13th-note 数学 I

（**2013** 年度卒業生まで）

Ver2.741（2012-10-2）

第 1 章 Ver2.74，第 2 章 Ver2.741，第 3 章 Ver2.74

はじめに

13th-note 数学 I は，文部科学省の指導要領（平成 23 年度の入学者まで実施）に沿った内容を含む検定外の「高校の教科書」として作られ，ホームページ（http://www.collegium.or.jp/~kutomi/）にて無償公開されています．学ぶ意欲さえあれば，誰でも学ぶことができるように，との意図からです．

また，執筆者と閲覧者がインターネットを介して繋がり，互いの意見を交わすことが出来る関係にあります．

こういった「教科書」の形態は，日本ではあまり見られないことでしょう．

しかし，13th-note 数学 I が既存の教科書と最も異なる点は，その中身でしょう．13th-note 数学 I では，以下の方針を採用しています．

- 13th-note 数学 I では全ての問題に，詳細な解答・解説を付ける．
- 新しい数学の概念に関して，通常，教師用にしか載っていない詳細な解説も付ける．

これらは，以下の考えに基づいています．

- 自学自習がしやすい教科書にしたかった．
  （学校等とは関係なく自分で勉強したい人のためでもあり，試験前に教科書を開きながら自学自習する高校生のためでもある）
- 隅々まで読めば読むほど，何か得るものがある教科書にしたかった．
- 大学受験の数学を意識してはいるが，あくまで数学の知識・感覚（新しい数学の概念を吸収するための土壌，とでも言えるでしょうか）を中心に解説している教科書にしたかった．
- 既存の教科書・指導要領に沿わせることより，数学の理解に必要かどうかに基づいて内容の選定・配列することを重視した．

詳細な解説を増やしたことは，一方で，悩みの種にもなりました．というのも，その詳細な解説が，読者の創造力・発想力を妨げないか，と感じたからです．

この点について，私は「詳細な解説を最初に読むか，後で読むか，そもそも読まないか，それは読者が決めればよい．ただ我々は，読者の視点が偏らないよう，最大限の配慮をするのみ」という結論を出し，上記の方針としました．

この教科書の執筆者として，数学の学習について 2 点アドバイスを書いておきます．

(1) 公式そのものよりも，「いつ公式が使えるか」を真っ先に覚えましょう．公式そのものは忘れても調べられます．また、思い出そうとしたり、作ろうとする努力はよい勉強になります。しかし、「いつ使うか」を忘れると，答えを見ない限り何もできません．
(2) 問題を解いて答えが合わないときは，まず，計算ミスを疑いましょう．

この 13th-note 数学 I は，FTEXT 数学 I を改訂することで出発しました．至る所に手を加え、新しいアイデア・表現・図表等を加えた結果が 13th-note ですが，最初に FTEXT 数学 I がなければ，この 13th-note 数学 I の誕生はずっと遅れていたでしょう．FTEXT 数学 I の作成を中心になって進められた吉江弘一氏に，感謝いたします．

また，この 13th-note 数学 I を作成する際には，TEX という組版ソフトが使われています．TEX のシステムを作られた Donald E. Knuth 氏，それを日本語に委嘱した ASCII Corporation，さらに，（日本の）高校数学に適した記号・強力な描画環境を実現した「LaTEX 初等数学プリント作成マクロ emath」作者の大熊一弘氏に，感謝いたします．

最後に，13th-note 数学 I の雰囲気を和らげてくれているみかちゃんフォントの作者にも感謝いたします．

この教科書を手にとった人，一人一人に，「数学も，悪くないな」と思っていただければ，幸いです．

久富 望

凡例

1. 【解答】について

【解答】には，問題の解答だけでなく，さらに理解を深めるためのヒントも書かれていることがあります．問題を解いて解答が一致した後，一応**【解答】**をチェックすることをお勧めします．

2. 問題の種類

【例題 2】 **【例題】**は，主に，直前の定義や内容の確認を兼ねた例題です．
はじめて学ぶ人，復習だが理解が足りないと思う人は，解くのが良いでしょう．
逆に，既に理解がある程度できていると思う人は，飛ばしても良いでしょう．

【練習 3：主要になる「練習」問題】
【練習】は，13th-note 教科書の軸と成る問題群です．
基本的に解くようにしましょう．解いていて疑問など見つかれば，直線の説明，**【例題】**を参照したり，答えをよく理解するようにしましょう．

【暗記 4：ただ解けるだけではいけません】
定義・定理を「知っている」と「使える」は違います．
特に，「反射的にやり方を思い出す」べき内容があります．それが，この暗記問題です．
この暗記問題については「解ける」だけでなく，その解き方・考え方をすぐに頭の中で思い浮かべられるようにするべきです．

【発展 5：さらなる次へのステップ】
発展 は，ただ定義や定理が分かるだけでは解けない問題です．
さらに理解を深めたい人，大学入試の数学を意識する人は挑戦し，理解するようにしましょう．

3. 補足

本文中，ところどころに …… マーク付きの文章があります．このマークのついた文章は，主に，本文とは少し異なる視点から書かれています．理解を深めることに役立つことがあるでしょう．

目次

ギリシア文字について

24 種類あるギリシア文字のうち，背景が灰色である文字は，数学 I で用いられることがある.

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	nu	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	xi	クシー，グザイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	omicron	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	pi	パイ	Π	π , ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	rho	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ゼータ	Z	ζ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	tau	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ , ϑ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	phi	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	chi	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	psi	プシー，プサイ	Ψ	ψ
mu	ミュー	M	μ	omega	オメガ	Ω	ω

第1章　数と式

1.1　いろいろな数

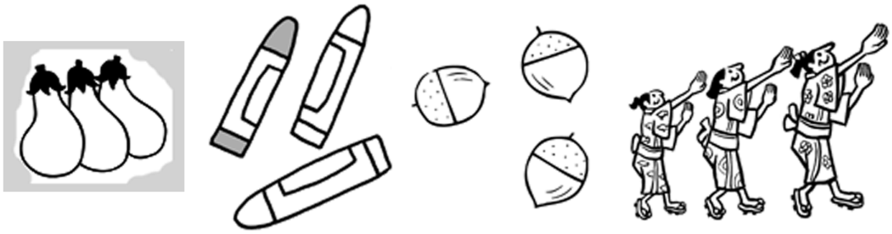
「数とは何か？」

高校数学の学習を始めるにあたって，この問題について考えてみよう．

1.　自然数・整数

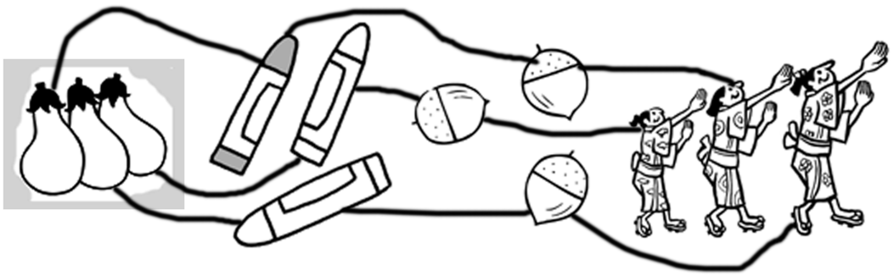
A.　「同じ数」とは〜自然数の成り立ち

次の絵は左から「3 本」「3 本」「3 個」「3 人」であり，「数えた結果は 3 になる」という共通点がある．



そして，上のどの場合も，同じ数だけある．

もし，3 という数字がなかったら，「同じ数だけある」事実はどう表現すればよいだろうか．それには，次のように線を引いて考えればよい．



そして，この線の本数が数を表していると考えられる．このように，（線を引くなどして）何かと何かを対応させるやり方を**一対一対応**という[*1]．

ものを数えるときに使う数字「1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$」をまとめて**自然数** (natural number) という．

[*1] このときの線の様子は，数字を表す文字の成り立ちに深く影響している．数字の 3 を，漢字では「三」と表すのはその一例である．複数の古代文明でも同じ現象が見られ，古代エジプトであれば，「|||」で数字 3 を表したことが分かっている．

B. 負の数〜何かと比べる

たとえば，あるお店に来たお客さんの数が右の表のようになったとしよう．

火曜は月曜より 4 人多い．

曜日	月	火	水	木	金	土
人数	60	64	56	54	60	63

一方，水曜は月曜より 4 人少ない．

どちらも「4 人」だが，火曜と水曜では意味が正反対である．そこで，火曜を「+4 人」，水曜を「−4 人」のように表現する．

このように，何かと値を比べるとき，自然数にマイナス (−) をつけた負の数は重要な意味を持つ．

曜日	月	火	水	木	金	土
月曜と比べた増加（人）	−	+4	−4	**−6**	**0**	**+3**

C. 0

0 の誕生は，負の数より遅い．今では子供でも 0 を使いこなすが，人類は長い間，0 を用いなかった．

たとえば，古代ローマでは，I (1)，V (5)，X (10)，L (50)，C (100)，D (500)，M (1000)，$\cdots$ などを用い，古代の中国では，一，二，三，$\cdots$，十，百，千，万，億，$\cdots$ などを用いた*2．

0 という「数」を発明したのはインド人である．7 世紀には発明されていた．0 のおかげで現在のように「筆算」や「小数」を本格的に使う事が可能になり，人類の計算技術も，数を表わす能力も，飛躍的に向上した*3．

【例題 1】 次の計算をしなさい．ただし，0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 を用いずに計算すること．

1. VIII + XIII　　2. XXII + XXVIII　　3. 五百四 + 二千十八　　4. 三万五千十六 + 二万四百九

【解答】

1. XVIIIIII になるが，VIIII で X になるから答えは **XXI**.
2. XXXXVIIIII になるが，VIIII で X だから XXXXX，答えは **L**.
3. **二千五百二十二**.　　4. **五万五千四百二十五**.

千	百	十	一
	五		四
二		一	八
二	五	一	十二

たとえば 3. であれば上のようにできる

D. 整数とは

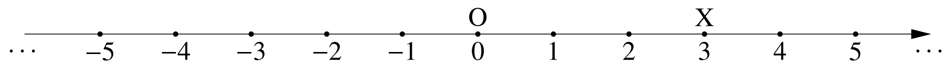
負の数と，0，自然数をまとめて**整数** (integral number) という．たとえば，次の数は全て整数である．

−2568，−23，−3，0，4，57

E. 自然数・整数の図示

自然数や整数を図示するには**数直線** (number line) を用いる．

数直線上のある点 X について「点 X に対応する数が a であること」を，X(a) と書く．たとえば，下図では点 X に対応する数が 3 であるので，X(3) である．



*2 しかし，これらのやり方では，数が大きくなるたびに新しい記号を作らなければならない．

*3 とはいえ，筆算や小数が考え出されて一般的に使用されるまでに何百年という時間がかかっている．筆算が考え出されるまで，計算には大変な時間がかかった．また，小数が存在しないだけでなく，分数の表し方は今と異なり，計算はとても複雑だった．

2. 有理数

A. 分数〜2 つの数の比

6 は 3 の何倍か？これは，$6 \div 3 = 2$ によって 2 倍と求められ，6 の 3 に対する**比** (ratio) の値を表している．

一方，12 は 5 の何倍になるだろうか．$10 < 12 < 15$ なので，2 倍よりは大きく，3 倍よりは小さいが，整数では表せない．そこで新しい数，分数 $\dfrac{12}{5}$ をつくる．

一般に，「a の b に対する比」を分数を $\dfrac{a}{b}$ で表わす．

「に対する」の付けられた値・言葉が，その文脈中では基準となる．

B. 有理数とは何か

分数で表現できる数を**有理数** (rational number) [*4]という．整数は $\dfrac{(\text{整数})}{1}$ と表すことができるので有理数である．たとえば，次の数は全て有理数である．

$-\dfrac{8}{3}$，-2，0，$\dfrac{11}{19}$，$\dfrac{18}{9}$，26

特に，**約分** (reduction) できない分数を**既約分数** (irreducible fraction) という．

有理数どうしの比も有理数になる．詳しくは，『複分数 (p.149)』で学ぶ．

【例題 2】 次の分数を，既約分数で答えなさい．

1. 5 の 9 に対する比の値
2. 7 の 35 に対する比の値
3. 12 に対する，9 の比の値
4. -10 に対する，15 の比の値

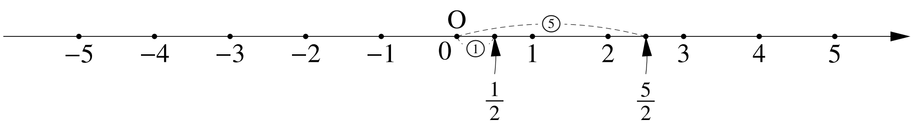
【解答】

1. $\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$　2. $\dfrac{7}{35} = \boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$　3.「12 に対する」なので，$\dfrac{9}{12} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

4. $\dfrac{15}{-10} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$

C. 有理数の図示

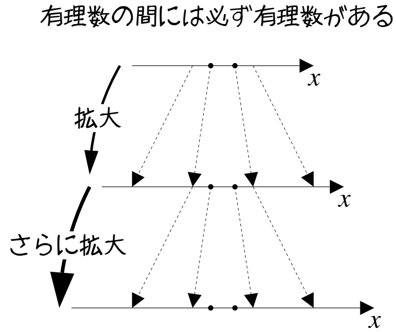
たとえば，$\dfrac{1}{2}$ を数直線上で表すには，下図のように 0 と 1 をつなぐ線分の 2 等分点をとり，その点に $\dfrac{1}{2}$ を対応させればよい．また，$\dfrac{5}{2}$ ならば $\dfrac{1}{2} \times 5$ と考えて，0 と $\dfrac{1}{2}$ をつなぐ線分を 5 つつないで得られる線分の右端の点を対応させればよい．



*4 ratio が「比」を意味するのだから，rational number は“有比数”とでも訳されるべきだったのかもしれない．

D. 有理数の間には必ず有理数がある

たとえば，$\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{2}{7}$ の間の有理数は，次のようにして得られる．



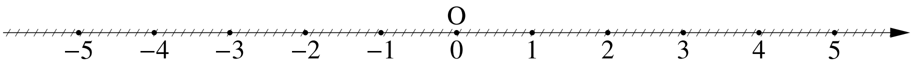
$$\frac{2}{7}=\frac{12}{42}<\frac{\overset{\text{12 と 14 の平均値}}{\boxed{13}}}{42}<\frac{14}{42}=\frac{1}{3}$$

一般に，2 つの有理数 $\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{c}{d}$ $\left(\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\right)$ において

$$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}<\frac{\overset{ad\text{ と }bc\text{ の平均値}}{\boxed{\frac{ad+bc}{2}}}}{bd}<\frac{bc}{bd}=\frac{c}{d}$$

とすれば，2 つの有理数の間に新しい有理数を考えることができる．

こうして，2 つの異なる有理数の間には，必ず有理数が存在する[*5]ことがわかる．



有理数はびっしり詰まっているイメージ

【練習 3：有理数の稠密性】

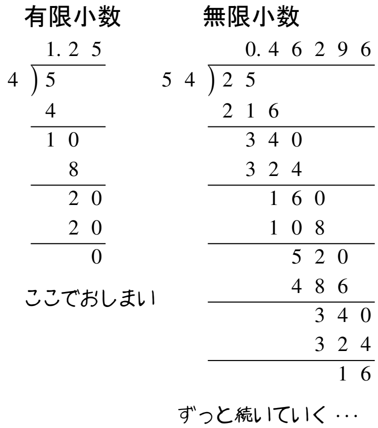
2 つの有理数 $\dfrac{6}{25}$，$\dfrac{1}{4}$ の間にある分数のうち，分母が 200 であるものを求めよ．

【解答】 $\dfrac{6}{25}=\dfrac{48}{200}$，$\dfrac{1}{4}=\dfrac{50}{200}$ であるので，求める値は $\boldsymbol{\dfrac{49}{200}}$ である．

E. 有理数と小数

有理数は筆算により**小数** (decimal number) になおすことができるが，次の 2 種類が存在する．

- $\dfrac{5}{4}=1.25$ のような，**有限小数** (finite decimal)
- $\dfrac{25}{54}=0.4629629\cdots$ のような，**無限小数** (infinite decimal)
  ただし，同じ数の並びが繰り返し現れるので，
  $\dfrac{25}{54}=0.4629629629\cdots=0.4\dot{6}2\dot{9}$ のように，循環の始まりと終わりに「˙」を付ける．このような小数は**循環小数** (circulating decimal) とよぶ．



逆に，どんな小数も分数に直すことができる．

有限小数は，$0.234=\dfrac{234}{1000}=\dfrac{117}{500}$ のようにすればよい．

循環小数の場合，たとえば $0.4\dot{6}2\dot{9}$ を小数に直すには，

$x=0.4\dot{6}2\dot{9}=0.4629629629\cdots$ とおき，次のようにすればよい[*6]．

$$\begin{array}{rrl} & 1000x = & 462.9629629\cdots \\ -) & x = & 0.4629629\cdots \\ \hline & 999x = & 462.5 \end{array}$$

