48通り** になる．

【発展 31：正四面体の順列】

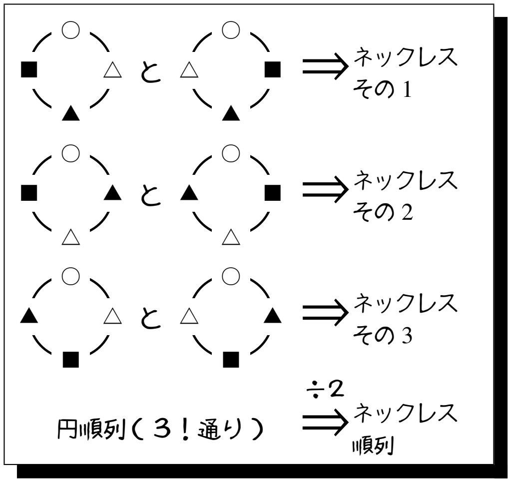
正四面体の 4 つの面に番号を 1 から 4 までつけるとき，番号のつけ方は何通りか．ただし，回転して一致する場合は，同じ番号のつけ方とする．

【解答】 底面の番号を 1 に固定する．これを上から見ると，3 つの場所に 2, 3, 4 の数字を入れる円順列になるので，$(3-1)! = 2! =$ **2通り** ある．

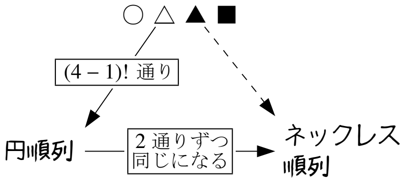


B.　ネックレス順列（数珠順列）

○，△，▲，■の 4 つの石を使ってネックレスを作る方法が何通りあるか考えよう．



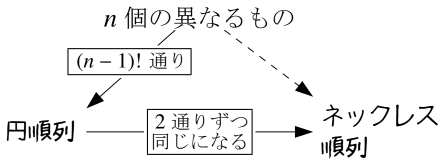
- まず，4 つの石○，△，▲，■を円順列に並べる．これは，$(4-1)!$ 通りである．
- 表裏の関係にある円順列は，同じネックレスになるので，円順列 2 つずつが同じになる．



こうして，$(4-1)! \div 2 = 3$ 通りのネックレスを作ることができると分かる．

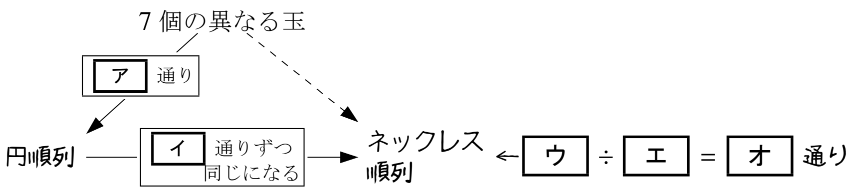
ネックレス順列（数珠順列）

「裏返すことが可能な，n 個のものを円形に並べた列」のことを，n 個の**ネックレス順列** (nacklace permutation) または**数珠**（じゅず）**順列** (beads permutation) といい，n 個（$2 \leqq n$）のものがすべて区別できる場合，$\dfrac{(n-1)!}{2}$ 通りある．



【暗記 32：ネックレス順列と商の法則】

7 個の異なる玉から作る順列について，以下の□に適当な値・式を入れなさい．



【解答】　ア : $(7-1)! =$ **6!**（または **720**），イ : **2**，
ウ : **6!**（または **720**），エ : **2**，オ : **360**

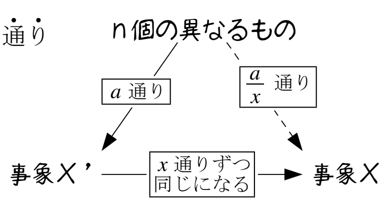
C.　商の法則 〜 同じ結果になるものをまとめる

商の法則

2 つの事象 X’，X について，X’ の起こり方が a 通り，事象 X’ の x 通りずつをまとめて事象 X になるならば

　事象 X が起こる場合は $\dfrac{a}{x}$ 通り

ある．このことを**商の法則** (division law) という．

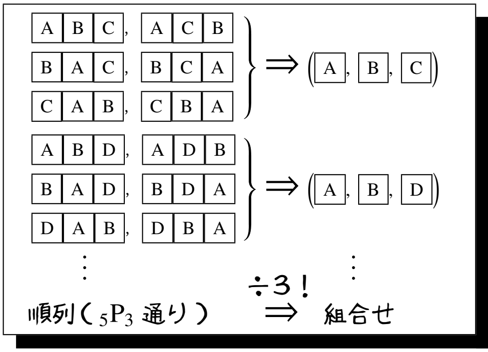


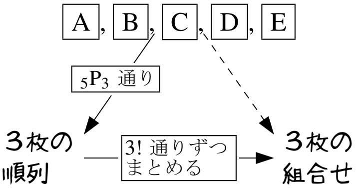
1.　組合せ ${}_nC_r$

A.　順列と組合せ

「5 枚のカード A, B, C, D, E のうち 3 枚を使った組合せは何通りか」という問題は次の 2 段階に分けて考えることができる.

- A, B, C, D, E の 5 枚のうち 3 枚を使った順列を考えると，${}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$ 通りある.
- 順列としては異なるが，組合せとしては同じになるものが，3! 通りずつある.



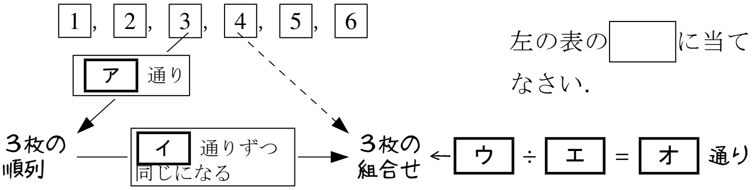


つまり，商の法則から次のように求めることができる.

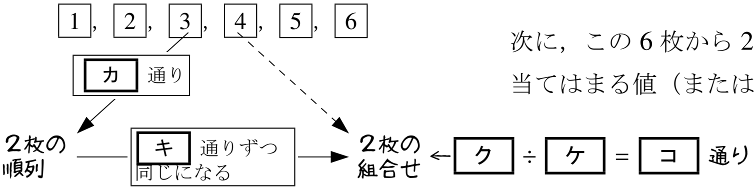
$$\frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10 \text{ 通り}$$

【例題 33】 1, 2, 3, 4, 5, 6 のカードが 1 枚ずつ，計 6 枚ある.

1. 1 2 3 という順列は，組合せとしては 1 3 2 と同じである.
   他に，1 2 3 と同じ組合せになる順列を，辞書順ですべて挙げよ.
2. 左の表の □ に当てはまる値（または，式）を答えなさい.



3. 次に，この 6 枚から 2 枚選ぶとき，左の表の □ に当てはまる値（または，式）を答えなさい.



【解答】

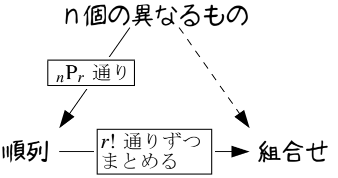
1. **2 1 3**, **2 3 1**, **3 1 2**, **3 2 1**
2. ア : **120**（または ${}_6P_3$），イ : **6**（または **3!**）
   ウ : **120**（または ${}_6P_3$），エ : **6**（または **3!**），オ : **20**
3. カ : **30**（または ${}_6P_2$），キ : **2**（または **2!**）
   ク : **30**（または ${}_6P_2$），ケ : **2**（または **2!**），コ : **15**

B.　組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$

組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ の定義

「n 個の異なるものから r 個を選ぶ**組合せ** (combination) 」の場合の数を，記号 ${}_n\mathrm{C}_r$（エヌシーアール）で表し，次で計算できる[*3]（n と r は $n \geqq r$ である正の整数とする）．

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{n\text{ から始まる }r\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から }1\text{ までの積}}} $$



たとえば，「12 人の班から 3 人を選ぶ組合せ」の場合の数は ${}_{12}\mathrm{C}_3$ であり，これは

$$ {}_{12}\mathrm{C}_3 = \frac{\overbrace{12\cdot 11\cdot 10}^{12\text{ から始まる }3\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{3\text{ から }1\text{ までの積}}} = \frac{\cancel{12}^{\cancel{4}^{2}}\cdot 11\cdot 10}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 2\cdot 11\cdot 10 = 220 $$

と計算できるので，220 通りである．

【例題 34】 ${}_5\mathrm{C}_2$，${}_{10}\mathrm{C}_3$ の値をそれぞれ求めよ．

【解答】 ${}_5\mathrm{C}_2 = \dfrac{\overbrace{5\cdot 4}^{5\text{ から始まる }2\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{2\text{ から }1\text{ まで}}} = \mathbf{10}$，${}_{10}\mathrm{C}_3 = \dfrac{\overbrace{10\cdot 9\cdot 8}^{10\text{ から始まる }3\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{3\text{ から }1\text{ まで}}} = \mathbf{120}$

【例題 35】 次の $\boxed{}$ に当てはまる数字を答えなさい．

1. 15 人のクラスから 2 人の委員を選ぶ組合せの場合の数は，${}_{\boxed{ア}}\mathrm{C}_{\boxed{イ}} = \boxed{ウ}$ 通りある．
2. 8 個の異なる石から 4 個の石を選ぶ組合せの場合の数は，${}_{\boxed{エ}}\mathrm{C}_{\boxed{オ}} = \boxed{カ}$ 通りある．
3. 異なるボールが 20 個入った袋から 3 個を選ぶ組合せの場合の数は，${}_{\boxed{キ}}\mathrm{C}_{\boxed{ク}} = \boxed{ケ}$ 通りある．

【解答】

1. ア : **15**，イ : **2**，ウ : ${}_{15}\mathrm{C}_2 = \dfrac{15\cdot\cancel{14}^{7}}{\cancel{2}\cdot 1} =$ **105通り**
2. エ : **8**，オ : **4**，カ : ${}_8\mathrm{C}_4 = \dfrac{\cancel{8}^{2}\cdot 7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} =$ **70通り**
3. キ : **20**，ク : **3**，ケ : ${}_{20}\mathrm{C}_3 = \dfrac{20\cdot 19\cdot\cancel{18}^{\cancel{6}^{3}}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} =$ **1140通り**

${}_n\mathrm{C}_r$ を計算するときは，約分の方法を工夫するようにしよう．

[*3] 次の等式も成り立つ．ただし，${}_n\mathrm{C}_r$ の値を計算するときには必要がない．

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{n\text{ から始まる }r\text{ 個の数の積}}}{\underbrace{r(r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から }1\text{ までの積}}} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}^{n\text{ から }1\text{ までの積}}}{\underbrace{r(r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ から }1\text{ までの積}}\underbrace{(n-r)(n-r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}_{n-r\text{ から }1\text{ までの積}}} = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

【練習 36：${}_n\mathrm{C}_r$ の計算練習】

(1) ${}_5\mathrm{C}_2$，${}_{10}\mathrm{C}_3$，${}_{20}\mathrm{C}_2$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 30 人のクラスの中から，3 人の委員を選ぶ方法は何通りあるか．

(3) 10 個の点から 4 点を選ぶ方法は何通りあるか．

【解答】

(1) ${}_5\mathrm{C}_2 = \dfrac{\overbrace{5\cdot 4}^{\text{5 から始まる 2 個の数の積}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{\text{2 から 1 まで}}} = \mathbf{10}$，${}_{10}\mathrm{C}_3 = \dfrac{\overbrace{10\cdot 9\cdot 8}^{\text{10 から始まる 3 個の数の積}}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{\text{3 から 1 まで}}} = \mathbf{120}$，${}_{20}\mathrm{C}_2 = \dfrac{\overbrace{20\cdot 19}^{\text{20 から始まる 2 個の数の積}}}{\underbrace{2\cdot 1}_{\text{2 から 1 まで}}} = \mathbf{190}$

(2) ${}_{30}\mathrm{C}_3 = \dfrac{\cancel{30}^{10}\cdot 29\cdot \cancel{28}^{14}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{4060}$**通り**

(3) ${}_{10}\mathrm{C}_4 = \dfrac{10\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}^{\cancel{2}}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{210}$**通り**

C. ${}_n\mathbf{C}_0$，${}_n\mathbf{C}_n$ の値

${}_n\mathrm{C}_0$ の値も[*4]，${}_n\mathrm{C}_n$ の値も[*5]，必ず 1 になる．たとえば，${}_{10}\mathrm{C}_0 = 1$，${}_{10}\mathrm{C}_{10} = 1$ である．

D. 等式 ${}_n\mathbf{C}_r = {}_n\mathbf{C}_{n-r}$

たとえば，10 人の集まりから 7 人を選ぶとき，次のどちらを行ってもよい．

- 選ばれる 7 人を決める，これは ${}_{10}\mathrm{C}_7$ 通りある．
- 選ばれない 3 人を決める，これは ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通りある．

$$ {}_{10}\mathrm{C}_7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot\cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}}{\cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = {}_{10}\mathrm{C}_3 $$

結局，${}_{10}\mathrm{C}_7 = {}_{10}\mathrm{C}_3$ である．これは，右の計算式からも分かり，一般には，${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ が成り立つ[*6]．

r が n の半分より大きい値の場合は，${}_n\mathrm{C}_r$ でなく ${}_n\mathrm{C}_{n-r}$ を計算するとよい．

【例題 37】

1. ${}_3\mathrm{C}_0$，${}_4\mathrm{C}_4$ の値をそれぞれ求めよ．
2. ${}_{100}\mathrm{C}_{98} = {}_{100}\mathrm{C}_{\boxed{ア}} = \boxed{\quad イ \quad}$
3. ${}_{12}\mathrm{C}_{10}$，${}_{20}\mathrm{C}_{17}$ の値をそれぞれ求めよ．
4. 13 人の中から 9 人を選ぶ方法は何通りか．

【解答】

1. ${}_3\mathrm{C}_0 = \mathbf{1}$，${}_4\mathrm{C}_4 = \mathbf{1}$
2. ア :**2**，イ :${}_{100}\mathrm{C}_2 = \dfrac{100\cdot 99}{2} = \mathbf{4950}$
3. ${}_{12}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 = \dfrac{\cancel{12}^{6}\cdot 11}{\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{66}$，${}_{20}\mathrm{C}_{17} = {}_{20}\mathrm{C}_3 = \dfrac{\cancel{20}^{10}\cdot 19\cdot\cancel{18}^{6}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{1140}$
4. ${}_{13}\mathrm{C}_9 = {}_{13}\mathrm{C}_4 = \dfrac{13\cdot\cancel{12}\cdot 11\cdot\cancel{10}^{5}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \mathbf{715}$**通り**

◀ または，${}_4\mathrm{C}_4 = \dfrac{\overbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}^{\text{4 から始まる 4 個の数の積}}}{\underbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{\text{4 から 1 まで}}} = \mathbf{1}$

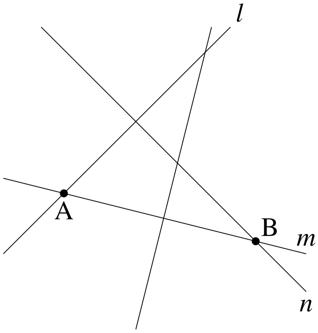
◀ 13 人から 9 人を選ぶことは，13 人から選ばない 4 人を決めることと同じである．

[*4] ${}_n\mathrm{C}_0 = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_0}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1$ である．これは，「n 個のものから 0 個を選ぶ」方法は「何も選ばない」という 1 通りしか存在しないことからも理解することができる．

[*5] ${}_n\mathrm{C}_n = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_n}{n!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$ である．これは，「n 個のものから n 個を選ぶ」方法は「すべてを選ぶ」という 1 通りしか存在しないことから理解することができる．

[*6] n 個の異なるものから r 個を選ぶとき，「選ばれる r 個を決める」ことと「選ばれない $n-r$ 個を決めること」は 1 対 1 に対応することからも理解できる．

E.　組合せに置き換えられる問題



右図には直線が 4 本，平面上に引かれている．この 4 本の直線が作る交点の数は，組合せを用いて求めることができる．

まず，2 本の直線を選ぶと，交点が 1 つ決まる．たとえば

交点 A を選ぶ $\Leftarrow$ 直線 l, m を選ぶ

逆に，交点を 1 つ選ぶと，交点を作る 2 直線が決まる．

交点 B を選ぶ $\Rightarrow$ 直線 m, n を選ぶ

こうして，「直線の交点の数」=「直線 2 本の選び方」と分かる．「直線 2 本の選び方」は ${}_4C_2$ 通り なので，「直線の交点の数」は 6 点あると求められる．

【例題 38】 平面上に，どの 2 本を選んでも互いに平行でない，8 本の直線が引かれている．ただし，どの 3 本も 1 点で交わらないものとする．

1. この平面上で直線の交点を 1 つ選ぶことは，$\boxed{\text{ア}}$ 本の直線を選ぶことと一致する．よって，この平面上に，直線の交点は $\boxed{\text{イ}}$ 個ある．
2. この平面上で三角形を 1 つ選ぶことは，$\boxed{\text{ウ}}$ 本の直線を選ぶことと一致する．よって，この平面上に，三角形は $\boxed{\text{エ}}$ 個ある．

【解答】

1. ア: **2**，イ: ${}_8C_2 = \dfrac{\cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{2}} = \mathbf{28}$
2. ウ: **3**，エ: ${}_8C_3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \mathbf{56}$

◀ 8 本の直線から，交点を決める 2 本を選ぶ組合せ

◀ 8 本の直線から，三角形を決める 3 本を選ぶ組合せ

F.　組合せと和の法則・積の法則

【例題 39】 男子が 5 人，女子が 5 人いる中で，4 人を選ぶ場合の数について以下の問に答えよ．

1. 男子から 2 人，女子から 2 人選ぶときの場合の数は何通りか．
2. 男子から 2 人以上選ぶ場合の数は何通りか．

【解答】

1. 男子 2 人の組合せは ${}_5C_2$ 通り，そのどの場合も女子 2 人の組合せが ${}_5C_2$ 通りあるので，${}_5C_2 \cdot {}_5C_2 = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \mathbf{100}$**通り**．
2. 男子が 2 人のときは，(1) より 100 通り．
   男子を 3 人選ぶときは，女子を 1 人選ぶので
   ${}_5C_3 \cdot {}_5C_1 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \dfrac{5}{1} = 50$ 通り．
   4 人とも男子を選ぶときは ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$ 通り．
   よって，$100 + 50 + 5 = \mathbf{155}$**通り**．

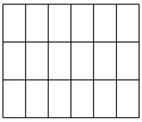
◀『積の法則 (p.41)』

◀『積の法則 (p.41)』

◀ 和の法則

【練習 40：四角形・対角線】

(1) 右図のように，横に 4 本，縦に 7 本の直行する平行線が引かれている．この中に長方形はいくつあるか求めよ．



(2) 正十角形の対角線の本数を求めよ．

【解答】

(1) 横 4 本のうちから 2 本，縦 7 本のうちから 2 本をそれぞれ選べば，1 個の長方形が定まる．よって

$${}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_7\mathrm{C}_2 = \mathbf{126本}$$

(2) 10 個の頂点のうち 2 個を選べば，1 本の対角線か辺が定まる．辺の数は 10 本あるので，これを除いて

$${}_{10}\mathrm{C}_2 - 10 = 45 - 10 = \mathbf{35本}$$

◀ 正十角形を実際に書いて考えてみよう

G. 組分けの問題 〜 組合せと商の法則

【例題 41】 10 人を次のように分ける方法は何通りあるか．

1. 7 人，3 人に分ける．
2. 5 人，3 人，2 人に分ける．

【解答】

1. 10 人から 3 人を選びグループとするのが ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通り，
残った 7 人から 7 人を選んで ${}_7\mathrm{C}_7$ 通り，よって

$${}_{10}\mathrm{C}_3 \cdot {}_7\mathrm{C}_7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = \mathbf{120通り}$$

2. 10 人から 2 人を選びグループとするのが ${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通り，
残った 8 人から 3 人を選んで ${}_8\mathrm{C}_3$ 通り，
さらに残った 5 人を 5 人でまとめて ${}_5\mathrm{C}_5$ 通り，よって

$${}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot {}_8\mathrm{C}_3 \cdot {}_5\mathrm{C}_5 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = \mathbf{2520通り}$$

◀ まず 5 人を選び，次に 3 人を選ぶ，という順序で計算しても，同じ結果になるが，計算は複雑になる

組分けの問題においては，人数の少ない組から ${}_n\mathrm{C}_r$ を計算するとよい．

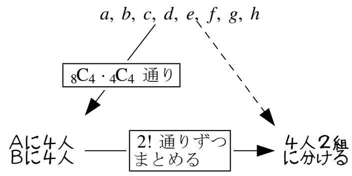
たとえば，8 人を組分ける方法として，次の 2 通りを考えてみよう．

1) グループ A に 4 人，グループ B に 4 人に分ける．
8 人から，グループ A の 4 人を選ぶ方法は ${}_8C_4$，残りはそのままグループ B になるので，${}_8C_4 = 70$ 通り．

2) 4 人 2 組に分ける．
8 人を a, b, c, d, e, f, g, h とする．ここで，次の組分け i.，ii. を考えよう．

i. 初めの 4 人において $(a,\ b,\ c,\ d)$ を選ぶ
　→ $(a,\ b,\ c,\ d)$ と $(e,\ f,\ g,\ h)$ の 2 組

ii. 初めの 4 人において $(e,\ f,\ g,\ h)$ を選ぶ
　→ $(e,\ f,\ g,\ h)$ と $(a,\ b,\ c,\ d)$ の 2 組



上の i.，ii. の組分けは 1) においては異なる．
しかし 2) においては，i.，ii. の組分けは同じになる．結局，右上の表を書くことができ，商の法則によって ${}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \div 2! = 35$ 通りと求められる．

組分けの問題は，「各グループが区別できる場合」を基本に考えるとよい．この場合が，もっとも簡単に計算できるからである．

【練習 42：組分け】

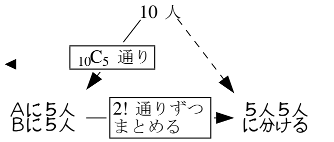
10 人を次のように分ける方法は何通りあるか．

(1) 5 人，5 人に分ける．
(2) 4 人，3 人，3 人に分ける．
(3) 2 人，2 人，2 人，2 人，2 人に分ける．

【解答】

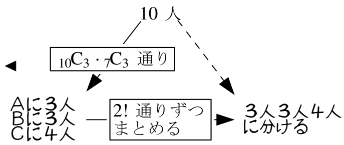
(1) 10 人から，A 組として 5 人を選ぶのが ${}_{10}C_5$ 通り，残りは B 組．
A と B の区別をなくすために 2! で割ればよいので

$$\frac{{}_{10}C_5}{2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = \textbf{126通り}$$



(2) 10 人から，A 組として 3 人を選ぶのが ${}_{10}C_3$ 通り，
残りの 7 人から B 組 3 人を選ぶのが ${}_7C_3$ 通り，残りは C 組．
A と B の区別をなくすために 2! で割ればよいので

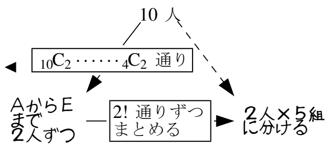
$$\frac{{}_{10}C_4 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = \textbf{2100通り}$$



(3) A 組から E 組まで 2 人ずつを選ぶのが ${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2$ 通り，
A から E までの区別をなくすために 5! で割って

$$\frac{{}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2}{5!}$$

$$= \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \textbf{945通り}$$

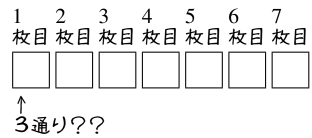


2.　同じものを含むときの順列

A.　同じものを含むときの順列

$\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{C}}$ の 7 枚を 1 列に並べる順列が何通りあるのか考えてみよう．

これを，通常の順列のように考えることはできない．7 枚のカードがあるが，カードは 7 種類ではないからである．



B.　組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いて考える

カード置き場を 7 ヶ所用意しておく．

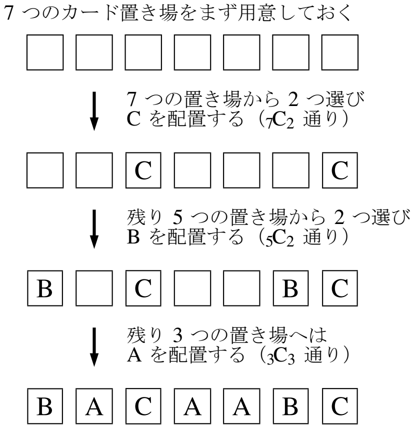
まず，2 枚の $\boxed{\text{C}}$ の置き場を選ぶ（${}_7\mathrm{C}_2$ 通り）．

いずれの場合も，残りの置き場は 5 ヶ所ある．ここから，2 枚の $\boxed{\text{B}}$ の置き場を選ぶ（${}_5\mathrm{C}_2$ 通り）．

どの場合でも，残りの置き場は 3 ヶ所あるから，3 枚の $\boxed{\text{A}}$ を入れる（${}_3\mathrm{C}_3$ 通り）．

以上から，7 枚のカード $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{C}}$ を 1 列に並べる順列は『積の法則 (p.41)』によって，次で計算できる．

$$
\begin{aligned}
&{}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_3 \\
=&\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}\times\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\times\frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 210 \text{ 通り}
\end{aligned}
$$



A の置き場，B の置き場，C の置き場の順で決めてもよいが，${}_7\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2$ は計算量が多くなる．一般に，数の少ないものから場所を決めるとよい．

【例題 43】 次の場合の数を，上の方法で求めなさい．

1. 8 つの数字 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 を一列に並べる方法が何通りあるか.
2. 7 つのアルファベット S，C，I，E，N，C，E を一列に並べる方法が何通りあるか.

【解答】

1. 数字を置く場所を 8 つ用意する．
   1 を置く 2 ヶ所は ${}_8\mathrm{C}_2$ 通り，2 を置く 3 ヶ所は ${}_6\mathrm{C}_3$ 通り，
   残り 3 ヶ所に 3 を置くので，『積の法則 (p.41)』より
   ${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3 = \mathbf{560}$**通り**
2. S，I，N が 1 つずつ，C と E が 2 つずつなので
   ${}_7\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 7\times 6\times 5\times \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 3}{\cancel{2}} = \mathbf{1260}$**通り**

C. 商の法則を用いて考える

まず，$\boxed{A_1}$, $\boxed{A_2}$, $\boxed{A_3}$, $\boxed{B_1}$, $\boxed{B_2}$, $\boxed{C_1}$, $\boxed{C_2}$ の 7 枚を並べる順列を考える．これは，7! 通りある．

次に，$\boxed{A_1}$, $\boxed{A_2}$, $\boxed{A_3}$ の 3 枚をすべて $\boxed{A}$ に戻す．これによって，3! 通りずつまとめられる．

さらに，$\boxed{B_1}$, $\boxed{B_2}$ の 2 枚をすべて $\boxed{B}$ に戻す．これによって，2! 通りずつまとめられる．

最後に，$\boxed{C_1}$, $\boxed{C_2}$ の 2 枚をすべて $\boxed{C}$ に戻す．これによって，2! 通りずつまとめられる．

以上から，商の法則によって次のように求められる．

$$7! \div 3! \div 2! \div 2! = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 210 \text{ 通り}$$

まず $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2$ の 7 枚を並べる
(並べ方は 7! 通りある)

$\boxed{B_2}\ \boxed{A_2}\ \boxed{C_1}\ \boxed{A_3}\ \boxed{A_1}\ \boxed{B_1}\ \boxed{C_2}$

$\div 3!$ ↓ A_1, A_2, A_3 の区別をなくす
(3! 通りずつまとめる)

$\boxed{B_2}\ \boxed{A}\ \boxed{C_1}\ \boxed{A}\ \boxed{A}\ \boxed{B_1}\ \boxed{C_2}$

$\div 2!$ ↓ B_1, B_2 の区別をなくす
(2! 通りずつまとめる)

$\boxed{B}\ \boxed{A}\ \boxed{C_1}\ \boxed{A}\ \boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C_2}$

$\div 2!$ ↓ C_1, C_2 の区別をなくす
(2! 通りずつまとめる)

$\boxed{B}\ \boxed{A}\ \boxed{C}\ \boxed{A}\ \boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}$

【例題 44】 次の場合の数を，上の方法で求めなさい．

1. 8 つの数字 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 を一列に並べる方法が何通りあるか.
2. 7 つのアルファベット S，C，I，E，N，C，E を一列に並べる方法が何通りあるか.

【解答】

1. 1_a，1_b，2_a，2_b，2_c，3_a，3_b，3_c の順列は 8! 通り，
   1_a，1_b の区別をなくすには 2! ずつまとめ，
   2_a，2_b，2_c の区別をなくすには 3! ずつまとめ，
   3_a，3_b，3_c の区別をなくすには 3! ずつまとめることになる．よって，
   商の法則より $\dfrac{8!}{2!3!3!}$ = **560通り** になる．
2. 全部で 7 文字あり，C と E が 2 つずつ，S，I，N が 1 つずつなので
   $\dfrac{7!}{2!2!1!1!1!}$ = **1260通り**

同じものを含む順列の計算

「k 個の同じもの，l 個の同じもの，m 個の同じもの」による順列の総数は

- 「組合せ ${}_nC_r$ を用いて」${}_{k+l+m}C_k \times {}_{l+m}C_l \times {}_mC_m$ 通りと求められる．
- 「商の法則を用いて」$\dfrac{(k+l+m)!}{k!l!m!}$ 通りと求められる．

これら 2 つの結果は，次のようにして等しいことが分かる．

$${}_{k+l+m}C_k \times {}_{l+m}C_l \times {}_mC_m = \frac{(k+l+m)!}{\cancel{(l+m)!}k!} \times \frac{\cancel{(l+m)!}}{\cancel{m!}l!} \times \frac{\cancel{m!}}{0!m!} = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}$$

どちらのやり方も，4 種類以上のものを含む順列にも応用できる．

上の計算は「なぜそうなるのか」を理解していないと，やり方を忘れてしまいやすい．

【例題 45】 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$ を 1 列に並べる方法を，次の 2 通りで求めたい．

1. 「組合せを用いて求める」

8 つのカード置き場をまず用意しておく

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

↓ 2 ヶ所選んで $\boxed{3}$ を配置（$_{\boxed{ア}}\mathrm{C}_{\boxed{イ}}$ 通り）

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{3}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{3}$

↓ 3 ヶ所選んで $\boxed{2}$ を配置（$_{\boxed{ウ}}\mathrm{C}_{\boxed{エ}}$ 通り）

$\boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

↓ 残りの置き場へは $\boxed{1}$ を配置（$_{\boxed{オ}}\mathrm{C}_{\boxed{カ}}$ 通り）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

以上より，計算式 $\boxed{\text{キ}}$ によって $\boxed{\text{ク}}$ 通りと求められる．

2. 「商の法則を用いて求める」

まず $1_A, 1_B, 1_C, 2_A, 2_B, 2_C, 3_A, 3_B$ の 8 枚を並べる（並べ方は $\boxed{\text{ケ}}$ 通りある）

$\boxed{2_B}\ \boxed{1_B}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2_C}\ \boxed{1_C}\ \boxed{1_A}\ \boxed{2_A}\ \boxed{3_B}$

↓ $1_A, 1_B, 1_C$ の区別をなくす（$\boxed{\text{コ}}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2_B}\ \boxed{1}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2_C}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2_A}\ \boxed{3_B}$

↓ $2_A, 2_B, 2_C$ の区別をなくす（$\boxed{\text{サ}}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3_A}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3_B}$

↓ $3_A, 3_B$ の区別をなくす（$\boxed{\text{シ}}$ 通りずつまとめる）

$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

以上より，計算式 $\boxed{\text{ス}}$ によって $\boxed{\text{セ}}$ 通りと求められる．

【解答】

1. ア, イ : $_8\mathrm{C}_2$　　ウ, エ : $_6\mathrm{C}_3$　　オ, カ : $_3\mathrm{C}_3$

　キ, ク : $_8\mathrm{C}_2 \times {_6\mathrm{C}_3} \times {_3\mathrm{C}_3}$ = **560通り**

2. ケ : **8!**　　コ : **3!**　　サ : **3!**　　シ : **2!**

　ス, セ : $\dfrac{\mathbf{8!}}{\mathbf{3!\cdot 3!\cdot 2!}} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)}$ = **560通り**

「組合せ $_n\mathrm{C}_r$ を用いて」解く方が仕組みを理解しやすいが，「商の法則を用いて」解く方が計算しやすい．今後このテキストでは，主に「商の法則を用いて」解いて話を進める．

【練習 46：同じものを含む順列〜その１〜】

(1) a, a, a, b, b を並び替えるとき，何通りの並べ方があるか．

(2) 1, 2, 3 を 2 個ずつ用いてできる 6 桁の整数は何通りあるか．

(3) S，U，U，G，A，K，U，A を並び替えるとき，何通りの並べ方があるか．

【解答】

(1) a を 3 つ，b を 2 つ含む順列であるので $\dfrac{5!}{3!2!}$ = **10通り**

◀ または，$_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り

(2) 1, 2, 3 を 2 つずつ含む順列であるので

$$\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1}{(\cancel{2}\cdot 1)\cdot(\cancel{2}\cdot 1)\cdot(\cancel{2}\cdot 1)} = \mathbf{90}\text{通り}$$

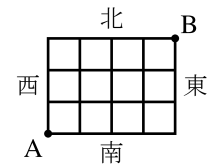
◀ または，$_6\mathrm{C}_2 \cdot {_4\mathrm{C}_2} = 90$ 通り

(3) U を 3 つ，A を 2 つ，S，G，K を 1 つずつ含むから

$$\frac{8!}{3!2!1!1!1!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = \mathbf{3360}\text{通り}$$

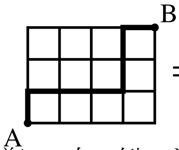
◀ または，$_8\mathrm{C}_1 \cdot {_7\mathrm{C}_1} \cdot {_6\mathrm{C}_1} \cdot {_5\mathrm{C}_2} \cdot {_3\mathrm{C}_3} =$ 3360 通り

D.　同じものを含む順列の応用 〜 最短経路の数

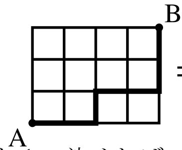


右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路があるとき，A 地点から B 地点への最短経路について考えよう．

ここで，北に 1 区画進むことを↑，東に 1 区画進むことを→で表すとすれば，すべての最短経路を↑と→で表すことができる．



⇒ 「↑→→→↑↑→」

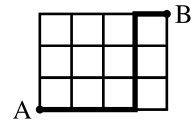


⇒ 「→→↑→→↑↑」

逆に，右の例のように，「↑ 3 つと→ 4 つが作る順列」を 1 つ決めれば，最短経路はただ 1 つに決まる．こうして，「A から B までの最短経路」は，「↑ 3 つと→ 4 つの順列」と 1 対 1 に対応し

「→→→↑↑↑→」

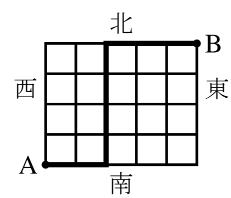
⇓



$\dfrac{7!}{3!4!}=21$ 通り（または ${}_7C_3=21$ 通り） ←『同じものを含む順列の計算』を用いた

と求めることができる．

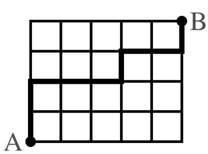
【例題 47】 右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．A 地点から B 地点への最短経路について以下の問に答えよ．



1. A 地点から「↑↑→→→↑→→↑」と進んだときの経路を図示しなさい．
2. 右図の太線のように進んだときの経路を「↑」「→」を用いて表しなさい．
3. A 地点から B 地点まで進むには「↑」へ $\boxed{\text{ア}}$ 回，「→」へ $\boxed{\text{イ}}$ 回進めばよいので，最短経路の場合の数は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りであると分かる．

【解答】

1.