←循環の周期に合わせ，1000倍した

$$\therefore\ x=\frac{462.5}{999}=\frac{4625}{9990}=\frac{25}{54}$$

←記号 "∴" は「だから」「つまり」を意味する．たいていは「だから」と読む．

[*5] このことを，有理数の 稠密性(ちゅうみつせい) (density) という．

[*6] 小数点以降，無限に数が続く数を普通の数のように足したり引いたりできることについての，厳密な根拠は数学 III で学ぶ．

【練習 4：有理数と循環小数】

分数は小数で，小数は分数で表せ．

(1) $\dfrac{9}{16}$　　(2) $\dfrac{5}{37}$　　(3) 0.625　　(4) $0.\dot{4}2\dot{9}$

【解答】

(1) $\mathbf{0.5625}$　(2) $0.135135135\cdots = \mathbf{0.\dot{1}3\dot{5}}$　(3) $0.625 = \dfrac{625}{1000} = \mathbf{\dfrac{5}{8}}$

(4) $x = 0.429429429\cdots$ （ ········ ①）とおく．これを 1000 倍すると $1000x = 429.429429\cdots$ （ ········ ②）となる．② − ① より

$$\begin{array}{rrcl} & 1000x &=& 429.429429\cdots \\ -) & x &=& 0.429429\cdots \\ \hline & 999x &=& 429 \end{array} \qquad \therefore x = \frac{429}{999} = \mathbf{\frac{143}{333}}$$

3.　実数

A.　無理数

有理数でない数のことを**無理数** (irrational number) と言う[*7]．言い換えると，分数で表せない数が無理数である[*8]．p.6 で見るように，無理数の例として $\sqrt{2}$ が挙げられる．

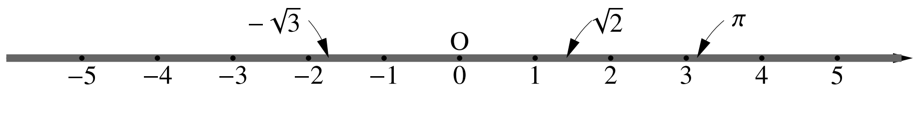
根号 $\sqrt{}$ の近似値は，「開平法について (p.47)」のようにして，筆算で求められる．

B.　実数

数直線上に表すことのできる数すべてを，**実数** (real number) という．

すべての小数は数直線上に表すことができる[*9]ので，無理数はすべて実数である．

無理数は有理数どうしの間をみっちり埋めている[*10]．



みっちり詰まった実数のイメージ

無理数には次のような数が知られている．

$-\sqrt{23}$，$5\sqrt{2}$，**3 乗して 2 になる数** $\sqrt[3]{2}$，**円周率** $\pi = 3.1415926\cdots$，**ネイピア数**[*11] $e = 2.7182818\cdots$

今後，a，b，x などで数を表すとき，特に断りが無ければ，その数は実数であるとする．

---

*7 ir-rational の ir は否定を表す接頭語であり，irrational とは rational でない，つまり，比で表せないという意味である．

*8 有理数はすべて循環小数になり，循環小数はすべて有理数になった (p.5)．
ここから，循環しない小数が有理数ではないことが分かる．

*9 この事実を厳密に示すことは，より厳密な実数の定義と，デデキントの切断という考え方を必要とし，高校の学習範囲を超えてしまう．ただし，たとえば $\sqrt{2}$ のような数は右のようにすれば数直線上に表すことができる．

*10 実数の**連続性** (continuity) といい，有理数の稠密性と区別される．詳しくは数学 III で学ぶ．

*11 ネイピア数 e について，詳しくは数学 III で学ぶ．

以上見てきたいろいろな数について，まとめると次のようになる．

数の分類

- **実数**
  - **有理数**
    - **整数**
      - 正の整数（**自然数**）
      - 0
      - 負の整数
    - 整数でない有理数
      - 有限小数
      - 循環小数 ┐ 無限小数
  - **無理数** ………… 循環しない無限小数 ┘ 無限小数

【**例題 5**】 次の実数について，以下の問に答えよ．

$$3,\quad -2,\quad 0,\quad \frac{2}{5},\quad -\frac{2}{5},\quad \sqrt{3},\quad 1.\dot{5}\dot{2},\quad \frac{36}{6},\quad -\sqrt{16},\quad \left(\sqrt{5}\right)^2,\quad 2\pi$$

(1) 自然数を選べ． (2) 整数を選べ． (3) 有理数を選べ． (4) 無理数を選べ．

【**解答**】

(1) $\mathbf{3,\ \frac{36}{6},\ \left(\sqrt{5}\right)^2}$

(2) $\mathbf{3,\ -2,\ 0,\ \frac{36}{6},\ -\sqrt{16},\ \left(\sqrt{5}\right)^2}$

(3) $\mathbf{3,\ -2,\ 0,\ \frac{2}{5},\ -\frac{2}{5},\ 1.\dot{5}\dot{2},\ \frac{36}{6},\ -\sqrt{16},\ \left(\sqrt{5}\right)^2}$

(4) $\mathbf{\sqrt{3},\ 2\pi}$

◂ $\frac{36}{6} = 6,\ \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

◂ $-\sqrt{16} = -4$

◂ $1.\dot{5}\dot{2} = \frac{151}{99}$ (p.5 例題参照)

【**発展 6**： $\sqrt{2}$ **は有理数ではないことの証明**】

数学 A で詳しく学ぶ**背理法**[*12] (reduction to absurdity) を用いて $\sqrt{2}$ が有理数でないことを証明せよ．

【**解答**】 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．つまり， $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ と表される「既約分数である」と仮定する．ただし，a は整数，b は 0 でない整数である．この両辺を 2 乗すると

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \qquad \therefore\ 2b^2 = a^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，左辺は 2 の倍数なので，右辺 a^2 も 2 の倍数である．したがって，a も 2 の倍数である．そこで，$a = 2a'$ (a' は整数) とおくと，①は

$$2b^2 = (2a')^2$$
$$\Leftrightarrow\ 2b^2 = 4a'^2 \qquad \therefore\ b^2 = 2a'^2$$

ここで，右辺は 2 の倍数なので，左辺 b^2 も 2 の倍数となり，b も 2 の倍数となる．これは，a，b がともに 2 の倍数であることを意味し，最初の「既約分数である」という仮定に矛盾する．

したがって， $\sqrt{2}$ は有理数ではない． ■

◂ 既約分数 (p.3)

◂ 証明したい事柄を間違っていると仮定する．

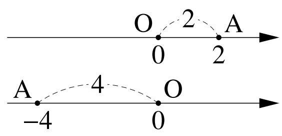
◂ もし，a が 2 の倍数でない(奇数)とすると，a^2 が 2 の倍数(偶数)であることに反してしまう(この説明も背理法を用いている)．

◂ 矛盾が生じてしまった，証明したい事柄を間違いとしたのが誤り．

*12 これは，示すべき内容が間違っているものと仮定して矛盾を導き，示すべき内容が正しいと結論する論法である．

4. 絶対値

A. 絶対値とは



数直線上で，原点 O と点 A(a) の距離のことを a の**絶対値** (absolute value) といい，$|a|$ と書く[*13]．たとえば

$|2| = 2$，$|-4| = 4$

である．正の数に絶対値記号を付けても値は変わらない．
また，負の数に絶対値記号を付けると，値は -1 倍になる．

【例題 7】 1. から 3. の値を計算し，4. の問いに答えなさい．
1. $|-3| + |2|$　　2. $|-3-5|$　　3. $x = -2$ のときの，$|x+4|$ の値
4. $\left|\sqrt{2}-2\right|$ の値は $\sqrt{2}-2$ に等しいか，$-\left(\sqrt{2}-2\right)$ に等しいか．

【解答】
1. $|-3| + |2| = 3 + 2 = \mathbf{5}$　　2. $|-3-5| = |-8| = \mathbf{8}$
3. $|-2+4| = \mathbf{2}$
4. $\sqrt{2}-2$ は負の値なので，その絶対値は $\mathbf{-\left(\sqrt{2}-2\right)}$ に等しい．

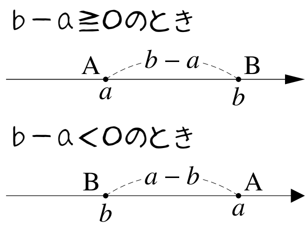
絶対値

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$ ← a が負の値なので $-a$ は正の値

と表すことができる．絶対値については次式が成り立つ．

$|a| \geqq 0$ ，$|a| = |-a|$

B. 絶対値と 2 点間の距離



絶対値記号を用いると，数直線上の 2 点 A(a) と B(b) の距離 AB は

$AB = |b-a|$

で表すことができる．この $|b-a|$ は，2 つの数 a と b の差も表している．

【例題 8】 数直線上に A(-4), B(-1), C(2), D(5) をとる．CD, BC, AD, CA をそれぞれ求めよ．

【解答】 $CD = |5-2| = \mathbf{3}$，$BC = |2-(-1)| = \mathbf{3}$，
$AD = |5-(-4)| = \mathbf{9}$，$CA = |-4-2| = |-6| = \mathbf{6}$

[*13] $|a|$ は「a（の）絶対値」と読まれることが多い．たとえば，$|2|$ ならば「2（の）絶対値」と読む．

【例題 9】 $|5|^2$, $|3||-4|$, $\dfrac{|5|}{|-10|}$ を計算しなさい.

【解答】 $|5|^2 = 5^2 = \mathbf{25}$, $|3||-4| = 3 \times 4 = \mathbf{12}$
$\dfrac{|5|}{|-10|} = \dfrac{5}{10} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

【練習 10：絶対値の値】
次の値を計算しなさい.
1. $x = 2$ のときの，$|x-3|$ の値　　2. $\left|-\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3}\right|$　　3. $\left|-3+\sqrt{5}\right|$

【解答】
1. $|2-3| = |-1| = \mathbf{1}$
2. $\left|-\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} + \sqrt{3} = \mathbf{2\sqrt{3}}$.
3. $\sqrt{5} = 2.2\cdots$ なので，$-3+\sqrt{5} = -0.7\cdots < 0$.
   つまり，$\left|-3+\sqrt{5}\right| = -\left(-3+\sqrt{5}\right) = \mathbf{3-\sqrt{5}}$.

◂ $-\sqrt{3}$ は負の値なので $\left|-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

◂ 符号を逆転させて正の値にするには，-1 倍すればよい.

C. 絶対値の値と場合分け

【例題 11】 次の x の条件において，$|x-2|$ と $x-2$ が等しい値になるものをすべて選べ.
1. $x = 3$　　2. $x = -1$　　3. $x = 1$　　4. $x = 4$　　5. $x < 2$ のとき　　6. $2 \leqq x$ のとき

【解答】
1. $x-2 = 1$ より，等しい.　　2. $x-2 = -3$ より，等しくない.
3. $x-2 = -1$ より，等しくない.　　4. $x-2 = 2$ より，等しい.
5. $x-2$ が負の値なので，$|x-2| = -(x-2)$ となり，等しくない.
6. $x-2$ が 0 以上の値なので，$|x-2| = x-2$ となって，等しい.

以上より，等しくなるものは **(1), (4), (6)** である.

◂ 正の値の絶対値は，そのまま外せばよい.

【練習 12：絶対値の場合分け】

以下のそれぞれの場合について，式 $|x-4|+|2x+2|$ の値を計算せよ．

(1) $x=5$　(2) $x=1$　(3) $x=a$，ただし $4 \leqq a$　(4) $x=a$，ただし $-1<a<4$

【解答】

(1)（与式）$=|1|+|12|=1+12=\mathbf{13}$

(2)（与式）$=|-3|+|4|=3+4=\mathbf{7}$

(3) $4 \leqq a$ より，$a-4 \geqq 0$ なので $|a-4|=a-4$

$4 \leqq a$ より，$2a+2 \geqq 0$ なので $|2a+2|=2a+2$

つまり，（与式）$=(a-4)+(2a+2)=\mathbf{3a-2}$

◀ $a=5$ とすると，(1) の結果に一致することを確認できる．

(4) $-1<a<4$ より，$a-4<0$ なので $|a-4|=-(a-4)$

$-1<a<4$ より，$2a+2>0$ なので $|2a+2|=2a+2$

つまり，（与式）$=-(a-4)+(2a+2)=\mathbf{a+6}$

◀ $a=1$ とすると，(2) の結果に一致することを確認できる．

この問題のように場合に分けて問題を解くことは，高校の数学において極めて重要である．絶対値を含む問題の他にも，数学 A で学ぶ場合の数・確率などにおいて頻繁に必要とされる．

余談になるが，日常でも場合に分けて考えることは大切である．たとえば，晴れと雨で場合に分けて遠足の予定を立てないと，大変なことになってしまう．

【発展 13：絶対値の性質】

a，b に関して次の等式が成り立つことを証明せよ．ただし，(3) では $b \neq 0$ とする．

(1) $|a|^2=a^2$　(2) $|ab|=|a||b|$　(3) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$

これらの性質についてイメージがしやすいよう，具体例を挙げておく．

(1) $a=-3$ のとき

$|-3|^2=9$，$(-3)^2=9$

(2) $a=-3$，$b=4$ のとき

$|(-3)\times 4|=12$，$|-3||4|=12$

(3) $a=-\sqrt{5}$，$b=2$ のとき

$\left|\dfrac{-\sqrt{5}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{|-\sqrt{5}|}{|2|}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

絶対値の中が「0 以上か」「負か」で，絶対値の外し方が違うので，場合に分けて示す．

上の等式は，以下のように記憶するとよい．

(1) 2 乗すると絶対値は外れる（付く）

(2) 掛け算のところで絶対値は切れる（つながる）

(3) 割り算のところで絶対値は切れる（つながる）

【解答】

(1)　i) $a \geqq 0$ のとき，$|a| = a$ であるから

$$(\text{左辺}) = |a|^2 = a^2 = (\text{右辺})$$

ii) $a < 0$ のとき，$|a| = -a$ であるから

$$(\text{左辺}) = |a|^2 = (-a)^2 = a^2 = (\text{右辺})$$

以上 i)，ii) より，$|a|^2 = a^2$ が成り立つ．■

(2) 右欄外の表のように，4 つの場合に分けて考える．

	$a \geqq 0$ のとき	$a < 0$ のとき
$b \geqq 0$ のとき	i)	iii)
$b < 0$ のとき	ii)	iv)

i) $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき

$ab \geqq 0$，$|a| = a$，$|b| = b$ であるから

$$(\text{左辺}) = |ab| = ab, \qquad (\text{右辺}) = |a||b| = ab$$

となり成立．

ii) $a \geqq 0$，$b < 0$ のとき

$ab \leqq 0$，$|a| = a$，$|b| = -b$ であるから

$$(\text{左辺}) = |ab| = -ab, \qquad (\text{右辺}) = |a||b| = a(-b) = -ab$$

となり成立．

◀ b は負の値なので，$-b$ は正の値である．

iii) ii) の証明において，a と b を入れ替えれば iii) の証明になっているので，成立する．

◀ a と b の役割が同じなので，このような証明ができる．たとえば，(3) においては，a と b の役割が異なるので，このような証明手段は使えない．

iv) $a < 0$，$b < 0$ のとき

$ab > 0$，$|a| = -a$，$|b| = -b$ であるから

$$(\text{左辺}) = |ab| = ab, \qquad (\text{右辺}) = |a||b| = (-a)(-b) = ab$$

以上より，いずれの場合も $|ab| = |a||b|$ が成り立つ．■

(3) まず，$\left|\dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{1}{|b|}$ ……… ① を示す．

i) $b > 0$ のとき，$\dfrac{1}{b} > 0$，$|b| = b$ であるから

$$(\text{①の左辺}) = \left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{b}, \qquad (\text{①の右辺}) = \frac{1}{|b|} = \frac{1}{b}$$

となり成立．

ii) $b < 0$ のとき，$\dfrac{1}{b} < 0$，$|b| = -b$ であるから

$$(\text{①の左辺}) = \left|\frac{1}{b}\right| = -\frac{1}{b}, \qquad (\text{①の右辺}) = \frac{1}{|b|} = \frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$$

となり成立．

以上 i)，ii) より①が成立．これより

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \cdot \frac{1}{b}\right| = |a|\left|\frac{1}{b}\right|$$

◀ (2) を使った

$$= |a|\frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

◀ ①を使った

となり，$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ が成り立つ．■

この章では，まず，高校で学ぶような複雑な式を，見通しよく扱うための方法を学ぶ．
そして，展開(3.〜4.)と因数分解(5.〜7.)を学ぶ．

1. 単項式

A. 単項式と次数

文字 a, b, x について考える

$$\underset{\text{係数}}{3}\,\underbrace{abx^2}_{\text{文字が 4 個掛けてあるので次数は 4}}$$

$3abx^2$ のように，いくつかの文字や数を掛け合わせた式を**単項式** (monomial) といい，掛け合わせる文字の個数を**次数** (degree) という．1 や -3 などの数は，文字を含まない単項式とみなし，次数は 0 とする[*14]．また，数の部分を**係数** (coefficient) という．

次数の大小は，「高い」「低い」で表されることが多い．たとえば，式 ab は，式 $4x$ よりも次数が「高い」．

【例題 14】 式 $3b^2$，$-5x^2y$，-6，$\dfrac{1}{3}xz$ について

1. それぞれ係数と次数を答えよ．
2. 一番次数の高い式，低い式をそれぞれ選べ．

【解答】

1. $3b^2$：係数は $\mathbf{3}$，次数は $\mathbf{2}$，　$-5x^2y$：係数は $\mathbf{-5}$，次数は $\mathbf{3}$
   -6：係数は $\mathbf{-6}$，次数は $\mathbf{0}$，　$\dfrac{1}{3}xz$：係数は $\mathbf{\dfrac{1}{3}}$，次数は $\mathbf{2}$
2. 高い式：$\mathbf{-5x^2y}$，低い式：$\mathbf{-6}$

B. 特定の文字に着目する

文字 x に着目する

$$\overbrace{3ab}^{\text{係 数}}\underbrace{x^2}_{x\text{ 2個なので次数は 2}}$$

単項式において，特定の文字に着目することがある．このとき，その他の文字を数と同様に扱う．たとえば，単項式 $3abx^2$ では以下のようになる．

文字 x の単項式と考えた場合　$3abx^2 = (3ab)x^2$，次数は 2，係数は $3ab$
文字 a の単項式と考えた場合　$3abx^2 = (3bx^2)a$，次数は 1，係数は $3bx^2$

【例題 15】 以下のそれぞれについて，式 $3ka^4b^5$ の次数と係数を答えよ．

1. 文字 a の式と考えたとき
2. 文字 b の式と考えたとき
3. 文字 a, b の式と考えたとき

【解答】

1. a に着目すると，次数は $\mathbf{4}$，係数は $\mathbf{3kb^5}$ である．　◀ $3ka^4b^5 = (3kb^5)a^4$
2. b に着目すると，次数は $\mathbf{5}$，係数は $\mathbf{3ka^4}$ である．　◀ $3ka^4b^5 = (3ka^4)b^5$
3. a と b に着目すると，次数は $\mathbf{9}$，係数は $\mathbf{3k}$ である．

[*14] ただし，単項式 0 については次数を考えない．
通常，次数が m の式と次数が n の式の積は次数 $m+n$ の式になるが，
単項式 0 の次数を考えると，この規則が成り立たなくなってしまう．

$$\underbrace{3ab}_{\text{次数は 2}} \times \underbrace{2xyz}_{\text{次数は 3}} = \underbrace{6abxyz}_{\text{次数は 5 }(=2+3)}$$

【練習 16：単項式の次数】

次の多項式について，[ ] 内の文字に着目したときの次数と係数を答えよ．

(1) $3x^4y^5$　　[x], [y], [x と y]　　　　(2) $2abxy^2$　　[x], [y], [x と y]

【解答】

(1) i) x に着目すると，次数は **4**，係数は $\boldsymbol{3y^5}$ である．　◂ $3x^4y^5 = (3y^5)x^4$

ii) y に着目すると，次数は **5**，係数は $\boldsymbol{3x^4}$ である．　◂ $3x^4y^5 = (3x^4)y^5$

iii) x と y に着目すると，次数は **9**，係数は **3** である．

(2) i) x に着目すると，次数は **1**，係数は $\boldsymbol{2aby^2}$ である．　◂ $2abxy^2 = (2aby^2)x$

ii) y に着目すると，次数は **2**，係数は $\boldsymbol{2abx}$ である．　◂ $2abxy^2 = (2abx)y^2$

iii) x と y に着目すると，次数は **3**，係数は $\boldsymbol{2ab}$ である．　◂ $2abxy^2 = (2ab)xy^2$

C. 累乗と指数法則

実数 a を n 個（$n \geqq 2$）掛け合わせた式 $\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}}$ は a^n で表され「a の n 乗」と読む．このとき，a の右上に書かれた数 n のことを**指数** (exponent) という．

$$\underbrace{6 \times 6 \times 6 \times 6}_{4\text{ 個}} = 6^4 \quad \text{←指数は 4}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{3\text{ 個}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \text{←指数は 3}$$

a^2 のことを a の**平方** (square)，a^3 のことを a の**立方** (cube) といい，$a, a^2, a^3, \cdots$ を総称して a の**累乗** (power) という．

累乗に関して，一般に次のような**指数法則** (exponential law) が成り立つ[*15]．

指数法則

m，n が自然数のとき一般に次のような性質が成り立つ．

i) $a^m a^n = a^{m+n}$　　ii) $(a^m)^n = a^{mn}$　　iii) $(ab)^n = a^n b^n$

この指数法則は，暗記するようなものではない．仕組みを理解して慣れよう．なお，「$\cdot$」は掛け算を表す．たとえば，$4 \cdot 2x = 8x$ となる．今後，頻繁に用いられる記号なので覚えておこう．

i) $a^2 \times a^4 = \underbrace{(a \times a)}_{2\text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a \times a \times a)}_{4\text{ 個}} = a^6 \ (= a^{2+4})$

ii) $(a^2)^4 = \underbrace{(a \times a)}_{2\text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a)}_{2\text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a)}_{2\text{ 個}} \cdot \underbrace{(a \times a)}_{2\text{ 個}} = a^8 \ (= a^{2\times 4})$

iii) $(a \times b)^4 = \underbrace{(a \times b) \cdot (a \times b) \cdot (a \times b) \cdot (a \times b)}_{a\text{ も }b\text{ も 4 個ずつ}} = a^4 \times b^4$

【例題 17】 次の式を計算して簡単にせよ．

1. $x^2 \times x^3$　2. $(x^2)^3$　3. $(x^3)^5$　4. $(xy^2)^3$　5. $(2a^3)^2$　6. $(-a)^3$

【解答】

1. $x^2 \times x^3 = x^{2+3} = \boldsymbol{x^5}$　◂『指数法則 i)』を使った
2. $(x^2)^3 = x^{2\times 3} = \boldsymbol{x^6}$　　3. $(x^3)^5 = x^{3\times 5} = \boldsymbol{x^{15}}$　◂『指数法則 ii)』
4. $(xy^2)^3 = x^3(y^2)^3 = \boldsymbol{x^3y^6}$　　5. $(2a^3)^2 = 2^2(a^3)^2 = \boldsymbol{4a^6}$　◂『指数法則 iii)』『指数法則 ii)』
6. $(-a)^3 = (-1)^3a^3 = \boldsymbol{-a^3}$　◂『指数法則 iii)』

[*15] 今のところ，指数は自然数だが，数学 II においては整数や有理数などへと拡張させていく．

2.　多項式

A.　多項式 — 複数の「項」の式

$2a-3b^2+ab$ のように，いくつかの単項式の和や差として表される式を**多項式** (polynomial) という（**整式** (integral expression) ともいう[*16]）．

多項式を構成する単項式を，**項** (term) という．特に，0 次の項のことを**定数項** (constant term) という．たとえば，多項式 $2a-3b^2-4+ab$ の項は，$2a, -3b^2, -4,\ ab$（または $+ab$）であり，定数項は -4 である．負の符号も含めて項ということに注意しよう[*17]．

B.　同類項をまとめる

多項式の項のうち，文字の部分が同じである項どうしを**同類項** (similar term) という．多項式の加法と減法は，同類項をまとめることによって行われる．

同類項

$$5a^2b+3ab+3-a^2b+2ab=(5a^2b-a^2b)+(3ab+2ab)+3$$

同類項

$$=4a^2b+5ab\underbrace{+3}_{\text{定数項}}$$

たとえば，$A=3x^2-2x+1$，$B=2x^2+7x-3$ のとき

多項式の加法

$$\begin{aligned}A+B&=(3x^2-2x+1)+(2x^2+7x-3)\\&=3x^2-2x+1+2x^2+7x-3\\&=(3x^2+2x^2)+(-2x+7x)+(1-3)\\&=5x^2+5x-2\end{aligned}$$

←かっこをはずした→

←同類項をまとめた→

多項式の減法

$$\begin{aligned}A-B&=(3x^2-2x+1)-(2x^2+7x-3)\\&=3x^2-2x+1-2x^2-7x+3\\&=(3x^2-2x^2)+(-2x-7x)+(1+3)\\&=x^2-9x+4\end{aligned}$$

同類項を縦に並べると，計算がしやすくなる．

$$\begin{aligned}A+B&=3x^2-2x+1\\&\quad\ +2x^2+7x-3\\&=5x^2+5x-2\end{aligned}\qquad\begin{aligned}A-B&=3x^2-2x+1\\&\quad\ -2x^2-7x+3\\&=x^2-9x+4\end{aligned}$$

←かっこをはずし，同類項を縦に並べた

【例題 18】

1. $2ab+a^2c-3c-2a^2c$ の同類項をまとめ，項をすべて答え，定数項があれば答えよ．
2. $X=a^2+3a-5,\ Y=2a^2+3a+5$ のとき，$X+Y,\ X-Y$ を求めよ．

【解答】

1. $2ab+a^2c-3c-2a^2c=\boldsymbol{2ab-a^2c-3c}$

   項は $\boldsymbol{2ab,\ -a^2c,\ -3c}$ であり，**定数項はない**．

2. $$\begin{aligned}X+Y&=a^2+3a-5\\&\quad\ +2a^2+3a+5\\&=\boldsymbol{3a^2+6a}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}X-Y&=a^2+3a-5\\&\quad\ -2a^2-3a-5\\&=\boldsymbol{-a^2-10}\end{aligned}$$

[*16] 「多項式」と「単項式」をまとめて「整式」と定める言い方もある．

[*17] 単項式は多項式の特別なものであり，「項が 1 つの多項式」が単項式であると言える．

【練習 19：指数法則】

次の計算をしなさい．

(1) $2a^3b \times (a^2)^2$　　(2) $(4x^2y)^2 \times 2xy$　　(3) $(3xy^3)^2 \times \dfrac{1}{3}xy^2$

(4) a の平方の立方は，a の何乗か．

【解答】

(1)（与式）$= 2a^3b \times a^4 = \boldsymbol{2a^7b}$　　(2)（与式）$= 16x^4y^2 \times 2xy = \boldsymbol{32x^5y^3}$

(3)（与式）$= \cancel{9}^{3}x^2y^6 \times \dfrac{1}{\cancel{3}}xy^2 = \boldsymbol{3x^3y^8}$

(4) a の平方は a^2，その立方は $(a^2)^3 = \boldsymbol{a^6}$ になる．

C.　多項式の次数

多項式の次数は，各項の次数のうち最大のもので定義される．次数が n の多項式を，単に **n 次式** (expression of degree n) という．たとえば，$4a^2b + 5ab$ は（a と b について）3 次式である（右図参照）．

$$\underbrace{\underset{\text{次数は 3}}{4a^2b} + \underset{\text{次数は 2}}{5ab}}_{\text{多項式の次数は（大きい方の）3}}$$

つまり 3 次式

D.　降べきの順 — 式が見やすいように

多項式の項を，次数が低くなる順に並べ替えることを，「**降べきの順** (descending order of power) に整理する」という*18．たとえば，多項式 $-3x^2 - 7 + 4x^3 + x$ を（x について）降べきの順に整理してみよう．

$$\underbrace{\underset{2\text{ 次}}{-3x^2} \underset{0\text{ 次}}{-\ 7} \underset{3\text{ 次}}{+4x^3} \underset{1\text{ 次}}{+\ x}}_{\text{次数の大きさがばらばら}} = \underbrace{\underset{3\text{ 次}}{\boldsymbol{4x^3}} \underset{2\text{ 次}}{\boldsymbol{-3x^2}} \underset{1\text{ 次}}{\boldsymbol{+\ x}} \underset{0\text{ 次}}{\boldsymbol{-\ 7}}}_{\text{次数が順に低くなる}}$$

これによって式が見やすくなり，展開・因数分解・値の代入などがやりやすくなる．

…　今後は，降べきの順に整理する習慣をつけよう*19．

【例題 20】

1. 多項式 $3x^3 - 3x^2 + 1 + x^3$ の同類項をまとめ，降べきの順に整理すると $\boxed{\text{ア}}$ となる．
この式の次数は $\boxed{\text{イ}}$ であり，項をすべて挙げると $\boxed{\text{ウ}}$，定数項は $\boxed{\text{エ}}$ である．
2. 多項式 $2x + 3x^2 - x^2 - 4x - 5$ の同類項をまとめ，降べきの順に整理すると $\boxed{\text{オ}}$ となる．
この式の次数は $\boxed{\text{カ}}$ であり，項をすべて挙げると $\boxed{\text{キ}}$，定数項は $\boxed{\text{ク}}$ である．

【解答】

1. **ア**：$\boldsymbol{4x^3 - 3x^2 + 1}$，　**イ**：項 $4x^3$ の次数が一番高いので **3** 次式
ウ：項は $\boldsymbol{4x^3}$，$\boldsymbol{-3x^2}$，$\boldsymbol{1}$，　**エ**：定数項は **1**　　◀ 項 1 の代わりに +1 でもよい．

2. **オ**：$2x + 3x^2 - x^2 - 4x - 5 = -2x + 2x^2 - 5$　　◀ 同類項をまとめた
$= \boldsymbol{2x^2 - 2x - 5}$　　◀ 項べきの順に整理した

*18 逆に，次数が高くなる順に整理することを「**昇べきの順** (ascending order of power) に整理する」という．たとえば，$-3x^2 - 7 + 4x^3 + x = -7 + x - 3x^2 + 4x^3$ のようになる．ただし，高校ではあまり用いられない．

*19 ただし，対称性をもつ $ab + bc + ca$ のような式は，例外として，降べきの順にする必要がないこともある．

カ : **2** 次式,　キ : 項は $\mathbf{2x^2}$, $\mathbf{-2x}$, $\mathbf{-5}$,　ク : 定数項は $\mathbf{-5}$

E.　特定の文字でまとめる

多項式においても，特定の文字に着目し，他の文字を数とみなすことがある．

たとえば，多項式 $bx - ax^3y + y^2 + y$ について考えてみよう．

x について降べきの順に整頓したとき

$$\underset{1\text{次}}{bx} - \underset{3\text{次}}{ax^3y} + \underset{0\text{次}}{y^2 + y}$$

$$= \overbrace{\boldsymbol{-ay}}^{\text{係数}}\ \underset{3\text{次}}{\boldsymbol{x^3}} + \overbrace{\boldsymbol{b}}^{\text{係数}}\ \underset{1\text{次}}{\boldsymbol{x}} + \underset{0\text{次}}{\overbrace{(\boldsymbol{y^2+y})}^{\text{定数項}}}$$

- 次数は 3（x について 3 次式）
- x^3 の係数は $-ay$，x の係数は b
- 定数項は $y^2 + y$

y について降べきの順に整頓したとき

$$\underset{1\text{次}}{-ax^3y} + \underset{0\text{次}}{bx} + \underset{2\text{次}}{y^2} + \underset{1\text{次}}{y}$$

$$= \underset{2\text{次}}{y^2} - \underset{1\text{次}}{ax^3y} + \underset{1\text{次}}{y} + \underset{0\text{次}}{bx}$$

$$= \underset{2\text{次}}{\boldsymbol{y^2}} + \overbrace{(\boldsymbol{-ax^3+1})}^{\text{係数}}\ \underset{1\text{次}}{\boldsymbol{y}} + \underset{0\text{次}}{\overset{\text{定数項}}{\boldsymbol{bx}}}$$

- 次数は 2（y について 2 次式）
- y^2 の係数は 1，y の係数は $-ax^3 + 1$
- 定数項は bx

$-ax^3 + 1$ のように，定数項や係数が 2 つ以上の項からなる場合は，上のように（　）でまとめる．

【例題 21】　次の多項式を x について降べきの順に整理し，x^2 の係数，x の係数，定数項を答えよ．

1. $x^2 + 2y^2 - 3xy + 4y^2 + 2xy$　　2. $-x^2 + xy^2 - 3xy^2 + 2x^2$　　3. $3x^2 - 12xy + 4 + 3x^2 - 2x + 5$

【解答】

1.
$$x^2 + 2y^2 - 3xy + 4y^2 + 2xy$$
$$= x^2 + (2xy - 3xy) + (2y^2 + 4y^2)$$
$$= \boldsymbol{x^2 - xy + 6y^2}$$

これより，x^2 の係数は **1**，x の係数は $\boldsymbol{-y}$，定数項は $\boldsymbol{6y^2}$ である．

◂ $x^2 + (-y)x + 6y^2$ とみなせるため

2.
$$-x^2 + xy^2 - 3xy^2 + 2x^2$$
$$= (-x^2 + 2x^2) + (xy^2 - 3xy^2)$$
$$= \boldsymbol{x^2 - 2y^2x}$$

これより，x^2 の係数は **1**，x の係数は $\boldsymbol{-2y^2}$，定数項は**なし**である．

3.
$$3x^2 - 12xy + 4 + 3x^2 - 2x + 5$$
$$= (3x^2 + 3x^2) + (-12xy - 2x) + (4 + 5)$$
$$= \boldsymbol{6x^2 + (-12y - 2)x + 9}$$

これより，x^2 の係数は **6**，x の係数は $\boldsymbol{-12y-2}$，定数項は **9** である．

◂ $6x^2 - (12y + 2)x + 9$ としてもよいが，$-($　$)$ でくくるときに計算ミスが生じやすいし，くくらなくても問題はない．

【練習 22：降べきの順】

(1) $4a^2 + a^3 - 3 + a^2 - 1$ を整理し，降べきの順に整理しなさい．また，この式は何次式か．

(2) 次の多項式について，[ ] 内の文字に着目して降べきの順に並べ，式の次数，定数項を答えよ．

1) $2cb - 3a - 2c^2a$ [c]　　2) $3k^2x + 2kx^2 + 4kx + 4k - 3$ [x]