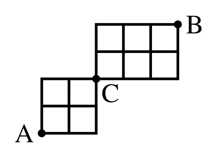


2. →→↑↑↑↑→→→
3. ア : **4**，イ : **5**

　ウ : $\dfrac{9!}{4!5!}=$ **126通り**

◂ または ${}_9C_4=$ **126通り**

【例題 48】 右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．



1. A から C への最短経路は全部で何通りあるか求めよ．
2. C から B への最短経路は全部で何通りあるか求めよ．
3. A から C を通って B へ進む最短経路は全部で何通りあるか求めよ．

【解答】

1. $\dfrac{4!}{2!2!}=$ **6通り**
2. $\dfrac{5!}{2!3!}=$ **10通り**
3. $6\times10=$ **60通り**

◂ 樹形図

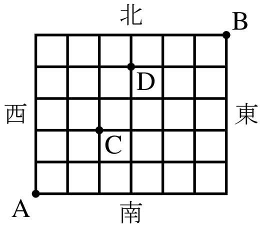
【練習 49：最短経路】

右図のように，東西に走る道路と南北に走る道路がある．A 地点から B 地点への最短経路について以下の問に答えよ．

(1) 最短経路は全部で何通りあるか求めよ．

(2) C 地点を通る最短経路は何通りあるか．また，D 地点を通る最短経路は何通りあるか，それぞれ求めよ．

(3) C 地点または D 地点を通る最短経路は何通りあるか求めよ．



【解答】

(1) 最短経路の数は，↑ 5 つと→ 6 つの順列の場合の数と一致するので

$\dfrac{11!}{5!6!} = \mathbf{462}$**通り**　　または　${}_{11}C_5 = \mathbf{462}$**通り**

◀ 『同じものを含む順列』(p.64)

(2) (C 地点を通る最短経路)

A〜C の最短経路の数は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り，

◀ ↑ 2 つ，→ 2 つの順列に一致

それぞれに対し，

◀ 「それぞれに」あるので積の法則

C〜B の最短経路の数は $\dfrac{7!}{3!4!}$ 通り あるので

◀ ↑ 3 つ，→ 4 つの順列に一致

$\dfrac{4!}{2!2!} \times \dfrac{7!}{3!4!} = 6 \times 35 = \mathbf{210}$**通り**

◀ または，${}_4C_2 \cdot {}_7C_3 = 210$

(D 地点を通る最短経路)

同様にして $\dfrac{7!}{4!3!} \times \dfrac{4!}{1!3!} = 35 \times 4 = \mathbf{140}$**通り**

◀ A から D までは↑ 4 つ，→ 3 つ D から B までは↑ 1 つ，→ 3 つの順列に一致する

(3) 集合 C，D をそれぞれ

C：C 地点を通る最短経路，D：D 地点を通る最短経路

とおくと，求める値は $n(C \cup D)$ である．ここで，$n(C \cap D)$ は，C，D 両地点を通る最短経路の数であり

$$n(C \cap D) = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{2!1!} \times \frac{4!}{1!3!} = 6 \times 3 \times 4 = 72$$

◀ A から C までは↑ 2 つ，→ 2 つ C から D までは↑ 2 つ，→ 1 つ D から B までは↑ 1 つ，→ 3 つの順列に一致

であるから，$n(C \cup D)$，つまり求める最短経路の数は

$$n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$$
$$= 210 + 140 - 72 = \mathbf{278}\text{通り}$$

E. 発展　重複順列の応用問題

【発展 50：同じものを含む円順列】

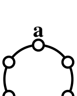
① a を 1 つ，b を 2 つ，c を 3 つ，計 6 つの文字を円形に並べるとき，何通りの並べ方があるか．

② a，b，c をそれぞれ 2 つずつ，計 6 つの文字を円形に並べるとき，何通りの並べ方があるか．

【解答】

① 1 つの a を固定すれば，残りは 2 つの b と 3 つの c の順列になるので

$\dfrac{5!}{2!3!} = \mathbf{10}$**通り**

◀ 

② 2 つの a の並べ方は次の 3 つの場合に分けられる．

i) 隣り合うタイプ

残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り

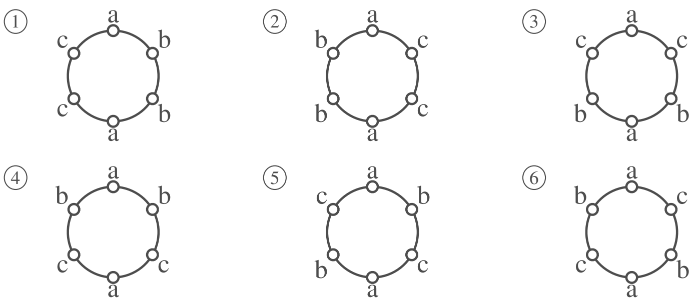
ii) 1 つ間をおくタイプ

残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り

iii) 2 つ間をおくタイプ

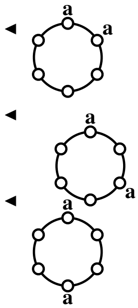
残りの 4 つの場所に b，b，c，c を並べて $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り

しかし，この 6 通りのうち



①と②，③と④も同じものである．よって，4 通りとなる．

以上 i)，ii)，iii) より，$6+6+4=$ **16通り**



【発展 51：同じものを含む順列〜その２〜】

7 つの数字 1，1，1，2，2，3，3 を用いてできる 4 桁の数字を考える．

① 1213 や 2311 のように，3 種類の数字をすべて使ってできる数字は何通りあるか．

② 4 桁の数字は全部で何通りできるか．

【解答】

① 3 種類とも用いた 4 桁の数字は

$$\underbrace{{}_3C_1}_{\text{1，2，3 のうち何を 2つ使うか}}\times\underbrace{\frac{4!}{2!1!1!}}_{\text{2つ1つ1つ の順列}}=3\times 12=\textbf{36通り}$$

② 1 種類だけ用いた 4 桁の数字はない． ◀ 1 も 2 も 3 も，3 個以下しかない

数字を 2 種類だけ用いた数字は，次の 1)，2) がある．

1) 2 種類の数字を 2 つずつ用いた数 ◀ 1122，1331 など

2 つずつの順列は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通りあり，2 種類の数字の選び方は ${}_3C_2$ 通りあるので

$$\frac{4!}{2!2!}\times{}_3C_2=6\times 3=18\text{ 通り}$$

2) 1 を 3 つ，2 か 3 を 1 つ用いた数 ◀ 2111，1131 など

1 を 3 つ，2 を 1 つ用いた順列は $\dfrac{4!}{3!1!}$ 通り，

1 を 3 つ，3 を 1 つ用いた順列も同様なので

$$\frac{4!}{3!1!}\times 2=4\times 2=8\text{ 通り}$$

よって，数字を 2 種類だけ用いた数は $18+8=26$ 個ある．1) と合わせて，全部で $26+36=$ **62通り** ある．

3. 重複組合せ

A. ○と｜のモデル

次の問題を考えてみよう．

3 種類の果物，りんご，かき，なしを使って，7 個入りの果物かごを作る．
1 つも入らない種類があってもよいとすると，何通りの果物かごができるか．

この問題は,「○と｜のモデル」への置き換えによって解くことができる．7 つの○を 2 つの｜で区切り

一番左の○の数をりんごの数
真ん中の○の数をかきの数
一番右の○の数をなしの数

りんご 2 個，かき 3 個，なし 2 個
$\Longleftrightarrow$ ○○｜○○○｜○○
りんご 4 個，かき 0 個，なし 3 個
$\Longleftrightarrow$ ○○○○｜｜○○○

とすれば,「果物かごの種類の数」と「○ 7 つと｜ 2 つの順列」は一致する．よって,「果物かごの種類の数」は,『同じものを含む順列』(p.64) によって $\dfrac{9!}{7!2!} = 36$ 通りあると分かる（または，${}_9C_2 = 36$ 通り）.

【例題 52】 8 個の区別しないアメを 3 人に分ける．1 個もアメをもらえない人がいてもよいとする．

1. 上の○と｜のモデルにおいて「○○｜○○｜○○○○」と対応する分け方は,
   A が $\boxed{\text{ア}}$ 個，B が $\boxed{\text{イ}}$ 個，C が $\boxed{\text{ウ}}$ 個である．
2. 上の○と｜のモデルにおいて「｜○○○○｜○○○○」と対応する分け方は,
   A が $\boxed{\text{エ}}$ 個，B が $\boxed{\text{オ}}$ 個，C が $\boxed{\text{カ}}$ 個である．
3. A が 3 個，B が 5 個，C が 0 個のときを，○と｜のモデルで表せ．
4. アメの分け方は何通りあるか．

【解答】

1. ア : **2**，イ : **2**，ウ : **4**
2. エ : **0**，オ : **4**，カ : **4**
3. ○○○｜○○○○○｜
4. ○ 8 つと｜ 2 つの順列に一致するので，$\dfrac{10!}{8!2!} = $ **45通り**

重複組合せ

n 種類のものを，重複を許して組み合わせて，r 個にすることを，**重複組合せ**（ちょうふく）(combination with repetitions) という．組合せに選ばれない種類があってもよいならば，r 個の○と，$n-1$ 個の｜を用いた「○と｜のモデル」を用いて，場合の数を求められる．

B. すべての種類を含む重複組合せ（資源配分）

重複組合せにおいて，すべての種類が 1 つは選ばれないといけない場合を考えよう．

3 種類の果物，りんご，かき，なしを使って，7 個入りの果物かごを作る．
どの種類も最低 1 個含めるとすると，何通りの果物かごができるか．

この問題は，次のように考えればよい．

(A) はじめに，りんご，かき，なしを 1 個ずつ入れる．
(B) 次に，りんご，かき，なしを，合わせて 4 個入れる．このときは，1 つも入らない種類があってもよい．

(B) が ○○ | ○ | ○ のとき
りんご 2 個，かき 1 個，なし 1 個
(A) と合わせて
りんご 3 個，かき 2 個，なし 2 個

(B) が | ○○○ | ○ のとき
りんご 0 個，かき 3 個，なし 1 個
(A) と合わせて
りんご 1 個，かき 4 個，なし 2 個

(A) の入れ方は 1 通りしかないので，(B) の入れ方が何通りであるか求めればよい．
(B) の入れ方は，○ 4 つと｜ 2 つの順列を考えればよいので

$\dfrac{6!}{4!2!} = 15$ 通り　　または　${}_6C_2 = 15$ 通り

【例題 53】 8 個の区別しないアメを 3 人に分ける．どの人も最低 1 個はアメをもらう場合，分け方は何通りあるか．

【解答】　まず，3 人に 1 個ずつアメを配る．残りの 5 個のアメを 3 人に配る方法は，「○ 5 つ，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{7!}{5!2!} = $ **21通り**

C. 整数問題への応用

○と｜のモデルを用いて，「$x+y+z=7$ となる 0 以上の整数の組 (x, y, z) の個数」を求めることができる．○ 7 個と｜ 2 つを横一列に並べ

一番左の○の数を x の値
真ん中の○の数を y の値
一番右の○の数を z の値

$x=2,\ y=3,\ z=2$
$\iff$ ○○｜○○○｜○○
$x=4,\ y=0,\ z=3$
$\iff$ ○○○○｜｜○○○

とすれば，「(x, y, z) の組」と「○ 7 個と｜ 2 つの順列」は 1 対 1 に対応する．つまり，$\dfrac{9!}{2!7!} = 36$ 通り．

【例題 54】
1. $x+y+z=12$ を満たす 0 以上の整数の解 (x, y, z) の個数を求めよ．
2. $a+b+c+d=10$ を満たす 0 以上の整数の解 (a, b, c, d) の個数を求めよ．

【解答】
1. 「(x, y, z) の組」と「○ 12 個と｜ 2 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{14!}{12!2!} = \frac{\cancel{14}^{7}\cdot 13}{\cancel{2}} = \textbf{91通り}$$

◀ $x=2,\ y=2,\ z=8$
$\Leftrightarrow$ ○○｜○○｜○○○○○○○○
$x=5,\ y=0,\ z=7$
$\Leftrightarrow$ ○○○○○｜｜○○○○○○○

2. 「(a, b, c, d) の組」と「○ 10 個と｜ 3 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{13!}{10!3!} = \frac{13\cdot \cancel{12}^{\cancel{4}^{2}}\cdot 11}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \textbf{286通り}$$

◀ $a=4,\ b=2,\ c=3,\ d=1$
$\Leftrightarrow$ ○○○○｜○○｜○○○｜○
$p=3,\ q=1,\ r=4,\ s=2$
$\Leftrightarrow$ ○○○｜○｜○○○○｜○○

【練習 55：重複組合せと不定方程式[7]】

(1) 10 個のボールを 3 つの箱に配分する．

1) すべての箱に少なくとも 1 個のボールを入れる方法は何通りあるか．

2) 1 個も入っていない箱があってもよいとすると，配分の方法は何通りあるか．

(2) $p+q+r+s=15$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ の数を求めよ．

【解答】

(1) 1) はじめに 1 個ずつのボールを箱に入れ，残りの 7 つを 3 箱に分ければよい．これは「○ 7 つ，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{9!}{7!2!}=$ **36通り**

2) 「○ 10 個，｜ 2 つの順列」に一致するので，$\dfrac{12!}{10!2!}=$ **66通り**

(2) 「$(p,\ q,\ r,\ s)$ の組」と「○ 15 個と｜ 3 つの順列」は 1 対 1 に対応する．よって，

$$\frac{18!}{15!3!}=\frac{\cancel{18}^{3}\cdot 17\cdot 16}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=\textbf{816通り}$$

◂ $p=2,\ q=2,\ r=3,\ s=8$
⇔ ○○｜○○｜○○○｜○○○○○○○○
$p=5,\ q=0,\ r=4,\ s=6$
⇔ ○○○○○｜｜○○○○｜○○○○○○

D. 発展　○と｜のモデルの応用

【発展 56：整数問題～その１～】

$p+q+r+s=15$ を満たす自然数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ の数を求めよ．

【解答】　$P+Q+R+S=11$ を満たす 0 以上の整数の組 $(P,\ Q,\ R,\ S)$ の個数に等しい．

その個数は「○ 11 個と｜ 3 つの順列」の場合の数と一致するので

$$\frac{14!}{11!3!}=\frac{14\cdot 13\cdot \cancel{12}^{2}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=\textbf{364通り}$$

◂ $p=P+1,\ q=Q+1,\ r=R+1,\ s=S+1$ とすればよい．

◂ $P=1,\ Q=1,\ R=2,\ S=7$
⇔ ○｜○｜○○｜○○○○○○○
このとき，$(p,\ q,\ r,\ s)=(2,\ 2,\ 3,\ 8)$
$P=4,\ Q=0,\ R=3,\ S=4$
⇔ ○○○○｜｜○○○｜○○○○
このとき，$(p,\ q,\ r,\ s)=(5,\ 1,\ 4,\ 5)$

【発展 57：整数問題～その２～】

$p+q+r\leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r)$ の数を求めよ．

【解答】　$p+q+r\leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r)$ は，次のようにして，$p+q+r+s=10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ に一致する．

$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 0)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 0,\ 10)$

$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 1)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 1,\ 9)$

$(p.\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 2)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 2,\ 8)$

$(p.\ q,\ r)=(2,\ 2,\ 4)\quad\leftrightarrow\quad(p.\ q,\ r,\ s)=(2,\ 2,\ 4,\ 2)$

よって，○ 10 個と｜ 3 個の順列に等しいので，$\dfrac{13!}{10!3!}=$ **286通り**

◂ これに気づかなければ，次のように地道に解くことになる．
$p+q+r=10$ を満たす組の個数は，○ 10 個と｜ 2 個の順列に等しいので，$\dfrac{12!}{10!2!}$ 通り，
$p+q+r=9$ を満たす組の個数は・・・と順に考えれば

$$\frac{12!}{15!2!}+\frac{11!}{14!2!}+\frac{10!}{13!2!}+\cdots\frac{3!}{1!2!}+\frac{2!}{0!2!}==\textbf{286通り}$$

[7] 一般に，整数係数の多項式を 0 とおいた（連立）方程式のうち，整数解のみを求めることを不定方程式を解くという．

2.4　2項定理 ～ $(a+b)^n$ の展開

ここでは，$(a+b)^3$, $(a+b)^4, \cdots$ の展開について考える．このとき，組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ が重要な役目をする．また，逆に，${}_n\mathrm{C}_r$ のいくつかの性質も明らかになる．

1.　2項定理

A.　展開と項の個数

たとえば，$(a+b)(p+q)(x+y)$ を展開すると

$$\begin{aligned}(a+b)(p+q)(x+y) &= (ap+aq+bp+bq)(x+y)\\ &= apx+apy+aqx+aqy+bpx+bpy+bqx+bqy\end{aligned}$$

となるが，すべての項は $(a$ または $b) \times (p$ または $q) \times (x$ または $y)$ となることが分かる．

【例題 58】 式 $(a+b)(s+t+u)(x+y+z)$ について，以下の問いに答えよ．

1. この式を展開してできる項の中に含まれるものを，次の中からすべて選べ．

   $+at$，$+aty$，$+bst$，$+buy$

2. この式の展開によって，全部で何種類の項が作られるか．

【解答】

1. すべての項は 3 つの文字の掛け算になり，$(a$ か $b) \times (s$ か t か $u) \times (x$ か y か $z)$ になるので，$\boldsymbol{+aty}$，$\boldsymbol{+buy}$.
2. $2 \times 3 \times 3 = \mathbf{18}$ **種類**

【例題 59】 式 $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ について，以下の問いに答えよ．

1. この式を展開してできる項の中に含まれるものを，次の中からすべて選べ．

   $+abab$，$+abbaa$，$+a^2b$，$+a^3b$，$+ab^4$

2. この式を展開して，項 $+ab^3$ は何回作られるか．

【解答】

1. すべての項は，$(a$ か $b)$ を 4 回掛けた項になるので，$\boldsymbol{+abab}$，$\boldsymbol{+a^3b}$.
2. $+a \times b \times b \times b$，$+b \times a \times b \times b$，$+b \times b \times a \times b$，$+b \times b \times b \times a$ の 4 つが $+ab^3$ と一致するので，**4 回**作られる．

B. 2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$

たとえば，$(a+b)^5$ を展開したときの a^3b^2 の係数を次のようにして求めることができる．

$(a+b)^5$ を展開してできる項は，(a か b) を 5 回掛けた項になり，項 $+a^3b^2$ が作られるのは右のような場合がある．

結局，5 つの $(a+b)$ から b を 2 つ選べばよく，「5 ヶ所から 2 ヶ所を選ぶ組み合わせ」${}_5\mathrm{C}_2$ 通りであるので，a^3b^2 の係数は ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ と分かる．

$$
\begin{array}{ccccccl}
\multicolumn{5}{c}{(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)} & & \\
a & a & a & b & b & \to & +aaabb = +a^3b^2 \\
a & b & a & a & b & \to & +abaab = +a^3b^2 \\
\multicolumn{5}{c}{\underbrace{b \quad b \quad a \quad a \quad a}_{\text{5ヶ所から } b \text{ を2つ選べばよい　そのような選び方は } {}_5\mathrm{C}_2 \text{ 通り}}} & \to & +bbaaa = +a^3b^2
\end{array}
$$

2 項係数

$(a+b)^n$ を展開したとき，$a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$ になる．このことから，${}_n\mathrm{C}_r$ のことを **2 項係数** (binomial coefficient) ともいう．

…… ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ であるので，$a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_{n-r}$ とも一致する．

【例題 60】 次の展開式において，[　　] 内で指定された項の係数を求めよ．

1. $(a+b)^6$ $[a^3b^3]$　　2. $(x+y)^8$ $[x^5y^3]$　　3. $(x+1)^{10}$ $[x^4]$

【解答】

1. ${}_6\mathrm{C}_3 = \mathbf{20}$　　2. ${}_8\mathrm{C}_3 = \mathbf{56}$　　3. $x^4 1^6$ の係数なので ${}_{10}\mathrm{C}_4 = \mathbf{210}$

◀ ${}_{10}\mathrm{C}_6$ を計算してもよい．

C. 2 項定理

a^5	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 0 個選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_0$
a^4b	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 1 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_1$
a^3b^2	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 2 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_2$
a^2b^3	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 3 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_3$
ab^4	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 4 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_4$
b^5	の係数は	5 つの $(a+b)$ から b を 5 つ選ぶと考えて	${}_5\mathrm{C}_5$

となるので，$(a+b)^5$ は次のように展開できる．

$$
\begin{aligned}
(a+b)^5 &= {}_5\mathrm{C}_0 a^5 + {}_5\mathrm{C}_1 a^4 b + {}_5\mathrm{C}_2 a^3 b^2 + {}_5\mathrm{C}_3 a^2 b^3 + {}_5\mathrm{C}_4 a b^4 + {}_5\mathrm{C}_5 b^5 \\
&= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}
$$

2 項定理

n を自然数とするとき，$(a+b)^n$ は次のように展開できる．

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} a b^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

これを **2 項定理** (binomial theorem) という．

【例題 61】 $(a+b)^4$, $(a+b)^6$ を展開しなさい.

【解答】

$$(a+b)^4 = {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$$
$$= \boldsymbol{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

$$(a+b)^6 = {}_6C_0a^6 + {}_6C_1a^5b + {}_6C_2a^4b^2 + {}_6C_3a^3b^3 + {}_6C_4a^2b^4 + {}_6C_5ab^5 + {}_6C_6b^6$$
$$= \boldsymbol{a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6}$$

D. 二項定理における係数

$(2x-y)^7$ を展開したときの x^4y^3 の係数を求めてみよう．$(2x-y)^7$ を展開すると

$$\begin{aligned}(2x-y)^7 &= \{2x+(-y)\}^7 \\ &= {}_7C_0(2x)^7 + {}_7C_1(2x)^6(-y) + {}_7C_2(2x)^5(-y)^2 + \overbrace{{}_7C_3(2x)^4(-y)^3}^{x^4y^3\text{ の係数はここで決まる}} \\ &\quad + {}_7C_4(2x)^3(-y)^4 + {}_7C_5(2x)^2(-y)^5 + {}_7C_6 2x(-y)^6 + {}_7C_7(-y)^7\end{aligned}$$

となるので，x^4y^3 の係数は次の計算によって -560 と分かる.

$${}_7C_3(2x)^4(-y)^3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\cdot16x^4\cdot\left(-y^3\right) = -560x^4y^3$$

【練習 62：展開された式の係数～その１～】

次の展開式において，[ ] 内で指定された項の係数を求めよ.

(1) $(2x+1)^6$ $[x^2]$　(2) $(x-2y)^7$ $[x^2y^5]$　(3) $(2x-3y)^5$ $[x^3y^2]$

【解答】

(1) $(2x+1)^6$ を展開したとき，x^2 を含む項は

$${}_6C_4(2x)^21^4 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\left(4x^2\right) = 60x^2$$

◀『2 項定理』を部分的に使った

となる．よって，x^2 の係数は **60** である.

(2) $(x-2y)^7$ を展開したとき，x^2y^5 を含む項は

$${}_7C_2x^2(-2y)^5 = \frac{7\cdot6}{2\cdot1}\cdot x^2\cdot\left(-32y^5\right) = -672x^3y^2$$

◀『2 項定理』を部分的に使った

となる．よって，x^2y^5 の係数は **−672** である.

(3) $(2x-3y)^5$ を展開したとき，x^3y^2 を含む項は

$${}_5C_2(2x)^3(-3y)^2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\left(8x^3\right)\cdot\left(9y^2\right) = 720x^3y^2$$

◀『2 項定理』を部分的に使った

となる．よって，x^3y^2 の係数は **720** である.

$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$ を展開したときの x の係数を求めてみよう．$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$ を展開すると

$$\begin{aligned}\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7 &= \left\{2x+\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}^7 \\ &= {}_7C_0\,(2x)^7 + {}_7C_1\,(2x)^6\left(-\frac{1}{x}\right) + {}_7C_2\,(2x)^5\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \overbrace{{}_7C_3\,(2x)^4\left(-\frac{1}{x}\right)^3}^{x\text{の係数は}\atop\text{ここで決まる}} \\ &\qquad + {}_7C_4\,(2x)^3\left(-\frac{1}{x}\right)^4 + {}_7C_5\,(2x)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^5 + {}_7C_6 2x\left(-\frac{1}{x}\right)^6 + {}_7C_7\left(-\frac{1}{x}\right)^7\end{aligned}$$

となるので，x の係数は次の計算によって -560 と分かる．

$${}_7C_3\,(2x)^4\left(-\frac{1}{x}\right)^3 = 35\cdot\left(16x^4\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^3}\right) = -560x$$

【練習 63：展開された式の係数〜その２〜】

次の展開式において，[　　] 内で指定された項の係数を求めよ．

(1) $(3x^2+1)^7$　$[x^6]$　　(2) $\left(x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^7$　$\left[\dfrac{1}{x}\right]$　　(3) $\left(x-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{12}$　[定数項]

【解答】

(1) x^6 の項は ${}_7C_3\cdot(3x^2)^3\cdot1^4$ を含む項から作られる．これを計算して

$$\begin{aligned}&{}_7C_3(3x^2)^3\cdot1^4 \\ =&\ \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot5}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\cdot(27x^6)\cdot1 = 945x^6\end{aligned}$$

よって，求める係数は **945** である．

(2) $\dfrac{1}{x}$ の項は ${}_7C_2(x^2)^2\left(-\dfrac{1}{2x}\right)^5$ を含む項から作られる．これを計算して

$$\begin{aligned}&{}_7C_2\cdot(x^2)^2\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)^5 \\ =&\ 21\cdot\cancel{x^4}\cdot\left(-\frac{1}{32x^{\cancel{5}}}\right) = -\frac{21}{32}\cdot\frac{1}{x}\end{aligned}$$

よって，求める係数は $\boldsymbol{-\dfrac{21}{32}}$ である．

(3) 定数項は ${}_{12}C_4x^8\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)^4$ を含む項から作られる．これを計算して

$$\begin{aligned}&{}_{12}C_4\cdot x^8\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)^4 \\ =&\ \frac{\cancel{12}\cdot11\cdot\cancel{10}^5\cdot9}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\cdot\cancel{x^8}\cdot\left(\frac{1}{16\cancel{x^8}}\right) = \frac{495}{16}\end{aligned}$$

よって，求める係数は $\boldsymbol{\dfrac{495}{16}}$ である．

E. $(a+b+c)^n$ の展開

たとえば，$(a+b+c)^5$ を展開したときの a^2b^2c の係数は次のように求めることができる．

$$
\begin{array}{ccccccl}
(a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) & & \\
a & a & c & b & b & \to & +aacbb = +a^2b^2c \\
a & b & a & c & b & \to & +abacb = +a^2b^2c \\
b & b & a & a & c & \to & +bbaac = +a^2b^2c
\end{array}
$$

a, a, b, b, c の順列になって $\dfrac{5!}{2!2!1!}$ 通り[*8]

結局，a^2b^2c の係数は $\dfrac{5!}{2!2!1!} = 30$ と分かる．

2 項係数

$(a+b+c)^n$ を展開したとき，$a^pb^qc^r$ の係数は $\dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$ になる．

【発展 64：展開された式の係数～その３～】

次の展開式において，[　] 内で指定された項の係数を求めよ．

① $(x+y+z)^6$ $[x^2y^2z^2]$　② $(2x-3y+z)^5$ $[xyz^3]$　③ $(x^2+x-1)^4$ $[x^6]$

【解答】

① $\dfrac{6!}{2!2!2!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}} = \mathbf{90}$

② xyz^3 の項は，$\dfrac{5!}{1!1!3!}(2x)(-3y)z^3$ の項から作られる．これを計算すれば

$$\frac{5!}{1!1!3!}(2x)(-3y)z^3 = -120xyz^3$$

となるので，xyz^3 の係数は $\mathbf{-120}$ である．

③ x^6 の項は，$(x^2)^3\cdot x^0\cdot(-1)^1$ を含む項と $(x^2)^2\cdot x^2\cdot(-1)^0$ を含む項から作られる．

$(x^2)^3\cdot x^0\cdot(-1)^1$ の係数は $\dfrac{4!}{3!0!1!}$

$(x^2)^2\cdot x^2\cdot(-1)^0$ の係数は $\dfrac{4!}{2!2!0!}$

であるので，これらの項だけを取り出して計算すれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{4!}{3!0!1!}(x^2)^3\cdot x^0\cdot(-1)^1 + \frac{4!}{2!2!0!}(x^2)^2\cdot x^2\cdot(-1)^0 \\
&= 4\cdot x^6\cdot 1\cdot(-1) + 6\cdot x^4\cdot x^2\cdot 1 \\
&= -4x^6 + 6x^6 = 2x^6
\end{aligned}
$$

となるので，x^6 の係数は $\mathbf{2}$ である．

[*8] 『同じものを含むときの順列』を用いた．${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$ でも求められる．

F. 2 項係数の和

2 項定理において，a や b に具体的な値を入れると，様々な等式が得られる．

【発展 65：2 項係数の和】

2 項定理を用いて次の等式を証明せよ．

① $2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$

② $0 = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$

③ $(-1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 - 2{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2{}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-2)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-2)^n{}_n\mathrm{C}_n$

【解答】 2 項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n$$

において

① $a = b = 1$ とおくと

（左辺）$= (1+1)^n = 2^n$

（右辺）$= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$

となり，確かに成立する． ■

② $a = 1$，$b = -1$ とおくと

（左辺）$= \{1+(-1)\}^n = 0^n = 0$

（右辺）$= {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$

となり，確かに成立する． ■

③ $a = 1$，$b = -2$ とおくと

（左辺）$= (-1)^n$

（右辺）$= {}_n\mathrm{C}_0 - 2{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2{}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-2)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-2)^n{}_n\mathrm{C}_n$

となり，確かに成立する． ■

上の等式から，たとえば，次のような等式が成り立つ（$n = 5$ とおいた）．

① $2^5 = {}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4 + {}_5\mathrm{C}_5$

② $0 = {}_5\mathrm{C}_0 - {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 - {}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4 - {}_5\mathrm{C}_5$

③ $-1 = {}_5\mathrm{C}_0 - 2{}_5\mathrm{C}_1 + 4{}_5\mathrm{C}_2 - 8{}_5\mathrm{C}_3 + 16{}_5\mathrm{C}_4 - 32{}_5\mathrm{C}_5$

2. パスカルの三角形と ${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

A. パスカルの三角形とは

下図のように，2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_0$，${}_n\mathrm{C}_1$，${}_n\mathrm{C}_2$，$\cdots$，${}_n\mathrm{C}_n$ の値を，上から順に $n = 1, 2, 3, \cdots$ の場合について三角形の形に並べたものを，**パスカルの三角形** (Pascal's triangle) という.

$n = 1$　${}_1\mathrm{C}_0$　${}_1\mathrm{C}_1$

$n = 2$　${}_2\mathrm{C}_0$　${}_2\mathrm{C}_1$　${}_2\mathrm{C}_2$

$n = 3$　${}_3\mathrm{C}_0$　${}_3\mathrm{C}_1$　${}_3\mathrm{C}_2$　${}_3\mathrm{C}_3$

$n = 4$　${}_4\mathrm{C}_0$　${}_4\mathrm{C}_1$　${}_4\mathrm{C}_2$　${}_4\mathrm{C}_3$　${}_4\mathrm{C}_4$

$n = 5$　${}_5\mathrm{C}_0$　${}_5\mathrm{C}_1$　${}_5\mathrm{C}_2$　${}_5\mathrm{C}_3$　${}_5\mathrm{C}_4$　${}_5\mathrm{C}_5$

→ 組合せの値を計算すると →

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

1　5　10　10　5　1

パスカルの三角形は次のような特徴を持つ.

i) 各行の左右両端の数字は 1 である.

ii) 各行は左右対称である.

iii) 左右両端以外の数字は，その左上の数と右上の数を足したものとなる.

このことは，パスカルの三角形のすべてにおいて成り立つ.

1　1

足す

1　2　1

足す　足す

1　3　3　1

足す　足す　足す

1　4　6　4　1

足す　足す　足す　足す

1　5　10　10　5　1

【例題 66】 パスカルの三角形から $n = 5, 6, 7$ のみを記した下の図式のうち，$\boxed{}$ にあてはまる値を答えよ.

$n = 5$　1　5　10　10　5　1

$n = 6$　$\boxed{ア}$　$\boxed{イ}$　$\boxed{ウ}$　$\boxed{エ}$　$\boxed{オ}$　$\boxed{カ}$　$\boxed{キ}$

$n = 7$　$\boxed{ク}$　$\boxed{ケ}$　$\boxed{コ}$　$\boxed{サ}$　$\boxed{シ}$　$\boxed{ス}$　$\boxed{セ}$　$\boxed{ソ}$

【解答】 ア : **1**，イ : **6**，ウ : **15**，エ : **20**，オ : **15**，カ : **6**，キ : **1**
ク : **1**，ケ : **7**，コ : **21**，サ : **35**，シ : **35**，ス : **21**，セ : **7**，ソ : **1**

B. ${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

パスカルの三角形の iii) の性質が成り立つ理由を考えるため，例として，$n = 4$ のときの 2 項係数と，$n = 5$ のときの 2 項係数の関係を見てみよう．

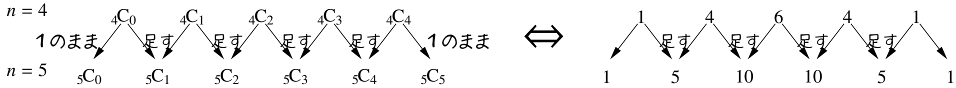
$(a+b)^5$ は 2 項定理によって

$$(a+b)^5 = {}_5\mathrm{C}_0a^5 + {}_5\mathrm{C}_1a^4b + {}_5\mathrm{C}_2a^3b^2 + {}_5\mathrm{C}_3a^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5b^5$$

となるが，一方で，$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4$ であるので

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= (a+b)\left({}_4\mathrm{C}_0a^4 + {}_4\mathrm{C}_1a^3b + {}_4\mathrm{C}_2a^2b^2 + {}_4\mathrm{C}_3ab^3 + {}_4\mathrm{C}_4b^4\right)\\ &= {}_4\mathrm{C}_0a^5 + {}_4\mathrm{C}_1a^4b + {}_4\mathrm{C}_2a^3b^2 + {}_4\mathrm{C}_3a^2b^3 + {}_4\mathrm{C}_4ab^4\\ &\qquad + {}_4\mathrm{C}_0a^4b + {}_4\mathrm{C}_1a^3b^2 + {}_4\mathrm{C}_2a^2b^3 + {}_4\mathrm{C}_3ab^4 + {}_4\mathrm{C}_4b^5\\ &= {}_4\mathrm{C}_0a^5 + \underbrace{({}_4\mathrm{C}_0 + {}_4\mathrm{C}_1)}_{{}_5\mathrm{C}_1\text{ に等しい}}a^4b + \underbrace{({}_4\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_2)}_{{}_5\mathrm{C}_2\text{ に等しい}}a^3b^2 + \underbrace{({}_4\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_3)}_{{}_5\mathrm{C}_3\text{ に等しい}}a^2b^3 + \underbrace{({}_4\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_4)}_{{}_5\mathrm{C}_4\text{ に等しい}}ab^4 + {}_4\mathrm{C}_4b^5\end{aligned}$$

このことから，パスカルの三角形の $n = 4,\ 5$ の部分について以下のことが成り立つ．



パスカルの三角形

パスカルの三角形には次のような特徴があり，これは ${}_n\mathrm{C}_r$ の性質に置き換えることもできる．

i) 各行の左右両端の数字は 1 である．つまり，${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$ である．

ii) 各行は左右対称である．つまり，${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ である．

iii) 左右両端以外の数字は，その左上の数と右上の数を足したものとなる．つまり，${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ である．

【練習 67：パスカルの三角形】

次の$\boxed{}$にあてはまる値を答えよ．

(1) ${}_6\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_{\boxed{ア}} + {}_5\mathrm{C}_{\boxed{イ}}$　(2) ${}_7\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_{\boxed{ウ}} + {}_6\mathrm{C}_{\boxed{エ}}$　(3) ${}_{\boxed{オ}}\mathrm{C}_{\boxed{カ}} = {}_8\mathrm{C}_3 + {}_8\mathrm{C}_4$

【解答】

(1) ア：**2**，イ：**3**（順不同）　(2) ウ：**3**，エ：**4**（順不同）

(3) オ：**9**，カ：**4**

第3章　確率

3.1　確率の基礎

1.　確率とは何か

中学で学んだように，「さいころを 1 個振って偶数の目が出る確率」は $\dfrac{1}{2}$ であった．このことを詳しく考えてみよう．

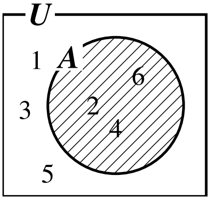
A.　さいころにおける「大数の法則」

たとえば，「いかさまのないさいころを 6 回振れば ⚀ は平均 1 回出る」ことは証明できない[*1]が，これを**大数の法則**（たいすう）(law of large numbers) と呼んで，経験的に正しいと考える．

B.　確率 ― 1 回あたり何回起こるのか

「さいころを 1 個振った」結果，⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ のいずれかが起こる．
これを集合のように書き出し，U で表すと

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，　$n(U) = 6$



となる．このうち，「偶数の目が出る」場合を A で表わすと

$A = \{2,\ 4,\ 6\}$，　$n(A) = 3$

となる．大数の法則によって「6 回のうち平均 3 回が，A のどれかになる」

$$\iff \text{「1 回あたり } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ 回が，} A \text{ のどれかになる」}$$

となり，この $\dfrac{1}{2}$ が確率を表わしている．

【例題 1】 上の例において，「出た目が 3 の倍数である」場合を B とする．

- 上のように，B を集合で表わすと，$B =$ **ア** となり，$n(B) =$ **イ** である．
- 大数の法則によって，6 回のうち平均 **ウ** 回，B が起こる．
  言いかえると，1 回あたり **エ** 回，B は起こる．この エ が，B の確率である．

【解答】 ア : $\{3,\ 6\}$，イ : 2，ウ : 2，エ : $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

[*1] そもそも，完全にいびつのない立方体のさいころを作ることができないうえ，無限回さいころを振ることができない．

C. 試行・事象・同様に確からしい

「さいころを 1 個振る」のように，同じ条件で繰り返すことができる操作などを**試行** (trial) といい，試行して起こる事柄を**事象** (event) という．前ページの例では，「$\boxed{\bullet}$が出る」「偶数の目が出る」などが事象になる．また，すべての事象をまとめて**全事象** (whole event) という．前の例では，U が全事象である[*2]．

前ページの例ではさいころにいかさまがないので，全事象 U はすべて等しい可能性で起こる．このことを，U は**同様に確からしい** (equally likely) という．

【例題 2】 「コイン 1 枚を投げる」試行 X において，表が出る可能性と裏が出る可能性は等しいとする．次の$\boxed{}$に適する数字・言葉を入れなさい．

- 試行 X の全事象は$\boxed{\text{ア}}$通りあり，どの事象も同様に$\boxed{\text{イ}}$．
- $\boxed{\text{ウ}}$の法則から，表が出る事象は，平均して$\boxed{\text{ア}}$回の X につき$\boxed{\text{エ}}$回起こる．つまり，1 回あたり$\boxed{\text{オ}}$回起こる．

【解答】 ア : **2**，イ : 確からしい，ウ : 大数，エ : **1**，オ : $\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

D. 確率の定義

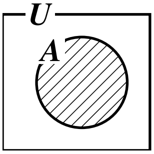
「事象 A の**確率** (probability)」はしばしば $P(A)$ で表わされ[*3]，次で定義される．

集合と確率

全事象 U が同様に確からしいとき

$$(\text{事象 } A \text{ の確率}) = \frac{\text{事象 } A \text{ の場合の数}}{\text{全事象 } U \text{ の場合の数}} \qquad \left(\text{記号で表わすと，} P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}\right)$$

と定義する．$0 \leqq P(A) \leqq 1$ であり，大数の法則を認めると，事象 A の確率は「試行 1 回あたり A は何回起こるか」の値を表す．



E. 試行を無作為に行う

選び方にいっさい意図を加えずランダムに選ぶことを「**無作為に** (randamly (at randam)) 選ぶ」ともいう．無作為に選んで起こる結果はすべて同じ可能性で起こり，同様に確からしいと考えてよい．

【例題 3】 「7 枚のカード$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$から無作為に 1 枚選ぶ」試行を X とする．

- 試行 X の全事象は$\boxed{\text{ア}}$通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「奇数を選ぶ」事象は$\boxed{\text{ア}}$通りのうち$\boxed{\text{イ}}$通りあるから，$\boxed{\text{ウ}}$の確率で起こる．
- 「3 の倍数を選ぶ」事象は$\boxed{\text{ア}}$通りのうち$\boxed{\text{エ}}$通りあるから，$\boxed{\text{オ}}$の確率で起こる．

【解答】 ア： **7**，イ： **4**，ウ： $\mathbf{\dfrac{4}{7}}$，エ： **3**，オ： $\mathbf{\dfrac{3}{7}}$

[*2] ここで，「全事象」と「全事象の集合」がどちらも U で書かれている．このように，事象と，それを表わす集合には同じ文字を用い，特に区別しない．

[*3] P は，"probability"の頭文字を表わす．

高校で学ぶ確率の問題において，断りがない限りは以下のことが仮定されている．

- さいころにいかさまやいびつはなく，どの目も出る可能性は等しい．
- ものを並べる，選ぶ，くじを引くなどは，無作為に行っているとする．
- コインの表と裏の出る確率は等しく，「コインが立つ」などの可能性は考えない．
- 「大数の法則」は正しいと考える．

F.　「場合の数」と確率

確率の計算のために，順列 $_n\mathrm{P}_r$，階乗 $n!$，組合せ $_n\mathrm{C}_r$ などを用いることがある．

約分を上手に使おう．たとえば，全事象が $5!$ 通り，事象 A が $4!$ 通りならば

（うまいやり方）
A の確率は $\dfrac{4!}{5!} = \dfrac{\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \dfrac{1}{5}$

（計算が大変な例）$5! = 120$，$4! = 24$
なので，確率は $\dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$

【練習 4 :「場合の数」と確率～その１～】

(1) 「無作為に 5 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ を横一列に並べる」試行を X とする．

- X の全事象は「$\boxed{\text{ア}}$ の階乗」通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「$\boxed{6}$ が右端になる」事象は「$\boxed{\text{イ}}$ の階乗」通りあるから，確率は $\boxed{\text{ウ}}$ になる．
- 「$\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ が隣り合う」事象は「$\boxed{\text{エ}}\,! \times 2!$」通りあるから，確率は $\boxed{\text{オ}}$ になる．

(2) 試行 X :「出席番号 1 番から 13 番までの 13 人から 3 人を選ぶ」について

- 試行 X の全事象は $_{\boxed{\text{カ}}}\mathrm{C}_{\boxed{\text{キ}}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる．
- 「1 番が選ばれる」事象は $_{\boxed{\text{ク}}}\mathrm{C}_{\boxed{\text{ケ}}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{コ}}$ である．
- 「2 が選ばれない」事象は $_{\boxed{\text{サ}}}\mathrm{C}_{\boxed{\text{シ}}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ス}}$ である．

【解答】

(1)
- 全事象は $_{(\text{ア})}\underline{\mathbf{6}}$ の階乗．
- $\boxed{6}$ 以外を 1 列に並べ $_{(\text{イ})}\underline{\mathbf{5}}!$ 通り，$\dfrac{5!}{6!} = \dfrac{\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{6\cdot\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}}_{(\text{ウ})}$
- $\boxed{1,2\text{ の組}}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ の順列で $_{(\text{エ})}\underline{\mathbf{5}}!$ 通り，1,2 の並べ方は $2!$ 通りあるので $\dfrac{5!\times2!}{6!} = \dfrac{\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\cancel{2}}{\cancel{6}^{3}\cdot\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}_{(\text{オ})}$

(2)
- 全事象は $_{(\text{カ})}\underline{\mathbf{13}}\,\mathrm{C}\,\underline{\mathbf{3}}_{(\text{キ})} = \dfrac{13\cdot\cancel{12}^{2}\cdot11}{\cancel{3\cdot2\cdot1}} = 13\cdot22$
- 1 番以外の 12 人から 2 人を選ぶことになり

◀1 番の他に，あと 2 人選ぶ

$_{(\text{ク})}\underline{\mathbf{12}}\,\mathrm{C}\,\underline{\mathbf{2}}_{(\text{ケ})} = \dfrac{\cancel{12}^{6}\cdot11}{\cancel{2}} = 66$ 通りあり，$\dfrac{\cancel{66}^{3}}{13\cdot\cancel{22}} = \underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{13}}}_{(\text{コ})}$

- 2 番以外の 12 人から 3 人を選べばよいので

$_{(\text{サ})}\underline{\mathbf{12}}\,\mathrm{C}\,\underline{\mathbf{3}}_{(\text{シ})} = \dfrac{\cancel{12}^{2}\cdot11\cdot10}{\cancel{3\cdot2\cdot1}} = 22\cdot10$ 通りあり，$\dfrac{\cancel{22}\cdot10}{13\cdot\cancel{22}} = \underline{\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{13}}}_{(\text{ス})}$

上のように，$_{13}\mathrm{C}_3 = 13\cdot22$ のようにしておくと，約分などが簡単にできる．

【練習 5：「場合の数」と確率〜その２〜】

両親と子供 4 人が円形のテーブルに座る.

(1) 両親が向かい合う確率を求めよ.　　(2) 両親が隣り合う確率を求めよ.

【解答】　全事象は，6 人の円順列なので 5! 通りである.

(1) 父親を固定すると，母親の場所は決まり，子供の並び方は 4! 通りある.
よって $\dfrac{4!}{5!} = \dfrac{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{5\cdot\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

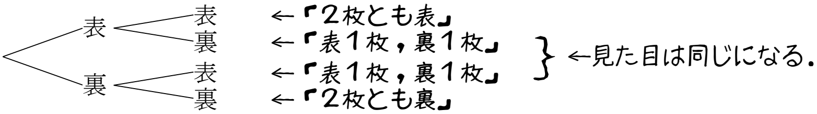
(2) 父親を固定すると，母親の場所は両隣の 2 通り，子供の並び方は 4! 通りある．よって $\dfrac{2\times 4!}{5!} = \dfrac{2\times\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{5\cdot\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

2.　同様に確からしい

全事象として含まれる事象一つ一つを，**根元事象** (fundamental event) と言う．根元事象はすべて，同様に確からしいように選ばれないといけない.

A.　「同様に確からしい」全事象

同じ大きさ・形のコイン 2 枚を振ったときの全事象は，次の 4 通りである.



全事象を 3 通り（「表 2 枚」「表 1 枚，裏 1 枚」「裏 2 枚」）としてはいけない．「表 1 枚，裏 1 枚」は，「表 2 枚」や「裏 2 枚」と可能性が違う.

【例題 6】

1. 3 枚のコインを振る試行を考える.
   - 全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる.
   - 3 枚とも表になる事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{イ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である.
   - 表が 2 枚となる事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通りのうち $\boxed{\text{エ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{オ}}$ である.
2. 試行 X：「同じ大きさの赤 4 個，青 3 個，白 2 個の玉を含む袋から，無作為に 1 個選ぶ」，
事象 R：「赤い玉を選ぶ」，B：「青い玉を選ぶ」とする.
   - 試行 X の全事象は $\boxed{\text{カ}}$ 通りあり，同様に確からしく起こる.
   - 事象 R は $\boxed{\text{カ}}$ 通りのうち $\boxed{\text{キ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{ク}}$ である.
   - 事象 B は $\boxed{\text{カ}}$ 通りのうち $\boxed{\text{ケ}}$ 通りあるから，確率は $\boxed{\text{コ}}$ である.

【解答】

1. ア：$2^3 = \mathbf{8}$，イ：$\mathbf{1}$，ウ：$\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$，エ：$\mathbf{3}$，オ：$\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$
2. カ：$\mathbf{9}$，キ：$\mathbf{4}$，ク：$\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$，ケ：$\mathbf{3}$，コ：$\dfrac{3}{9} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

◀ 全事象を「赤を選ぶ」「青を選ぶ」「白を選ぶ」の 3 通りとしてはいけない．これでは，全事象が同様に確からしくない.

B.　さいころ 2 個を振るときの「同様に確からしい」全事象

さいころ 2 個を振るときの全事象は，36 通りとして考えないといけない．つまり，⚃⚂と⚂⚃は区別して考える．下に見るように，区別しないと全事象が同様に確からしくならない．

⚀から⚅まであるさいころ 2 個を振るとき，⚂，⚃が出る確率

・1 回目と 2 回目を区別した場合

1 回目＼2 回目	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
⚁	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
⚂	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
⚃	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
⚄	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
⚅	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全事象は $6^2 = 36$ 通り．⚂，⚃が一つずつになるのは 2 通りだから，確率は $\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

・1 回目と 2 回目を区別しない場合

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1, 1					
⚁	1, 2	2, 2				
⚂	1, 3	2, 3	3, 3			
⚃	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
⚄	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
⚅	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

根元事象が同様に確からしくない．

（例えば，⚂⚃の可能性と⚀⚀の可能性は異なる）

【例題 7】

1. 2 個の大きさの違うさいころを振って，和が 5 になる確率を求めよ．
2. 2 個の同じさいころを振って，積が 12 になる確率を求めよ．

【解答】

1. 目の和は次のようになる．

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

よって，$\dfrac{4}{36} = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

2. 目の積は次のようになる．

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	4	6	8	10	12
⚂	3	6	9	12	15	18
⚃	4	8	12	16	20	24
⚄	5	10	15	20	25	30
⚅	6	12	18	24	30	36

よって，$\dfrac{4}{36} = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

さいころ 2 個の確率については，必ず，上のような 6×6 の表を書いて考えよう．

【練習 8：3 個のさいころを振る】

同じ大きさの 3 個のさいころを振るとき，次の確率に答えよ．

(1) 3 個の目の和が 18 になる確率　　(2) 3 個とも同じ目になる確率

【解答】　全事象は $6^3 = 216$ 通りある．

1. 和が 18 になるのは，(6 , 6 , 6) の 1 通りであるから，$\boldsymbol{\dfrac{1}{216}}$
2. (1, 1, 1) から (6 , 6 , 6) までの 6 通りがあるので，$\dfrac{6}{216} = \boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$

C. 順列・組合せと「同様に確からしい」全事象

(I) 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から **1 枚選び元に戻す**．この操作を **2 回繰り返した**とき，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ を選ぶ 1 枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

1 枚目 \ 2 枚目	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
$\boxed{2}$	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

全事象は $6^2 = 36$ 通り．$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が 1 枚ずつになるのは 2 通りだから，確率は $\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$	1, 1					
$\boxed{2}$	1, 2	2, 2				
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3	3, 3			
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

根元事象が同様に確からしく**ない**．

（例えば，$\boxed{1}\boxed{2}$ の可能性と $\boxed{1}\boxed{1}$ の可能性は異なる）

(II) 6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から **2 枚を選ぶ**とき，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ を選ぶ 1 枚ずつ確率

・カードの順列で全事象を考えた場合

1 枚目 \ 2 枚目	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$		2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
$\boxed{2}$	1, 2		3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3		4, 3	5, 3	6, 3
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4		5, 4	6, 4
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5		6, 5
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	

全事象は $6 \times 5 = 30$ 通り（$= {}_6P_2$）

$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が 1 枚ずつになるのは 2 通り（$= {}_2P_2$）

だから，確率は $\dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$

・カードの組合せで全事象を考えた場合

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$						
$\boxed{2}$	1, 2					
$\boxed{3}$	1, 3	2, 3				
$\boxed{4}$	1, 4	2, 4	3, 4			
$\boxed{5}$	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5		
$\boxed{6}$	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	

全事象は ${}_6C_2 = 15$ 通り

$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が 1 枚ずつになるのは 1 通り（$= {}_2C_2$）

だから，確率は $\dfrac{1}{15}$

【例題 9】 箱の中に 9 個のボールがあり，ボールにはそれぞれ，1 から 9 まで書かれている．

1. ボール 1 個を選んで番号を記録し，ボールを元に戻すとき，次の確率を求めよ．
   (a) 3 と 4 を 1 回ずつ記録した　　(b) 2 回とも 3 を記録した
2. ボールを 2 個選ぶとき，次の確率を求めよ．
   (a) 3 と 4 を 1 個ずつ選んだ　　(b) 2 個とも 3 を選んだ

【解答】

1. 全事象は $9 \times 9 = 81$ 通りある．
   (a) 3, 4 の場合と，4, 3 の場合があるので，$\boldsymbol{\dfrac{2}{81}}$
   (b) 3, 3 の 1 通りしかないので $\boldsymbol{\dfrac{1}{81}}$
2. (a) （順列で全事象を考えた場合）全事象は $9 \times 8 = 72$ 通りある．
   3, 4 の場合と，4, 3 の場合があるので，$\dfrac{2}{72} = \boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$
   （組合せで全事象を考えた場合）全事象は ${}_9C_2 = 36$ 通りある．3, 4 の 1 通りであるので，$\boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$
   (b) 3, 3 になることはないので，確率は **0**

◀1 個目に選ぶボールは 9 通り，2 個目に選ぶボールは 8 通りある，のように考えるとよい．

全事象についての注意

全事象をつくる根元事象は，一つの決め方に定まるとは限らないが，次に注意する必要がある．

- 根元事象がすべて同様に確からしくなるよう，考えなければならない．
- 根元事象を「順列」で考えたならば以後も「順列」で考え，根元事象を「組合せ」で考えたならば以後も「組合せ」で考えないといけない．

【練習 10：同様に確からしい】

a, a, a, b, b, c, c の 7 つの文字を一列に並べる．以下の確率を求めなさい．

(1) b が両端になる確率　　(2) 2 つの c が隣り合う確率

【解答】　すべての並び方は $\dfrac{7!}{3!2!2!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3\cdot 2}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}} = 210$ 通り．

(1) 両端以外に a, a, a, c, c を並べる $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$ 通りなので $\dfrac{10}{210} = \boldsymbol{\dfrac{1}{21}}$.

(2) a, a, a, b, b, cc の 6 つを並べて $\dfrac{6!}{3!2!} = 60$ 通りなので $\dfrac{60}{210} = \boldsymbol{\dfrac{2}{7}}$.

（別解）$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ の異なる 7 つを並べて 7! 通り

(1) 両端は b_1, b_2 の並び替えで 2! 通り，他は 5! 通りなので $\dfrac{5!2!}{7!} = \boldsymbol{\dfrac{1}{21}}$.

(2) c を 1 つにまとめて 6! 通り，c の順序で 2! 通りなので $\dfrac{6!2!}{7!} = \boldsymbol{\dfrac{2}{7}}$.

【発展 11：確率の発展問題～その１～】

赤，青，黄のカードが 5 枚ずつあり，それぞれ，1 から 5 の数字が 1 つずつ書かれている．この 15 枚の中から 3 枚を任意に選ぶとき，以下の確率を求めよ．

1. 3 枚とも同じ色になる
2. 3 枚の色がすべて異なる
3. 3 枚の数字がすべて異なる
4. 3 枚の数字も色もすべて異なる

【解答】　すべての選び方は ${}_{15}C_3 = 5\cdot 7\cdot 13$ 通りある．

① どの色を選ぶかで 3 通り，どの数字を選ぶかで ${}_5C_3 = 10$ 通りあるので，

$\dfrac{3\cdot \cancel{10}^{2}}{\cancel{5}\cdot 7\cdot 13} = \boldsymbol{\dfrac{6}{91}}$.

② 色の選び方は 1 通り，数字はそれぞれ 5 通りずつあるので，

$\dfrac{\cancel{5}\cdot 5\cdot 5}{\cancel{5}\cdot 7\cdot 13} = \boldsymbol{\dfrac{25}{91}}$.

③ 数字の選び方は ${}_5C_3 = 10$ 通り，それぞれの数字がどの色であったかで 3 通りずつあるので，$\dfrac{\cancel{10}^{2}\cdot 3^3}{\cancel{5}\cdot 7\cdot 13} = \boldsymbol{\dfrac{54}{91}}$.

④ 色の選び方は 1 通り，赤の数字が 5 通り，青の数字が 4 通り，黄の数字が 3 通りあるので，$\dfrac{\cancel{5}\cdot 4\cdot 3}{\cancel{5}\cdot 7\cdot 13} = \boldsymbol{\dfrac{12}{91}}$.

◀（別解）カードの順列で考えると全事象は $15\cdot 14\cdot 13$ 通りあり

① $\dfrac{\cancel{15}\cdot \cancel{4}^{2}\cdot 3}{\cancel{15}\cdot \cancel{14}^{7}\cdot 13} = \boldsymbol{\dfrac{6}{91}}$

（2 枚目は 1 枚目と同じ色　以下，3 枚目の条件は省略）

② $\dfrac{\cancel{15}\cdot \cancel{10}^{5}\cdot 5}{\cancel{15}\cdot \cancel{14}^{7}\cdot 13} = \boldsymbol{\dfrac{25}{91}}$

（2 枚目は 1 枚目と違う色）

③ $\dfrac{\cancel{15}\cdot \cancel{12}^{6}\cdot 9}{\cancel{15}\cdot \cancel{14}^{7}\cdot 13} = \boldsymbol{\dfrac{54}{91}}$

（2 枚目は 1 枚目と違う数）

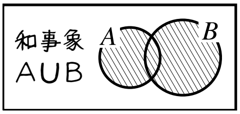
④ $\dfrac{\cancel{15}\cdot \cancel{8}^{2}\cdot 3}{\cancel{15}\cdot \cancel{14}^{7}\cdot 13} = \boldsymbol{\dfrac{6}{91}}$

（2 枚目は 1 枚目と数も色も違う）

1.　和事象・積事象・排反

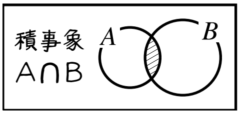
A.　和事象とは

事象 A, B があるとき,「A または B が起きる」という事象を**和事象** (sum event) といい, $A \cup B$ で表す. ∪ は集合における「または」と同じ記号である.



B.　積事象とは

また,「A も B も起こる」という事象を**積事象** (product event) といい[4], $A \cap B$ で表す. ∩ は集合における「かつ」と同じ記号である.



【例題 12】　ジョーカーを除いた 52 枚のトランプから 1 枚を選ぶ．選んだカードが

ハートである事象を H，絵札である事象を P，エースである事象を N_1

とする．また，すべての場合の集合を U とする．つまり，$n(U) = 52$ である．

1. A :「H と P の積事象」, B :「H と N_1 の和事象」, C :「P と N_1 の和事象」に一致するものを
   ① $H \cap P$　② $H \cup P$　③ $H \cap N_1$　④ $H \cup N_1$　⑤ $P \cap N_1$　⑥ $P \cup N_1$　から選びなさい.
2. 場合の数 $n(H)$, $n(P)$, $n(N_1)$ をそれぞれ答えなさい.
3. 確率 $P(H)$, $P(P)$, $P(N_1)$ をそれぞれ答えなさい.

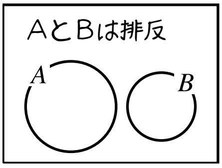
【解答】

1. 積事象は ∩ だから A は①，和事象は ∪ だから B は④，C は⑥
2. ハートは 13 枚あるので $\boldsymbol{n(H) = 13}$,
   絵札は $3 \times 4 = 12$ 枚あるので $\boldsymbol{n(P) = 12}$,
   エースは 4 種類あるので $\boldsymbol{n(N_1) = 4}$.
3. $P(H) = \dfrac{13}{52} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$, $P(P) = \dfrac{12}{52} = \boldsymbol{\dfrac{3}{13}}$, $P(N_1) = \dfrac{4}{52} = \boldsymbol{\dfrac{1}{13}}$.

◀たとえば, $P(H) = \dfrac{n(H)}{n(U)}$ である.

C.　排反とは

2 つの事象 A, B が同時に起こらないとき, A, B は（互いに）**排反** (exclusive) であるという. A, B が排反であることは, 積事象 $A \cap B$ が空集合であることと一致し, ベン図は右図のようになる. その結果, 和事象 $A \cup B$ は次で計算できる.



確率の加法定理

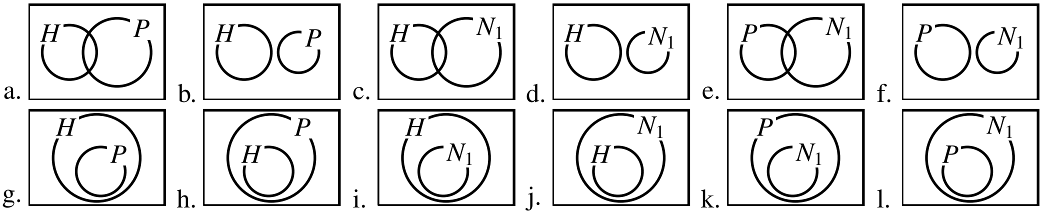
2 つの事象 A, B が排反であれば, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ なので, 次の**確率の加法定理**が成り立つ.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

[4] なぜ「積事象」と呼ぶのかは, 次節で学ぶ.