【解答】

(1) $4a^2 + a^3 - 3 + a^2 - 1 = 5a^2 + a^3 - 4$　◀ 同類項をまとめた

$= \boldsymbol{a^3 + 5a^2 - 4}$　◀ 項べきの順に整理した

式の次数は **3 次式**である．

(2) 1) $2cb - 3a - 2c^2a = -2c^2a + 2cb - 3a = \boldsymbol{-2ac^2 + 2bc - 3a}$

定数項は $\boldsymbol{-3a}$，項 $-2ac^2$ の次数 2 が一番高いので，**2 次式**．

2) $3k^2x + 2kx^2 + 4kx + 4k - 3 = \boldsymbol{2kx^2 + (3k^2 + 4k)x + 4k - 3}$

定数項は $\boldsymbol{4k - 3}$，項 $2kx^2$ の次数 2 が一番高いので，**2 次式**．

F. 分配法則，交換法則，展開

分配法則 $A(B + C) = AB + AC$，$(A + B)C = AC + BC$，交換法則 $AB = BA$ は多項式においても成立する．たとえば，これを使って $(x^2 + 3)(x^2 - 4x + 5)$ は次のように計算する．

$$\begin{aligned}
(x^2 + 3)(x^2 - 4x + 5) &= (x^2 + 3)A && \leftarrow x^2 - 4x + 5 \text{ を } A \text{ とおいた} \\
&= x^2A + 3A && \leftarrow \text{分配法則 } (A + B)C = AC + BC \text{ を使った} \\
&= x^2(x^2 - 4x + 5) + 3(x^2 - 4x + 5) && \leftarrow A \text{ を } x^2 - 4x + 5 \text{ に戻した} \\
&= x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 12x + 15 && \leftarrow \text{分配法則 } A(B + C) = AC + BC \text{ を使った} \\
&= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 15 && \leftarrow \text{同類項でまとめ降べきの順に並べた}
\end{aligned}$$

ここでは，$x^2 - 4x + 5$ を A とおいて計算した．結果的に，1 つの多項式を 1 つの文字のようにして扱ったことになる．この見方は今後，極めて重要となる．

ただし上の計算については，慣れてくると，左下のように計算できるようになる．

$$\begin{aligned}
(x^2 + 3)\ (x^2 - 4x + 5) &= \overset{①}{x^4} - \overset{②}{4x^3} + \overset{③}{5x^2} + \overset{④}{3x^2} - \overset{⑤}{12x} + \overset{⑥}{15} \\
&= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 15
\end{aligned}$$

	x^2	$-4x$	5
x^2	x^4 ①	$-4x^3$②	$5x^2$③
3	$3x^2$④	$-12x$⑤	15 ⑥

表の①, ②, ･･･ は，左の式の①, ②, ･･･ に対応している．

このように，「多項式どうしの積[*20]を計算して，単項式だけの和にすること」を**展開** (expansion) **する**という．0 でない 2 つの多項式について，次数が m の式と次数が n の式の積を展開すると，次数 $m + n$ の多項式になる．

[*20] 多項式の除法は数学 II で学ぶ．

【練習 23：展開の基礎～その１～】

A が次の式のとき，$(3x+y)A$ を展開し，x についての降べきの順に整理しなさい.

(1) $A = x + y$　　(2) $A = 2x^2 - 3x + 5$　　(3) $A = 2x - 6y + 1$

【解答】

(1) $(3x+y)A$ に $A = x + y$ を代入して

$$(3x+y)(x+y) = 3x^2 + 3xy + xy + y^2$$
$$= \mathbf{3x^2 + 4xy + y^2}$$

	x	y
$3x$	$3x^2$	$3xy$
y	xy	y^2

◀ x の降べきの順に整理した

(2) $$(3x+y)A = (3x+y)(2x^2 - 3x + 5)$$
$$= 6x^3 - 9x^2 + 15x + 2x^2y - 3xy + 5y$$
$$= \mathbf{6x^3 + (2y - 9)x^2 + (-3y + 15)x + 5y}$$

	$2x^2$	$-3x$	5
$3x$	$6x^3$	$-9x^2$	$15x$
y	$2x^2y$	$-3xy$	$5y$

◀ x の降べきの順に整理した

(3) $$(3x+y)A = (3x+y)(2x - 6y + 1)$$
$$= 6x^2 - 18xy + 3x + 2xy - 6y^2 + y$$
$$= \mathbf{6x^2 + (-16y + 3)x - 6y^2 + y}$$

	$2x$	$-6y$	1
$3x$	$6x^2$	$-18xy$	$3x$
y	$2xy$	$-6y^2$	y

◀ 同類項をまとめ，x の降べきの順に整理した

【練習 24：展開の基礎～その２～】

$A = 2x + y,\ B = 3x - 2y - 1$ のとき，以下の問いに答えよ.

(1) 積 AB を展開し，x についての降べきの順に整理しなさい.

(2) 積 AB の x の係数が 3 に等しいとき，y の値を求めなさい.

【解答】

	$3x$	$-2y$	-1
$2x$	$6x^2$	$-4xy$	$-2x$
y	$3xy$	$-2y^2$	$-y$

(1) $$AB = (2x+y)(3x-2y-1) = 6x^2 - 4xy - 2x + 3xy - 2y^2 - y$$
$$= 6x^2 - xy - 2x - 2y^2 - y$$
$$= \mathbf{6x^2 + (-y - 2)x - 2y^2 - y}$$

◀ x の降べきの順に整理した

(2) x の係数は $-y-2$ なので $-y-2=3$ であればよい.
これを解いて $\mathbf{y = -5}$.

3.　多項式の乗法の公式

今後出てくる公式については，掛け算の九九のようなものだと思って繰り返し練習しよう．慣れてくると多項式の展開が格段に早く正確になる．

A.　中学の復習

左の「i) うまい計算のやり方（○）」で，反射的にできるように復習しよう．

平方の公式

1°　$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,　　$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(3x+2)^2 = \underbrace{9x^2 + 2\cdot(3x)\cdot 2 + 4}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 9x^2 + 12x + 4$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(3x+2)^2 = (3x+2)(3x+2)$$
$$= 9x^2 + 6x + 6x + 4$$
$$= 9x^2 + 12x + 4$$

和と差の積の公式

2°　$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(5x+2y)(5x-2y)$$
$$= \underbrace{(5x)^2 - (2y)^2}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 25x^2 - 4y^2$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(5x+2y)(5x-2y)$$
$$= 25x^2 - 10xy + 10yx - 4y^2$$
$$= 25x^2 - 4y^2$$

1 次式の積の公式～特殊形

3°　$(x+b)(x+d) = x^2 + (b+d)x + bd$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(x+3y)(x-4y)$$
$$= \underbrace{x^2 + (3y-4y)x + (3y)\cdot(-4y)}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= x^2 - xy - 12y^2$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(x+3y)(x-4y)$$
$$= x^2 - 4xy + 3yx - 12y^2$$
$$= x^2 - xy - 12y^2$$

【例題 25】 以下の展開をしなさい．ただし，4. 以降は $A = x-3$, $B = x+3$, $C = x-1$ とする．

1. $(a+4)^2$　2. $(x+2y)(x-2y)$　3. $(p+2)(p-4)$　4. A^2　5. AB　6. AC

【解答】

1. $(a+4)^2 = \boldsymbol{a^2+8a+16}$ ◀『平方の公式』(p.18)
2. $(x+2y)(x-2y) = \boldsymbol{x^2-4y^2}$ ◀『和と差の積の公式』(p.18)
3. $(p+2)(p-4) = \boldsymbol{p^2-2p-8}$ ◀『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)
4. $A^2 = (x-3)^2 = \boldsymbol{x^2-6x+9}$ ◀『平方の公式』(p.18)
5. $AB = (x-3)(x+3) = \boldsymbol{x^2-9}$ ◀『和と差の積の公式』(p.18)
6. $AC = (x-3)(x-1) = \boldsymbol{x^2-4x+3}$ ◀『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)

B. 分母の有理化

分母に根号（$\sqrt{\quad}$）をもつ分数において，分母の根号を無くし，有理数に変えることを，分母の**有理化** (rationalization) という[*21]．

$$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3\left(\boldsymbol{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\boldsymbol{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)}$$

← 分母と分子に $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ を掛ける

$$= \frac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$$

← 『和と差の積の公式』(p.18)

【例題 26】 以下の分数の分母を有理化しなさい．

1. $\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　2. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$　3. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

【解答】

1. $$\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\cancel{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\cancel{4}} = \boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$ ◀『和と差の積の公式』(p.18)

2. $$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}+3-\sqrt{3}}{2}}$$ ◀『和と差の積の公式』(p.18)

3. $$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2}{3}$$ ◀『和と差の積の公式』(p.18)
$$= \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{10}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{3} = \boldsymbol{\frac{7+2\sqrt{10}}{3}}$$ ◀『平方の公式』(p.18)

[*21] これによって，近似値を求めやすくなる．下の例でいえば（$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.414$，$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.732$ とする）
$\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \fallingdotseq 3 \div (1.732-1.414) = 3 \div 0.318$,　$3\sqrt{3}+3\sqrt{2} \fallingdotseq 3 \times (1.732+1.414) = 3 \times 3.146$

【練習 27：分母の有理化】

分数 $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$，$\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}$ を有理化しなさい．

【解答】 $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \dfrac{2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{\cancel{2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}{\cancel{4}^{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}}$

$\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} = \dfrac{\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)}{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{6}+2\right)^2}{2}$

◀『和と差の積の公式』(p.18)

$= \dfrac{10+4\sqrt{6}}{2} = \boldsymbol{5+2\sqrt{6}}$

◀『平方の公式』(p.18)

C. 1 次式の積の一般的な公式

$(ax+b)(cx+d)$ を展開すると

$$(ax+b)\,(cx+d) = \overset{①}{acx^2} + \overset{②}{adx} + \overset{③}{bcx} + \overset{④}{bd} \qquad = acx^2 + \underbrace{(ad+bc)}_{\text{外どうしの積＋中どうしの積}}x + bd$$

	cx	d
ax	acx^2	adx
b	bcx	bd

となる．これを使い，たとえば $(2x+3y)(5x-4y)$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（○）

$$\begin{aligned}&(2x+3y)(5x-4y)\\ =\ &\underbrace{10x^2+(-8y+15y)x+(3y)\cdot(-4y)}_{\text{慣れると省略できる}}\\ =\ &10x^2+7xy-12y^2\end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$\begin{aligned}&(2x+3y)(5x-4y)\\ =\ &10x^2-8xy+15yx-12y^2\\ =\ &10x^2+7xy-12y^2\end{aligned}$$

1 次式の積の公式〜一般形

4° $(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd$

この公式の $(ad+bc)$ の部分は「(外どうしの積 (ad)) ＋ (中どうしの積 (bc))」と覚えるとよい．

【例題 28】 次の多項式を展開し整理せよ．

1. $(x+2)(2x+1)$　2. $(2x+3)(3x-2)$　3. $(5x-3y)(2x-y)$　4. $(3x-y)(2x+3y)$

【解答】

1. x の係数は $1\cdot1+2\cdot2=5$，$(x+2)(2x+1) = \boldsymbol{2x^2+5x+2}$

◀ $(x+2)\ (2x+1)$

2. x の係数は $2\cdot(-2)+3\cdot3=5$，$(2x+3)(3x-2) = \boldsymbol{6x^2+5x-6}$

◀ $(2x+3)\ (3x-2)$

3. x の係数は $5\cdot(-y)+(-3y)\cdot2=-11y$,
$(5x-3y)(2x-y) = \boldsymbol{10x^2-11xy+3y^2}$

◀ $(5x-3y)\ (2x-y)$

4. x の係数は $3\cdot(3y)+(-y)\cdot2=7y$,
$(3x-y)(2x+3y) = \boldsymbol{6x^2+7xy-3y^2}$

D.　立方の公式 1

$(a+b)^3$ を展開すると

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)\ (a^2+2ab+b^2)$$

$$= \overset{①}{a^3} + \overset{②}{2a^2b} + \overset{③}{ab^2} + \overset{④}{ba^2} + \overset{⑤}{2ab^2} + \overset{⑥}{b^3}$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

	a^2	$2ab$	b^2
a	a^3	$2a^2b$	ab^2
b	ba^2	$2ab^2$	b^3

となる．これを使い，たとえば $(2x+y)^3$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（○）

$$\begin{aligned}&(2x+y)^3\\ =\ &\underbrace{(2x)^3 + 3\cdot(2x)^2y + 3\cdot(2x)y^2 + y^3}_{\text{慣れると省略できる}}\\ =\ &8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3\end{aligned}$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$\begin{aligned}&(2x+y)^3\\ =\ &(2x+y)(2x+y)^2\\ =\ &(2x+y)(4x^2+4xy+y^2)\\ =\ &8x^3 + 8x^2y + 2xy^2 + 4x^2y + 4xy^2 + y^3\\ =\ &8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3\end{aligned}$$

次ページで見るように，$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ も成り立つ．

立方の公式 1

5°　$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,　　$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

【例題 29】

1. $a = 5x,\ b = 2$ のとき，$3a^2b,\ 3ab^2$ の値をそれぞれ求めよ．
2. 次の多項式を展開せよ．

(a) $(x+2)^3$　　(b) $(x+4)^3$　　(c) $(2x+1)^3$　　(d) $(3x+2)^3$

【解答】

1. $3a^2b = 3\cdot(5x)^2\cdot 2 = \mathbf{150x^2}$,　$3ab^2 = 3\cdot 5x\cdot 2^2 = \mathbf{60x}$
2. (a) $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 + 2^3$

$$= \mathbf{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$$

◀『立方の公式 1』(p.21)

(b) $(x+4)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 4 + 3\cdot x\cdot 4^2 + 4^3$

$$= \mathbf{x^3 + 12x^2 + 48x + 64}$$

(c) $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 1 + 3\cdot(2x)\cdot 1^2 + 1^3$

$$= \mathbf{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}$$

(d) $(3x+2)^3 = (3x)^3 + 3\cdot(3x)^2\cdot 2 + 3\cdot(3x)\cdot 2^2 + 2^3$

$$= \mathbf{27x^3 + 54x^2 + 36x + 8}$$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ については，公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ で処理するほうがよい．たとえば，$(a-2b)^3$ の計算は次のようになる．

$$\begin{aligned}(a-2b)^3 &= \{a+(-2b)\}^3 && \leftarrow 2b \text{ を引くことと } (-2b) \text{ を足すことは同じ}\\ &= a^3 + 3\cdot a^2(-2b) + 3\cdot a(-2b)^2 + (-2b)^3 && \leftarrow \text{慣れると省略できる}\\ &= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3\end{aligned}$$

一般の $(a+b)^n$ の展開については数学 A で学ぶ．

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

【練習 30：多項式の展開〜立方の公式 1】

次の多項式を展開せよ．

(1) $(a-4)^3$　　(2) $(3a-2)^3$　　(3) $(2a+5)^3 + (2a-5)^3$

【解答】

(1) $(a-4)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot(-4) + 3\cdot a\cdot(-4)^2 + (-4)^3$

$= \boldsymbol{a^3 - 12a^2 + 48a - 64}$

◀ $(a-4)^3 = \{a+(-4)\}^3$

(2) $(3a-2)^3 = (3a)^3 + 3\cdot(3a)^2\cdot(-2) + 3\cdot(3a)\cdot(-2)^2 + (-2)^3$

$= \boldsymbol{27a^3 - 54a^2 + 36a - 8}$

◀ $(3a-2)^3 = \{3a+(-2)\}^3$

(3) $(2a+5)^3 + (2a-5)^3$

$= (2a)^3 + \cancel{3\cdot(2a)^2\cdot 5} + 3\cdot(2a)\cdot 5^2 + \cancel{5^3}$
$\quad + (2a)^3 + \cancel{3\cdot(2a)^2\cdot(-5)} + 3\cdot(2a)\cdot(-5)^2 + \cancel{(-5)^3}$

$= 8a^3 + 150a + 8a^3 + 150a = \boldsymbol{16a^3 + 300a}$

【練習 31：1 次式の積の公式】

次の多項式を展開しなさい．

(1) $(x+1)(x+2)$　　(2) $(x+4)(2x-3)$　　(3) $(4x+3)(x-3)$　　(4) $(3x-1)(x-3)$

(5) $(x+2y)(x-3y)$　　(6) $(3x+y)(4x-y)$　　(7) $(2x+5y)(3x-y)$　　(8) $(2x-y)(5x+y)$

「外どうしの積＋中どうしの積」を暗算でできるようにしよう．

【解答】

(1) $\boldsymbol{x^2 + 3x + 2}$　　(2) $\boldsymbol{2x^2 + 5x - 12}$

(3) $\boldsymbol{4x^2 - 9x - 9}$　　(4) $\boldsymbol{3x^2 - 10x + 3}$

(5) $\boldsymbol{x^2 - xy - 6y^2}$　　(6) $\boldsymbol{12x^2 + xy - y^2}$

(7) $\boldsymbol{6x^2 + 13xy - 5y^2}$　　(8) $\boldsymbol{10x^2 - 3xy - y^2}$

E.　立方の公式 2

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開すると

$$(a+b)\ (a^2-ab+b^2) = \overset{①}{a^3} - \overset{②}{a^2b} + \overset{③}{ab^2} + \overset{④}{ba^2} - \overset{⑤}{ab^2} + \overset{⑥}{b^3}$$
$$= a^3 + b^3$$

	a^2	$-ab$	b^2
a	a^3	$-a^2b$	ab^2
b	ba^2	$-ab^2$	b^3

となる．これを使い，たとえば $(3x+1)(9x^2-3x+1)$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（○）

$$(3x+1)(9x^2-3x+1)$$
$$= \underbrace{(3x+1)\left\{(3x)^2-(3x)\cdot 1+1^2\right\}}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 27x^3+1$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(3x+1)(9x^2-3x+1)$$
$$= 27x^3-9x^2+3x+9x^2-3x+1$$
$$= 27x^3+1$$

また，同様に $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ も成り立つ．

立方の公式 2

6°　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$,　　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

左辺の $a \pm b$ と右辺の $a^3 \pm b^3$ は符号が一致する，と覚えておこう．
ただし，この公式を展開のために使う機会は少なく，p.36 における「因数分解」で(逆方向に)よく利用される．

【例題 32】

1. $(x+2)(x^2-2x+4)$, $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)$ を展開せよ．
2. 次の中から，$8x^3+27$ になるもの，$8x^3-27$ になるものを 1 つずつ選べ．

a) $(2x+3)(4x^2+6x+9)$　　b) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$　　c) $(2x+3)(4x^2-6x-9)$
d) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$　　e) $(2x-3)(4x^2-6x+9)$　　f) $(2x-3)(4x^2-6x-9)$

【解答】

1. $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3=\boldsymbol{x^3+8}$
   $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)=(ab)^3-3^3=\boldsymbol{a^3b^3-27}$

◀『立方の公式 2』(p.23)

2. 公式と見比べて
   $(2x+3)(4x^2-6x+9)=(2x)^3+3^3$
   $(2x-3)(4x^2+6x+9)=(2x)^3-3^3$
   であるので，$8x^3+27$ は **b)**，$8x^3-27$ は **d)** である．

◀符号に注意して選ぼう．どれが正しいか分からなくなったら，展開して確認すればよい．

F. 展開公式のまとめ

最も大事なことは,「いつ, どの展開公式を使うのか」見極めることである.