【例題 13】　前ページの【例題 12】の試行について考える.

1. 以下の中から，正しいベン図を **3 つ**答えなさい.



2. $H,\ P,\ N_1$ の中から，互いに排反な 2 つの事象を答えなさい.
3. 確率 $P(A),\ P(B),\ P(C)$ をそれぞれ答えなさい.

【解答】

1. $H,\ P$ については a. が正しく，$H \supset N_1$ から i. が正しく，
   $P \cap N_1 = \emptyset$ から f. が正しい．よって，答えは **a, f, i.**
2. 共通部分がない，$\boldsymbol{P}$ **と** $\boldsymbol{N_1}$ **が排反**である.
3. A は「絵札のハート」の 3 枚なので，$\boldsymbol{P(A) = \dfrac{3}{52}}$,

   ベン図 i. から $B = H$ と分かるので，$P(B) = P(H) = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$,

   $P(C) = P(P) + P(N_1) = \dfrac{3}{13} + \dfrac{1}{13} = \boldsymbol{\dfrac{4}{13}}$.

◀一般に，$X \supset Y$ ならば，$X \cup Y = X,\ X \cap Y = Y$ である.

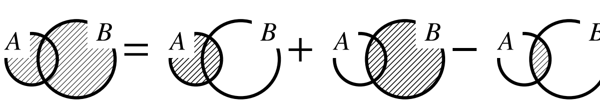
D.　排反でない和事象の確率

排反でない和事象の確率

A と B が排反でないとき，和事象 $A \cup B$ の確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

で計算できる.



【例題 14】　A，B，C，$\cdots$，I の 9 人から，3 人を選ぶ.

1. A が選ばれる確率を求めよ.
2. B が選ばれる確率を求めよ.
3. A も B も選ばれる確率を求めよ.
4. A または B が選ばれる確率を求めよ.

【解答】　全事象は，${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 12 \cdot 7$ 通りある.

1. A 以外の 8 人から 2 人選ぶことができ，$\dfrac{{}_8\mathrm{C}_2}{12 \cdot 7} = \dfrac{\cancel{4} \cdot \cancel{7}}{\cancel{12}^3 \cdot \cancel{7}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$
2. 1. と同様にして，$\dfrac{{}_8\mathrm{C}_2}{12 \cdot 7} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$.
3. A，B 以外の 7 人から 1 人選ぶことができ，$\dfrac{{}_7\mathrm{C}_1}{12 \cdot 7} = \dfrac{\cancel{7}}{12 \cdot \cancel{7}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$
4. 1.，2.，3. から，$\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{4 + 4 - 1}{12} = \boldsymbol{\dfrac{7}{12}}$

2.　余事象

A.　余事象とは何か

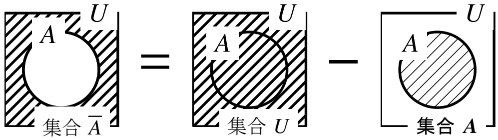
事象 A に対して，A が起こらない事象を A の**余事象** (complementary event) といい，$\overline{A}$ で表す．

余事象の確率

A の余事象 $\overline{A}$ について，$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$ から

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

が成り立つと分かる．



【例題 15】　2 個のさいころを振るとき

- 2 個の出た目が同じになる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．
- 2 個の出た目が異なる目になる事象は，同じになる事象の $\boxed{\text{イ}}$ なので，出た目が異なる確率は $1 - \boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{ウ}}$ である．

【解答】　ア : 全事象は 6^2 通り，同じ目が出るのは 6 通りなので，$\dfrac{6}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

イ :余事象，　ウ :$1 - \dfrac{1}{6} = \mathbf{\dfrac{5}{6}}$

B.　「少なくとも 1 つ」の確率

たとえば，10 本の中に 3 本の当りが入っているくじがある．ここから 3 本を引いて，「少なくとも 1 本当たる確率」を考えよう．この試行では，次のいずれかが起こる．

- 3 本とも当たる
- 2 本だけ当たる
- 1 本だけ当たる
- 1 本も当たらない

これらすべてが『少なくとも 1 本当たる確率』

「少なくとも 1 本当たる」とは，「1 本も当たらない」の余事象と分かる．

「1 本も当たらない」確率は $\dfrac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{7}{12}$ であるから，求める確率は $1 - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5}{12}$ と分かる[*5]．

【例題 16】　3 枚のコインを振るとき，「少なくとも 1 枚表になる」事象は，「$\boxed{\text{ア}}$」の余事象になる．「$\boxed{\text{ア}}$」の確率は $\boxed{\text{イ}}$ であるから，「少なくとも 1 枚表になる」確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

【解答】　ア :全てが裏になる（表が 0 枚である）

イ :全事象は $2^3 = 8$ 通りなので，$\mathbf{\dfrac{1}{8}}$，　ウ :$1 - \dfrac{1}{8} = \mathbf{\dfrac{7}{8}}$

[*5] 別解として，「3 本とも当たる」「2 本だけ当たる」「1 本だけ当たる」確率をすべて足し合わせても求められるが，答えを出すまでの計算がとても多くなる．

【例題 17】

1. 5 個の赤，4 個の白が入った袋から 3 個を選ぶとき，少なくとも 1 個赤が含まれる確率を求めよ．
2. 5 人の子供がいる家族に，男の子も女の子もいる確率はいくらか．ただし，男の子も女の子も同じ確率で生まれるものとする[*6]．

【解答】

1. 「すべて白になる」の余事象なので
$1 - \dfrac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = 1 - \dfrac{4}{\dfrac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}} = 1 - \dfrac{\cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4} \cdot 7} = 1 - \dfrac{1}{21} = \boldsymbol{\dfrac{20}{21}}$
2. 全事象は $2^5 = 32$ 通り，すべて男の子である確率は $\dfrac{1}{32}$，すべて女の子である確率は $\dfrac{1}{32}$，余事象を考えて，$1 - 2 \times \dfrac{1}{32} = \boldsymbol{\dfrac{15}{16}}$.

【練習 18：余事象・加法定理】

1 枚の 100 円玉が 1 枚，4 枚の 10 円玉，5 枚の 1 円玉，合計 10 枚の中から無作為に 3 枚を選ぶ．
「100 円玉が 1 枚含まれる」事象を A,「10 円玉が 2 枚以上含まれる」事象を B とする．

(1) 事象 C「合計金額が 100 円以下」，事象 D「合計金額が 20 円以上」に一致するものを
① $\overline{A}$　② $\overline{B}$　③ $A \cap B$　④ $A \cup B$　からそれぞれ選びなさい．

(2) 確率 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$，$P(D)$ を求めなさい．

【解答】

(1) 事象 C は①，事象 D は④

(2) 全事象は ${}_{10}C_3 = 120$ 通り．

$P(A)$ 100 円玉 1 枚と，100 円玉以外の 9 枚から 2 枚を選んだ場合になるから $P(A) = \dfrac{{}_9C_2}{120} = \dfrac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{120}^{10}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

$P(B)$ 「10 円玉が 2 枚」の確率は $\dfrac{{}_4C_2 \cdot {}_6C_1}{120} = \dfrac{\cancel{6} \cdot \cancel{6}^3}{\cancel{120}\,\cancel{20}^{10}} = \dfrac{3}{10}$,「10 円玉が 3 枚」の確率は $\dfrac{{}_4C_3}{120} = \dfrac{1}{30}$ である．

10 円玉「2 枚」「3 枚」は排反なので $\dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{30} = \dfrac{10}{30} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$P(C) = P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{3}{10} = \boldsymbol{\dfrac{7}{10}}$

$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ であり，$A \cap B$ は「100 円玉 1 枚と 10 円玉 2 枚」の確率 $\dfrac{{}_1C_1 \cdot {}_4C_2}{120} = \dfrac{1}{20}$ であるから

$P(D) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{18 + 20 - 3}{60} = \dfrac{35}{60} = \boldsymbol{\dfrac{7}{12}}$

[*6] 数学の問題では，このように書いていなくても，同じ確率で生まれると仮定する．しかし，実際にそうであるかどうかは，諸説ある．

C.　確率についての「ド・モルガンの法則」

「ド・モルガンの法則」$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ は，確率においても用いられることがある．

確率についての「ド・モルガンの法則」

どんな事象 A，B に関しても，次の**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) が成り立つ．

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right), \qquad P\left(\overline{A \cap B}\right) = P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$$

【例題 19】 ある試行において，$P(A) = 0.4$，$P(B) = 0.5$，$P(A \cap B) = 0.2$ のとき，次の値を求めよ．

1. $P\left(\overline{A \cap B}\right)$　　2. $P(A \cup B)$　　3. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

【解答】

1. $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = \mathbf{0.8}$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.2 = \mathbf{0.7}$
3. $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = \mathbf{0.3}$

3.3　確率の木と独立・従属

複数の試行を行う場合には，樹形図に似た「確率の木」が有効である．

1.　乗法定理と確率の木

A.　確率の乗法定理

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個入った袋から 1 個を玉を取り出し，コイン 1 枚を振る．

コイン1枚を振る
表は $\frac{1}{2}$，裏は $\frac{1}{2}$
$\Longrightarrow$
赤4個，白3個から1個取り出す
赤は $\frac{4}{7}$，白は $\frac{3}{7}$

このとき「表が出て，白い玉を選ぶ確率」を考えると

表が出るのは，1回につき $\frac{1}{2}$ 回 $\Longrightarrow$ 白が出るのは，1回につき $\frac{3}{7}$ 回

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}$ 回につき $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$ 回

であるから，「表が出て，白い玉を選ぶ確率」は $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$ となる．

【例題 20】 上の例において，「裏が出て，赤い玉を選ぶ確率」を求めなさい．

【解答】 裏は $\frac{1}{2}$，赤い玉は $\frac{4}{7}$ の確率なので，$\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \mathbf{\frac{2}{7}}$.

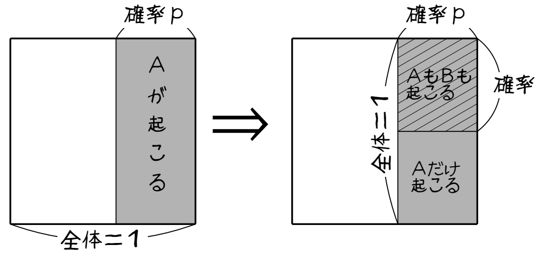
確率の乗法定理

2 つの試行 X, Y を行い

- X の結果，事象 A が起こる確率を p
- （事象 A が起きた後に）
  Y の結果，事象 B が起こる確率を q

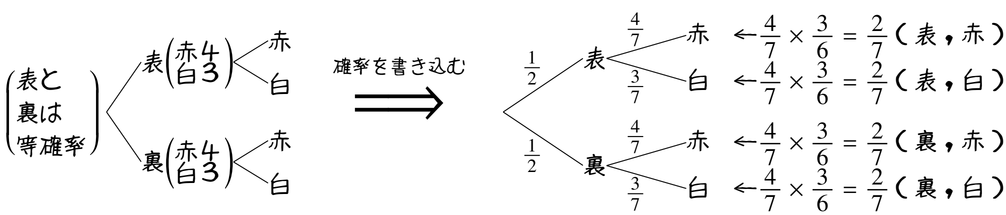
とする．このとき，事象 A, B がともに起こる確率

は pq で与えられる．これを**確率の乗法定理**という．



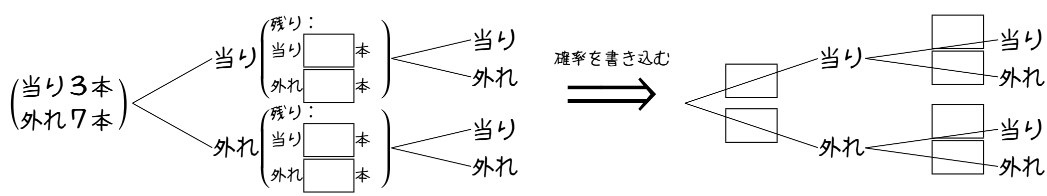
B.　確率の木とは

上で考えた試行は，次のようにまとめられる．



右上のような，樹形図に確率を書き込んだまとめ方を，**確率の木** (probability tree) という．

【例題 21】　当たりが 3 本，外れが 7 本入った箱から，2 回くじを引く．ただし，一度引いたくじは元に戻さない．以下の $\boxed{}$ に，適当な数値を答え，問いに答えよ．

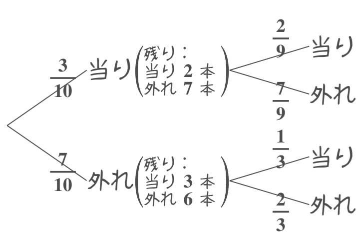


1. 2 回とも当たる確率を求めよ．　　2. 2 回とも外れる確率を求めよ．

【解答】

確率の木は右のようになる．

1. $\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{10}^{5}} \times \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{9}^{3}} = \mathbf{\dfrac{1}{15}}$
2. $\dfrac{7}{\cancel{10}^{5}} \times \dfrac{\cancel{2}}{3} = \mathbf{\dfrac{7}{15}}$

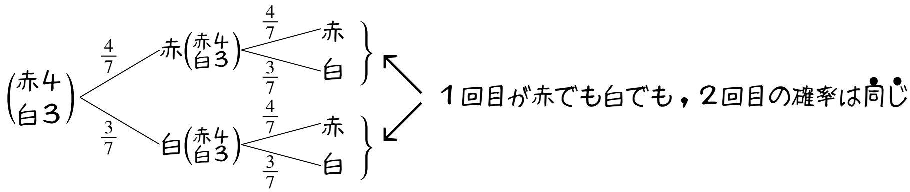


◀2 回とも赤，白，青はそれぞれ排反なので，足すだけでよい．

2.　独立試行・従属試行

A.　独立試行とは

「赤が 4 個，白が 3 個」入った袋から，1 個を選んで元に戻す試行を，2 回繰り返したとき，確率の木にまとめると次のようになる．

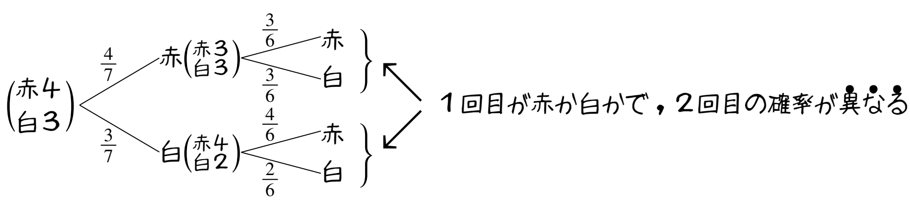


上の例では，1 回目の結果が 2 回目に影響せず，独立している．

試行 X の結果が試行 Y の結果に影響するとき，X, Y は**独立** (independent) である，または，**独立試行** (independent trial) であるという．

B.　従属試行とは

「赤が 4 個，白が 3 個」入った袋から，1 個を選んで元に戻さない試行を，2 回繰り返したとき，確率の木にまとめると次のようになる．



上の例では，1 回目の結果が 2 回目に影響している．

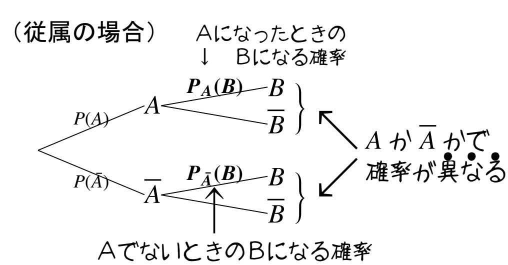
試行 X の結果が試行 Y の結果に影響しないとき，X, Y は**従属** (dependent) である，または，**従属試行** (dependent trial) であるという．

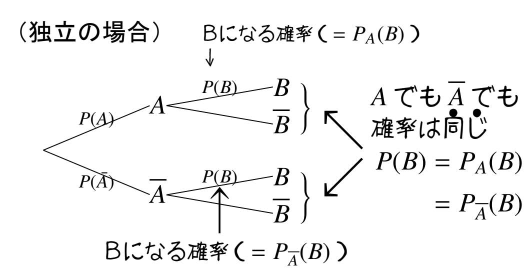
C.　条件付き確率

最初の試行で A になった後，次の試行で B になる確率は $P_A(B)$ で表わされ，「A が起こったときの B の**条件付き確率** (conditional probability) という．

確率の木で見ると，左下図に表れる値が，$P_A(B)$ である．

しかし，A と B が独立の場合は，$P_A(B)$ も $P_{\overline{A}}(B)$ も等しくなって，$P(B)$ に一致する．





これらの記号を用いて，確率の乗法定理は次のように表わされる．

独立・従属と乗法定理

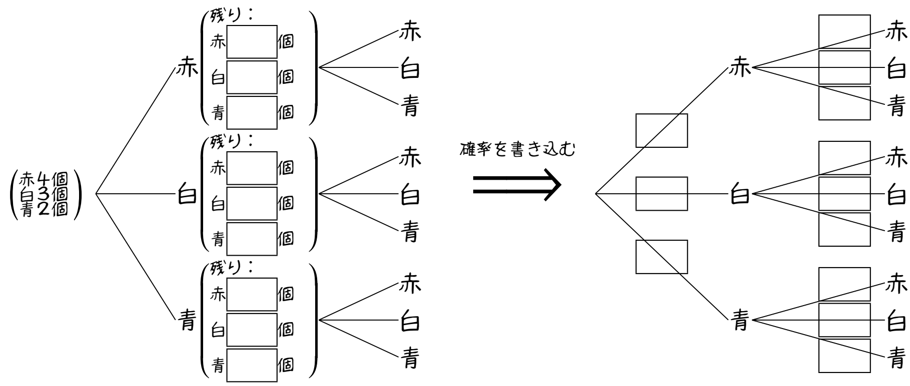
X の事象 A，Y の事象 B について，以下の乗法定理が成り立つ．

A と B が従属ならば，$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$[*7]

A と B が独立ならば，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

【練習 22：確率の木と独立・従属】

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個，青い玉が 2 個入った袋がある．取り出した玉は元に戻さ**ない**で，2 回玉を取り出すことをまとめるとき，以下の $\boxed{}$ に，適当な数値を答え，問いに答えよ．



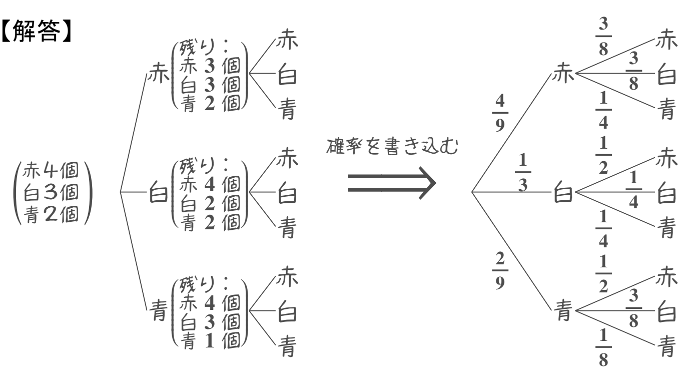
(1) 玉を取り出す 1 回目と 2 回目は，独立か，従属か．

(2) 「1 回目が白」を A，「1 回目が青」を B，「2 回目が青」を C とする．$P_A(C)$, $P_B(C)$ を求めよ．

(3) 2 回とも赤である確率を求めよ．

(4) 2 回とも同じ色である確率を求めよ．

【解答】



(1) 1 回目の色によって 2 回目の確率が異なるので，**従属**である．

(2) 「白→青」から $\boldsymbol{P_A(C)=\frac{1}{4}}$，「青→青」から $\boldsymbol{P_B(C)=\frac{1}{8}}$

(3) $\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}^{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}^{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(4) 2 回とも白である確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

2 回とも青である確率は $\frac{\cancel{2}}{9}\times\frac{1}{\cancel{8}^{4}}=\frac{1}{36}$

(3) と合わせて $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}=\frac{6+3+1}{36}=\boldsymbol{\frac{5}{18}}$

[*7] 逆に，「条件付き確率」を求めるために，等式 $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ を用いることもある（ただし，$P(A)\neq 0$）．

【練習 23：独立・従属・条件付き確率】

(1) A 工場では部品 P，Q，R を使って品物を作る．各部品には色違いがあり，P は 2 個に 1 個が白，Q は 3 個に 1 個が白，R は 4 個に 1 個が白であり，他はすべて黒である．

(a) 真っ白な品物ができる確率を求めよ．

(b) 部品が 1 つだけ白い品物ができる確率を求めよ．

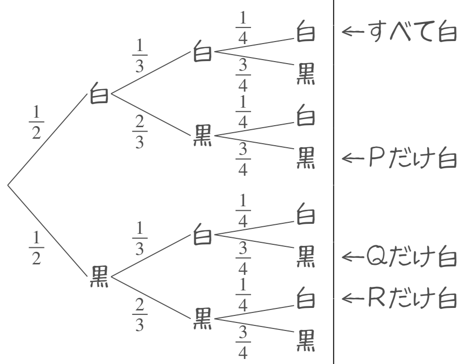
(2) B 工場では，100 個に 1 個不良品が作られてしまう．さらに，不良品を機械がチェックするとき，不良品は必ず見つけ出せるものの，100 回に 1 回，良品を不良品と誤って判断することがある．

(a) 機械が「良品」とチェックする確率を求めよ．

(b) 発展 機械が「不良品」と判断した中に，「良品」が含まれている確率を求めよ．

【解答】

(1) 確率の木にまとめると，右のようになる．



(a) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{24}}$

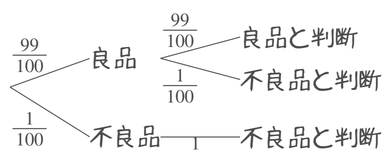
(b) P だけ白は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{24}$

Q だけ白は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{24}$

R だけ白は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{24}$

であるから，$\frac{6+3+2}{24}=\boldsymbol{\frac{11}{24}}$.

(2) 確率の木にまとめると，右のようになる．



(a) $\frac{99}{100}\times\frac{99}{100}=\boldsymbol{\frac{9801}{10000}}$

(b) 不良品と判断される確率は，(a) の余事象になり $1-\frac{9801}{10000}=\frac{199}{10000}$ である．良品が不良品と判断される確率は $\frac{99}{100}\times\frac{1}{100}=\frac{99}{10000}$ である．つまり，$\dfrac{\frac{99}{10000}}{\frac{199}{10000}}=\boldsymbol{\frac{99}{199}}$

D. 「全事象による解き方」と「乗法定理による解き方」

たとえば，「赤 4 個，白 3 個を含む袋から 2 個取り出すとき，赤が 2 個になる確率」は，次の 2 通りの求め方がある．

(I) 全事象による解き方

- 全事象は「赤 4 個，白 3 個の合計 7 個から 2 個選ぶ」を考えて，${}_7C_2=21$ 通り
- 赤 2 個になる場合は「赤 4 個から取り出す 2 個を選ぶ」を考えて，${}_4C_2=6$ 通り

つまり，$\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$ になる．

(II) 乗法定理による解き方

- 1 個ずつ 2 回，順に取り出すと考える．
- 1 回目が赤である確率は $\frac{4}{7}$
- 2 回目も赤である確率は，「赤 3 個，白 3 個」が残りなので $\frac{1}{2}$

つまり，$\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{7}$ になる．

自分のやりやすいやり方で解けばよいが，どちらの解き方も理解しているのが最も良い．

【例題 24】 10 本のうち 3 本が当たりであるくじ A と，20 本のうち 3 本が当たりであるくじ B がある．

1. すべてのくじを区別すれば，全事象は $\boxed{\text{ア}}$ 通り，どちらも当たる事象は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．よって，どちらも当たる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ と求められる．
2. 一方，くじ A が当たる確率は $\boxed{\text{エ}}$，くじ B が当たる確率は $\boxed{\text{オ}}$ であるから，どちらも当たる確率は $\boxed{\text{カ}}$ という式から，やはり $\boxed{\text{ウ}}$ と求められる．

【解答】

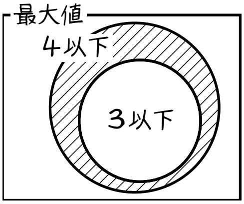
1. 全事象は $10\times 20 = \underline{\mathbf{200}}_{(\text{ア})}$ 通り，両方当たる引き方は $3\times 3 = \underline{\mathbf{9}}_{(\text{イ})}$ 通りあるから，$\dfrac{3\times 3}{10\times 20} = \underline{\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{200}}}_{(\text{ウ})}$
2. 1 つめの当たる確率は $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}}_{(\text{エ})}$，2 つめの当たる確率は $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}}_{(\text{オ})}$，2 つの事象は独立であるから $\underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}\times\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}}_{(\text{カ})} = \dfrac{9}{200}$

E. 発展 さいころの出た目の最大値

例として，さいころ 3 つを振って，出た目の最大値が 4 である確率を考えよう．このとき

- 「3 つのさいころの最大値が 4 である確率」を求めることは難しい．
- 「3 つのさいころの最大値が 4 以下である確率」は簡単に計算できる．

  なぜなら，3 つとも 1,2,3,4 のどれかであればよいので，$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$ である．



「最大値が 4」の確率は，「最大値が 4 以下であるが，3 以下ではない」確率になる．結局，「最大値が 4」の確率は $\left(\dfrac{\cancel{4}^2}{\cancel{6}^3}\right)^3 - \left(\dfrac{\cancel{3}^1}{\cancel{6}^2}\right)^3 = \dfrac{8}{27} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{37}{196}$ と分かる．

【発展 25：さいころの出た目の最大・最小】

3 個のさいころを投げる試行について，以下の問いに答えよ．

1. 「出た目の最大値が 3 になる」確率を求めよ．
2. 「出た目の最小値が 3 になる」確率を求めよ．

【解答】

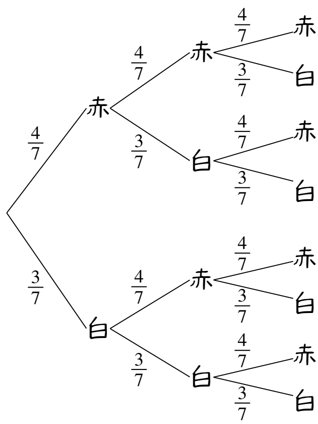
1. 「最大値が 3 以下」の確率 $\left(\dfrac{3}{6}\right)^3$ から「最大値が 2 以下」の確率 $\left(\dfrac{2}{6}\right)^3$ を引けばよいので $\left(\dfrac{\cancel{3}^1}{\cancel{6}^2}\right)^3 - \left(\dfrac{\cancel{2}^1}{\cancel{6}^3}\right)^3 = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{27} = \dfrac{\mathbf{19}}{\mathbf{196}}$.
2. 「最小値が 3 以上」の確率 $\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$ から「最小値が 4 以上」の確率 $\left(\dfrac{3}{6}\right)^3$ を引けばよいので $\left(\dfrac{\cancel{4}^2}{\cancel{6}^3}\right)^3 - \left(\dfrac{\cancel{3}^1}{\cancel{6}^2}\right)^3 = \dfrac{8}{27} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{\mathbf{37}}{\mathbf{196}}$.

3. 反復試行

A. 反復試行とは

互いに独立な同じ試行を複数回行うことを，**反復**（はんぷく）**試行** (repeated trials) という[*8].

赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個入った袋がある．取り出した玉は元に戻し，3 回玉を取り出すことは，右のようにまとめられる．



←確率は $\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^3$

←確率は $\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^2\times\left(\frac{3}{7}\right)$

←確率は $\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^2\times\left(\frac{3}{7}\right)$

⋮

B. 反復試行の確率

例として，「さいころを 5 回振る」試行を考え，「5 回のうち 2 回だけ 1 が出る」確率を求めよう．

1 が出た場合を○，出なかった場合を×で表すと，たとえば次のようになればよい．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
○	×	○	×	×	←○は $\frac{1}{6}$ の確率で，×は $\frac{5}{6}$ の確率で起こる.

この確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ で計算できる．また，次のような場合でもよい．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
×	○	○	×	×	←確率は $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$
×	×	○	○	×	←確率は $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$
		⋮			↑↑↑ すべて同じ確率

5ヶ所から ○ を2つ選べばよい
そのような選び方は ${}_5C_2$ 通り

こうして，$\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$ が ${}_5C_2$ 通りあると分かるので，求める確率は次のようになる．

$${}_5C_2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\cancel{10}^5\times\frac{1}{36}\times\frac{125}{\cancel{216}^{108}}=\frac{625}{3888}$$

【例題 26】 上の例において，「5 回のうちちょうど 4 回だけ 1 が出る」確率を求めなさい．

【解答】 上と同じように○×で表わすと，次のようになる．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	
×	○	○	○	○	←確率は$\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)^1$
○	×	○	○	○	←確率は$\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)^1$
		⋮			

5ヶ所から ○ を4つ選べばよい
そのような選び方は ${}_5C_4$ 通り

よって，${}_5C_4\times\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)=5\times\frac{1}{1296}\times\frac{5}{6}=\mathbf{\frac{25}{7776}}$

*8 重複（ちょうふく）試行と呼ばれる事も多い．

反復試行

試行 X を n 回繰り返し，確率 p の事象 A がちょうど k 回成り立つ確率は

$${}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k}$$

で求められる（$1-p$ は A が起きない確率，$n-k$ は A が起きない回数であることに注意）．

【練習 27：反復試行】

(1) 当たる確率が $\dfrac{1}{10}$ のくじを 5 回引く．そのうちちょうど 3 回当たる確率を求めよ．

(2) さいころ 1 個を 6 回振って，5 以上がちょうど 3 回出る確率を求めよ．

【解答】

(1) ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{10}\right)^3\left(\dfrac{9}{10}\right)^2 = \cancel{10}\times\dfrac{9^2}{\cancel{10^5}\,10^4} = \boldsymbol{\dfrac{81}{10000}}$

◀ 当たらない確率は $1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$ である

(2) 5 以上が出る確率は $\dfrac{1}{3}$，出ない確率は $\dfrac{2}{3}$ であるから

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{\cancel{6}\cdot5\cdot4}{\cancel{3\cdot2}\cdot1}\times\frac{2^3}{3^6} = 20\times\frac{8}{729} = \boldsymbol{\frac{160}{729}}$$

◀ 3^6 は $9\times9\times9$ と考えて計算するとよい．

C.　反復試行の応用

【例題 28】 コイン 1 枚を振って表か裏か記録していき，表が出た回数が 4 回になるまで振り続ける．

1. コインを 4 回振って終わる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．
2. 5 回で終わるのは，4 回目までに表がちょうど $\boxed{\text{イ}}$ 回出て，5 回目が表になる場合である．よって，その確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．
3. 6 回で終わるのは，5 回目までに表がちょうど $\boxed{\text{エ}}$ 回出て，6 回目が表になる場合である．よって，確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．
4. 7 回で終わる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

【解答】

1. **ア**：$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\dfrac{1}{16}}$

2. **イ**：**3**，　**ウ**：4 回目までに表が 3 回出る確率は ${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)$，

   さらに 5 回目で表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ であるから

   $${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2} = \cancel{4}\times\frac{1}{\cancel{2^5}\,2^3} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

3. **エ**：**3**，　**オ**：5 回目までに表が 3 回出る確率は ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$，

   さらに 6 回目で表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ であるから

   $${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2} = \cancel{10}\,5\times\frac{1}{\cancel{2^6}\,2^5} = \boldsymbol{\frac{5}{32}}$$

4. **カ**：${}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}}{\cancel{3\cdot2}\cdot1}\times\dfrac{1}{\cancel{2^7}\,2^5} = \boldsymbol{\dfrac{5}{32}}$

【練習 29：反復試行】

赤 3 個，青 2 個の合計 5 個のボールが入った袋から，玉を 1 個取り出し，色を記録してから元に戻す．これを 5 回繰り返すとき，以下の確率を求めよ．

(1) 赤がちょうど 3 回出る確率　　(2) 赤がちょうど 2 回出る確率　　(3) 赤がちょうど 1 回出る確率

【解答】 5 回とも，赤が出る確率は $\frac{3}{5}$，出ない確率は $\frac{2}{5}$ である．

(1) ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\,\frac{3^3\cdot 2^2}{\cancel{5^5}\,{}^{5^4}} = \frac{2\cdot 27\cdot 4}{625} = \boldsymbol{\frac{216}{625}}$

(2) ${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}\,\frac{3^2\cdot 2^3}{\cancel{5^5}\,{}^{5^4}} = \frac{2\cdot 9\cdot 8}{625} = \boldsymbol{\frac{144}{625}}$

(3) ${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \cancel{5}\cdot\frac{3\cdot 2^4}{\cancel{5^5}\,{}^{5^4}} = \frac{3\cdot 16}{625} = \boldsymbol{\frac{48}{625}}$

【練習 30：反復試行の応用】

さいころ 1 つを振り，1 か 2 が出たら +3 点，他が出たら −2 点になるゲームを考える．

(1) このゲームを 3 回繰り返し，4 点である確率を求めよ．

(2) このゲームを 5 回繰り返し，0 点である確率を求めよ．

【解答】 +3 になる確率は $\frac{1}{3}$，−2 になる確率は $\frac{2}{3}$ である．

(1) +3 が 2 回，−2 が 1 回出ればよいので

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3^3}\,{}^{3^2}} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}.$$

◀ 結局，何回+3 になるかで，最終得点が決まる．

(2) +3 が 2 回，−2 が 3 回出ればよいので

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10\cdot\frac{2^3}{3^5} = \boldsymbol{\frac{80}{243}}.$$

◀ +3 が 2 回出ればよいことは，次の式からも計算できる．
+3 が x 回とすると，得点は $3x + (-2)(5-x) = 5x - 10$ 点，
$5x - 10 = 0$ を解いて $x = 2$.

D. 発展 反復試行で複数の事象を考える

さいころを 6 回振って，そのうち 1 がちょうど 2 回，5 以上がちょうど 2 回出る確率を考えてみよう．

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	
1	1	5か6	5か6	他	他	←確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
1	1	5か6	他	5か6	他	←確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
			⋮			↑↑↑ すべて同じ確率

6ヶ所に「1」を2つ，
「5か6」を2つ，「他」を2つ並べる
そのような並べ方は $\frac{6!}{2!2!2!}$ 通り

この結果，次の式で計算できる．

$$\frac{6!}{2!2!2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2\cdot2}\cdot\cancel{2}}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{3}}{\cancel{6}^{\cancel{2}\,6}\cdot2^2\cdot\cancel{3}^{\cancel{2}\,3}}=\frac{5}{72}$$

【発展 31：3 つ以上の事象がある反復試行】

① さいころを 4 回振って，1 がちょうど 1 回，2 がちょうど 1 回出る確率を求めよ．

② さいころを 6 回振って，1 も 2 も 3 も 2 回ずつ出る確率を求めよ．

【解答】

① 1 が 1 回 $\left(確率\ \frac{1}{6}\right)$，2 が 1 回 $\left(確率\ \frac{1}{6}\right)$，他が 2 回 $\left(確率\ \frac{2}{3}\right)$ 出ればよいので

$$\frac{4!}{1!1!2!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{\cancel{4}^{\cancel{2}}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{2^2}{\cancel{6}\cdot\cancel{6}^3\cdot3^2}=\mathbf{\frac{4}{27}}$$

② $$\frac{6!}{2!2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3\cdot2}}{\cancel{2\cdot2}\cdot2\cdot\cancel{6}^{\cancel{6}\,6^4}}=\mathbf{\frac{5}{2592}}$$

3.4　期待値

1.　確率分布

A.　確率分布とは

たとえば，コイン 2 枚を振って，「表が出た枚数」とそれぞれの確率は，右のような表にまとめられる．

表の枚数	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

このように，起こりうるすべての事象を，確率と共にまとめた表のことを**確率分布** (probability distribution) という．

【例題 32】 次の確率分布の表を完成させなさい．

1. さいころ 2 個を振ったときの，出る目の差

目の差	0	1	2	3	4	5	計
確率							

2. コイン 3 枚を振るときの，表が出る枚数

表の枚数	0	1	2	3	計
確率					

3. 20 本の中に 3 本のあたりくじがあるくじから 2 本引いたときの当たりくじの数

【解答】

1. 目の差は右の表のようになる．全事象は 36 通りなので，確率分布は次のようになる．

目の差	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{5}{18}}$	$\mathbf{\frac{2}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{18}}$	**1**

2. すべて表，すべて裏はともに $\left(\frac{1}{2}\right)^3$，1 枚表は ${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$，2 枚表の場合も ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ となる．

表の枚数	0	1	2	3	計
確率	$\mathbf{\frac{1}{8}}$	$\mathbf{\frac{3}{8}}$	$\mathbf{\frac{3}{8}}$	$\mathbf{\frac{1}{8}}$	**1**

3. 当たりが 0 本は $\frac{{}_{17}\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_2} = \frac{68}{95}$

1 本は $\frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_{17}\mathrm{C}_1}{{}_{20}\mathrm{C}_2} = \frac{51}{190}$

2 本は $\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_2} = \frac{3}{190}$

当り	0	1	2	計
確率	$\mathbf{\frac{68}{95}}$	$\mathbf{\frac{51}{190}}$	$\mathbf{\frac{3}{190}}$	**1**

◂ さいころ 2 個の時は書き出そう．

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	0	1	2	3	4	5
⚁	1	0	1	2	3	4
⚂	2	1	0	1	2	3
⚃	3	2	1	0	1	2
⚄	4	3	2	1	0	1
⚅	5	4	3	2	1	0

◂ 『反復試行 (p.98)』

◂ 乗法定理で考えれば
0 本なら $\frac{17}{20} \times \frac{16}{19}$
1 本なら $2 \times \frac{3}{20} \times \frac{17}{19}$
2 本なら $\frac{3}{20} \times \frac{2}{19}$

起こりうるすべての事象をまとめるので，確率の合計は必ず 1 になる．

2. 期待値

A. 期待値とは

100 本のくじがあり，次の内訳で入っているとしよう．

5000 円が当たる 1 等が 1 本
1000 円が当たる 2 等が 3 本
100 円が当たる 3 等が 15 本

当たる金額	5000	1000	100	0	計
確率	$\dfrac{1}{100}$	$\dfrac{3}{100}$	$\dfrac{15}{100}$	$\dfrac{81}{100}$	1

「当たる金額」について確率分布を書くと，右上のようになる．

このとき，くじを 1 回引いて当たる金額の平均を求めてみよう．たとえば，1 回あたり $\dfrac{1}{100}$ 回，5000 円をもらえるので，「1 等が当たる金額の平均」は $5000 \times \dfrac{1}{100}$ になる．

これらを 2 等，3 等でも繰り返し，次のように求められる．

$$\underbrace{5000 \times \frac{1}{100}}_{1\text{等の分}} + \underbrace{1000 \times \frac{3}{100}}_{2\text{等の分}} + \underbrace{100 \times \frac{15}{100}}_{3\text{等の分}} + \underbrace{0 \times \frac{81}{100}}_{\text{外れの分}} = \frac{5000 + 3000 + 1500 + 0}{100} = \frac{9500}{100} = 95$$

このように計算できる値を，**期待値** (expectation value) という．上の例では，当たる金額の期待値は 95 円である．

上のくじ 1 本の代金が 95 円より少ないならば，このくじを買うことは，平均して「得」である．
逆に，95 円より高いならば，このくじを買うことは「損」である．

期待値

試行 X において，ある値 x についての確率分布が右のようになったとする．そのとき，次の式

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

で計算される値を，x の期待値という．試行 X による期待値は，しばしば $E(X)$ で表わされる．

x の値	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

【例題 33】 さいころを 2 個振って，出た目の和を考える．

1. 目の和の確率分布を完成させなさい．
   ただし，約分はしなくてもよい．
2. 目の和の期待値を求めなさい．

目の和		計
確率		

【解答】

1. 出た目の和は右欄外のようになるので次のようにまとめられる．

目の和	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**

2. $$(2+12)\frac{1}{36} + (3+11)\frac{2}{36} + (4+10)\frac{3}{36} + (5+9)\frac{4}{36} + (6+8)\frac{5}{36} + 7\frac{6}{36}$$
$$= \frac{14 \times (1+2+3+4+5) + 7 \times 6}{36} = 7 \times \frac{2 \times 15 + 6}{36} = \mathbf{7}$$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

【練習 34：期待値】

(1) さいころ 1 個とコイン 1 枚を振り，コインが表ならばさいころの目の 100 倍の金額を，コインが裏ならばさいころの目の 50 倍の金額をもらえるとき，この試行の期待値を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{4}$ の確率で当たるくじがある．これを 4 回引いたとき，当たる回数の期待値を求めよ．

【解答】

(1) コインが表ならば，100，200，300，400，500，600 円のいずれか，コインが裏ならば，50，100，150，200，250，300 円のいずれかがもらえる．どれも確率は $\dfrac{1}{12}$ なので

$$\begin{aligned} &\frac{1}{12}\times(100+200+300+400+500+600\\ &\qquad +50+100+150+200+250+300)\\ =\ &\frac{1}{12}\times 3150=\boldsymbol{\frac{525}{2}}\ \textbf{(円)} \end{aligned}$$

(2) 1 回だけ当たる確率は ${}_4C_1\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{4\times3^3}{4^4}$，

2 回だけ当たる確率は ${}_4C_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{6\times3^2}{4^4}$，

3 回だけ当たる確率は ${}_4C_3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{4\times3}{4^4}$，

4 回とも当たる確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^4$ であるから

$$\begin{aligned} &1\times\frac{\cancel{4}\times3^3}{\cancel{4^4}\,4^3}+\cancel{2}\times\frac{\cancel{6}^{\,3}\times3^2}{\cancel{4^4}\,4^3}+3\times\frac{\cancel{4}\times3}{\cancel{4^4}\,4^3}+\cancel{4}\times\frac{1}{\cancel{4^4}\,4^3}\\ =\ &\frac{27+27+9+1}{4^3}=\frac{64}{4^3}=\mathbf{1} \end{aligned}$$

期待値の計算をするときは，確率分布の表は約分しない方がよい．

第4章　平面図形

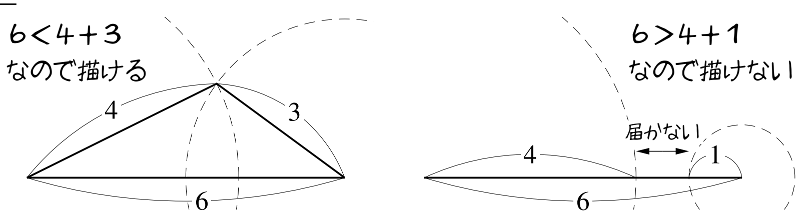
この章では，三角形・四角形・円などの平面図形について成り立つ重要な法則について学ぶ.

4.1　三角形の性質（1）

1.　三角形の成立条件

A.　描ける三角形・描けない三角形

3 辺が 6 cm，4 cm，3 cm の三角形は描けるが，3 辺が 6 cm，4 cm，1 cm の三角形を描くことはできない.



一番長い辺（6 cm）を底辺にして書いてみよう．すると，一番長い辺は，他の 2 辺の和より短くないといけない.

【例題 1】　3 辺が以下で与えられる三角形が，存在するか，存在しないか，答えなさい.

a) 5，3，3　　b) 7，4，3　　c) 8，5，2　　d) 9，6，4

【解答】

a) 存在する　　b) 存在しない　　c) 存在しない　　d) 存在する

B. 三角形の成立条件

3 辺が a, b, c である三角形が存在する条件は，以下のようにまとめられる．

三角形の成立条件

3 辺が a, b, c である三角形が存在する条件は

$c < a+b,\ b < c+a,\ a < b+c$ を全て満たすこと[*1]

である．特に，c が一番長い場合は，$c < a+b$ が成り立てば十分である．

【練習 2：三角形の成立する条件】

(1) 3 辺が $x-2,\ x,\ x+2$ である三角形を考えよう．最大辺は $\boxed{\text{ア}}$ の辺なので，三角形が存在するには $\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ でないといけない．これを解いて，$\boxed{\text{ウ}} < x$ のときに三角形が存在する．

(2) 3 辺が $3,\ 5,\ x+1$ である三角形を考えよう．三角形が成立する条件は，

連立不等式 $\begin{cases} 3 < \boxed{\text{エ}} \\ 5 < \boxed{\text{オ}} \\ x+1 < \boxed{\text{カ}} \end{cases}$ の解であるから，$\boxed{\text{キ}} < x < \boxed{\text{ク}}$ のときに三角形が存在する．

(3) 3 辺が $5,\ x+2,\ 2x+1$ である三角形が成立するための x の条件を求めよ．

【解答】

(1) 最大辺は $\underline{\boldsymbol{x+2}}_{(\text{ア})}$ であるから，$_{(\text{ア})}\underline{\boldsymbol{x+2}} < \underline{\boldsymbol{(x-2)+x}}_{(\text{イ})}$ でないといけない．これを解いて

$$x+2 < 2x-2 \quad \Leftrightarrow \quad {}_{(\text{ウ})}\underline{\boldsymbol{4}} < x$$

(2) 三角形の成立条件となる連立不等式を解くと

$$\begin{cases} 3 < \underline{\boldsymbol{5+(x+1)}}_{(\text{エ})} \\ 5 < \underline{\boldsymbol{(x+1)+3}}_{(\text{オ})} \\ x+1 < \underline{\boldsymbol{5+3}}_{(\text{カ})} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \\ 1 < x \\ x < 7 \end{cases}$$

これらを連立して ${}_{(\text{キ})}\underline{\boldsymbol{1}} < x < \underline{\boldsymbol{7}}_{(\text{ク})}$ を得る．

(3) 三角形の成立条件となる連立不等式を解くと

$$\begin{cases} 5 < (x+2)+(2x+1) \\ x+2 < (2x+1)+5 \\ 2x+1 < 5+(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < 3x \\ -4 < x \\ x < 6 \end{cases}$$

以上を連立して，$\boldsymbol{\dfrac{2}{3} < x < 6}$ を得る．

◀ このとき，$x+2$ も $2x+1$ も正であることが確認できる．

[*1] 「この 3 条件を同時に満たす」ことの必要十分条件として「不等式 $|a-b| < c < a+b$ を満たす」ことを考えてもよい．ただし，絶対値が含まれる分，計算は少しややこしいことがある．

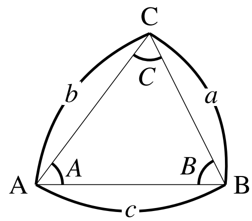
2.　三角形の辺と角

A.　辺と角の名前

　△ABC において，以下のように略すことが多い．

∠A，∠B，∠C の大きさ　⟶　それぞれ A，B，C

辺 BC，CA，AB の長さ ⟶　それぞれ a，b，c



たとえば，角 A の向かい側にある辺 BC を a と表すことになる．

　今後，特に断りのない限りこの記法にしたがうこととする．

B.　辺と角の大小関係

　たとえば，$A = 45°$，$B = 60°$，$c = 6$ を描くと $a < b$ になる．

　また，$a = 3$，$b = 4$，$c = 6$ の △ABC を描くと，角の大きさは $A < B < C$ になる．

　一般に，次のような関係が成り立つ．

三角形の辺と角

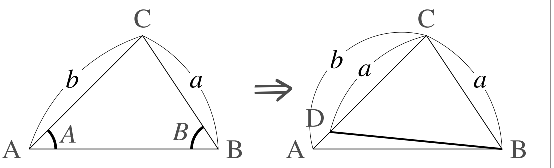
△ABC について，辺の大小と，向かいの角の大小は，一致する．

（証明）$a > b \iff A > B$ を示せばよい．

$a < b$ のとき，辺 AC 上に，CD $= a$ となるよう D をとる．すると

$B > \angle\mathrm{CBD} = \angle\mathrm{CDB} = A + \angle\mathrm{DBA} > A$

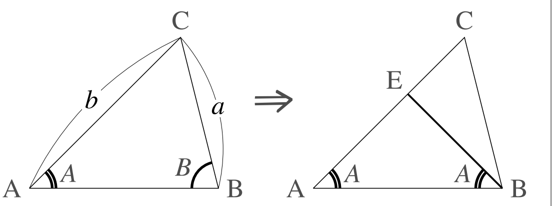
から，$A < B$ が示される．



逆に，$A < B$ であったとする．このとき，$\angle\mathrm{ABE} = A$ となるよう，辺 AC 上に E をとる．すると，△EAB は二等辺三角形であるから

$b = \mathrm{AE} + \mathrm{EC} = \mathrm{BE} + \mathrm{EC} > \mathrm{CB} = a$

から，$a < b$ である．



上の定理は，定理の内容の分かりやすさに比べると，証明が難しい．

【例題 3】　次の三角形について，一番長い辺・短い辺はそれぞれどこか．

1. $A = 50°$，$B = 60°$　　2. $A = 100°$，$B = 30°$　　3. $B = 45°$，$C = 40°$

【解答】

1. $C > B > A$ なので，**AB（$= c$）が一番長く，BC（$= a$）が一番短い**
2. $A > C > B$ なので，**BC（$= a$）が一番長く，AC（$= b$）が一番短い**
3. $A > B > C$ なので，**BC（$= a$）が一番長く，AB（$= c$）が一番短い**

【発展 4：辺の大小と角の大小】

辺 BC が最大である $\triangle ABC$ の辺 AB 上に P をとるとき，$PC < BC$ ……… ①を示そう．

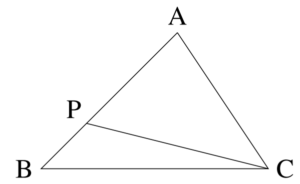
「三角形の辺と角の大小関係」から，①を示すには

$\angle\boxed{ア} < \angle\boxed{イ}$ ……… ②を示せばよい．ここで，$\triangle ABC$ において

は辺 BC が最大であるので，$\angle\boxed{ア} < \angle\boxed{ウ}$ であるから，

$\angle\boxed{イ} - \angle\boxed{ア} > \angle\boxed{イ} - \angle\boxed{エ} = \angle\boxed{オ} > 0$

よって，②が成立することが分かったから，よって，①が示せた．■



【解答】 $\triangle PBC$ について「三角形の辺と角の大小関係」から，

$PC < BC$（①）$\Leftrightarrow \angle\underline{\mathbf{PBC}}_{(ア)} < \angle\underline{\mathbf{BPC}}_{(イ)}$（②）を示せばよい．

辺 BC が $\triangle ABC$ の最大辺なので $\angle PBC < \angle\underline{\mathbf{BAC}}_{(ウ)}$ が成り立つので

$\angle BPC - \angle PBC > \angle BPC - \angle\underline{\mathbf{BAC}}_{(エ)}$ ……………………… ③

$\triangle APC$ について，$\angle BAC + \angle ACP = \angle BPC$ であるから ③ $= \angle\underline{\mathbf{ACP}}_{(オ)} > 0$

よって，$\angle BPC - \angle PBC > 0 \Leftrightarrow PC < BC$ が示せた．■

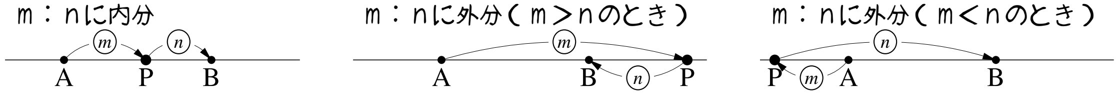
3.　辺の内分・外分

A.　内分とは・外分とは

線分 AB を考え，P を直線 AB 上のどこか（A，B 除く）にとる．

P を線分 AB 内にとるとき「P は線分 AB を**内分** (interior division) する」という．線分の長さの比 $AP : PB = m : n$ となるとき「P は線分 AB を $m : n$ に内分する」という．

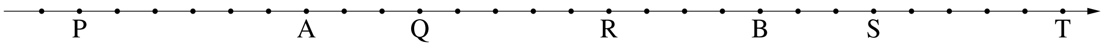
P を線分 AB 外にとるとき「P は線分 AB を**外分** (exterior division) する」という．線分の長さの比 $AP : PB = m : n$ となるとき「P は線分 AB を $m : n$ に外分する」という．



上の図のように「A から P へ，P から B へ」の矢印 2 つで考えると，内分も外分も分かりやすい．
また，P が線分 AB を 1 : 1 に内分するとき，P は中点になる．

【例題 5】

以下の目盛りが等間隔であるとき，$\boxed{}$ に数値を，（　）に「内」「外」のいずれかを入れよ．



・P は AB を $\boxed{\text{ア}}$: $\boxed{\text{イ}}$ に（ **ウ** ）分している　・Q は AB を $\boxed{\text{エ}}$: $\boxed{\text{オ}}$ に（ **カ** ）分している

・R は AB を $\boxed{\text{キ}}$: $\boxed{\text{ク}}$ に（ **ケ** ）分している　・S は AB を $\boxed{\text{コ}}$: $\boxed{\text{サ}}$ に（ **シ** ）分している

・T は AB を $\boxed{\text{ス}}$: $\boxed{\text{セ}}$ に（ **ソ** ）分している

【解答】　線分 AB 上にある Q，R は内分，他は外分である．

- AP = 6，PB = 18 より，6 : 18 = (ア)**1** : **3**(イ) に (ウ)**外**分している
- AQ = 3，QB = 9 より，　3 : 9 = (エ)**1** : **3**(オ) に (カ)**内**分している
- AR = 8，RB = 4 より，　8 : 4 = (キ)**2** : **1**(ク) に (ケ)**内**分している
- AS = 15，SB = 3 より，15 : 3 = (コ)**5** : **1**(サ) に (シ)**外**分している
- AT = 20，TB = 8 より，20 : 8 = (ス)**5** : **2**(セ) に (ソ)**外**分している

【例題 6】　線分 XY の長さを 12 とし，線分 XY を 1 : 2 に内分する点を A，5 : 1 に内分する点を B，1 : 2 に外分する点を C，3 : 2 に外分する点を D とする．

1. XA，XB，XC，XD の長さをそれぞれ求めよ．
2. 比 XA : AB : BY を求めよ．

【解答】

1. $\mathrm{XA} = 12 \times \dfrac{1}{1+2} = \mathbf{4}$，$\mathrm{XB} = 12 \times \dfrac{5}{5+1} = \mathbf{10}$，
   C，D は右欄外のようになるので
   $\mathrm{XC} = \mathrm{XY} = \mathbf{12}$，$\mathrm{XD} = 12 \times \dfrac{3}{3-2} = \mathbf{36}$
2. AB = 10 − 4 = 6，BY = 12 − 10 = 2 より，XA : AB : BY = 4 : 6 : 2 = **2 : 3 : 1**．

【暗記 7 : 3 分割された線分の長さ】

線分 AB を 3 : 5 に内分した点を P，5 : 1 に内分した点を Q とするとき，比 AP : PQ : QB を求めよ．

【解答】　3 + 5 = 8 と 5 + 1 = 6 の最小公倍数は 24 なので，
AP : PB = 3 : 5 = 9 : 15，AQ : QB = 5 : 1 = 20 : 4 と変形して
AP : PQ : QB = 9 : (20 − 9) : 4 = **9 : 11 : 4** と分かる．

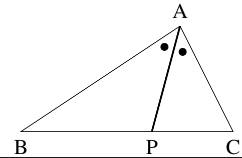
B. 内角の二等分線の定理

三角形の内角を二等分する線は，以下の性質を持つ．

内角の二等分線の定理

$\triangle$ABC について，$\angle$A を二等分する線と辺 BC が P で交わるとき（$\angle$BAP = $\angle$PAC のとき），次が成り立つ．

BP : PC = BA : AC



「A から P へ」二等分線を引いて，BA : AC $\xrightarrow[\text{代えても同じ}]{\text{AをPに}}$ BP : PC と覚えても良い．

（証明）CA // PD となるよう，辺 AB 上に D をとる．このとき

$\angle$APD = $\angle$PAC　　（CA // PD より）

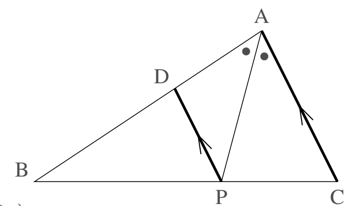
= $\angle$PDA　　（AP は $\angle$A を二等分するから）

であるから，$\triangle$DAP はDA = DP ……… ① の二等辺三角形．よって

AB : AC = DB : DP　　（CA // PD より $\triangle$BDP ∽ $\triangle$BAC であるから）

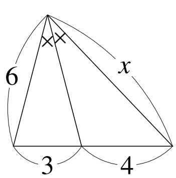
= DB : DA　　（①から）

= BP : PC　　（CA // PD より）■

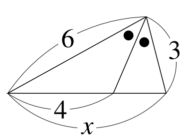


【例題 8】 以下の図について，x の値を求めなさい．

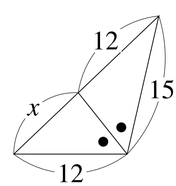
1.



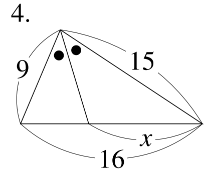
2.



3.



4.



【解答】

1. 6 : x = 3 : 4 であるから，$\boldsymbol{x = 8}$
2. 6 : 3 = 4 : 2 であるから，$x = 4 + 2 = \mathbf{6}$
3. 15 : 12 = 12 : x であるから，$12^2 = 15x$ を解いて $\boldsymbol{x = \frac{48}{5}}$
4. 底辺は 9 : 15 = 3 : 5 で内分されるので，$x = 16 \times \dfrac{5}{3+5} = \mathbf{10}$

◀ 9 : 15 = (16 − x) : x を解いてもよい．

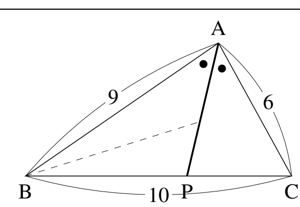
【練習 9：内角の二等分線】

右の $\triangle$ABC について，次の問いに答えよ．

(1) BP，PC の長さを求めよ．

(2) $\angle$B の二等分線と AP の交点を Q とする．AQ : QP を求めよ．

(3) $\angle$C の二等分線と AP の交点を R とする．AR : RP を求めよ．



【解答】

(1) BP : PC = BA : AC = 9 : 6 = 3 : 2 なので，

$\text{BP} = \text{BC} \times \dfrac{3}{3+2} = \mathbf{6}$，$\text{PC} = \text{BC} \times \dfrac{2}{3+2} = \mathbf{4}$

(2) AQ : QP = AB : BP = 9 : 6 = **3 : 2**

(3) AR : RP = AC : CP = 6 : 4 = **3 : 2**

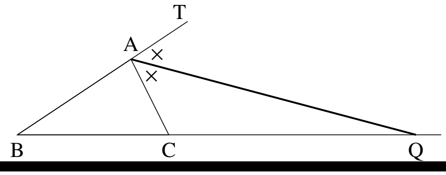
◂Q と R は一致し，内心と呼ばれる．詳しくは p.114 を参照のこと．

C. 外角の二等分線の定理

外角の二等分線の定理

△ABC について，∠A の外角を二等分する線と辺 BC が Q で交わるとき（∠CAQ = ∠QAT のとき），次が成立する．

BQ : QC = AB : AC



「A から Q へ」二等分線を引いて，BA : AC $\xrightarrow[\text{代えても同じ}]{\text{AをQに}}$ BQ : QC と覚えても良い．

【発展 10：外角の二等分線の定理の証明】

「外角の二等分線の定理」を証明せよ．

【解答】 QA // CD となるよう，辺 AB 上に D をとる．このとき

∠ACD = ∠QAC （QA // CD より）

= ∠QAT （AP は ∠A の外角を二等分するから）

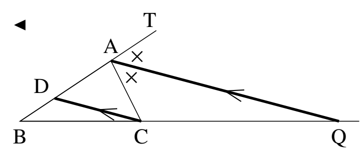
= ∠CDA （QA // CD より）

であるから，△CAD はAC = AD ········ ①の二等辺三角形．よって

AB : AC = AB : AD （①より）

= QB : QC （CA // PD より） ■

◂



（別解）として，直線 AB 上に，CA // QD となるよう D をとる，などの補助線でも証明できる．

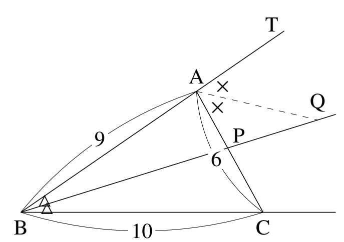
【練習 11：内角・外角の二等分線】

右の △ABC について，次の問いに答えよ．

(1) AP，PC の長さを求めよ．

(2) BQ : QP を求めよ．

(3) ∠C の外角二等分線と直線 BP の交点を R とする．BR : RP を求めよ．



【解答】

(1) AP : PC = AB : BC = 9 : 10 なので，

$$\text{BP} = \text{AC} \times \frac{9}{9+10} = \frac{\mathbf{54}}{\mathbf{19}},\quad \text{PC} = \text{AC} \times \frac{10}{9+10} = \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{19}}$$

(2) $\text{BQ} : \text{QP} = \text{BA} : \text{AP} = \cancel{9}^{1} : \frac{\cancel{54}^{6}}{19} = \mathbf{19 : 6}$

(3) $\text{BR} : \text{RP} = \text{BC} : \text{CP} = \cancel{10}^{1} : \frac{\cancel{60}^{6}}{19} = \mathbf{19 : 6}$

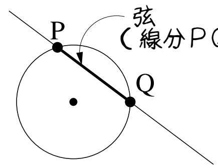
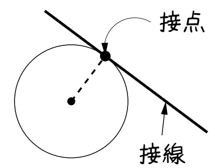
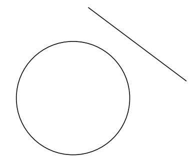
◂Q と R は一致し，傍心と呼ばれる．詳しくは p.122 を参照のこと．

4.2　円の性質（１）〜円の弦・接線

次に学ぶ内心・外心の準備として，円の弦・接線について学ぶ.

A.　円と直線の共有点

円と直線の関係は，共有点の個数によって右の表のようにまとめられる.

円と直線の関係	交わっている	接している	離れている
			
共有点の個数	**2 個**	**1 個**	**0 個**

B.　円の弦ー共有点が２つのとき

弦の垂直二等分線について，次のことが成り立つ.

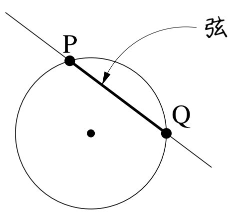
弦の垂直二等分線

円 O と直線 PQ が右のように交わっているとする．このとき

1. 弦 PQ の垂直二等分線は，必ず円の中心を通る.

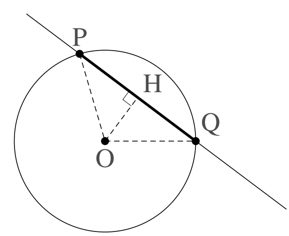
また，逆に，以下も成り立つ.

2. 円の中心を通り弦 PQ に垂直な線は，PQ の中点を通る.
3. 円の中心と弦 PQ の中点を通る直線は，弦 PQ と直交する.



（1. の証明）PQ の垂直二等分線は，P からも Q からも等間隔にある点の集まりであるが，OP = OQ =（円の半径）であるから，O は PQ の垂直二等分線上にある.

（2. の証明）O から PQ へ垂線を引き，その足を H とする.
直角三角形 △OPH と △OQH について，OM は共通，OP = OQ であるから，斜辺ともう 1 辺が等しいので △OPH ≡ △OQH である．つまり，PH = HQ であるから，垂線 PH は弦 PQ の中点を通る.　■

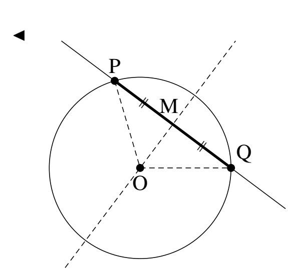


直感的には，直線 OH について線対称であるから，H が弦 PQ の中点になっている.

【練習 12：弦の垂直二等分線】

上の【弦の垂直二等分線】の 3. を証明しなさい.

【解答】　PQ の中点を M とする.
△OPM と △OQM について，OM は共通，OP = OQ，PM = MQ より 3 辺が等しいので △OPM ≡ △OQM，つまり ∠OMP = ∠OMQ である.
よって，OM は PQ の垂直二等分線になっている.