【練習 33：多項式の展開の練習〜その１〜】

次の多項式を展開せよ.

(1) $(2x-5y)(2x+5y)$　(2) $(x+5)(x-8)$　(3) $(2x-5)(4x^2+10x+25)$

(4) $(x-3)^3$　(5) $(2x+1)(x-3)$　(6) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)^2$

(7) $(3a-2)(4a+1)$　(8) $(a-4)(3a+12)$　(9) $(a^2-3)(a^2+7)$

(10) $\left(3a-\frac{1}{2}b\right)^2$　(11) $(-2ab+3c)(2ab+3c)$　(12) $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^3$

(13) $(p+q)(3p^2-3pq+3q^2)$　(14) $(2x+4y)^3$

【解答】

(1)（与式）$=(2x)^2-(5y)^2=\boldsymbol{4x^2-25y^2}$　◀『和と差の積の公式』(p.18)

(2)（与式）$=x^2+(5-8)x+5\cdot(-8)=\boldsymbol{x^2-3x-40}$　◀『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)

(3)（与式）$=(2x)^3-5^3=\boldsymbol{8x^3-125}$　◀『立方の公式 2』(p.23)

(4)（与式）$=x^3+3x^2\cdot(-3)+3x\cdot(-3)^2+(-3)^3=\boldsymbol{x^3-9x^2+27x-27}$　◀『立方の公式 1』(p.21)

(5)（与式）$=2x^2+\{2\cdot(-3)+1\cdot1\}x-3=\boldsymbol{2x^2-5x-3}$　◀『1 次式の積の公式〜一般形』(p.20)

(6)（与式）$=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{3}y+\left(\frac{1}{3}y\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2}$　◀『平方の公式』(p.18)

(7)（与式）$=12a^2+\{3\cdot1+(-2)\cdot4\}x-2=\boldsymbol{12a^2-5a-2}$　◀『1 次式の積の公式〜一般形』(p.20)

(8)（与式）$=3(a-4)(a+4)$　◀『1 次式の積の公式〜一般形』(p.20) でも計算できる

$=3(a^2-16)=\boldsymbol{3a^2-48}$　◀『和と差の積の公式』(p.18)

(9)（与式）$=(a^2)^2+(-3+7)a^2+(-3)\cdot7=\boldsymbol{a^4+4a^2-21}$　◀『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)

(10)（与式）$=(3a)^2-2\cdot3a\cdot\frac{1}{2}b+\left(\frac{1}{2}b\right)^2=\boldsymbol{9a^2-3ab+\frac{1}{4}b^2}$　◀『平方の公式』(p.18)

(11)（与式）$=(3c-2ab)(3c+2ab)$　◀公式を使えるよう足す順番を変更

$=\boldsymbol{9c^2-4a^2b^2}$　◀『和と差の積の公式』(p.18)

(12)（与式）$=a^3+3a^2\cdot\frac{1}{2}b+3a\cdot\left(\frac{1}{2}b\right)^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^3$

$=\boldsymbol{a^3+\frac{3}{2}a^2b+\frac{3}{4}ab^2+\frac{1}{8}b^3}$　◀『立方の公式 1』(p.21)

(13)（与式）$=3(p+q)(p^2-pq+q^2)$　◀公式を使えるようにした

$=3(p^3+q^3)=\boldsymbol{3p^3+3q^3}$　◀『立方の公式 2』(p.23)

(14)（与式）$=\{2(x+2y)\}^3=2^3\cdot(x+2y)^3$　◀指数法則 iii) (p.12)

$=8(x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)$

$=\boldsymbol{8x^3+48x^2y+96xy^2+64y^3}$　◀『立方の公式 1』(p.21)

4. 展開の工夫

3.『多項式の乗法の公式』で学んだ公式を工夫して用いると，複雑な式の計算がかなり容易にできるようになる．ここでは，代表的な 2 つの工夫の方法を取り上げる．

A. 式の一部をまとめる

多項式の一部を 1 つの文字とおくと，今までの公式がより広く使える．たとえば

$$\begin{aligned}(x+y+3)(x+y-2) &= (M+3)(M-2) && \leftarrow M = x+y \text{ とおき，式の一部を一つの文字とみなす}\\ &= M^2+M-6 && \leftarrow \text{『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)}\\ &= (x+y)^2+(x+y)-6 && \leftarrow M \text{ を } x+y \text{ に戻す}\\ &= x^2+2xy+y^2+x+y-6 && \leftarrow \text{『平方の公式』(p.18)}\end{aligned}$$

のように展開できる．

次に，$(x+y-z)(x-y+z)$ の展開を考える．$-y+z=-(y-z)$ に注意して，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}(x+y-z)(x-y+z) &= \{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\} && \leftarrow -y+z=-(y-z)\\ &= (x+A)(x-A) && \leftarrow A=y-z \text{ とおき，式の一部を 1 つの文字とみなす}\\ &= x^2-A^2 && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』(p.18)}\\ &= x^2-(y-z)^2 && \leftarrow A \text{ を } y-z \text{ に戻す}\\ &= x^2-(y^2-2yz+z^2) && \leftarrow \text{『平方の公式』(p.18)}\\ &= x^2-y^2+2yz-z^2 && \leftarrow \text{符号に注意して（ ）を外す}\end{aligned}$$

【例題 34】 次の多項式を展開せよ．

1. $(x+y-5)(x+y+3)$　　2. $(x+y+z)(x+y-z)$　　3. $(a^2+a-1)(a^2-a-1)$

【解答】

1. $(x+y)$ が共通していることに着目しよう．

$$\begin{aligned}(x+y-5)(x+y+3) &= (x+y)^2-2(x+y)-15 && \blacktriangleleft \text{『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)}\\ &= \boldsymbol{x^2+2xy+y^2-2x-2y-15} && \blacktriangleleft \text{『平方の公式』(p.18)}\end{aligned}$$

2. $(x+y)$ が共通していることに着目しよう．

$$\begin{aligned}(x+y+z)(x+y-z) &= (x+y)^2-z^2 && \blacktriangleleft \text{『和と差の積の公式』(p.18)}\\ &= \boldsymbol{x^2+2xy+y^2-z^2} && \blacktriangleleft \text{『平方の公式』(p.18)}\end{aligned}$$

3. (a^2-1) が共通していることに着目しよう．

$$\begin{aligned}(a^2+a-1)(a^2-a-1) &= (a^2-1)^2-a^2 && \blacktriangleleft \text{『和と差の積の公式』(p.18)}\\ &= a^4-2a^2+1-a^2 && \blacktriangleleft \text{『平方の公式』(p.18)}\\ &= \boldsymbol{a^4-3a^2+1}\end{aligned}$$

慣れるまでは，式の一部や共通部分を A や X などでおきかえよう．そして最終的には，前の例題のようにおきかえずにできるようになろう．

B. 3 項の平方の公式

式の一部をまとめることによって，$(a+b+c)^2$ の展開は次のようにできる．

$$(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$ ← $a+b$ をまとめて考えて『平方の公式』(p.18)

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ca + 2bc + c^2$$ ← 『平方の公式』(p.18)

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$ ← この順番にすると式が見やすい

であるから，$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ が成り立つ．

この展開の結果は，3 項の平方の公式とよばれ，たとえば $(2x+y-3)^2$ は次のように計算できる．

i) うまい計算のやり方（○）

$$(2x+y-3)^2$$
$$= \underbrace{(2x)^2 + y^2 + 3^2 + 2\cdot 2xy + 2\cdot y(-3) + 2\cdot(-3)2x}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy - 6y - 12x$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(2x+y-3)^2$$
$$= (2x+y-3)(2x+y-3)$$
$$= 4x^2 + 2xy - 6x + 2yx + y^2 - 3y - 6x - 3y + 9$$
$$= 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy - 6y - 12x$$

3 項の平方の公式

7° $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

【例題 35】 次の多項式を展開せよ．

1. $(3a-b+3c)^2$
2. $(a^2+a-1)^2$

【解答】

1. $(3a-b+3c)^2 = \boldsymbol{9a^2+b^2+9c^2-6ab-6bc+18ca}$
2. $(a^2+a-1)^2 = (a^2)^2 + a^2 + 1 + 2a^2\cdot a + 2a\cdot(-1) + 2\cdot(-1)\cdot a^2$
$= \boldsymbol{a^4+2a^3-a^2-2a+1}$

◀『3 項の平方の公式』(p.26)

C. 掛け算の順序の工夫

$14\times16\times5$ の計算は，$14\times(16\times5) = 14\times80$ とすると楽にできる．

多項式の展開においても，掛け算の順序を考えると計算が楽にできることがある．

$$(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)$$ ← 前から順に計算するととても大変

$$= (a-b)(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$ ← $(a-b)$ は $(a+b)$ と相性がいいし

$$= \{(a-b)(a+b)\}\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\}$$ ← $(a-b)$ は (a^2+ab+b^2) とも相性がいい

$$= (a^2-b^2)(a^3-b^3)$$ ← 『和と差の積の公式』(p.18) と『立方の公式 1』(p.21)

$$= a^5 - a^3b^2 - a^2b^3 + b^5$$

p.12 で学んだ $A^3B^3 = (AAA)\cdot(BBB) = (AB)\cdot(AB)\cdot(AB) = (AB)^3$ も重要な働きをする．

$(x+1)^3(x-1)^3$ ← $(x+1)(x-1)$ を 3 回掛けることと同じ

$= \{(x+1)(x-1)\}^3$

$= (x^2-1)^3$ ← 『和と差の積の公式』(p.18)

$= x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$ ← 『立方の公式 1』(p.21)，$\left(x^2\right)^3 = x^2\cdot x^2\cdot x^2 = x^6$ に注意

掛け算の順序を工夫して，共通する式を作ることができる場合もある．

$(x+1)(x+3)(x-2)(x-4)$ ← $+1-2$ も $+3-4$ も同じ結果になることに注目

$= \{(x+1)(x-2)\}\{(x+3)(x-4)\}$ ← 掛け算の順番を入れ替えた

$= (x^2-x-2)(x^2-x-12)$ ← x^2-x が共通している

$= \left\{(x^2-x)-2\right\}\left\{(x^2-x)-12\right\}$

$= (x^2-x)^2 - 14(x^2-x) + 24$ ← x^2-x について展開した

$= (x^4-2x^3+x^2) - 14x^2 + 14x + 24$ ← $(x^2-x)^2$ の展開でミスをしないように

$= x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$ ← 同類項をまとめた

【例題 36】 次の多項式を展開せよ．

1. $(x-1)(x-3)(x+3)(x+1)$　　2. $(a+b)^3(a-b)^3$　　3. $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)$

【解答】

1. $(x-1)$ と $(x+1)$ の積と，$(x-3)$ と $(x+3)$ の積は計算しやすい．

$$\begin{aligned}(x-1)(x-3)(x+3)(x+1) &= (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)\\ &= (x^2-1)(x^2-9)\\ &= \boldsymbol{x^4 - 10x^2 + 9}\end{aligned}$$

◀『和と差の積の公式』(p.18)

◀『1 次式の積の公式〜特殊形』(p.18)

2. 与えられた式は，$(a+b)(a-b)$ 全体の 3 乗である．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \{(a+b)(a-b)\}^3\\ &= \left\{(a^2-b^2)\right\}^3\\ &= (a^2)^3 + 3\cdot(a^2)^2\cdot(-b^2) + 3\cdot(a^2)\cdot(-b^2)^2 + (-b^2)^3\\ &= \boldsymbol{a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6}\end{aligned}$$

◀指数法則 (p.12)

◀『和と差の積の公式』(p.18)

◀『立方の公式 1』(p.21)

◀『平方の公式』(p.18)，指数法則 (p.12)
$(a^4)^2 = a^8$ に注意

3. $(a-1)(a-4)$ と $(a-2)(a-3)$ には，どちらも a^2-5a が表れる．

$$\begin{aligned}(a-1)(a-2)(a-3)(a-4) &= \{(a-1)(a-4)\}\{(a-2)(a-3)\}\\ &= (a^2-5a+4)(a^2-5a+6)\\ &= (a^2-5a)^2 + 10(a^2-5a) + 24\\ &= (a^4-10a^3+25a^2) + 10a^2 - 50a + 24\\ &= \boldsymbol{a^4 - 10a^3 + 35a^2 - 50a + 24}\end{aligned}$$

◀ a^2-5a を A とおくと，$(A+4)(A+6) = A^2+10A+24$ となるため

【発展 37：多項式の展開の練習～その２～】

次の多項式を展開せよ．

① $(2a-b+c)(2a+b+c)$　② $(x+y+z+w)(x+y-z-w)$

③ $(x-4)^2(x+5)^2$　④ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

⑤ $(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2$　⑥ $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

【解答】

① （与式）$=\{(2a+c)-b\}\{(2a+c)+b\}$　◀ $(2a+c)$ が共通している

$=(2a+c)^2-b^2$　◀『和と差の積の公式』(p.18)

$=\boldsymbol{4a^2+4ac+c^2-b^2}$　◀『平方の公式』(p.18)

② （与式）$=\{(x+y)+(z+w)\}\{(x+y)-(z+w)\}$　◀ $-z-w=-(z+w)$ に注意する

$=(x+y)^2-(z+w)^2$　◀『和と差の積の公式』(p.18)

$=\boldsymbol{x^2+2xy+y^2-z^2-2zw-w^2}$　◀『平方の公式』(p.18)

③ 与えられた式は，$(x-4)(x+5)$ 全体の 2 乗である．

（与式）$=\{(x-4)(x+5)\}^2$

$=(x^2+x-20)^2$

$=(x^2)^2+x^2+(-20)^2+2x^2\cdot x+2x\cdot(-20)+2(-20)x^2$　◀『3 項の平方の公式』(p.26)

$=\boldsymbol{x^4+2x^3-39x^2-40x+400}$

④ $(x+y)$ と (x^2-xy+y^2) の積は計算しやすく，
$(x-y)$ と (x^2+xy+y^2) の積も計算しやすい．　◀ $(x+y)(x-y)$ を先に計算すると，$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ が余ってしまう．

（与式）$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$　◀『立方の公式 2』(p.23)

$=\boldsymbol{x^6-y^6}$　◀『和と差の積の公式』(p.18)

⑤ 与えられた式は，$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$ 全体の 2 乗である．

（与式）$=\left\{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)\right\}^2$　◀ 指数法則 (p.12)

$=\left\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\right\}^2$　◀『和と差の積の公式』(p.18)

$=(a^4-b^4)^2$

$=\boldsymbol{a^8-2a^4b^4+b^8}$　◀『平方の公式』(p.18)，指数法則 (p.12) より $(a^4)^2=a^8$ にも注意

⑥ （与式）$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)$　◀ $(x-1)(x+2)$ と $(x-3)(x+4)$ に分けて，x^2+x が共通してできる

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$　◀ x^2+x を A とおくと，$(A-2)(A-12)=A^2-14A+24$ となるため

$=(x^4+2x^3+x^2)-14x^2-14x+24$

$=\boldsymbol{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}$

5.　多項式の因数 — 因数分解の基礎

A.　因数と因数分解

1 つの多項式 A が，多項式 B，C，$\cdots$ の積で書けるとき，B や C を，A の**因数** (factor) という[*22].

1 つの多項式 A を複数の因数に分解することを A の**因数分解** (factorization) という．特に断りがなければ，係数が整数の範囲でそれ以上分解できない形まで因数分解する[*23].

$$
\begin{aligned}
2a^2-4ab &= 1\cdot\underline{(2a^2-4ab)}\\
&= \underline{2}\cdot\underline{(a^2-2ab)}\\
&= \underline{2a}\cdot\underline{(a-2b)}\\
&= \underline{2}\cdot\underline{a}\cdot\underline{(a-2b)}
\end{aligned}
$$

〜〜のあるものは，全て $2a^2-4ab$ の因数

(…) 因数は，整数における「約数」にほぼ対応する．

B.　共通因数

多項式において，各項に共通する因数を**共通因数** (common factor) という．

多項式の各項に共通因数があれば，まず，それをかっこの外にくくり出す[*24]．共通因数をくくり出すことは，因数分解において最も基本的，同時に最も重要な手段である．

$$
\begin{aligned}
2x^2y+3xy^2+xy &= 2x\underbrace{(xy)}_{\text{共通}}+3y\underbrace{(xy)}_{\text{の}}+1\underbrace{(xy)}_{\text{因数}}\\
&= xy(2z+3y+1)
\end{aligned}
$$

$$3a\underbrace{(x+y)}_{\text{共通の}}+2b\underbrace{(x+y)}_{\text{因数}}=(3a+2b)(x+y)$$

【例題 38】　次の式を因数分解せよ．

1. $2p^2q+pq^3-2pq$　　2. $a(x+y)-b(x+y)$　　3. $p(2x-y)+q(y-2x)$

【解答】

1. $2p^2q$ と pq^3 と $-2pq$ の共通因数は $2pq$.

$$2p^2q+pq^3-2pq=\boldsymbol{pq(2p+q^2-2)}$$

◀ 共通因数 pq をくくり出す

	$2p$	q^2	-2
$2pq$	$2p^2q$	pq^3	$-2pq$

2. $a(x+y)$ と $-b(x+y)$ の共通因数は $x+y$ である．$x+y=X$ とおくと

◀ 慣れれば，X を使わず $x+y$ のままでよい

$$
\begin{aligned}
a(x+y)-b(x+y) &= aX-bX\\
&= (a-b)X\\
&= \boldsymbol{(a-b)(x+y)}
\end{aligned}
$$

◀ $x+y=X$ とおく

◀ 共通因数 X をくくり出す

◀ X を $x+y$ に戻す

3. $2x-y=X$ とおけば，$y-2x=-(2x-y)=-X$ であるから

◀ 慣れれば，X を使わず $2x-y$ のままでよい

$$
\begin{aligned}
p(2x-y)+q(y-2x) &= pX-qX\\
&= (p-q)X\\
&= \boldsymbol{(p-q)(2x-y)}
\end{aligned}
$$

◀ 共通因数 X をくくり出す

◀ X を $2x-y$ に戻す

[*22] ただし，多項式 1 は因数に含めない．

[*23] 「素数」の役割をする多項式は高校数学では扱われないためではあるが，本来は「素因数分解」と言うべきである．

[*24] 共通しない部分を括弧でくくり，共通する因数をその外に出すため，この動詞が頻繁に使われる．この操作は，分配法則の逆の操作であり，左にくくり出しても，右にくくり出してもよい．

【練習 39：共通因数による因数分解】

次の式を因数分解せよ．

(1) $6a^2b + 4ab^2 - 2ab$　　(2) $x(s + 2t) - y(s + 2t)$　　(3) $3a(x - y) + 6b(x - y) + 9c(y - x)$

【解答】

(1) $6a^2b + 4ab^2 - 2ab = \boldsymbol{2ab(3a + 2b - 1)}$

◀ 共通因数 $2ab$ をくくり出す

(2) $s + 2t = A$ とおくと

◀ 慣れれば A を使わずにでき，途中式なく答えを得られる．

$$\begin{aligned} x(s + 2t) - y(s + 2t) &= xA - yA \\ &= (x - y)A \\ &= \boldsymbol{(x - y)(s + 2t)} \end{aligned}$$

◀ $s + 2t = A$ とおく

◀ 共通因数 A をくくり出す

◀ A を $s + 2t$ に戻す

(3) $x - y = X$ とおけば $y - x = -X$ なので

◀ 慣れれば，X を使わず $x-y$ のままでよい．

$$\begin{aligned} &3a(x - y) + 6b(x - y) + 9c(y - x) \\ &= 3aX + 6bX - 9cX \\ &= 3X(a + 2b - 3c) \\ &= \boldsymbol{3(x - y)(a + 2b - 3c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3a(x - y) + 6b(x - y) + 9c(y - x) \\ &= 3a(x - y) + 6b(x - y) - 9c(x - y) \\ &= \boldsymbol{3(x - y)(a + 2b - 3c)} \end{aligned}$$

	a	$2b$	$-3c$
$3(x-y)$	$3a(x-y)$	$6b(x-y)$	$-9c(x-y)$

C. 因数分解の目的

たとえば，2002 と $2 \times 7 \times 11 \times 13$ は同じ数を表わすが，この 2 つの表し方にはそれぞれ長所がある．

まず，2002 という表現は，個数や大きさを表すのに適している．だから，私たちは「$(2 \times 7 \times 11 \times 13)$ 個のりんご」とは言わず「2002 個のりんご」と言う．一方，$2 \times 7 \times 11 \times 13$ という表現は 2002 という数のもつ約数についての性質（たとえば，「13 で割り切れる」など）をよく表しており，時に有用である．

式においても同様に，等しい 2 つの式 $3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)(x - 1)$ のそれぞれに長所がある．

$3x^2 - 5x + 2$ は

- 何次式かがわかりやすい
- 平方完成[*25]や，微分・積分がしやすい[*25]

$(3x - 2)(x - 1)$ は

- 方程式・不等式が解きやすい[*26]
- 因数が見やすい

つまり，どちらの形にも長所があり，場合に応じて使い分けられないといけない．そのために，展開・因数分解どちらの操作も，手早く正確にできなければならない．

$(3x - 2)(x - 1) \to 3x^2 - 5x + 2$ の操作（展開）

$3x^2 - 5x + 2 \to (3x - 2)(x - 1)$ の操作（因数分解）

[*25] 平方完成は数学 I で，微分・積分は数学 II で学ぶ．

[*26] 2 次方程式・不等式は数学 I で学ぶ．数学 II 以降でも，様々な方程式・不等式を学ぶ．

6.　多項式の因数分解の公式

共通因数が無くても，展開の公式を逆に使えば因数分解をできるときがある．

A.　中学の復習

$9x^2+6xy+y^2$ には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

$$\begin{aligned}9x^2+6xy+y^2 &= (3x)^2+2\cdot(3x)\cdot y+y^2\\ &= (3x+y)^2\end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned}(3x+y)^2 &= (3x)^2+2\cdot(3x)\cdot y+y^2\\ &= 9x^2+6xy+y^2\end{aligned}$$

平方の公式 (p.18) の逆利用

1° $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,　　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$16a^2-b^2$ には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

$$\begin{aligned}16a^2-b^2 &= (4a)^2-b^2\\ &= (4a+b)(4a-b)\end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned}(4a+b)(4a-b) &= (4a)^2-b^2\\ &= 16a^2-b^2\end{aligned}$$

…… $\bigcirc^2-\triangle^2$ の形を見たら因数分解，とすぐに気付けるようになろう．

和と差の積の公式 (p.18) の逆利用

2° $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

x^2+5x+6 には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

x^2+5x+6　　← 足して 5，掛けて 6 になる数は？

$=x^2+(2+3)x+2\cdot 3$　　$6=1\times 6\to$ 和は $7(\times)$
　　$6=2\times 3\to$ 和は $5(\bigcirc)$

$=(x+2)(x+3)$

ii) その元となっている展開計算

$(x+2)(x+3)$

$=x^2+(2+3)x+2\cdot 3$

$=x^2+5x+6$

1 次式の積の公式 (p.20) の逆利用

3° $x^2+(b+d)x+bd=(x+b)(x+d)$

【練習 40：因数分解の練習】

次の式を因数分解せよ．

(1) x^2+6x+9　(2) $4x^2-12xy+9y^2$　(3) a^2-9　(4) $4x^2-25y^2$

(5) x^2-6x+8　(6) $a^2+3ab-18b^2$　(7) a^4+4a^2+4　(8) a^4-1

(9) $x^2-(a-b)^2$　(10) $4x^2-9(a-b)^2$　(11) $(a-b)^2+10(a-b)+21$

自分の実行した因数分解が正しいかどうかは，展開によって確認できる．

【解答】

(1)（与式）$=x^2+2\cdot 3x+3^2=\boldsymbol{(x+3)^2}$

◀

	x	3
x	x^2	$3x$
3	$3x$	9

(2)（与式）$=(2x)^2-2\cdot(2x)(3y)+(3y)^2=\boldsymbol{(2x-3y)^2}$

(3)（与式）$=a^2-3^2=\boldsymbol{(a+3)(a-3)}$

◀

	a	-3
a	a^2	$-3a$
3	$3a$	-9

(4)（与式）$=(2x)^2-(5y)^2=\boldsymbol{(2x+5y)(2x-5y)}$

(5)（与式）$=\boldsymbol{(x-2)(x-4)}$

(6)（与式）$=\boldsymbol{(a-3b)(a+6b)}$

(7) $a^2=A$ とおくと，$a^4=A^2$ であるので，

◀ 慣れればおきかえずにできる

$$
\begin{aligned}
（与式）&=A^2+4A+4\\
&=(A+2)^2=\boldsymbol{(a^2+2)^2}
\end{aligned}
$$

◀

	a^2	2
a^2	a^4	$2a^2$
2	$2a^2$	4

(8) $a^2=A$ とおくと，$a^4=A^2$ であるので，

◀ 慣れれば A を使わずにできる

$$
\begin{aligned}
（与式）&=A^2-1^2\\
&=(A+1)(A-1)\\
&=(a^2+1)(a^2-1)=\boldsymbol{(a^2+1)(a+1)(a-1)}
\end{aligned}
$$

◀ a^2-1 はまだ分解できる

(9) $a-b=A$ とおけば，

◀ 慣れれば X を使わずにできる

$$
\begin{aligned}
（与式）&=\{x+(a-b)\}\{x-(a-b)\}\\
&=\boldsymbol{(x+a-b)(x-a+b)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
（与式）&=x^2-A^2\\
&=(x+A)(x-A)\\
&=\{x+(a-b)\}\{(x-(a-b)\}\\
&=\boldsymbol{(x+a-b)(x-a+b)}
\end{aligned}
$$

◀ $A=a-b$ を戻すとき，符号（+, −）に注意

(10) $a-b=A$ とおけば，

◀ 慣れれば A を使わずにできる．

$$
\begin{aligned}
&4x^2-9(a-b)^2\\
&=(2x)^2-\{3(a-b)\}^2\\
&=\{2x+3(a-b)\}\{2x-3(a-b)\}\\
&=\boldsymbol{(2x+3a-3b)(2x-3a+3b)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
（与式）&=4x^2-9A^2\\
&=(2x)^2-(3A)^2\\
&=(2x+3A)(2x-3A)\\
&=\{2x+3(a-b)\}\{2x-3(a-b)\}\\
&=\boldsymbol{(2x+3a-3b)(2x-3a+3b)}
\end{aligned}
$$

(11) $a-b=A$ とおくと

◀ 慣れれば A を使わずにできる．

$$
\begin{aligned}
&(a-b)^2+10(a-b)+21\\
&=\{(a-b)+3\}\{(a-b)+7\}\\
&=\boldsymbol{(a-b+3)(a-b+7)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
（与式）&=A^2+10A+21\\
&=(A+3)(A+7)\\
&=\boldsymbol{(a-b+3)(a-b+7)}
\end{aligned}
$$

B. ㊊㊇ 2 重根号

$\sqrt{5}$ は「2 乗して 5 になる正の数」を表す．同じように，$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ は「2 乗して $8+2\sqrt{15}$ になる正の数」を表す．このように，根号の中に根号がある状態を **2 重根号** (double radical sign) という．

一部の 2 重根号は外すことができる．たとえば，$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ である．実際

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{15}+3=8+2\sqrt{15}$$

なので，「2 乗して $8+2\sqrt{15}$ になる正の数」は $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ であると分かる．

【例題 41】 次の中から，$\sqrt{6+2\sqrt{5}}$, $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ に一致するものをそれぞれ選べ．

a. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$　　b. $2+\sqrt{3}$　　c. $\sqrt{5}+1$　　d. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

【解答】 $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2=7+2\sqrt{10}$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}$, $\left(\sqrt{5}+1\right)^2=6+2\sqrt{5}$, $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2=8+2\sqrt{15}$ であるので，$\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ は **c.**，$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ は **b.**.

$a>0$, $b>0$ のとき，$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}$ であり，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ であるから

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

である．よって，$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ を外すには，足して 8，掛けて 15 になる 2 数 a, b を探せばよい．

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot 3}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

また，$\boldsymbol{a>b}>0$ のとき，$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=a+b-2\sqrt{ab}$ であり，$\boldsymbol{\sqrt{a}-\sqrt{b}>0}$ であるから

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

つまり，2 重根号 $\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}$ を外すには，「足して x，掛けて y となる 2 つの数」を探せばよい．

【練習 42：2 重根号を外す〜その１〜】

2 重根号 $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$, $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$, $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$, $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ を外せ．

【解答】 足して 7，掛けて 10 になる 2 数は 5 と 2 なので

$$\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

◀足して 7 になる 2 数のうち，掛けて 14 になるものを探す．

足して 10，掛けて 21 になる 2 数は 7 と 3 なので

$$\sqrt{10+2\sqrt{21}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}=\boldsymbol{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

足して 9，掛けて 14 になる 2 数は 7 と 2 なので

$$\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2}=\boldsymbol{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$$

◀足して 9 になる 2 数のうち，掛けて 14 になるものを探す．$(○-△)^2$ を作るときは，○ > △ となるよう作るとよい．

足して 8，掛けて 15 になる 2 数は 5 と 3 なので

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

【発展 43：2 重根号を外す～その２～】

次の 2 重根号を外せ.

① $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$　　　② $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

【解答】

①

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{7+2\sqrt{12}}$$

◀ まず $\sqrt{\bigcirc \pm 2\sqrt{\triangle}}$ の形になおし，変形ができるようにする.

$$= \sqrt{\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)^2}$$

◀ 平方の形にした（足して 7，掛けて 12 になる数を探す）

$$= \sqrt{4}+\sqrt{3} = \mathbf{2+\sqrt{3}}$$

◀ 2 重根号をはずした

②

$$\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

◀ 内側の $\sqrt{}$ の前に 2 が無くても，分母・分子に $\sqrt{2}$ を掛けて $2\sqrt{}$ の形を作る

$$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{1}\right)^2}}{\sqrt{2}}$$

◀ 足して 6，掛けて 5 になる 2 数を探す.

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}}$$

◀ 最後は分母を有理化しておく

2 重根号を外すには，まず $\sqrt{}$ の中に $2\sqrt{}$ を作るように考える.

C.　『1 次式の積の公式～一般形』(p.20) を逆に利用した因数分解

$3x^2+14x+8$ の因数分解を考えてみよう.

i) 因数分解

$$\begin{aligned} & 3x^2+14x+8 \\ &= (1\cdot 3)x^2+(1\cdot 2+4\cdot 3)x+2\cdot 4 \\ &= (x+4)(3x+2) \end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned} & (x+4)(3x+2) \\ &= (1\cdot 3)x^2+(1\cdot 2+4\cdot 3)x+2\cdot 4 \\ &= 3x^2+14x+8 \end{aligned}$$

この $(x+4)$ と $(3x+2)$ を見つけるには，次のようなたすきがけと呼ばれる方法を用いる.

たすきがけは，下のように行われる.

上の段→	1	×	4 → 12	
下の段→	3		2 → 2	
			14 ○	

$$3x^2+\mathbf{14}x+8 = \underbrace{(x+4)}_{\text{上の段の }1,\,4}\underbrace{(3x+2)}_{\text{下の段の }3,\,2}$$

x^2 の係数３は１×３しかない

1	×	？ → ？
3		？ → ？
		14 にしたい

定数項の８は，１×８，２×４，４×２，８×１のどれか（$(-1)\times(-8)$ などは考えなくて良い）

1	1 → 3		1	2 → 6		1	**4** → 12		1	8 → 24	
3	8 → 8		3	4 → 4		3	**2** → 2		3	1 → 1	
	11 ×			10 ×			**14** ○			25 ×	

初めのうちは試行錯誤が必要だが，慣れてくると 2 つ目くらいの表でできるようになる．コツをつかむには，係数を「１×　」にするかどうか，奇数・偶数を考える，の２点に注意すると良い.