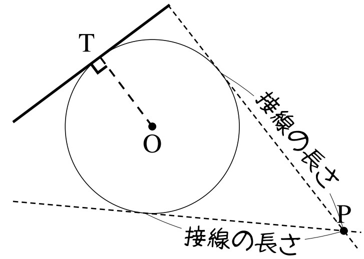


C.　円の接線－共有点が１つのとき

円の接線

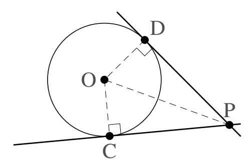
円とその接線について，次のことが成り立つ．

1. 円 O と直線が接点 T で接しているとき，線分 OT は接線と垂直に交わる．
2. 円外の点 P から円へ接線を引くとき，P から接点までの距離を**接線の長さ**という．P からの接線は 2 本引けるが，どちらの接線の長さも等しい．



（1. の証明）接線と OT が垂直に交わらないと仮定する（ ……… ①）．
O から接線へ垂線を引き，その足を H とする．H と T は異なるので，H は円周より外側にある．つまり，OT > OH であるが，直角三角形 OTH について斜辺 OH が一番長くないことになり，矛盾である．
よって，仮定①は誤りであり，接線と OT は垂直に交わる．■

（2. の証明）右図において，PC = PD を示せばよい．
△POC と △POD について，∠POC = ∠POD = 90°，PO は共通，OC = OD から直角三角形の斜辺と他の 1 辺が等しいと分かるので，△POC ≡ △POD になる．よって，PC = PD が示された．■



直観的には，上の図の直線 OP について線対称であるから，接線の長さは等しい．

【練習 13：円と直線】

中心が O である半径 2 の円へ，OP = 5 となる P から接線を 2 本引き，接点を A，B とする．

(1) AB と OP の交点を C とする．△OAP と合同な三角形を 1 つ，相似な三角形を 4 つ答えよ．
（ただし，三角形の頂点は，A，B，C，O，P のいずれかのみを考える）

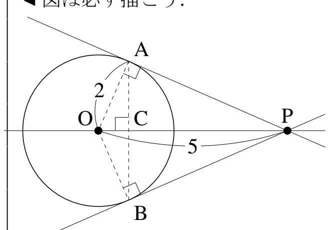
(2) AC，OC の長さをそれぞれ求めよ．

【解答】

(1) OP 共通，OA = OB，PA = PB から，合同な三角形は **△OBP**．
相似な三角形は，すべて，2 角が等しいことから導かれ
直角と ∠APC 共通から **△OAP ∽ △ACP**，
直角と ∠AOC 共通から **△OAP ∽ △OCA**，
直角と ∠OPA = ∠BPC から **△OAP ∽ △BCP**，
直角と ∠AOP = ∠COB から **△OAP ∽ △OCB**．

(2) △OAP について，三平方の定理より PA = $\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$
△OAP ∽ △OCA において，PO : AO = 5 : 2 であるから
AC = PA × $\frac{2}{5}=\boldsymbol{\frac{2}{5}\sqrt{21}}$，OC = OA × $\frac{2}{5}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$．

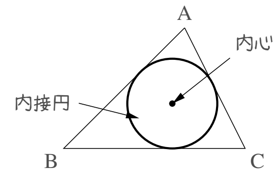
◀ 図は必ず描こう．



円の中心と接点を結ぶと，円の半径と，直角が図の中に現れる．

1. 三角形の内心

A. 内心とは



三角形の 3 つの辺すべてに接する円を，その三角形の**内接円** (inscribed circle) といい，内接円の中心を**内心** (inner center) という

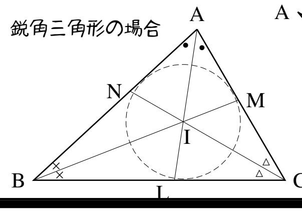
B. 三角形の内心〜角の二等分線の交点

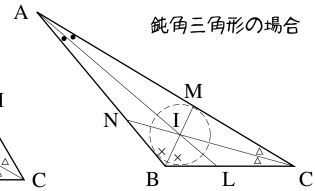
たとえば，辺 AC からも辺 BC からも等距離にあるのは，∠C の二等分線上の点である．同じように考えると，3 辺から等距離にある三角形の内心は，角の二等分線によって決まる．

内心

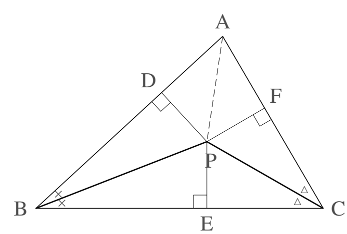
△ABC の 3 本の角の二等分線 AL，BM，CN について，次のことが成り立つ．

・AL，BM，CN は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の内心 I に一致する．



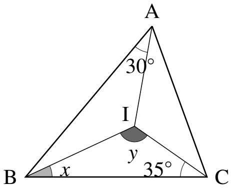


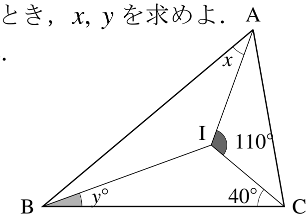
一般に，内接円と辺の接点は L，M，N のいずれにも一致しないので注意すること．
（△ABC が二等辺三角形のときにだけ，一致することがある）

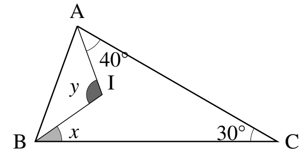


（証明）∠B，∠C の二等分線の交点を P とおく．また，P から辺 AB，辺 BC，辺 CA へ垂線 PD，PE，PF をそれぞれ引く．
まず，△PBD ≡ △PBE である（PB 共通，∠PBD = ∠PBE から斜辺と 1 角が等しい直角三角形になる）から PD = PE ········ ① とわかる．
同様に，△PCE ≡ △PCF から，PE = PF ········ ② である．
△PAD と △PAF について PA 共通，①，②から PD = PF から斜辺と他の 1 辺が等しい直角三角形と分かるので △PAD ≡ △PAF．つまり，∠PAD = ∠PAF となって AP は ∠A の二等分線と分かる．
以上より，3 本の角の二等分線は 1 点 P で交わり，①，②から P はどの辺からも等距離にあるとわかるので，三角形の内心 I と P は一致していることがわかる． ■

【例題 14】 I が $\triangle$ABC の内心であるとき，x, y を求めよ．

1.


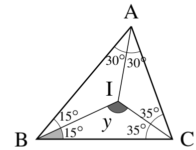
2.


3.


【解答】

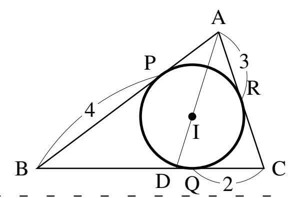
1. $\triangle$ABC について，$2(30^\circ + x + 35^\circ) = 180^\circ$ であるから $\boldsymbol{x = 25^\circ}$，$\triangle$IBC について，$25^\circ + y + 35^\circ = 180^\circ$ であるから $\boldsymbol{y = 120^\circ}$．
2. $\triangle$IAC について，$110^\circ + x + 40^\circ = 180^\circ$ であるから $\boldsymbol{x = 30^\circ}$．$\triangle$ABC について，$2(30^\circ + y + 40^\circ) = 180^\circ$ であるから $\boldsymbol{y = 20^\circ}$，
3. $\triangle$ABC について，$2(40 + x) + 30^\circ = 180^\circ$ であるから $\boldsymbol{x = 35^\circ}$，$\triangle$IAB について，$y + 40^\circ + 35^\circ = 180^\circ$ であるから $\boldsymbol{y = 105^\circ}$．

◀1. の場合，結局次のようになる．



【例題 15】 右の図において，P, Q, R は内接円と辺の接点であり，D は直線 AI 上にある．

1. 3 辺の長さを全て求めよ．
2. BD の長さを求めよ．
3. AI : ID を求めよ．



【解答】

1. AP = AR = 3，BQ = BP = 4，CR = CQ = 2 であるから，**AB = 7**，**BC = 6**，**CA = 5**．
2. AD は ∠A の二等分線であるから，BD : DC = BA : AC = 7 : 5 となり，$\text{BD} = 6 \times \dfrac{7}{7+5} = \boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$．
3. BI は ∠B の二等分線であるから，AI : ID = AB : BD = $7 : \dfrac{7}{2}$ = **2 : 1**．

C. 内接円の半径を求める

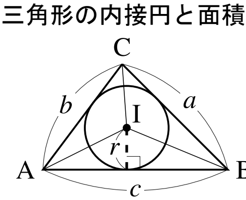
内接円の半径を求めるには，数学 I で学ぶ次の公式を用いる．

三角形の内接円と面積の関係

三角形の面積 S は，内接円の半径 r を用いて

$$S = \triangle\text{BCI} + \triangle\text{CAI} + \triangle\text{ABI} = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

と表すことができる．ここで a，b，c は各辺の長さを表す．



この公式は，必要なときに導くことができれば十分である．ただし，三角形とその内接円を見たら「三角形の面積は計算できる」と連想できるようにしよう．

【練習 16：内心と内接円の性質】

$AB = 7$, $AC = 8$ である $\triangle ABC$ の点 A から辺 BC へ垂線 AH を引くと，$AH = 4\sqrt{3}$ であったという．また，内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする．

(1) 内接円の半径 r を求めよ．　(2) 線分 BD の長さを求めよ．　(3) 線分 AI の長さを求めよ．

【解答】

(1) 三平方の定理より $BH = \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = 1$，$CH = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$ であるから，$BC = 1 + 4 = 5$ になる．よって

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 5 \times 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} r \times (7 + 8 + 5)$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{3} = 10r \qquad \therefore \boldsymbol{r = \sqrt{3}}$$

(2) AD は $\angle A$ の二等分線であるから，$BD : DC = BA : AC = 7 : 8$ となり，

$BD = 5 \times \dfrac{7}{7+8} = \boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$.

(3) $DH = \dfrac{7}{3} - 1 = \dfrac{4}{3}$ であるから，$\triangle ADH$ に三平方の定理を用いると，

$$AD = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{16 + 432}{9}} = \frac{8\sqrt{7}}{3}.$$

一方，BI は $\angle B$ の二等分線なので，$AI : ID = AB : BD = 7 : \dfrac{7}{3} = 3 : 1$.

よって，$AI = \dfrac{8\sqrt{7}}{3} \times \dfrac{3}{3+1} = \boldsymbol{2\sqrt{7}}$.

【暗記 17：接線の長さ】

$AB = 8$, $BC = 7$, $CA = 9$ である $\triangle ABC$ の内接円が，辺 AB，BC，CA と P，Q，R で接している．このとき，AP，BQ，CR の長さを求めよ．

【解答】　$AP = AR = x$, $BQ = BP = y$, $CR = CQ = z$ とおくと

$$\begin{cases} x + y = AB = 8 & \cdots\cdots ① \\ y + z = BC = 7 & \cdots\cdots ② \\ z + x = CA = 9 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

である．①＋②＋③ によって

$$2(x + y + z) = 24 \Leftrightarrow x + y + z = 12 \qquad \cdots\cdots ④$$

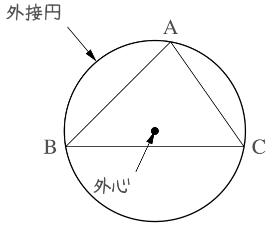
④ − ② から $x = 5$，④ − ③ から $y = 3$，④ − ① から $z = 4$ である．

よって，$\mathbf{AP = 5}$，$\mathbf{BQ = 3}$，$\mathbf{CR = 4}$.

2.　三角形の外心

A.　外心とは

三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円** (circumscribed circle) といい，外接円の中心を**外心** (circumcenter) という．



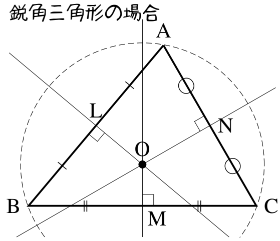
B.　三角形の外心～垂直二等分線の交点

辺の垂直二等分線上のどの点も，その両側の頂点からの距離が等しい．そのため，三角形の外心は辺の垂直二等分線によって決まる．

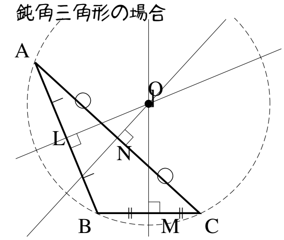
外心

$\triangle$ABC の 3 本の垂直二等分線について，次のことが成り立つ．
- 3 本は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の外心 O に一致する．

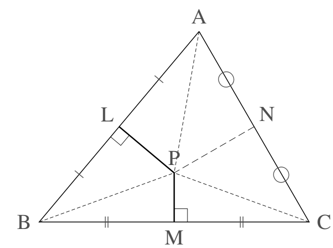
鋭角三角形の場合



鈍角三角形の場合

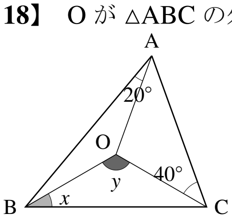


（証明）辺 AB の垂直二等分線，辺 BC の垂直二等分線の交点を P とおく．
$\triangle$PAL と $\triangle$PBL は PL 共通，AL = LB，$\angle$PLA = $\angle$PLB = 90° から 2 辺とその間の角が等しい．よって，$\triangle$PAL ≡ $\triangle$PBL であるから，AL = BL．同様に $\triangle$PBM ≡ $\triangle$PCM から BL = CL．
$\triangle$PAN と $\triangle$PCN について，PN 共通，AN = NC，PA = PC から 3 辺が等しいので $\triangle$PAN ≡ $\triangle$PCN になる．よって $\angle$PNA = $\angle$PNC となり，$\angle$PNA = $\angle$PNC = 90° である．つまり，PN は辺 AC の垂直二等分線に一致し，3 本の垂直二等分線は 1 点 P で交わる．
さらに，PA = PB = PC から P は $\triangle$ABC の外心に一致する．■

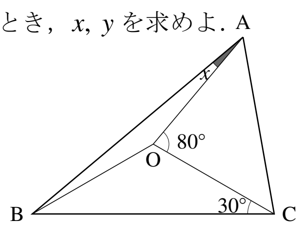


【例題 18】　O が $\triangle$ABC の外心であるとき，x, y を求めよ．

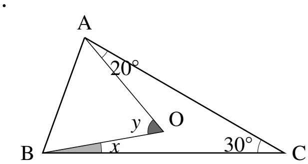
1.



2.



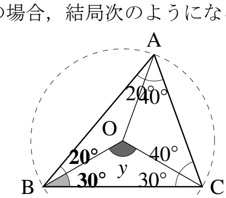
3.



【解答】

1. OA = OC より $\angle$OAC = 40°，OA = OB より $\angle$OBA = 20°，
   OB = OC より $\angle$OCB = x になる．
   $\triangle$ABC について，$2(20° + x + 40°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 30°}$，
   $\triangle$OBC について，$y + 2 \times 30° = 180°$ であるから $\boldsymbol{y = 120°}$．
2. $\triangle$OAC について，$80° + 2\angle\text{OAC} = 180°$ であるから $\angle$OAC = $\angle$OCA = 50°．よって，$\triangle$ABC について，$2(x + 30° + 50°) = 180°$ であるから $\boldsymbol{x = 10°}$．
3. $\triangle$OAC について，OA = OC より $\angle$OCA = 20°，よって，$x = \angle\text{OCB} = 30° - 20° = \mathbf{10°}$．$\triangle$ABC について，$2(\angle\text{OAB} + 10° + 20°) = 180°$ であるから $\angle$OAB = 60° であるから，$\boldsymbol{y = 60°}$．

◀ 1. の場合，結局次のようになる．



◀（別解）円周角の定理より，$y = 2\angle\text{ACB} = 60°$．

外心を含む問題では、必ず外接円を書き込むようにしよう。

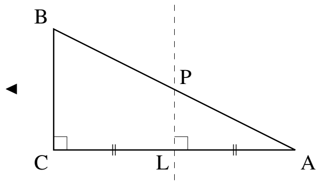
C.　直角三角形の外心

【暗記 19：直角三角形の外心】
∠C = 90° の直角三角形において，辺 CA，CB の二等分線は辺 AB の中点を通ることを示せ．

【解答】　辺 CA の中点を L とし，辺 CA の垂直二等分線と辺 AB の交点を P とする．∠ALP = ∠ACB = 90° より LP // CB であるから，AP : PB = AL : LC = 1 : 1，よって P は辺 AB の中点である．

同様に，辺 CB の中点を M，辺 CB の垂直二等分線と辺 AB の交点を Q とすると，MQ // CA から Q も辺 AB の中点になる．■

◀



直角三角形の外心

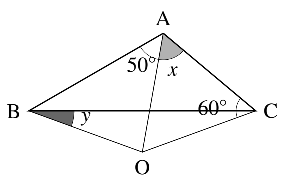
直角三角形の外心は，斜辺の中点に一致する．結果，外接円の半径は斜辺の半分に一致する．

D.　鈍角三角形の外心

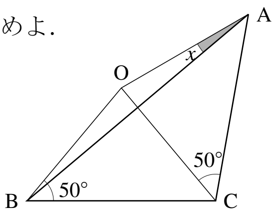
鈍角三角形の外心は，必ず三角形の外になる．詳しくは「円周角の定理の逆」で学ぶ．

【例題 20】　O が △ABC の外心であるとき，x, y を求めよ．

1.



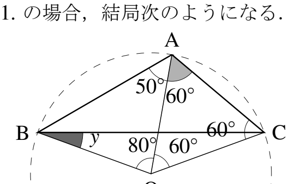
2.



【解答】　△OAB，△OBC，△OCA がすべて二等辺三角形であるから

1. △OAC について，x = ∠OCA = **60°**，∠AOC = 60°．また，△OAB について，∠OAB = 50° なので ∠AOB = 80°，よって ∠BOC = 140° であり，△OBC を考えて $y = \frac{1}{2}(180° - 140°) = \mathbf{20°}$ になる．
2. △OAC について，∠AOC = 180° − 50° × 2 = 80°，△OBC についても ∠BOC = 80°，よって ∠AOB = 160° であり，△OAB を考えて，$\boldsymbol{x = 10°}$．

◀ 1. の場合，結局次のようになる．



E.　外接円の半径を求める

外接円の半径を求めるには，数学 I で学ぶ**正弦定理** (sine theorem) を用いる．

正弦定理

△ABC の外接円の半径 R について $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ が成り立つ．

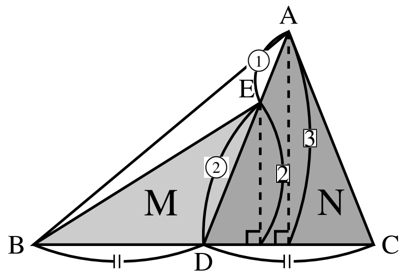
ただし，直角三角形の場合は外接円の半径は斜辺の半分に一致し，正弦定理は必要ない．

3. 三角形の重心

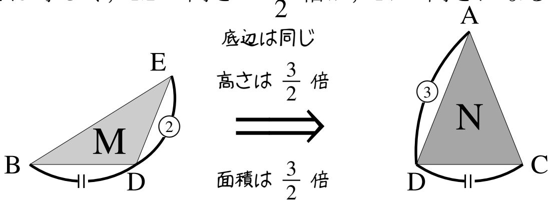
A. ２つの三角形の面積比

面積比を求めるときには，どこを底辺におくかが重要である．

まず，右の三角形 M，N の面積比を考えてみよう．

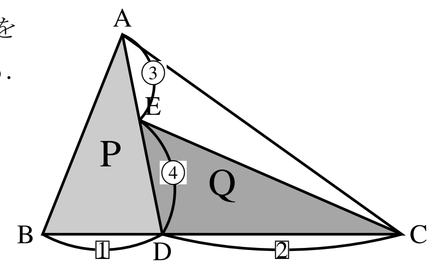


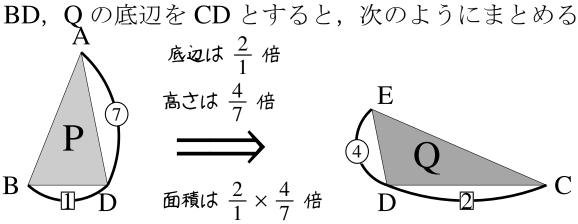
M の底辺を BD，N の底辺を CD とおけば，M，N の底辺の長さは等しく，M の高さの $\frac{3}{2}$ 倍が，N の高さになる．



つまり，M の面積を $\frac{3}{2}$ 倍すると N の面積に等しいと分かるから，M，N の面積比は 2 : 3 である．

次に，右の三角形 P，Q の面積比を考えてみよう．P の底辺を BD，Q の底辺を CD とすると，次のようにまとめることができる．





P の面積を $\frac{2}{1}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{7}$ 倍すると Q の面積に等しいと分かるから，P，Q の面積比は 8 : 7 である．

【練習 21：平面図形の線分の比】

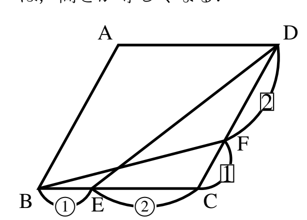
▱ABCD において，辺 BC 上に E を，辺 CD 上に F をとり，BE : EC = 1 : 2，DF : FC = 2 : 1 とする（▱は「平行四辺形」を表す）．

(1) △FEC と △DEC の面積比を求めよ．　(2) △FBC と △DEC の面積比を求めよ．

(3) △FEC と ▱ABCD の面積比を求めよ．

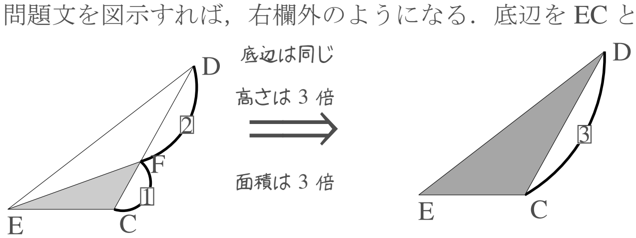
【解答】

◀ DC と EC を底辺と考えた場合は，高さが等しくなる．



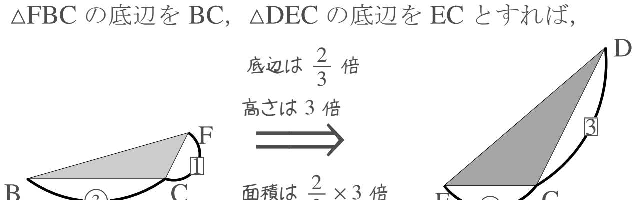
◀ △FBC の底辺を FC，△DEC の底辺を DC としてもよい．

(1) 問題文を図示すれば，右欄外のようになる．底辺を EC とすれば



なので，面積比は **1 : 3** である．

(2) △FBC の底辺を BC，△DEC の底辺を EC とすれば，



なので，面積比は **1 : 2** である．

(3)　△FEC $\overset{3\text{倍}}{\longrightarrow}$ △DEC　　((2) より)

　　$\overset{\frac{3}{2}\text{倍}}{\longrightarrow}$ △DBC　$\left(\begin{array}{l}\text{底辺を EC，BC にとれば，底}\\\text{辺は } \frac{3}{2} \text{ 倍，高さは等しい}\end{array}\right)$

　　$\overset{2\text{倍}}{\longrightarrow}$ ▱ABCD

よって △FEC の $3 \times \dfrac{3}{2} \times 2 = 9$ 倍が ▱ABCD の面積になるので，△FEC と ▱ABCD の面積比は **1 : 9** である．

◀ △FEC $\overset{\frac{3}{2}\text{倍}}{\longrightarrow}$ △FBC $\overset{3\text{倍}}{\longrightarrow}$ △DBC $\overset{2\text{倍}}{\longrightarrow}$ ▱ABCD でもよい．

B.　三角形の重心〜中線の交点

三角形の面積は，中線によって二等分される．

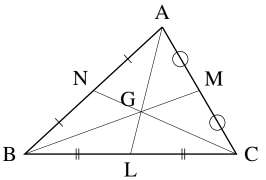
そして，3 本の中線は 1 点で交わる．これを**重心** (centroid, barycenter) という[*2]．

重心

△ABC の 3 本の中線 AL，BM，CN について，次のことが成り立つ．

(1) AL，BM，CN は必ず 1 点で交わり，その交点は三角形の重心 G に一致する．

(2) AG : GL = 2 : 1，BG : GM = 2 : 1，CG : GN = 2 : 1 である．



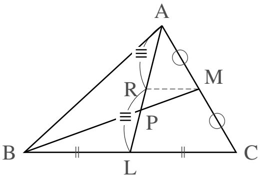
（証明）まず，AL と BM の交点を P，AL と CN の交点を Q とおき，P と Q が一致することを示す．

AL の中点を R とする．△ALC について中点連結定理から

MR // BC ……… ①，RM : LC = 1 : 2 ……… ② になる．

①より，二角相等から △MRP ∽ △BLP と分かるので

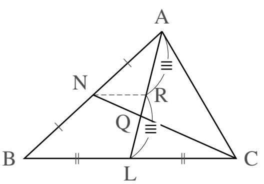
RP : PL = RM : BL = 1 : 2　　（①と BL = LC より）　　………③



である．次に，△ABL について中点連結定理から

NR // BC ……… ④，NR : BL = 1 : 2 ……… ⑤ である．

④から △NRQ ∽ △CLQ と分かるので，やはり RQ : QL = 1 : 2 になる．③とあわせて，P と Q は一致することが分かる．



つまり，AL，BM，CN は 1 点で交わる．これを G とおく．

さらに，④，③から $\text{GL} = \text{AL} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}\text{AL}$ と分かるので，AG : GL = 2 : 1 と分かる．

重心についての別証明が，p.142 にある．

[*2] 直感的には，重さの中心，つり合いの中心が重心である．たとえば，重さが一様な三角形の板を重心で支えると，板は地面に平行になってつり合う．

【練習 22：重心と面積比〜その１〜】

$\triangle ABC = S$ とするとき，$\triangle AGB$, $\triangle BGC$, $\triangle CGA$ をそれぞれ S を用いて表わせ.

【解答】　直線 AG と BC の交点を M とする.

BM = MC, AG : GM = 2 : 1 より，$\triangle AGB = \dfrac{2}{3}\triangle ABM = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}S}$,

$\triangle AGC = \dfrac{2}{3}\triangle ACM = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}S}$ である.

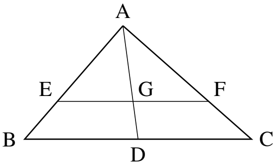
また，$\triangle BGC = S - \dfrac{1}{3}S - \dfrac{1}{3}S = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}S}$ である.

【練習 23：重心と面積比〜その２〜】

$\triangle ABC$ の重心を G とし，直線 AG と辺 BC の交点を D とする．また，G を通り BC に平行な直線が，辺 AB，AC と交わる点を E，F とする.

(1) 相似な三角形の組を 3 組答え，その相似比を答えなさい.

(2) 四角形 EBDG と $\triangle ABC$ の面積比を答えよ.



【解答】

(1) EF // BC から $\boldsymbol{\triangle AEG \backsim \triangle ABD}$, $\boldsymbol{\triangle AGF \backsim \triangle ADC}$, $\boldsymbol{\triangle AEF \backsim \triangle ABC}$ であり，AG : AD = 2 : 3 から，相似比はすべて **2 : 3**.

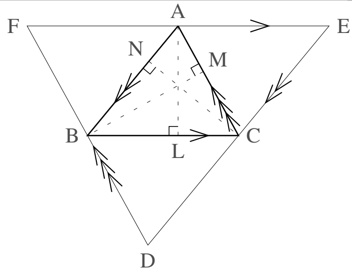
(2) $\triangle ABC = S$ とおくと，$\triangle ABD = \dfrac{1}{2}S$．$\triangle ABD : \triangle AEG = 3^2 : 2^2$ より，$\triangle AEG = \dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{2}S = \dfrac{2}{9}S$ であるから，四角形 EBDG $= \dfrac{1}{2}S - \dfrac{2}{9}S = \dfrac{5}{18}S$．よって，四角形 EBDG : $\triangle ABC = \dfrac{5}{18}S : S = \mathbf{5 : 18}$.

4. 三角形の五心

A. 垂心

垂心

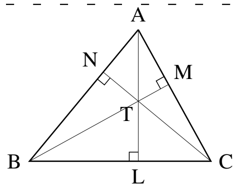
△ABC の 3 本の垂線は必ず 1 点で交わる．その交点を**垂心** (orthocenter) という．



（証明）　（別証明が p.128 にもある）
AB // ED, BC // FE, CA // DF であり，△ABC に外接する △DEF を，右図のように作る．また，点 A，B，C から下ろした垂線の足を，それぞれ L，M，N とおく．
四角形 ABCE，ACBF は平行四辺形になるので BC = AE，BC = AF と分かり，A は線分 EF の中点である．さらに，∠EAL = ∠ALB = 90° から，線分 AL は線分 EF の垂直二等分線になる．
同様に，線分 BM は線分 DF の垂直二等分線，線分 CN は線分 DE の垂直二等分線になっている．
△DEF の 3 本の垂直二等分線は外心で交わるから，AL，BM，CN は 1 点で交わる．■

【例題 24】 右図の三角形について次の問いに答えよ．

1. 右図に相似な三角形を全て書き出しなさい．
（ただし，補助線を引かないものとする）
2. ∠CAL = 25°，∠ABM = 20° のとき，∠TCL を求めよ．



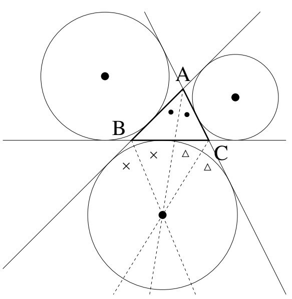
【解答】

1. **△ABM ∽ △ACN ∽ △BTN ∽ △CTM**,
△BCN ∽ △BAL ∽ △ATN ∽ △CTL,
△CAL ∽ △CBM ∽ △BTL ∽ △ATM の 3 組ある．
2. △ABM ∽ △ACN より ∠ACN = ∠ABM = 20° なので，△ACL に着目すれば，∠TCL = 90° − 20° − 25° = **45°**.