【例題 44】 次の式を因数分解せよ．

1. $2x^2 + 3x + 1$　　2. $4x^2 + 5x + 1$　　3. $5a^2 + 7ab + 2b^2$

【解答】

1. $\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & 1 & \to & 2 \\ 2 & & 1 & \to & 1 \\ \hline & & & & 3 \ ○ \end{array}$ から，$(\boldsymbol{x+1})(\boldsymbol{2x+1})$

2. $\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & 1 & \to & 4 \\ 4 & & 1 & \to & 1 \\ \hline & & & & 5 \ ○ \end{array}$ から，$(\boldsymbol{x+1})(\boldsymbol{4x+1})$

3. $\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & b & \to & 5b \\ 5 & & 2b & \to & 2b \\ \hline & & & & 7b \ ○ \end{array}$ から，$(\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{5a+2b})$

◀ $\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & 2b & \to & 10b \\ 5 & & b & \to & b \\ \hline & & & & 11b \ \times \end{array}$

次に，$6x^2 + x - 12$ の因数分解を考えてみよう．

x^2 の係数6は 1×6か？ $\begin{array}{ccrcr} \mathbf{1} & \times & ? & \to & ? \\ \mathbf{6} & & ? & \to & ? \\ \hline & & & & 1 \end{array}$ にしたい

x^2 の係数6は 2×3か？ $\begin{array}{ccrcr} \mathbf{2} & \times & ? & \to & ? \\ \mathbf{3} & & ? & \to & ? \\ \hline & & & & 1 \end{array}$ にしたい

定数項の−12は，1×12，2×6，3×4のどちらかにマイナス(−)を付けたもの

1 という小さな値にするには，1×12 では適さないと予想できる[*27]．

$\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & 3 & \to & 18 \\ 6 & & -4 & \to & -4 \\ \hline & & & & 14 \ \times \end{array}$　$\begin{array}{ccrcr} 2 & \times & 4 & \to & 12 \\ 3 & & -3 & \to & -6 \\ \hline & & & & 6 \ \times \end{array}$　$\begin{array}{ccrcr} 2 & \times & -3 & \to & -9 \\ 3 & & 4 & \to & 8 \\ \hline & & & & -1 \ \times \end{array}$　$\begin{array}{ccrcr} 2 & \times & \mathbf{3} & \to & 9 \\ 3 & & \mathbf{-4} & \to & -8 \\ \hline & & & & \mathbf{1} \ ○ \end{array}$

*27全然ダメ↑↑　符号だけ違う↑↑　一つ左を符号だけ変えた

よって，$6x^2 + x - 12 = (2x+3)(3x-4)$ になる．

【例題 45】 次の式を因数分解せよ．

1. $12a^2 + 7a - 12$　　2. $4x^2 + 23x - 6$　　3. $8x^2 - 10xy + 3y^2$

【解答】

1. $\begin{array}{ccrcr} 3 & \times & 4 & \to & 16 \\ 4 & & -3 & \to & -9 \\ \hline & & & & 7 \ ○ \end{array}$ から，$(\boldsymbol{3a+4})(\boldsymbol{4a-3})$

2. $\begin{array}{ccrcr} 4 & \times & -1 & \to & -1 \\ 1 & & 6 & \to & 24 \\ \hline & & & & 23 \ ○ \end{array}$ から，$(\boldsymbol{4x-1})(\boldsymbol{x+6})$

3. $\begin{array}{ccrcr} 4 & \times & -3y & \to & -6y \\ 2 & & -y & \to & -4y \\ \hline & & & & -10y \ ○ \end{array}$ から，$(\boldsymbol{4x-3y})(\boldsymbol{2x-y})$

◀ $\begin{array}{ccrcr} 3 & \times & -4 & \to & -16 \\ 4 & & 3 & \to & 9 \\ \hline & & & & -7 \ \times \end{array}$ $12 = 2 \times 6$ を使うと a の係数が奇数にならず不適

◀ $\begin{array}{ccrcr} 2 & \times & 6 & \to & 12 \\ 2 & & -1 & \to & -2 \\ \hline & & & & 10 \ \times \end{array}$　$\begin{array}{ccrcr} 4 & \times & 6 & \to & 6 \\ 1 & & -1 & \to & -4 \\ \hline & & & & 2 \ \times \end{array}$

◀ $\begin{array}{ccrcr} 8 & \times & -3y & \to & -3y \\ 1 & & -y & \to & -8y \\ \hline & & & & -11y \ \times \end{array}$　$\begin{array}{ccrcr} 4 & \times & 3y & \to & 6y \\ 2 & & y & \to & 4y \\ \hline & & & & 10y \ \times \end{array}$

1 次式の積の公式 (p.20) の逆利用

4° $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

*27 「1×○」を含むたすきがけをした結果は，値が極端に大きく（正の数）なったり小さく（負の数）なったりすることが多い．そのため，$6x^2 + x - 12$ のように x の係数が 0 に近い場合は「1×6」「1×12」を考える優先順位は低い．

【練習 46：1 次式の積の公式】

次の式を因数分解しなさい．

(1) $5x^2 + 11x + 6$　　(2) $6x^2 - x - 15$　　(3) $7x^2 - 16x + 4$　　(4) $9a^2b - 12ab - 12b$

【解答】

(1) $\boldsymbol{(5x + 6)(x + 1)}$　　(2) $\boldsymbol{(3x - 5)(2x + 3)}$

(3) $\boldsymbol{(7x - 2)(x - 2)}$　　(4) （与式）$= 3b(3a^2 - 4a - 4)$

$= \boldsymbol{3b(3a + 2)(a - 2)}$

◀ (1) $\begin{array}{ccccc} 5 & \times & 6 & \to & 6 \\ 1 & & 1 & \to & 5 \\ \hline & & & & 11 \end{array}$ ○

(2) $\begin{array}{ccccc} 3 & \times & -5 & \to & -10 \\ 2 & & 3 & \to & 9 \\ \hline & & & & -1 \end{array}$ ○

(3) $\begin{array}{ccccc} 7 & \times & -2 & \to & -2 \\ 1 & & -2 & \to & -14 \\ \hline & & & & -16 \end{array}$ ○

D.　『立方の公式 2』(p.23) を逆に利用した因数分解

$8x^3 + y^3$ には共通因数が無いが，以下のように因数分解できる．

i) 因数分解

$$\begin{aligned} & 8x^3 + y^3 \\ &= (2x)^3 + y^3 \\ &= (2x + y)\left\{(2x)^2 - 2x \cdot y + y^2\right\} \\ &= (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) \end{aligned}$$

ii) その元となっている展開計算

$$\begin{aligned} & (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) \\ &= (2x + y)\left\{(2x)^2 - 2x \cdot y + y^2\right\} \\ &= (2x)^3 + y^3 \\ &= 8x^3 + y^3 \end{aligned}$$

立方の公式 2 (p.23) の逆利用

5°　$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,　　$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$○^3 \pm △^3$ の形の因数分解は重要度が高いが，忘れやすいので気をつけよう．展開のときと同じように，$a \pm b$ と $a^3 \pm b^3$ は符号が一致する，と覚えておくとよい．また，1，8，27，64，125，216，343，512，729 を見たら「整数の 3 乗だ」と気づけるようになるとよい．

【例題 47】 次の式を因数分解せよ．

1. $x^3 + 27$　　2. $8a^3 + 1$　　3. $8x^3 - 27y^3$　　4. $64a^3 - 125b^3$

【解答】

1. $x^3 + 27 = x^3 + 3^3$

$= \boldsymbol{(x + 3)(x^2 - 3x + 9)}$

2. $8a^3 + 1 = (2a)^3 + 1^3$

$= \boldsymbol{(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)}$

3. $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3$

$= \boldsymbol{(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)}$

4. $64a^3 - 125b^3 = (4a)^3 - (5b)^3$

$= \boldsymbol{(4a - 5b)(16a^2 + 20ab + 25b^2)}$

◀

	x^2	$-3x$	9
x	x^3	$-3x^2$	$9x$
3	$3x^2$	$-9x$	27

◀

	$4a^2$	$-2a$	1
$2a$	$8a^3$	$-4a^2$	$2a$
1	$4a^2$	$-2a$	1

◀

	$4x^2$	$6xy$	$9y^2$
$2x$	$8x^3$	$12x^2y$	$18xy^2$
$-3y$	$-12x^2y$	$-18xy^2$	$-27y^3$

◀

	$16a^2$	$20ab$	$25b^2$
$4a$	$64a^3$	$80a^2b$	$100ab^2$
$-5b$	$-80a^2b$	$-100ab^2$	$-125b^3$

以下については，非常に特殊なケースなので，式だけを挙げておく．

立方の公式 1 (p.21) の逆利用

6° $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

E. 因数分解の公式のまとめ

最も大事なことは，「いつ，どの因数分解を使うのか」見極めることである．

【練習 48：因数分解の練習〜その１〜】

次の式を因数分解せよ．

(1) $a^2-14ab+49b^2$ (2) $2x^2-x-3$ (3) $343a^3-8b^3$ (4) $2ax^2-5ax+3a$

(5) $3b^2-27c^2$ (6) $3x^3-8x^2-3x$ (7) $3x^3+81y^3$ (8) $2a^4-32$ (9) x^8-1

(10) a^6-b^6 (11) $5(x+y)^2-8(x+y)-4$ (12) $(a+b)^2+10c(a+b)+25c^2$

【解答】

(1)（与式）$=\boldsymbol{(a-7b)^2}$ ◀『平方の公式の逆利用』(p.31)

(2)（与式）$=\boldsymbol{(2x-3)(x+1)}$ ◀『1 次式の積の公式の逆利用』(p.34)

(3)（与式）$=(7a)^3-(2b)^3=\boldsymbol{(7a-2b)(49a^2+14ab+4b^2)}$ ◀『立方の公式 2 の逆利用』(p.36)

(4)（与式）$=a(2x^2-5x+3)$ ◀ 共通因数でくくった

$=\boldsymbol{a(2x-3)(x-1)}$

(5)（与式）$=3(b^2-9c^2)=\boldsymbol{3(b+3c)(b-3c)}$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

(6)（与式）$=x(3x^2-8x-3)=\boldsymbol{x(3x+1)(x-3)}$

(7)（与式）$=3(x^3+27y^3)$

$=\boldsymbol{3(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)}$ ◀『立方の公式 2 の逆利用』(p.36)

(8)（与式）$=2(a^4-16)$

$=2(a^2+4)(a^2-4)$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

$=\boldsymbol{2(a^2+4)(a+2)(a-2)}$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

(9)（与式）$=(x^4+1)(x^4-1)$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

$=(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

$=\boldsymbol{(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)}$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

(10)（与式）$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』(p.31)

$=\left\{(a+b)(a^2-ab+b^2)\right\}\left\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\right\}$ ◀『立方の公式 2 の逆利用』(p.36)

$=\boldsymbol{(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)}$

(11) $x+y=X$ とおくと

（与式）$=5X^2-8X-4=(5X+2)(X-2)$ ◀『1 次式の積の公式の逆利用』(p.34)

$=\boldsymbol{(5x+5y+2)(x+y-2)}$

(12) $a+b=X$ とおくと

（与式）$=X^2+10cX+25c^2=(X+5c)^2$ ◀『平方の公式の逆利用』(p.31)

$=\boldsymbol{(a+b+5c)^2}$

7. 難度の高い因数分解

共通因数も無く，どの公式にも当てはまらない場合も，工夫次第で因数分解ができることがある．

A. 共通因数が見つけにくい多項式の因数分解

$ax + ay - x - y$ という式には，共通因数も無く，どの公式にも当てはまらないが，

$ax + ay - x - y$
$= a(x + y) - x - y$ ← 前2つで a が共通するのでまとめてみる
$= a(x + y) - (x + y)$ ← 残りもまとめてみたら，$x + y$ が共通因数になった
$= (a - 1)(x + y)$ ← $-(x + y) = (-1) \times (x + y)$ であることに注意！

のようにして，「共通因数を見つけて」因数分解ができる．もう 1 つ例を挙げよう．

$m^2 + 2m - n^2 - 2n$ ← 前2つでまとめるとうまくいかないので
$= (m^2 - n^2) + 2m - 2n$ ← この2つでまとめてみる
$= (m + n)(m - n) + 2(m - n)$ ← $m - n$ が共通因数になった
$= (m + n + 2)(m - n)$ ← $m - n = X$ とおくと $\{(m + n) + 2\}\ X$ になる

数をこなしていくと，共通因数を見つけるのがうまくなる．というのも「どの因数でまとめられるか」少しずつ予想ができるようになるからである．

【練習 49：4 項の因数分解】

次の式を因数分解せよ．

(1) $ab + ac + b + c$　　(2) $mn + 2m - n - 2$　　(3) $a^2 - 5a + 5b - b^2$

【解答】

(1) $ab + ac + b + c = (b + c)a + (b + c)$
$= \boldsymbol{(a + 1)(b + c)}$

◀ 前の項から順に見て，b と c が交互に出てくることに注目

(2) $mn + 2m - n - 2 = (n + 2)m - (n + 2)$
$= \boldsymbol{(m - 1)(n + 2)}$

◀ 前の項から順に見て，2 が交互に出てくることに注目．また $(m-1)n + 2(m-1)$ とまとめてもよい．

(3) $a^2 - 5a + 5b - b^2 = (a^2 - b^2) - 5(a - b)$
$= (a - b)(a + b) - 5(a - b)$
$= \boldsymbol{(a - b)(a + b - 5)}$

◀ $a^2 - b^2$ からは $a - b$ が作れる

◀ $a - b = X$ とおけば，$X(a + b) - 5X = \{(a + b) - 5\}\ X$ となる

因数分解した後，(　) 内を何かの文字について降べきの順にしておくとよい．しなくても間違いではないが，応用問題を解くときに役立つことがある．

B. 次数の小さい文字に着目する

共通因数が見つからないときは，最も次数の低い文字に着目し，降べきの順に整理しよう．それによって，共通因数が見えてくることが多い[*28]．たとえば，次のようになる．

$$\begin{aligned}
&a^2+ab-3a+b-4 && \leftarrow a\text{ については2次式，}b\text{ については1次式}\\
&=(a+1)b+a^2-3a-4 && \leftarrow \text{次数の低い }b\text{ について，降べきの順に整頓}\\
&=(a+1)b+(a-4)(a+1) && \leftarrow \text{定数項を因数分解したら，}a+1\text{ が共通因数になった}\\
&=(a+1)(a+b-4) && \leftarrow b+a-4\text{ は順番を入れ替えておこう}
\end{aligned}$$

【練習 50：次数の低い文字に着目する】

次の式を因数分解せよ．

(1) $a^2+ab+bc+ca$　　(2) $x^2-2xy+2y-1$

(3) $x^2+2xy+3x+4y+2$　　(4) $a^3+ab^2+b^2+1$

【解答】

(1) b について降べきの順に整理すると

◀ c で整理してもよい

$$\begin{aligned}
a^2+ab+bc+ca &= (a+c)b+(a^2+ca)\\
&=(a+c)b+(a+c)a\\
&=\boldsymbol{(a+b)(a+c)}
\end{aligned}$$

(2) y について降べきの順に整理すると

◀ x の次数は 2，y の次数は 1

$$\begin{aligned}
x^2-2xy+2y-1 &= (-2x+2)y+(x^2-1)\\
&=(x-1)\cdot(-2y)+(x-1)(x+1)\\
&=\boldsymbol{(x-1)(x-2y+1)}
\end{aligned}$$

◀ $x-1=A$ とおくと
$-2yA+(x-1)A$
$=\{-2y+(x-1)\}A$

(3) y についての降べきの順に整理すると

◀ x の次数は 2，y の次数は 1

$$\begin{aligned}
x^2+2xy+3x+4y+2 &= (2x+4)y+(x^2+3x+2)\\
&=(x+2)2y+(x+1)(x+2)\\
&=\boldsymbol{(x+2)(x+2y+1)}
\end{aligned}$$

◀ $x+2=A$ とおくと
$2yA+(x+1)A$
$=\{2y+(x+1)\}A$

(4) b についての降べきの順に整理すると

◀ a の次数は 3，b の次数は 2

$$\begin{aligned}
a^3+ab^2+b^2+1 &= (a+1)b^2+(a^3+1)\\
&=(a+1)b^2+(a+1)(a^2-a+1)\\
&=\boldsymbol{(a+1)(a^2-a+b^2+1)}
\end{aligned}$$

[*28] もっとも次数の低い文字でまとめると，最高次の係数に共通因数が出てくることが多いからである．

C.　複 2 次式の因数分解

$ax^4 + bx^2 + c$ という形の多項式を**複 2 次式** (biquadratic expression) という．ただし，$a \neq 0$ とする．

例として，次の 2 つの複 2 次式の因数分解についてみてみよう．

i) $x^4 - 13x^2 + 36$ の因数分解

この複 2 次式は，$x^2 = X$ とおくと，$X^2 - 13X + 36 = (X-4)(X-9)$ であるから

$$\begin{aligned} x^4 - 13x^2 + 36 &= (x^2-4)(x^2-9) \\ &= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

ii) $x^4 + 2x^2 + 9$ の因数分解

この複 2 次式は，$x^2 = X$ とおいても，$X^2 + 2X + 9$ となるだけで因数分解が進まない．

そこで，x^4 と 9 に着目すると，うまく因数分解できる．

$$\begin{aligned} & x^4 + 2x^2 + 9 \\ =\ & x^4 + 6x^2 + 9 - 4x^2 && \leftarrow 2x^2 = 6x^2 - 4x^2 \text{ と変形し，平方の形が作れるようする} \\ =\ & \underbrace{(x^2+3)^2}_{\text{平方の形にする}} - (2x)^2 && \leftarrow \bigcirc^2 - \triangle^2 \text{ の形} \\ =\ & \left\{(x^2+3)+2x\right\}\left\{(x^2+3)-2x\right\} = (x^2+2x+3)(x^2-2x+3) \end{aligned}$$

複 2 次式の因数分解

複 2 次式 $ax^4 + bx^2 + c$ の因数分解には，次の 2 つの場合がある．

i) $x^2 = X$ とおくことにより因数分解できる場合

ii) ax^4 と c に着目し，bx^2 の項を変形して因数分解できる場合

i) の方法でうまくいかない場合に，ii) の方法を試すと覚えておくとよい．詳しくは「複 2 次式の因数分解について (p.50)」を参照のこと．

【例題 51】　次の式を因数分解せよ．

1. $x^4 + 7x^2 - 8$
2. $x^4 + x^2 + 1$

【解答】

1. $$\begin{aligned} x^4 + 7x^2 - 8 &= (x^2+8)(x^2-1) \\ &= \boldsymbol{(x^2+8)(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