B. 三角形の傍心 ～ 傍接円の中心

傍心 ～ 傍接円の中心

△ABC について，直線 AB，BC，CA のすべてに接する円は，△ABC の外側に 3 つ存在し，これを**傍接円** (escribed circle) という．また，傍接円の中心を**傍心** (excenter) という．
そして，∠B の外角の二等分線，∠C の外角の二等分線と，∠A の（内角の）二等分線は必ず 1 点で交わり，それは傍心の 1 つに一致する．また，A，B，C を入れ替えて考えれば，他の傍心のいずれかに一致する．



証明は p.143 を参照のこと．

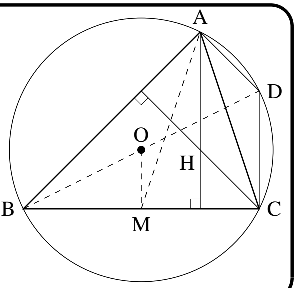
C. 三角形の五心

三角形の五心

どんな三角形も次の性質を持ち，重心・内心・外心・垂心・傍心をまとめて三角形の五心[*3]という．

- 3 本の中線は 1 点で交わり，それは重心に一致し，重心は中線を 2 : 1 に内分する．
- 3 本の角の二等分線は 1 点で交わり，それは内接円の中心である内心に一致する．
- 3 本の垂直二等分線は 1 点で交わり，それは外接円の中心である外心に一致する．
- 3 本の垂線は 1 点で交わり，それは垂心と定義される．
- 2 本の外角の二等分線と，残り 1 角の内角の二等分線は 1 点で交わり，それは傍接円の中心である傍心に一致する．

【発展 25：オイラー線～外心・重心・垂線を通る線】

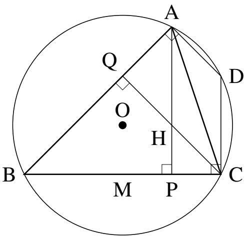


鋭角三角形 ABC があり，外心を O，垂心を H，重心を G とする．また，辺 BC の中点を M とし，D を線分 BD が外接円の直径となるようにとる．

1. 四角形 ADCH は平行四辺形であることを示せ．
2. AH = 2OM を示せ．
3. 3 点 H，G，O は同一直線上にある（この直線を**オイラー線** (Euler's line) という）ことを示し，HG : GO を求めよ．

【解答】 A，C から下ろした垂線の足を，それぞれ P，Q とする．

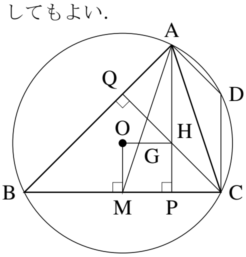
1. BD は直径であるから，∠DCB = 90° になる．よって
∠APB = ∠DCB = 90° から同位角が等しいので，AP // DC．
同様に，∠DAB = ∠CQB = 90° から CQ // DA であり，向かい合う 2 組の辺が平行なので，四角形 ADCH は平行四辺形である．



2. BO = OD，BM = MC から中点連結定理より 2OM = DC．さらに，▱ADCH について AH = DC が成り立つから，AH = 2OM となる．

◀ （別解）△BOM ∽ △BDC と，相似比が 1 : 2 であることを直接示してもよい．

3. ∠AGH = ∠MGO を示せばよい．
△AHG と △MOG について, まず, G が重心であるから AG : GM = 2 : 1 である．これと2を合わせて，AH : OM = AG : GM = 2 : 1 が成り立つ．
また，AP も OM も辺 BC と垂直に交わるから AP // OM であり，∠HAG = ∠OMG が分かる．つまり，2 辺の比とその間の角が等しいから △AHG ∽ △MOG である．
よって，∠HGA = ∠OGM であるから，O，G，H は同一直線上にあると分かる．さらに，相似比から HG : GO = 2 : 1 である．



[*3] このうち，特に重要な重心・内心・外心をまとめて三角形の三心ということもある．

1. 円に内接している四角形

A. 円周角の定理について

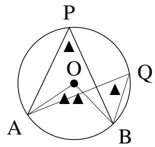
中学校で学んだ円周角の定理は，次のように表すことができる．

円周角の定理

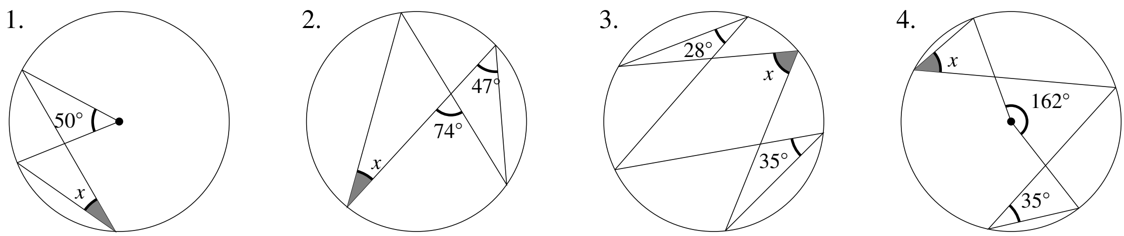
中心が O である円の円周上に，A，B，P が固定されているとき

(1) $\angle AOB = 2\angle APB$ である．

(2) P を含む側の弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上に Q をとるとき，$\angle APB = \angle AQB$ である．



【例題 26】 以下の図について，x, y を求めよ．

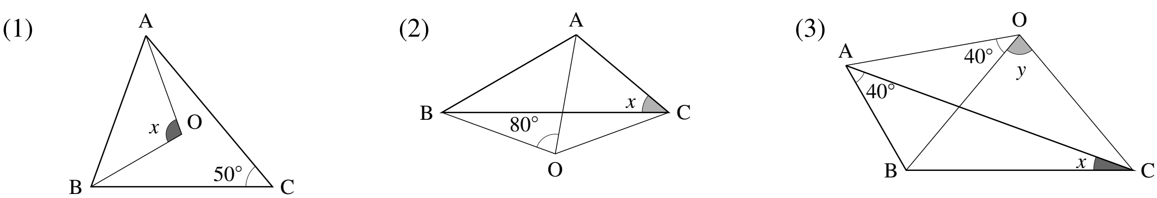


【解答】

1. $2x = 50$ より $\boldsymbol{x = 25°}$
2. $x + 47° = 74°$ より $\boldsymbol{x = 27°}$
3. $28° + 35° = x$ より $\boldsymbol{x = 63°}$
4. $2x+2\times35° = 162°$ より $\boldsymbol{x = 46°}$

【練習 27：外心と円周角の定理】

O が △ABC の外心であるとき，x を求めよ．



【解答】

(1) $x = 2\angle ACB = \boldsymbol{100°}$

(2) $2x = \angle AOB = 80°$ から $\boldsymbol{x = 40°}$

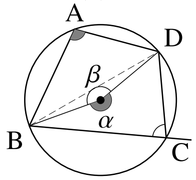
(3) $2x = 2\angle AOB = 40°$ から $\boldsymbol{x = 20°}$，$y = 2\angle BAC = \boldsymbol{80°}$

外心が与えられた場合は，図に外接円を書き込むようにしよう．

B. 円に内接する四角形の性質〜四角形の対角の和

四角形 ABCD が円に内接しているとき，右のように α, β をおくと，『円周角の定理』の (1) から

A は右図の $\dfrac{1}{2}\alpha$ と等しく，C は右図の $\dfrac{1}{2}\beta$ と等しい.



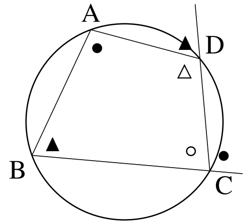
よって，$A + C = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^\circ$ とわかる.

また，変形して $A = 180^\circ - C$ となるので，A は角 C の外角に等しい.

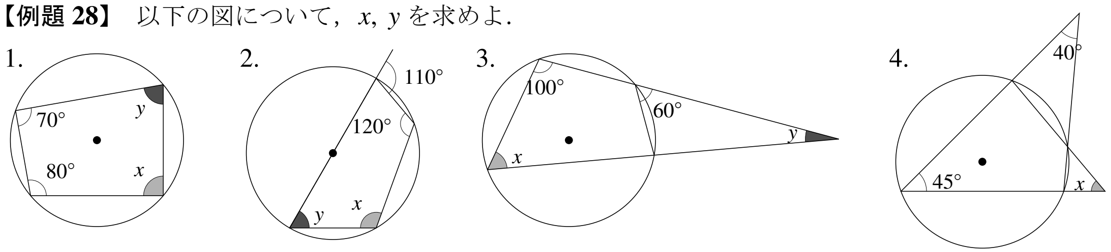
円に内接する四角形の対角

円に内接する四角形において，以下が成立する.

- 向かい合う角（対角）どうしを足すと 180° になる．つまり
  $A + C = 180^\circ$, 　　　$B + D = 180^\circ$
- どの角も，向かいの頂点の外角に等しい，たとえば
  $A =$（∠C の外角）$= \bullet$，$B =$（∠D の外角）$= \blacktriangle$



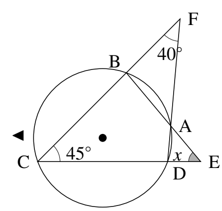
【例題 28】 以下の図について，x, y を求めよ.



【解答】

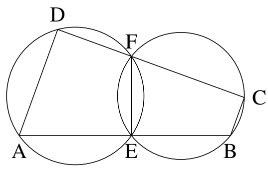
1. $x = 180^\circ - 70^\circ = \mathbf{110^\circ}$，$y = 180^\circ - 80^\circ = \mathbf{100^\circ}$
2. $\boldsymbol{x = 110^\circ}$，$y = 180^\circ - 120^\circ = \mathbf{60^\circ}$
3. $\boldsymbol{x = 60^\circ}$，$y = 180^\circ - 100^\circ - 60^\circ = \mathbf{20^\circ}$
4. 右のように A から F までとると，△FCD から ∠FDE = 40° + 45° = 85°，∠DAE = ∠C = 45° なので，$x = 180^\circ - 85^\circ - 45^\circ = \mathbf{50^\circ}$

◀



【練習 29：円に内接する四角形】

右図において，AD // BC を示せ.
ただし，D，F，C は一直線上にあり，
A，E，B も一直線上にあるとする.



【解答】 辺 BC を C の方へ伸ばし，伸ばした線上に G をとる.

四角形 ADFE は円に内接するので，∠D = ∠FEB，四角形 FEBC は円に内接するので，∠FEB = ∠FCG であるから，∠D = ∠FCG になる．つまり，錯角が等しいから，AD // BC になる. ■

◀ 別解として，以下を示してもよい.
- ∠D + ∠C = 180°
- ∠A = ∠B の外角
- ∠A + ∠B = 180°

2.　四角形が円に内接する条件

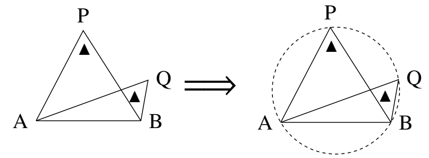
前ページで学んだことは逆も成立し，そのまま四角形が円に内接する条件となる．

A.　円周角の定理の逆

円周角の定理の (2) は「(仮定) P を含む側の弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上に Q がある ⇒ (結論) ∠APB = ∠AQB」となるが，この命題は逆も成立する．

円周角の定理の逆

P，Q は線分 AB に対して同じ側にあり，
∠APB = ∠AQB であったとする．
このとき，A，B，P，Q は同一円周上にある[*4]．
(四角形 ABPQ は円に内接する)



(証明) は p.144 を参照のこと．

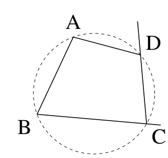
B.　「四角形の対角の和」の逆

「円に内接する四角形の対角」(p.125) も逆が成立する．

四角形が内接する条件 (4 点が同一円周上にある)

次のいずれかが成り立てば，四角形 ABCD は円に内接し (4 点 A，B，C，D は同一円周上にあり)，他の 3 つも成り立つ．

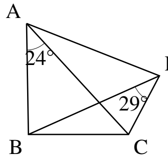
- ∠A + ∠C = 180°，　∠B + ∠D = 180° (対角の和が 180°)
- ∠A = ∠C の外角，　∠B = ∠D の外角 (対角の外角と等しい)

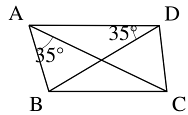


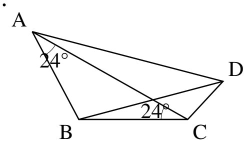
(証明) は p.144 を参照のこと．

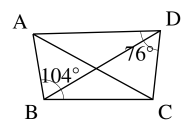
【例題 30】

次の四角形のうち，円に内接するものを 1 つ選べ．

1. 

2. 

3. 

4. 

【解答】　円に内接するのは **4.**

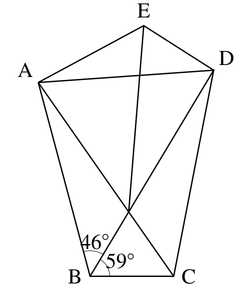
1. 円周角の定理の逆が不成立
2. 等しい角は円周角の定理の逆に対応しない　　3. 2. と同じ
4. 「四角形の対角の和」の逆が成り立つ

---

*4　「A，B，P，Q は同じ一つの円の周上にある」という意味

【例題 31】

1. $\angle ACD = 46^\circ$ のとき，円に内接する四角形はどれか．また，その根拠を答えよ．
2. $\angle AED = 134^\circ$ のとき，円に内接する四角形はどれか．また，その根拠を答えよ．
3. AC と BD の交点を F とする．四角形 ABCD，四角形 AFDE がどちらも円に内接するとき，59° に等しい角をすべて求めよ．ただし，右図に補助線を引かずに得られる角のみを答えること．



【解答】

1. **円周角の定理の逆**により，**四角形 ABCD** が円に内接する．
2. **四角形の対角の和の逆**により，**四角形 ABDE** が円に内接する．
3. 四角形 ABCD が円に内接するから $\angle DAC = \angle DBC = 59^\circ$，四角形 AFDE が円に内接するから $\angle DAC = \angle DBF = 59^\circ$，よって，$59^\circ$ に等しいのは **$\angle$DAC**，**$\angle$DBF** の２つ．

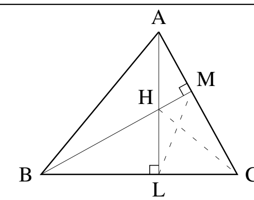
◀ $\angle$DAC は $\angle$DAF でもよい．

【練習 32：四角形の内接】

$\triangle$ABC の A，B から垂線 AL，BM を引き，交点を H とする．

(1) A，B，C，H，L，M のいずれかを頂点とする四角形のうち，円に内接するもの 2 つを答えなさい．

(2) $\angle CAL = 15^\circ$，$\angle ABM = 25^\circ$ のとき，$\angle$ALM，$\angle$HCL の大きさを求めよ．



【解答】

(1) $\angle CMH + \angle CLH = 180^\circ$ から，**C，M，H，L は同一円周上にある．**
また，$\angle AMB = \angle ALB$ から，**A，M，L，B は同一円周上にある．**

◀『円周角の定理の逆』(p.126)

◀『四角形の対角の和の逆』(p.126)

(2) 四角形 AMLB について，円周角の定理より $\angle ALM = \angle ABM =$ **25°**．
また，$\angle HCL = \angle HML = \angle BAL$ である．$\triangle$ABM に着目して，$\angle BAL = 90^\circ - 15^\circ - 25^\circ = 50^\circ$ であるから，**$\angle HCL = 50^\circ$**．

◀順に，四角形 CMHL，四角形 AMLB について，円周角の定理を用いた）

直角が向かい合う四角形を見たら，円に内接することを連想できるようにしよう．

【暗記 33：円周角の定理の逆】

線分 AB があり，線分 AB を直径とする円の円周を K とする．以下の $\boxed{}$ に「内部」「周上」「外部」のいずれかを入れよ．

- $\angle$APB が鋭角ならば，P は K の $\boxed{\text{タ}}$ にある．
- $\angle$APB が直角ならば，P は K の $\boxed{\text{チ}}$ にある．
- $\angle$APB が鈍角ならば，P は K の $\boxed{\text{ツ}}$ にある．

【解答】 タ：外部，　チ：周上，　ツ：内部

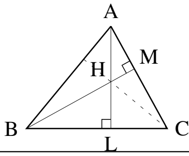
上の 3 点の証明は p.144 を参照のこと．

【練習 34：垂心についての別証明】

$\triangle ABC$ の A，B から垂線 AL，BM を引き，交点を H とする．

(1) $\angle HCL = \angle LAB$ を証明せよ．

(2) 直線 CH と辺 AB の交点を N とする．$CN \perp AB$ を示せ．



【解答】

(1) $\angle CMH + \angle CLH = 180°$ から，四角形 CMHL は同一円周上にある．また，$\angle AMB = \angle ALB$ から，四角形 AMLB は同一円周上にあるので

$\angle HCL = \angle HML$　（四角形 CMHL について，円周角の定理より）

$\qquad = \angle BAL$　（四角形 AMLB について，円周角の定理より）

(2) (1) より $\angle HCL = \angle LAB$，対頂角より $\angle AHN = \angle CHL$ から，2 角が等しいので $\triangle AHN \backsim \triangle CHL$，よって，$\angle ANH = \angle CLH = 90°$． ■

【練習 35：垂心と内心】

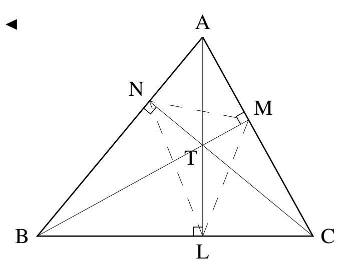
鋭角三角形 ABC の各頂点から，垂線 AL，BM，CN を引く．$\triangle ABC$ の垂心が，$\triangle LMN$ の内心であることを示せ．

【解答】　NT，LT，MT がすべて，$\triangle LMN$ の内角二等分線になることを示せばよい．

◂ 実際には，このうち 2 つを示せば十分である．

まず，$\angle ANT + \angle AMT = 90° + 90° = 180°$ であるから，四角形 ANTM は円に内接する．同様にして，四角形 BNTL，CMTL も円に内接する．また，$\angle AMB = \angle ALB = 90°$ から四角形 AMLB は円に内接する．同様にして，四角形 BNMC，CLNA も円に内接する．以上より，

◂



$\angle MNT = \angle MAT$　（四角形 ANTM について，円周角の定理より）

$\qquad = \angle LBT$　（四角形 AMLB について，円周角の定理より）

$\qquad = \angle TML$　（四角形 BNTL について，円周角の定理より）

であるから，NT は $\angle LNM$ の二等分線になる．また

$\angle NLT = \angle NBT$　（四角形 BNTL について，円周角の定理より）

$\qquad = \angle MCT$　（四角形 BMMC について，円周角の定理より）

$\qquad = \angle MLT$　（四角形 CMTL について，円周角の定理より）

$\angle LMT = \angle LCT$　（四角形 CMTL について，円周角の定理より）

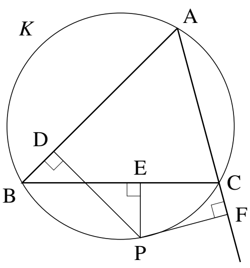
$\qquad = \angle NAT$　（四角形 CLNA について，円周角の定理より）

$\qquad = \angle NMT$　（四角形 ANTM について，円周角の定理より）

であるから，LT，MT は $\angle NLM$，$\angle LMN$ の二等分線になる．よって，T は $\triangle LMN$ の内心である．

【発展 36：シムソン線】

△ABC と外接円 K を考える．A を含まない弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 上に P をとり，P から直線 AB，BC，CA へ引いた垂線の足を D，E，F とする．ただし，線分 AP が円 K の直径でないように，P をとる．



① A，B，C，D，E，F，P のいずれかを頂点とする四角形のうち，円に内接するものは 4 つある．そのうち 1 つは四角形 ABPC であるが，他の 3 つを答えなさい．

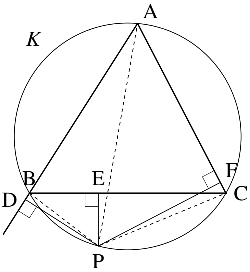
② D か F の一方は △ABC の辺上にあり，他方は辺上にないことを示せ．

③ 3 点 D，E，F は同一直線上にあることを示せ（この直線を**シムソン線** (Simson line) という）．

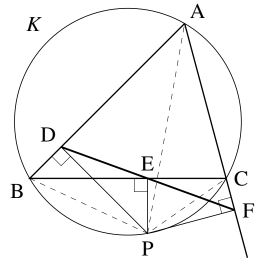
【解答】

① **四角形 ADPF**（$\angle \mathrm{ADP} + \angle \mathrm{AFP} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ より）
四角形 BDEP（$\angle \mathrm{BDP} = \angle \mathrm{BEP} = 90^\circ$ より）
四角形 CEPF（$\angle \mathrm{PEC} + \angle \mathrm{PFC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ より）

② $\angle \mathrm{PBA} < 90^\circ$ のとき D は辺 AB 上にある．このとき，$\angle \mathrm{PBA} + \angle \mathrm{PCA} = 180^\circ$ から $\angle \mathrm{PCA} > 90^\circ$ となり，F は辺 AC 上にはないと分かる．
AP は直径でないので，$\angle \mathrm{PBA} = 90^\circ$ にはならない．
$\angle \mathrm{PBA} > 90^\circ$ のとき D は辺 AB 上にない．このとき，$\angle \mathrm{PBA} + \angle \mathrm{PCA} = 180^\circ$ から $\angle \mathrm{PCA} < 90^\circ$ になって，F は辺 AC 上にはあると分かる．
以上より，題意は示された．



③ $\angle \mathrm{DEB} = \angle \mathrm{CEF}$ であることを示せばよい．まず，四角形 BDEP，四角形 CEPF は円に内接するので，
$\angle \mathrm{DEB} = \angle \mathrm{DPB}$，$\angle \mathrm{CEF} = \angle \mathrm{CPF}$ ……… ① である．一方，
四角形 ABPC が円に内接するので $\angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{BPD} + \angle \mathrm{DPC} = 180^\circ$，
四角形 ADPF が円に内接するので $\angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{DPC} + \angle \mathrm{CPF} = 180^\circ$ である．よって，$\angle \mathrm{BPD} = 180^\circ - \angle \mathrm{BAC} - \angle \mathrm{DPC} = \angle \mathrm{CPF}$ とわかる．
これと①を合わせて $\angle \mathrm{DEB} = \angle \mathrm{CEF}$ であるから，D，E，F は同一直線上にあることは示された．



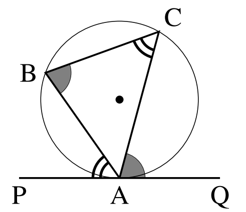
3. 接弦定理

接弦定理

△ABC が円に内接し，A で円に接する直線 PQ が引いてある．
このとき，次が成り立つ．

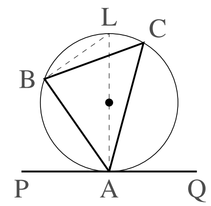
$\angle BAP = \angle BCA, \qquad \angle CAQ = \angle CBA$

これを，**接弦定理**という．



（証明・鋭角のとき）直線 AO と円周の交点を L とし，直径 AL を考える．
円周角の定理より $\angle ABL = 90°$ であるから，△ABL について
$\angle BLA + \angle BAL = 90°$ ……… ② である．よって

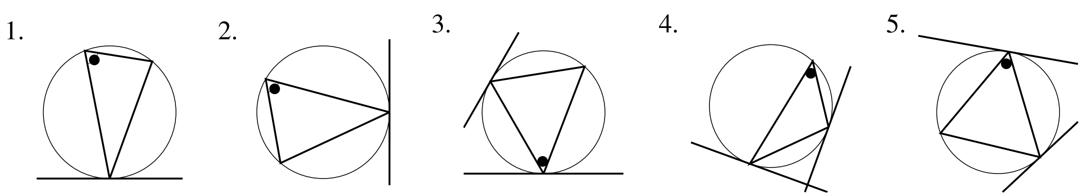
$\angle BAP = 90° - \angle BAL = \angle BLA$　（②より）
$\qquad\qquad\qquad\quad = \angle BCA$　（円周角の定理より）■

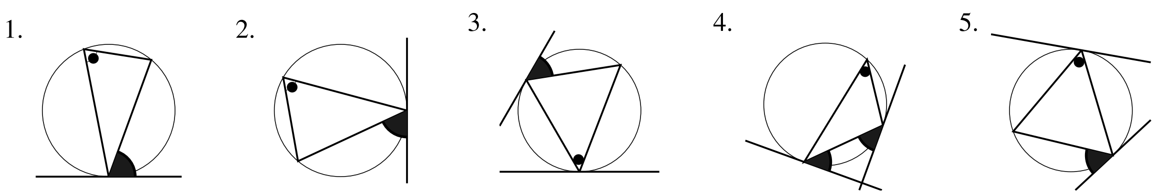


左右を逆に考えれば，$\angle CAQ = \angle CBA$ も同様に示される．
（証明・鈍角のとき）$\angle CBA$ が鈍角の場合を示す．$\angle BCA$ は鋭角なので $\angle BAP = \angle BCA$ であり

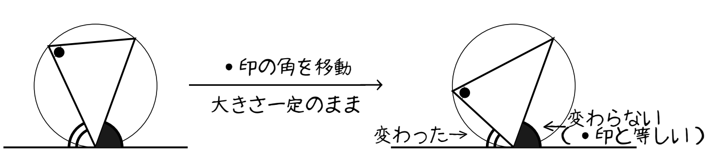
$\angle CBA = 180° - \angle BCA - \angle BAC$　（△ABC の内角の和は 180°）
$\qquad\quad = 180° - \angle BAP - \angle BAC = \angle CAQ$　■

【例題 37】 以下の図において，接弦定理によって・印と等しい角をすべて選べ．





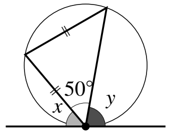
右のように，・印の角を一定に移動しても，大きさの変わらない側の角が・印と等しいと理解するとよい．



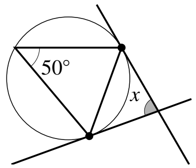
【練習 38：接弦定理〜その１〜】

右の図中の ● はすべて，円と直線の接点である．
それぞれ，x, y, z を求めよ．

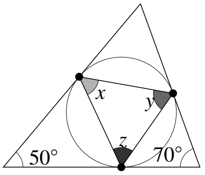
(1)



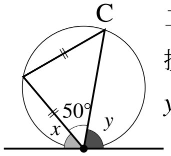
(2)



(3)

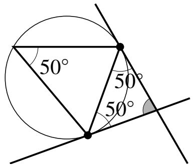


(1)



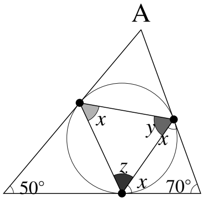
二等辺三角形から $\angle C = 50°$
接弦定理より $x = \angle C =$ **50°**
$y = 180° - (50° + 50°) =$ **80°**

(2)



接弦定理より，2 ヶ所が 50° に等しい．よって
$x = 180° - (50° + 50°) =$ **80°**

(3)



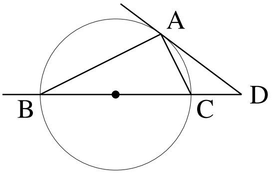
接弦定理より，2 ヶ所が x に等しい．よって
$x = (180° - 70°) \div 2 =$ **55°**
同様にして $y = (180° - 50°) \div 2 =$ **65°**
$\angle A = 60°$ に注意して，同様に $z = (180° - 60°) \div 2 =$ **60°**.

【練習 39：接弦定理〜その２〜】

右図において，線分 BC は円の直径，直線 DA は円の接線である．以下の問いに答えなさい．

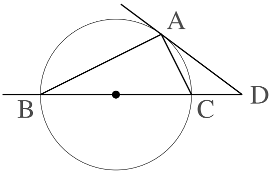
(1) $\angle ABC = 20°$ のとき，$\angle D$ の大きさを求めよ．

(2) $AC = CD = 1$ のとき，$\angle ABC$ と円の直径を求めよ．



【解答】 まず，BC が直径なので $\angle BAC = 90°$ である．

(1)



接弦定理より $\angle DAC = 20°$,
$\angle ACB = 180° - (90° + 20°) = 70°$
よって，$\triangle ACD$ について，
$\angle D = 70° - 20° =$ **50°**

◀ 三角形の 2 角の和は，他の 1 角の外角に等しい．

(2) $\angle ABC = x$ とおくと $\angle DAC = x$, $\angle D = x$ であるから，$\angle ACB = 2x$ になる．$\angle ABC + \angle ACB = 90°$ に代入して，$x + 2x = 90°$，つまり $x =$ **30°**
また，$\triangle ABC$ は 30°, 60°, 90° の直角三角形になり，$AC = 1$ より，**BC = 2 が円の直径**になる．

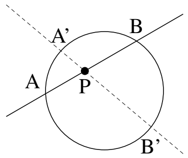
4. 方べきの定理

A. 方べきの定理とは

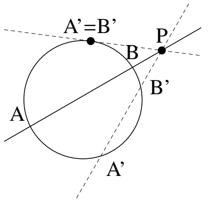
円 C と，1 点 P がある．ただし，P は C の円周上にないとする．

ここで，P を通る直線 l を考え，C の円周と l の交点を A，B とする．**方べきの定理**とは，l をどのように引いても，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$ が同じ値になることを言う．

Pが円周の中にあるとき



Pが円周の外にあるとき

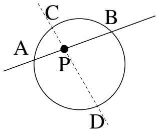


B. P が円周の中にあるとき

方べきの定理（P が円周の中にあるとき）

弦 AB と弦 CD が，円の中の P で交わっているとき

- $\triangle\mathrm{PAD} \backsim \triangle\mathrm{PCB}$ であり
- $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$ が成り立つ（方べきの定理）.



【暗記 40：方べきの定理〜その１〜】

上の定理を証明せよ.

【解答】 $\triangle\mathrm{PAD}$ と $\triangle\mathrm{PCB}$ について，円周角の定理より $\angle\mathrm{PAD} = \angle\mathrm{PCB}$, $\angle\mathrm{PDA} = \angle\mathrm{PBC}$ であるので，2 角が等しいから $\triangle\mathrm{PAD} \backsim \triangle\mathrm{PCB}$ になる．よって，$\mathrm{PA} : \mathrm{PC} = \mathrm{PD} : \mathrm{PB} \Leftrightarrow \mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$ ■

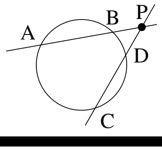
◀ $\triangle\mathrm{PAC} \backsim \triangle\mathrm{PDB}$ を示しても良い.

C. P が円周の外にあるとき

方べきの定理（P が円周の外にあるとき）

弦 AB と弦 CD が，円の中の P で交わっているとき

- $\triangle\mathrm{PAD} \backsim \triangle\mathrm{PCB}$ であり
- $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$ が成り立つ（方べきの定理）.



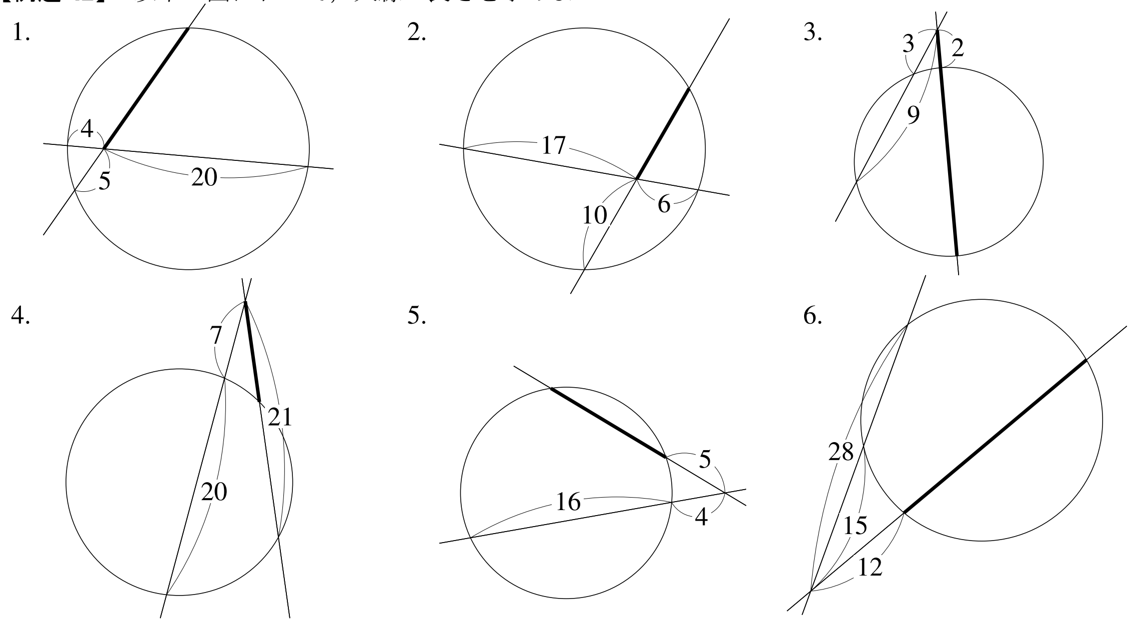
【暗記 41：方べきの定理〜その２〜】

上の定理を証明せよ.

【解答】 $\triangle\mathrm{PAD}$ と $\triangle\mathrm{PCB}$ について，$\angle\mathrm{P}$ は共通，円周角の定理より $\angle\mathrm{PAD} = \angle\mathrm{PCB}$ であるので，2 角が等しいから $\triangle\mathrm{PAD} \backsim \triangle\mathrm{PCB}$ になる．よって，$\mathrm{PA} : \mathrm{PC} = \mathrm{PD} : \mathrm{PB} \Leftrightarrow \mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$ ■

◀ $\triangle\mathrm{PAC} \backsim \triangle\mathrm{PDB}$ を示しても良い．この場合，四角形 ABCD が円に内接することを用いる.

【例題 42】 以下の図において，太線の長さを求めよ．



【解答】 いずれも，求める長さを x とおく．

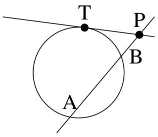
1. $4\cdot\cancel{20}^{4}=\cancel{5}x$ より，$\boldsymbol{x=16}$．
2. $17\cdot\cancel{6}^{3}=\cancel{10}^{5}x$ より，$\boldsymbol{x=\frac{51}{5}}$．
3. $3\cdot 9=2x$ より，$\boldsymbol{x=\frac{27}{2}}$．
4. $\cancel{7}\cdot(20+7)=\cancel{21}^{3}x$ より，$\boldsymbol{x=9}$．
5. $\cancel{(16+4)}^{4}\cdot 4=(x+5)\cdot\cancel{5}$ より，$x=16-5=\mathbf{11}$．
6. $\cancel{28}^{7}\cdot\cancel{15}^{5}=\cancel{12}^{3}\cdot(x+12)$ より，$x=35-12=\mathbf{23}$．

D. 円周外の点 P から，接線を引いたとき

方べきの定理（P から接線を引いたとき）

接点が T である接線が，弦 AB と点 P で交わっているとき

- $\triangle$PAT $\backsim$ $\triangle$PTB であり
- $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$ が成り立つ（方べきの定理）．



【暗記 43：方べきの定理〜その３〜】

上の定理を証明せよ．

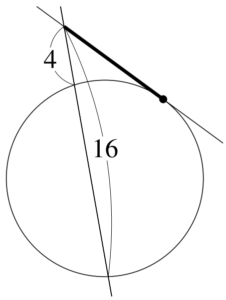
【解答】 $\triangle$PAT と $\triangle$PTB について，$\angle$P は共通，接弦定理より $\angle\mathrm{PAT}=\angle\mathrm{PTB}$ であるので，2 角が等しいから $\triangle$PAT $\backsim$ $\triangle$PTB になる．よって

$\mathrm{PA}:\mathrm{PT}=\mathrm{PT}:\mathrm{PB}\Leftrightarrow\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

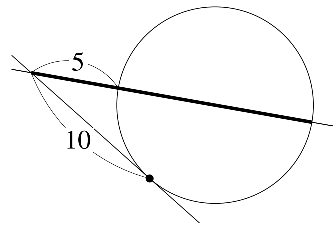
【練習 44：接線を引いたときの方べきの定理】

以下の図において，太線の長さを求めよ．ただし，図の中の“・”は接点とする．

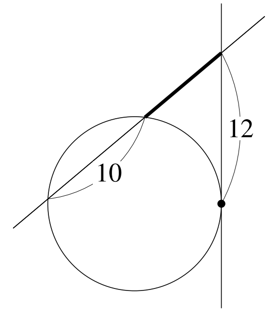
(1)



(2)



(3)



【解答】　求める長さを x とする．

(1) $16 \cdot 4 = x^2$ より，$x = \sqrt{64} = \mathbf{8}$

(2) $5 \cdot x = 10^2$ より，$\boldsymbol{x = 20}$

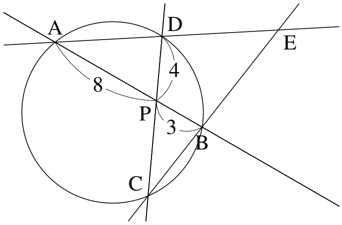
(3) $x(x+10) = 12^2 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 144 = 0.$

これを解いて $x = 8, -18$ なので，$\boldsymbol{x = 8}$.

方べきの定理においては，一方の点のみが円周上にあることに注意しよう．

【練習 45：方べきの定理のまとめ】

以下の図において，x の長さを求めよ．ただし，図の中の“・”は接点か円の中心とする．



(1) CP の長さを求めよ．

(2) 図中の相似な三角形を 2 組答え，それぞれの相似比も答えよ．

(3) DE = 5 とするとき，BC の長さを求めよ．

【解答】

(1) 方べきの定理より $8 \cdot 3 = 4 \cdot \mathrm{CP}$ なので，$\mathrm{CP} = \mathbf{6}$

(2) **$\triangle$PAD ∽ $\triangle$PCB**，相似比は PD : PB = 6 : 3 = **2 : 1**

$\triangle$EAB ∽ $\triangle$ECD，相似比は AB : CD = 6 : 3 = **11 : 10**

(3) BC = x とおく．

$\triangle$EAB ∽ $\triangle$ECD，DE = 5 より $\mathrm{BE} = 5 \times \dfrac{11}{10} = \dfrac{11}{2}$

$\triangle$PAD ∽ $\triangle$PCB，BC = x より AD = $2x$

よって，方べきの定理より

$$5 \cdot (5 + 2x) = \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{11}{2} + x\right) \Leftrightarrow 20(5+2x) = 11(11+2x)$$
$$\Leftrightarrow 100 + 40x = 121 + 22x$$
$$\Leftrightarrow 18x = 21 \quad \therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{7}{6}}$$

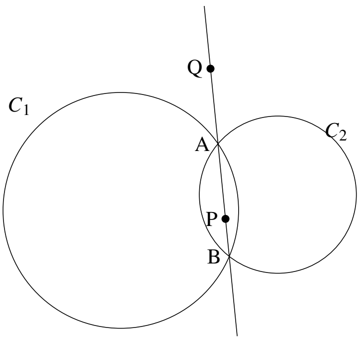
◀【別解】EA : EC = 11 : 10 より $5+2x : \left(\dfrac{11}{2} + x\right) = 11 : 10$

これを解いて $\boldsymbol{x = \dfrac{7}{6}}$.

方べきの定理と，それを示すために用いた三角形の相似は，セットにして理解しよう．上の【練習】のように，相似を使わないと解けない問題も存在する．

【発展 46：総合問題】

円 C_1 と C_2 が 2 点 A，B と交わっている．直線 AB 上のうち，線分 AB 上に P を，線分 AB の外に Q をとる．

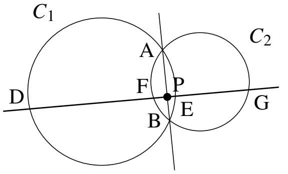


① P を通り，直線 AB とは異なる直線 l を引き，l と円 C_1 の 2 交点を D，E とし，l と円 C_2 の 2 交点を F，G とする．このとき，$PD \cdot PE = PF \cdot PG$ を示せ．

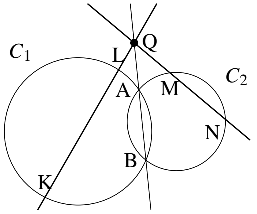
② Q を通り円 C_1 と 2 点 K，L で交わる直線 m_1 を引き，Q を通り円 C_2 と 2 点 M，N で交わる直線 m_2 を引く．このとき，K，L，M，N は同一円周上にあることを示せ．ただし，直線 AB，m_1，m_2 はすべて異なる直線とする．

【解答】

① 円 C_1 について方べきの定理を用いると $PA \cdot PB = PD \cdot PE$,
円 C_2 について方べきの定理を用いると $PA \cdot PB = PF \cdot PG$
である．よって，$PD \cdot PE = PF \cdot PG$ が示された．



② K，L，M，N を右図のようにとる．
円 C_1 について方べきの定理を用いると $QA \cdot QB = QK \cdot QL$,
円 C_2 について方べきの定理を用いると $QA \cdot QB = QM \cdot QN$
である．よって，$QK \cdot QL = QM \cdot QN$ と分かり，
$QK : QN = QM : QL$ ……… ① が成り立つ．
$\triangle QKM$ と $\triangle QNL$ について，$\angle Q$ は共通，①から 2 辺の比とその間の角が等しいので，$\triangle QKM \backsim \triangle QNL$ である．よって，$\angle QKM = \angle QNL$ となるから，四角形 KLNM について，$\angle N$ は向かい合う角の外角に等しいので円に内接する．



◀ (別解)「方べきの定理の逆」が成り立つ（13th-note では扱わない）ことを用いれば，$QK \cdot QL = QM \cdot QN$ から直接，K，L，M，N が同一円周上にあると導かれる．

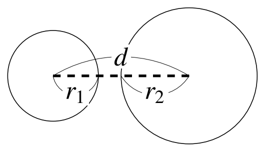
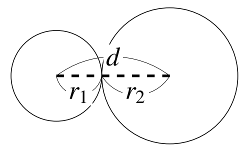
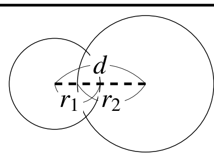
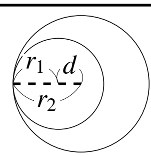
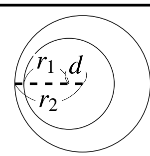
5.　2円の性質

A.　2円の位置関係

2円の位置関係は，2円の半径と中心間の距離で決まり，以下の5つの状態しかない．

2円の位置関係

2円の半径を r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$，中心間の距離を d とすると，以下のようになる．

2円の図					
2円の位置関係	離れている	外接している	交わっている	内接している	一方が他方を含む
2円の共有点の個数	0個	1個（外接）	2個	1個（内接）	0個
2円の中心間の距離 d	$\boldsymbol{r_2 + r_1 < d}$	$\boldsymbol{d = r_2 + r_1}$	$\boldsymbol{r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1}$	$\boldsymbol{d = r_2 - r_1}$	$\boldsymbol{d < r_2 - r_1}$

円が複数個あるときは，まず，中心間を線で結んだ図を描こう．そのうえで，上のような条件を考えるとよい．

【例題 47】　2点 A, B があり，中心が A で半径 3 の円 C_1 と，中心が B で半径 5 の円 C_2 がある．以下のそれぞれの場合について，C_1 と C_2 の位置関係を答えよ．

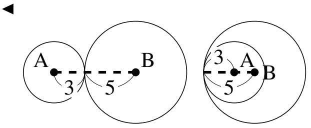
1. AB = 9　　2. AB = 5　　3. AB = 2　　4. AB = 1

【解答】　円 C_1 の中心 (0, 0) を O とすると，OA = 5 + 3 = 8 のとき2円は外接，OA = 5 − 3 = 2 のとき2円は内接であるので，

- 8 < OA のとき2円は離れている
- 2 < OA < 8 のとき2円は交わっている
- OA < 2 のとき C_2 が C_1 を含む

1. **2円は離れている**.　　2. **2円は交わっている**.
3. **2円は内接している**.　　4. $\boldsymbol{C_2}$ **が** $\boldsymbol{C_1}$ **を含む**.

◀

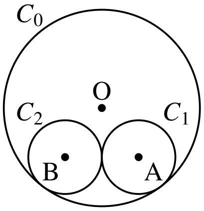


【練習 48：複数の円を含む図形】

半径 8 の円 C_0 に，半径 3 の円 C_1，C_2 が右図のように内接している．それぞれの中心を O，A，B とする．

(1) AB，OA の長さをそれぞれ求めよ．

(2) 発展 円 C_0 に内接し，円 C_1，C_2 の両方に外接する円のうち，大きい方の円 C_3 の半径を求めよ．



【解答】

(1) 図より明らかに，**AB = 6**．また，直線 OA を右欄外の図のように引いて，OA = 8 − 3 = **5**.

(2) 円 C_3 の中心を P，半径を x とする．

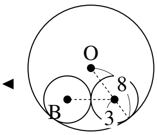
AB の中点を M とすると，M は直線 PO 上にあり，PM ⊥ AB になる．

△OAM は直角三角形なので

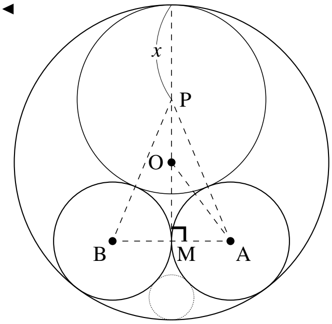
$$5^2 = 3^2 + \mathrm{OM}^2 \qquad \therefore\ \ \mathrm{OM} = 4$$

また，円 C_3 が円 C_0 と内接することから PO = 8 − x なので，△PAM について

$$\begin{aligned}
&\mathrm{PA}^2 = (\mathrm{PO} + \mathrm{OM})^2 + \mathrm{MA}^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x+3)^2 = \{(8-x)+4\}^2 + 3^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 6x + 9 = 144 - 24x + x^2 + 9 \\
\Leftrightarrow\ & 6x = 144 - 24x \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{x = \frac{24}{5}}
\end{aligned}$$



円が接しているときは円の中心と接点を結ぶ習慣をつけよう

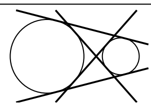
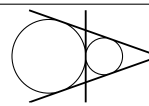
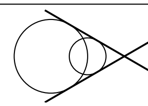
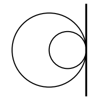
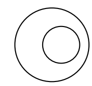


ちなみに，下に小さい円も書ける．こちらの円の半径は $\dfrac{8}{7}$ になる．

B. 2円の共通接線

2つの円にどちらも接する接線を2円の**共通接線**と言い，2円の位置関係によって本数が異なる．

2円の共通接線

本数	4本[*5]	3本	2本	1本	0本
2円と共通接線の図					
2円の位置関係	離れている	外接している	交わっている	内接している	一方が他方を含む
共通外接線	2本	2本	2本	1本	0本
共通内接線	2本	1本	0本	0本	0本

【例題 49】 2点 A, B があり，中心が A で半径 3 の円 C_1 と，中心が B で半径 5 の円 C_2 がある．以下の場合について，共通接線の本数を答えよ．

1. $AB = 9$　2. $AB = 5$　3. $AB = 2$　4. $AB = 1$

【解答】 前ページの答えを利用して

1. 2円は離れているので **4本**.
2. 2円は交わっているので **2本**.
3. 2円は内接しているので **1本**.
4. C_2 が C_1 を含むので **0本**.

【暗記 50：共通接線の長さ】

O_1 が中心で半径 1 の円 C_1 と，O_2 が中心で半径 2 の円 C_2 があり，$O_1O_2 = 4$ とする．

1. 2円の共通外接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ A_1，A_2 で接するとき，線分 A_1A_2 の長さを求めよ．
2. 2円の共通内接線と C_1, C_2 の接点をそれぞれ B_1，B_2 で接するとき，線分 B_1B_2 の長さを求めよ．

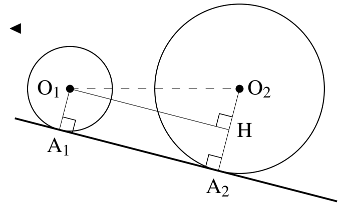
【解答】

1. O_1 から O_2A_2 へ下ろした垂線の足を H とすると

$$A_1A_2 = O_1H = \sqrt{O_1O_2{}^2 - O_2H^2}$$

である．$O_1O_2 = 4$, $O_2H = A_2O_2 - A_2H = 2 - 1 = 1$ なので

$$A_1A_2 = \sqrt{4^2 - 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{15}}$$

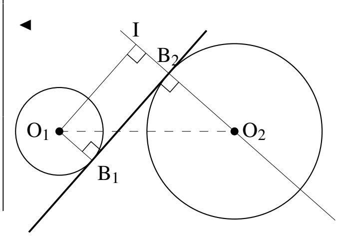


2. O_1 から直線 O_2B_2 へ下ろした垂線の足を I とすると

$$B_1B_2 = O_1I = \sqrt{O_1O_2{}^2 - O_2I^2}$$

である．$O_1O_2 = 4$,　$O_2I = O_2B_2 + B_1O_1 = 2 + 1 = 3$ なので

$$B_1B_2 = \sqrt{4^2 - 3^2} = \boldsymbol{\sqrt{7}}$$



上の問題の 2. の別解として，O_1O_2 と B_1B_2 の交点を C とし，$\triangle O_1B_1C \backsim \triangle O_2B_2C$ と三平方の定理を用いても解くことが出来る．ただし，計算が多少ややこしい．

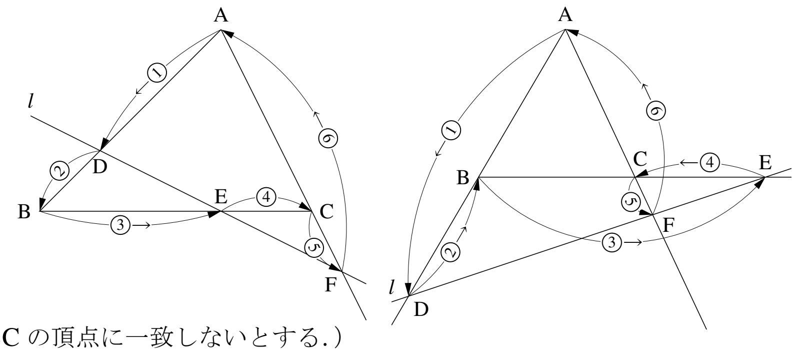
1.　メネラウスの定理

A.　メネラウスの定理とは

メネラウスの定理

△ABC と直線 l を考える．l が直線 AB，BC，CA と交わる点を D，E，F とするとき，次の式が成り立つ．

$$\underset{②}{\overset{①}{\frac{AD}{DB}}}\cdot\underset{④}{\overset{③}{\frac{BE}{EC}}}\cdot\underset{⑥}{\overset{⑤}{\frac{CF}{FA}}}=1$$



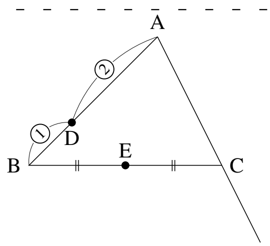
（ただし，D，E，F は △ABC の頂点に一致しないとする．）

（証明）C を通り直線 l に平行な直線と，直線 AB の交点を K とする．このとき，CK // l より $\frac{BE}{EC}=\frac{BD}{DK}$，$\frac{CF}{FA}=\frac{KD}{DA}$ となる．よって，$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BD}{DK}\cdot\frac{KD}{DA}=1$ ■

この定理を使うには，上図の矢印のように，線でなぞって考えると良い．
このとき，線でなぞるのは，A から始めなくても，B からでも，C からでもよい．実際に，次のどちらの等式も成り立つからである．

Bから始めた場合→ $\underset{④}{\overset{③}{\frac{BE}{EC}}}\cdot\underset{⑥}{\overset{⑤}{\frac{CF}{FA}}}\cdot\underset{②}{\overset{①}{\frac{AD}{DB}}}=1$，　Cから始めた場合→ $\underset{⑥}{\overset{⑤}{\frac{CF}{FA}}}\cdot\underset{②}{\overset{①}{\frac{AD}{DB}}}\cdot\underset{④}{\overset{③}{\frac{BE}{EC}}}=1$

【例題 51】　△ABC があり，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，辺 BC の中点を E とする．直線 DE と直線 AC の交点を F とするとき，$\frac{CF}{FA}$ を求めよ．
また，AC : CF を求めよ．



【解答】　△ABC と直線 DE について，メネラウスの定理より

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1 \iff \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$

よって，$\frac{CF}{FA}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

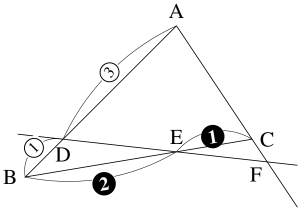
また，**AC : CF = 1 : 1**

◀ AD : DB = 2 : 1 と $\frac{AD}{DB}=\frac{2}{1}$ は同じことを表わしている．

◀ 両辺を $\frac{1}{2}$ 倍した

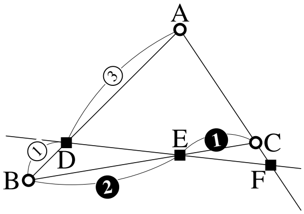
◀ 詳しく書けば，$\frac{CF}{FA}=\frac{1}{2}$ より，CF = k，FA = $2k$ とおけるので AC = k になるから 1 : 1．

B.　三角形と１本の直線を決める



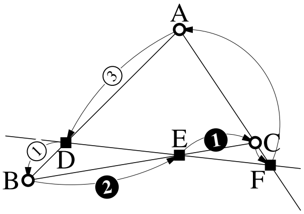
右の図にメネラウスの定理を使うと，次のように，2 通りの等式を考えることが出来る．

(I) △ABC と直線 DEF で考えた場合



○は三角形の頂点
■は直線と辺の交点

⟹



Aから始めて
Ⓐ→■→○→■→○→■→Ⓐ

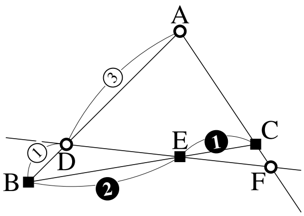
⟹ $\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{\text{CF}}{\text{FA}}=1$

よって，$\dfrac{\text{CF}}{\text{FA}}=\dfrac{1}{6}$ になり，

CF : FA = 1 : 6

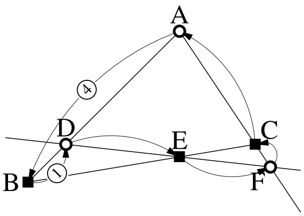
AC : CF = 5 : 1

(II) △ADF と直線 BC で考えた場合



○は三角形の頂点
■は直線と辺の交点

⟹



Aから始めて
Ⓐ→■→○→■→○→■→Ⓐ

⟹ $\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{\text{DE}}{\text{EF}}\cdot\dfrac{\text{FC}}{\text{CA}}=1$

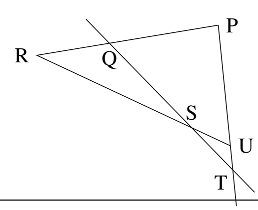
このように，どの三角形と直線で考えるかによって，異なる式を作ることが出来る．

【練習 52：メネラウスの定理】

右図において，PQ : QR = 3 : 2，PU : UT = 4 : 1 である．
以下の問いに答えよ．

(1) RS : SU を求めよ．

(2) QS : ST を求めよ．



【解答】

(1) △PRU と直線 QT についてメネラウスの定理を考えれば

$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\text{RS}}{\text{SU}}\cdot\dfrac{1}{5}=1 \iff \dfrac{\text{RS}}{\text{SU}}=\dfrac{10}{3}$

よって，**RS : SU = 10 : 3**.

(2) △PQT と直線 RU についてメネラウスの定理を考えれば

$\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{\text{QS}}{\text{ST}}\cdot\dfrac{1}{4}=1 \iff \dfrac{\text{QS}}{\text{ST}}=\dfrac{8}{5}$

よって，**QS : ST = 8 : 5**.

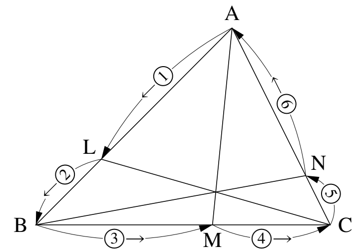
2.　チェバの定理

チェバの定理

△ABC の辺 AB，BC，CA 上に L，M，N がある．ここで，直線 AM，BN，CL が 1 点で交わるならば，次の式が成り立つ．

$$\overset{①}{\underset{②}{\frac{AL}{LB}}}\cdot\overset{③}{\underset{④}{\frac{BM}{MC}}}\cdot\overset{⑤}{\underset{⑥}{\frac{CN}{NA}}}=1$$

（ただし，L，M，N は △ABC の頂点に一致しないとする.）



（証明）AM，BN，CL が交わる 1 点を K とする．△ABM と直線 LC についてメネラウスの定理を用いると

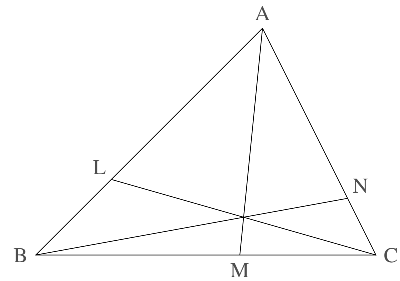
$$\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BC}{CM}\cdot\frac{MK}{KA}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; ①$$

△AMN と直線 BN についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AK}{KM}\cdot\frac{MB}{BC}\cdot\frac{CN}{NA}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; ②$$

①，②の左辺どうし，右辺どうしを掛け合わせると

$$\frac{AL}{LB}\cdot\frac{\cancel{BC}}{CM}\cdot\frac{\cancel{MK}}{\cancel{KA}}\cdot\frac{\cancel{AK}}{\cancel{KM}}\cdot\frac{MB}{\cancel{BC}}\cdot\frac{CN}{NA}=1 \iff \frac{AL}{LB}\cdot\frac{MB}{CM}\cdot\frac{CN}{NA}=1 \quad ■$$



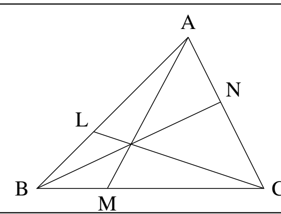
チェバの定理も線でなぞると考えやすい．また，A でなく，B や C から始めてもよい．

【練習 53：メネラウスの定理・チェバの定理】

右図の三角形において，L は辺 AB を 5 : 3 に内分し，N は辺 AC を 3 : 4 に内分し，線分 AM，BN，CL は 1 点 G で交わっている．

(1) BM : MC を求めよ.　　(2) AG : GM を求めよ.

(3) BG : GN を求めよ.　　(4) CG : GL を求めよ.



【解答】

(1) チェバの定理より $\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}=1 \iff \frac{5}{3}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{4}{3}=1$ より，

$\frac{BM}{MC}=\frac{9}{20}$ なので，BM : MC = **9 : 20**

(2) △ABM と直線 LC についてメネラウスの定理を考えれば

$\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BC}{CM}\cdot\frac{MG}{GA}=1 \iff \frac{\cancel{5}}{3}\cdot\frac{29}{\cancel{20}^{4}}\cdot\frac{NG}{GA}=1 \iff \frac{MG}{GA}=\frac{12}{29}$ なので，AG : GM = **29 : 12**

◀ △ACM と直線 BM についてメネラウスの定理を考えても，解くことが出来る．

(3) △ABN と直線 LC についてメネラウスの定理を考えれば

$\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BG}{GN}\cdot\frac{NC}{CA}=1 \iff \frac{5}{3}\cdot\frac{BG}{GN}\cdot\frac{4}{7}=1 \iff \frac{BG}{GN}=\frac{21}{20}$ なので，BG : GN = **21 : 20**

◀ △BCN と直線 AM についてメネラウスの定理を考えても，解くことが出来る．

(4) △ACL と直線 BN についてメネラウスの定理を考えれば

$\frac{AB}{BL}\cdot\frac{LG}{GC}\cdot\frac{CN}{NA}=1 \iff \frac{8}{3}\cdot\frac{LG}{GC}\cdot\frac{4}{3}=1 \iff \frac{LG}{GC}=\frac{9}{32}$ なので，CG : GL = **32 : 9**

◀ △CLB と直線 AM についてメネラウスの定理を考えても，解くことが出来る．

1.　重心の別証明

【発展 54：重心と面積比〜重心についての別証明】

$\triangle$ABC の中線 BM，CN の交点を P とする．$\triangle$ABC の面積を S とすると，$\triangle$BCM = $\boxed{\text{ア}}$ である．

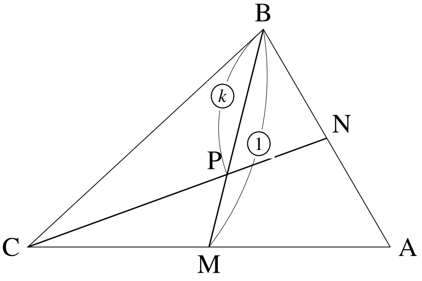
ここで，BM : BP = 1 : k とおくと，$\triangle$BPC = $\boxed{\text{イ}}$ になる．

同様にして，$\triangle$BPA = $\boxed{\text{ウ}}$ であり，N は AB の中点であるから $\triangle$BPN = $\boxed{\text{エ}}$ になる．ここで，

$$\triangle \text{BCN} = \triangle \text{BPC} + \triangle \text{BPN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{エ}}$$

になるから，k = $\boxed{\text{オ}}$ である．

よって，BP : PM = $\boxed{\text{カ}}$: $\boxed{\text{キ}}$ と分かる[*6]．



【解答】　底辺が $\triangle$ABC の半分だから，$\triangle \text{BCM} = \underline{\dfrac{S}{2}}_{(\text{ア})}$ であり，$\triangle$BPC の底辺を BP と見れば，$\triangle \text{BPC} = k\triangle \text{BCM} = \underline{\dfrac{k}{2}S}_{(\text{イ})}$ になる．

◀ CM を底辺に見る

同様にして，$\triangle \text{BPA} = k\triangle \text{BAM} = \underline{\dfrac{k}{2}S}_{(\text{ウ})}$ であり，$\triangle$BPN の底辺を BN と見れば，$\triangle \text{BPN} = \dfrac{1}{2}\triangle \text{BPA} = \underline{\dfrac{k}{4}S}_{(\text{エ})}$ になる．ここで

$$\triangle \text{BCN} = \triangle \text{BPC} + \triangle \text{BPN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = \underline{\frac{k}{2}S}_{(\text{イ})} + \underline{\frac{k}{4}S}_{(\text{エ})} = \frac{3k}{4}S$$

$$\Leftrightarrow 2 = 3k \qquad \therefore k = \underline{\frac{2}{3}}_{(\text{オ})}$$

よって，$\text{BP} : \text{PM} = \dfrac{2}{3} : \left(1 - \dfrac{2}{3}\right) = {}_{(\text{カ})}\underline{2} : \underline{1}_{(\text{キ})}$ と分かる．

[*6] BC の中点を L，BM と AL の交点を P' とすると，同じように BP' : P'M = $\boxed{\text{カ}}$: $\boxed{\text{キ}}$ と分かり，P と P' は一致し，これが重心と分かる．

2.　傍心と傍接円についての証明

【発展 55：傍心と傍接円】

$\triangle$ABC について，$\angle$B の外角の二等分線，$\angle$C の外角の二等分線の交点を E とする．直線 AE は，$\angle$A の二等分線になることを示せ．また，E が傍心の一つになっていることを示せ．

【解答】　E から辺 BC，直線 AB，AC へ引いた垂線の足を，それぞれ P，Q，R とする．

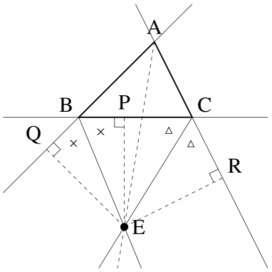
直角三角形 $\triangle$EQB と $\triangle$EPB について，EB 共通，$\angle$EBQ = $\angle$EBP より，斜辺と 1 角が等しいから $\triangle$EQB ≡ $\triangle$EPB となって EQ = EP ……… ①.

同様に，$\triangle$ERC ≡ $\triangle$EPC から ER = EP ……… ② である．

直角三角形 $\triangle$EAQ と $\triangle$EAR について，EA 共通，①，② より EQ = ER であるから，$\triangle$EAQ ≡ $\triangle$EAR になる．よって，$\angle$EAQ = $\angle$EAR と分かるので，EA は $\angle$A の二等分線に一致することが示された．

また，①，②から EP = EQ = ER であるので，E を中心に AB，BC，CA と交わる円を描けることも示されている．■

◂



3.　「四角形が円に内接する条件」の証明

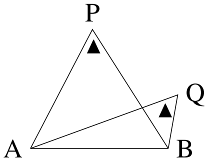
A.　「円周角の定理の逆」の証明

「円周角の定理の逆」は，次の命題の一部として示される．

円周角の定理の逆

$\triangle$ABP の外接円を K とし，P，Q は線分 AB に対して同じ側にあるとき，次が成立する．

- $\angle$APB $<$ $\angle$AQB ならば，Q は K の内部にある．
- $\angle$APB $=$ $\angle$AQB ならば，Q は K の周上にある．
- $\angle$APB $>$ $\angle$AQB ならば，Q は K の外部にある．



直線 BQ と円周 K の交点のうち，B でない点を R とする．円と直線は最大 2 点でしか交わらないので，R はただ 1 点に定まる．また，円周角の定理より，$\angle$ARB $=$ $\angle$APB が成り立つ．

(I) $\angle$APB $<$ $\angle$AQB のとき，Q が K の内部になかったと仮定する．
もし，Q が K の周上にあるならば，Q は R と一致するので $\angle$APB $=$ $\angle$AQB となるがこれは矛盾．
もし，Q が K の外部にあるならば，$\triangle$QAR について，$\angle$AQB $+$ $\angle$QAR $=$ $\angle$ARB となるので，$\angle$AQB $<$ $\angle$ARB $=$ $\angle$APB となって矛盾．
つまり，Q は K の内部にないという仮定は誤っているから，背理法によって，Q は K の内部にあることが示された．

(II) $\angle$APB $=$ $\angle$AQB のとき，Q が K の周上になかったと仮定する．
もし，Q が K の内部にあるならば，$\triangle$QAR について，$\angle$AQB $=$ $\angle$ARB $+$ $\angle$QAR となるので，$\angle$AQB $>$ $\angle$ARB $=$ $\angle$APB となって矛盾．
Q が K の外部にあるならば，(I) と同様にして $\angle$AQB $<$ $\angle$APB となって矛盾．
つまり，背理法によって Q は K の周上にある．

(III) $\angle$APB $>$ $\angle$AQB のとき，Q が K の外部になかったと仮定する．
Q が K の内部にあるならば，(II) と同様にして $\angle$AQB $>$ $\angle$APB となって矛盾．
Q が K の周上にあるならば，(I) と同様にして $\angle$AQB $=$ $\angle$APB となって矛盾．
つまり，背理法によって Q は K の外部にある．

……ここで，$\angle$APB $= 90°$ とすれば，p.127 の【練習：円周角の定理の逆】の解答の証明になる．

B.　「四角形の対角の和の逆」の証明

B を含まない孤 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 上に，P をとる．ただし，P は直線 CD 上にないとする．

すると，$\angle$B $+$ $\angle$D $= 180°$，$\angle$B $=$（$\angle$D の外角）のどちらの公式も，$\angle$APB $=$ $\angle$ADB という条件に一致する．

ここで「円周角の定理の逆」を用いれば，D が $\triangle$APB の外接円周上にあると示されるので，「四角形の対角の和の逆」は示されたことになる．

索引