◀ $x^2 = X$ とおけば

$$\begin{aligned} & x^4 + 7x^2 - 8 \\ =\ & X^2 + 7X - 8 \\ =\ & (X+8)(X-1) \\ =\ & (x^2+8)(x^2-1) \\ =\ & \boldsymbol{(x^2+8)(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

2. x^4 と 1 に着目して

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2+1)^2 - x^2 \\ &= (x^2+1+x)(x^2+1-x) \\ &= \boldsymbol{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

D.　2 文字 2 次式の因数分解

降べきにしても共通因数が見つけられない場合でも，2 次式の場合は『1 次式の積の公式の逆利用』(p.34) を使って因数分解できることがある．

たとえば，$2x^2+5xy+3y^2+2x+4y-4$ という式の因数分解について考えてみよう．

まず，これを x について降べきの順に整理する．

$2x^2+(5y+2)x+3y^2+4y-4$

今までのように共通因数を作ることはできない．そこで，x を含まない項について因数分解する．

$2x^2+(5y+2)x+(3y-2)(y+2)$

『1 次式の積の公式の逆利用』(p.34) のときと同じように，たすき掛けをする．

x^2 の係数 2 は
1 × 2 しかない

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{1} & \times & ? \to ? \\ \mathbf{2} & & ? \to ? \\ \hline & & 5y+2 \text{ にしたい} \end{array}$$

⇒

定数項は (3y−2)×(y+2) か (y+2)×(3y−2) のどちらか
$\{-(3y-2)\}\times\{-(y+2)\}$ などは，y の係数が合わず不適

$$\begin{array}{ccl} 1 & \times & 3y-2 \to 6y-4 \\ 2 & & y+2 \to 2y+4 \\ \hline & & 8y \quad \times \end{array} \qquad \begin{array}{ccl} 1 & \times & \mathbf{y+2} \to 2y+4 \\ 2 & & \mathbf{3y-2} \to 3y-2 \\ \hline & & \mathbf{5y+2} \quad ○ \end{array}$$

こうして，$(2x+3y-2)(x+y+2)$ と因数分解できることが分かる．

・・・・ 上のたすきがけの表を作るコツは，「ひとまず y の係数だけ考えること」にある．

【例題 52】　次の式を因数分解せよ．

1. $x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$
2. $2x^2-y^2-xy+3x+3y-2$

【解答】

1. 与えられた式を x について降べきの順に整理すると

$$\begin{aligned} x^2+4xy+3y^2+x+5y-2 &= x^2+(4y+1)x+3y^2+5y-2 \\ &= x^2+(4y+1)x+(3y-1)(y+2) \\ &= \boldsymbol{(x+y+2)(x+3y-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccl} 1 & \times & \mathbf{y+2} \to y+2 \\ ◀\,1 & & \mathbf{3y-1} \to 3y-1 \\ \hline & & \mathbf{4y+1} \quad ○ \end{array}$$

2. x について降べきの順にし，定数項を因数分解すると

$$\begin{aligned} \text{（与式）} &= 2x^2+(-y+3)x-(y^2-3y+2) \\ &= 2x^2+(-y+3)x-(y-1)(y-2) \\ &= \{x-(y-2)\}\{2x+(y-1)\} \\ &= \boldsymbol{(x-y+2)(2x+y-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccl} 1 & \times & \mathbf{-(y-2)} \to -2y+4 \\ ◀\,2 & & \mathbf{y-1} \to y-1 \\ \hline & & \mathbf{-y+3} \quad ○ \end{array}$$

E. いろいろな因数分解

どの因数分解の手段を用いるかどうかは，だいたい次の優先順位で考えるとよい．方針がわからないときは，ひとまずこの順序で考えてみよう．

(1) 共通因数を見つける

(2) 次数の小さい文字に注目し，降べきの順に並べる．

(3) 公式を使えないか考える

【練習 53：因数分解の練習〜その２〜】

次の式を因数分解せよ．

(1) $xy - x - y + 1$

(2) $a^2 + b^2 + ac - bc - 2ab$

(3) $a^4 + a^2b^2 + b^4$

(4) $x^2 - xy - 12y^2 + 5x + y + 6$

【解答】

(1) （与式）$= (y-1)x - (y-1)$

$= \boldsymbol{(x-1)(y-1)}$

(2) c について降べきの順に整理すると

◂ c の次数だけ 1 次式

（与式）$= (a-b)c + a^2 + b^2 - 2ab$

$= (a-b)c + (a-b)^2$

$= (a-b)c + (a-b)(a-b)$

$= \boldsymbol{(a-b)(a-b+c)}$

(3) a^4 と b^4 に着目して

◂『複 2 次式の因数分解』(p.40)

（与式）$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$

$= (a^2+b^2)^2 - (ab)^2$

$= (a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

$= \boldsymbol{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}$

(4) x について降べきの順にし，定数項を因数分解すると

◂『2 文字 2 次式の因数分解』(p.41)

（与式）$= x^2 + (-y+5)x - (12y^2 - y - 6)$

$= x^2 + (-y+5)x - (3y+2)(4y-3)$

$= \{x - (4y-3)\}\{(x + (3y+2)\}$

$= \boldsymbol{(x-4y+3)(x+3y+2)}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & \mathbf{-(4y-3)} & \to & -4y+3 \\ 1 & & \mathbf{3y+2} & \to & 3y+2 \\ \hline & & & & \mathbf{-y+5} \end{array}$$
○

【発展 54：因数分解の練習～その３～】

次の式を因数分解せよ．

① $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$　② $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

③ a^4+64　④ $6x^2-5xy-6y^2+4x+7y-2$　⑤ $(x^2-2x-2)(x^2-2x-6)-12$

【解答】

① x について降べきの順に整理すると

◀そのままでは手の出しようがないので，x について整理

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2\\ &= (y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)\\ &= (y-z)\left\{x^2-(y+z)x+yz\right\}\\ &= \boldsymbol{(y-z)(x-y)(x-z)}\end{aligned}$$

② a について降べきの順に整理すると

◀そのままでは手の出しようがないので，a について整理

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2\\ &= (b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)\\ &= (b-c)\left\{a^2-(b+c)a+bc\right\}\\ &= \boldsymbol{(b-c)(a-b)(a-c)}\end{aligned}$$

③ a^4 と 64 に着目して

◀『複 2 次式の因数分解』(p.40)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (a^2+8)^2-16a^2\\ &= (a^2+8+4a)(a^2+8-4a)\\ &= \boldsymbol{(a^2+4a+8)(a^2-4a+8)}\end{aligned}$$

④ 与えられた式を x について降べきの順に整理すると

◀『2 文字 2 次式の因数分解』(p.41)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 6x^2+(-5y+4)x-(6y^2-7y+2)\\ &= 6x^2+(-5y+4)x-(3y-2)(2y-1)\\ &= \{2x-(3y-2)\}\{3x+(2y-1)\}\\ &= \boldsymbol{(2x-3y+2)(3x+2y-1)}\end{aligned}$$

◀ y の係数を合わせようとすると見つかりやすい．

2	$\boldsymbol{-(3y-2)}$	→	$-9y+6$
3	$\boldsymbol{2y-1}$	→	$4y-2$
			$\boldsymbol{-5y+4}$ ○

⑤ x^2-2x を 1 つの式と考えて

◀慣れるまでは $x^2-2x=A$ のようにおくとよい

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x^2-2x)^2-8(x^2-2x)+\cancel{12}-\cancel{12}\\ &= (x^2-2x)(x^2-2x-8)\\ &= \boldsymbol{x(x-2)(x+2)(x-4)}\end{aligned}$$

8.　式の値の計算

A.　$x+y$, xy, $x-y$ の値を利用する

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ を変形して，等式 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ を得る．

この等式を用いると，x, y が一部の符号しか異なないときの計算を，簡単にできることがある．

たとえば，$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$ のとき，$x+y=4$, $x-y=2\sqrt{3}$, $xy=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=1$ である．これを用いて，x^2+y^2, x^2y-xy^2 の値は次のように計算できる．

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ &= 4^2-2\cdot 1=14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3y-xy^3 &= xy(x^2-y^2) \\ &= xy(x+y)(x-y)=1\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}=8\sqrt{3} \end{aligned}$$

【例題 55】

1. $x=\sqrt{6}+\sqrt{3}$，$y=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ のとき，以下の値を計算しなさい．
   1) $x+y$　2) xy　3) $x-y$　4) x^2+y^2　5) $x^4y^2-x^2y^4$
2. $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ のとき，以下の値を計算しなさい．
   1) $x+y$　2) xy　3) $x-y$　4) x^2-y^2　5) x^4+y^4

【解答】

1. 1) $x+y=\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)=\mathbf{2\sqrt{6}}$
   2) $xy=\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\mathbf{3}$
   3) $x-y=\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)=\mathbf{2\sqrt{3}}$
   4) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\left(2\sqrt{6}\right)^2-2\cdot 3=\mathbf{18}$
   ◀ $x+y=2\sqrt{6}$,　$xy=3$ を代入
   5) $x^4y^2-x^2y^4=x^2y^2(x^2-y^2)=(xy)^2(x+y)(x-y)$
   ◀ 因数分解した
   $=3^2\cdot\left(2\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{3}\right)=\mathbf{108\sqrt{2}}$
   ◀ xy, $x+y$, $x-y$ に値を代入
2. 分母を有理化すると，次のようになる．
   ◀ まず，有理化する．

$$x=\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}=\frac{7+2\sqrt{21}+3}{7-3}=\frac{10+2\sqrt{21}}{4}=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$y=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}=\frac{7-2\sqrt{21}-3}{7+3}=\frac{10-2\sqrt{21}}{4}=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

   1) $x+y=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}+\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}=\mathbf{5}$
   2) $xy=\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)=\dfrac{5^2-(\sqrt{21})^2}{4}=\mathbf{1}$
   3) $x-y=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}-\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}=\mathbf{\sqrt{21}}$
   4) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=\mathbf{5\sqrt{21}}$
   ◀ $x+y=5$, $x-y=\sqrt{21}$ を代入
   5) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
   ◀ $(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2$ を利用
   $=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2(xy)^2$
   ◀ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ を利用，また，$x^2y^2=(xy)^2$ を利用（指数法則 iii) p.12）
   $=(5^2-2\cdot 1)^2-2\cdot 1^2=23^2-2=\mathbf{527}$

x^3+y^3 の計算も，『立方の公式 1(p.21)』『立方の公式 2(p.23)』を使って，計算を簡単にできる．
たとえば，$x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ のとき，$x+y=4$, $x-y=2\sqrt{3}$, $xy=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=1$ である．

（解法１）立方の公式 1 を使う

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=14$ であるから

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &= 4\cdot(14-1)=52 \end{aligned}$$

（解法２）立方の公式 2 を使う

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ を変形して

$$\begin{aligned} x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= 4^3-3\cdot1\cdot4=52 \end{aligned}$$

これを応用して，x^5+y^5 の計算も，次のようにできる．
$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5$ を変形して

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2 \\ &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y) \\ &= 14\cdot52-1^2\cdot4=734 \end{aligned}$$

【練習 56：3 次式の公式と式の値】

$x=\sqrt{7}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ のとき，以下の値を計算しなさい．

(1) x^2+y^2　(2) x^3-y^3　(3) x^4+y^4　(4) x^5-y^5

【解答】　まず，$x+y=2\sqrt{7}$, $x-y=2\sqrt{2}$, $xy=7-2=5$ である．

(1)（与式）$=(x+y)^2-2xy=28-10=\mathbf{18}$

(2)（解法１）（与式）$=(x-y)(x^2+xy+y^2)=2\sqrt{2}\cdot(18+5)=\mathbf{46\sqrt{2}}$

（解法２）$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ を変形して

$$\begin{aligned} x^3-y^3=(x-y)^3+3x^2y-3xy^2 &= (x-y)^3+3xy(x-y) \\ &= \left(2\sqrt{2}\right)^3+3\cdot5\cdot2\sqrt{2}=\mathbf{46\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(3) $(x^2+y^2)^2=x^4+2x^2y^2+y^4$ を変形して

$$\begin{aligned} x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2-2x^2y^2 \\ &= 18^2-2\cdot5^2=324-50=\mathbf{274} \end{aligned}$$

(4) $(x^2+y^2)(x^3-y^3)=x^5-x^2y^3+x^3y^2-y^5$ を変形して

$$\begin{aligned} x^5-y^5 &= (x^2+y^2)(x^3-y^3)+x^2y^3-x^3y^2 \\ &= (x^2+y^2)(x^3-y^3)+x^2y^2(x-y) \\ &= 18\cdot46\sqrt{2}-5^2\cdot2\sqrt{2}=828\sqrt{2}-50\sqrt{2}=\mathbf{778\sqrt{2}} \end{aligned}$$

B. 発展 因数分解と式の値

因数分解には，式の因数を見えるようにする長所があった．この長所を生かせば，文字の値を整数や自然数に限った次のような問題を解くことができる．

【発展 57：因数分解と式の値】

① 多項式 $F = ab - 3a + 2b - 6$ について，次の問いに答えなさい．

i. F を因数分解しなさい．

ii. $F = 6$ を満たす自然数 $(a,\ b)$ の組をすべて求めなさい．

② $mn + 2m - n = 3$ を満たす整数 $(m,\ n)$ の組をすべて求めなさい．

【解答】

① i. $F = a(b-3) + 2(b-3)$

$= \boldsymbol{(a+2)(b-3)}$

ii. i. の結果から

$$(a+2)(b-3) = 6$$

となる自然数 a，b を求めればよい．

6 を自然数の範囲で積に分解すると，$6 = 6\times1,\ 3\times2,\ 2\times3,\ 1\times6$ である．$a+2$ は 3 以上でないといけないことに注意すれば

◀ 自然数は，1 以上の値である．

$$\begin{cases} a+2=6 \\ b-3=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+2=3 \\ b-3=2 \end{cases}$$

のいずれかでないといけない．

それぞれの式から $\boldsymbol{(a,\ b) = (4,\ 4),\ (1,\ 5)}$ と求められる．

② 左辺を因数分解することを考える．

$$\begin{aligned} & mn + 2m - n = 3 \\ \Leftrightarrow\ & m(n+2) - n = 3 \\ \Leftrightarrow\ & m(n+2) - (n+2) = 3 - 2 \\ \Leftrightarrow\ & (m-1)(n+2) = 1 \end{aligned}$$

◀ 両辺から 2 を引いた

$1 = 1\times1,\ (-1)\times(-1)$ であるので

$$\begin{cases} m-1=1 \\ n+2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} m-1=-1 \\ n+2=-1 \end{cases}$$

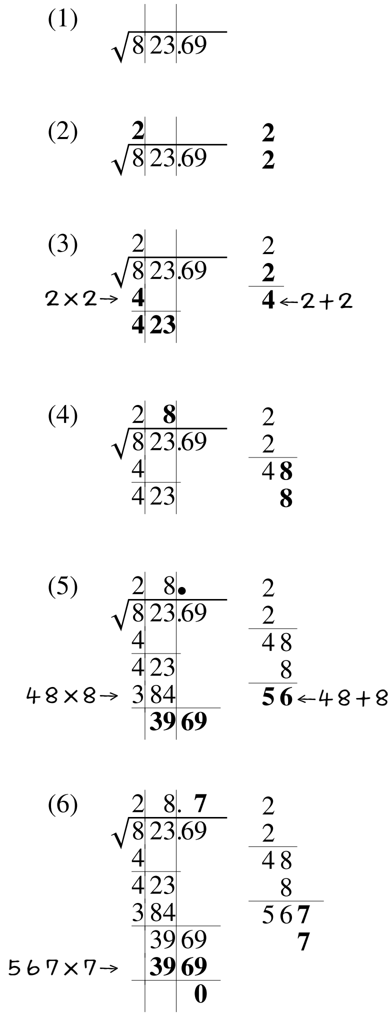
のいずれかでないといけない．

それぞれの式から $\boldsymbol{(m,\ n) = (2, -1),\ (0, -3)}$ と求められる．

1. 開平法について

A. 開平法の手順

例として，$\sqrt{823.69}$ の値を開平法で計算する．



(1) 823.69 を根号の中に書き，「小数点を基準」にして「2 桁ずつ」区切っていく．また，横にスペースをとっておく．

(2) 一番左の数は 8．2 乗して 8 を超えない最大の数 2 を，右図のように 3 ヶ所に書く．

(3) $(2 \times 2 =)\ 2^2 = 4$ を 8 の下に書き，8 から 4 を引く．そして，23 を下に下ろす．
　また，その横で $2 + 2 = 4$ を計算する．

(4) 「4$\boxed{?}$」に「$\boxed{?}$」を掛けて「423」を超えない，最大の 1 桁の整数 $\boxed{?}$ を求める．

$$48 \times 8 = 384 \leqq 423 < 49 \times 9 = 441$$

であるので，$\boxed{?}$ は 8．これを 3 ヶ所に書き込む．

(5) 48×8 の結果 384 を 423 の下に書き，423 から引く．そして，69 を下に下ろす．さらに，小数点を打つ．
また，$48 + 8$ を横で計算しておく．

(6) 「56$\boxed{?}$」に「$\boxed{?}$」を掛けて「3969」を超えない，最大の 1 桁の整数 $\boxed{?}$ を求める．

$$567 \times 7 = 3969 \leqq 3969 < 568 \times 8$$

より $\boxed{?}$ は 7 であり，$3969 - 567 \times 7 = 0$ なので計算は完了．
$\sqrt{823.69} = 28.7$ とわかる．
(いつまでも 0 が現れないときは，計算を繰り返すことでより精密な近似値を求めることができる．)

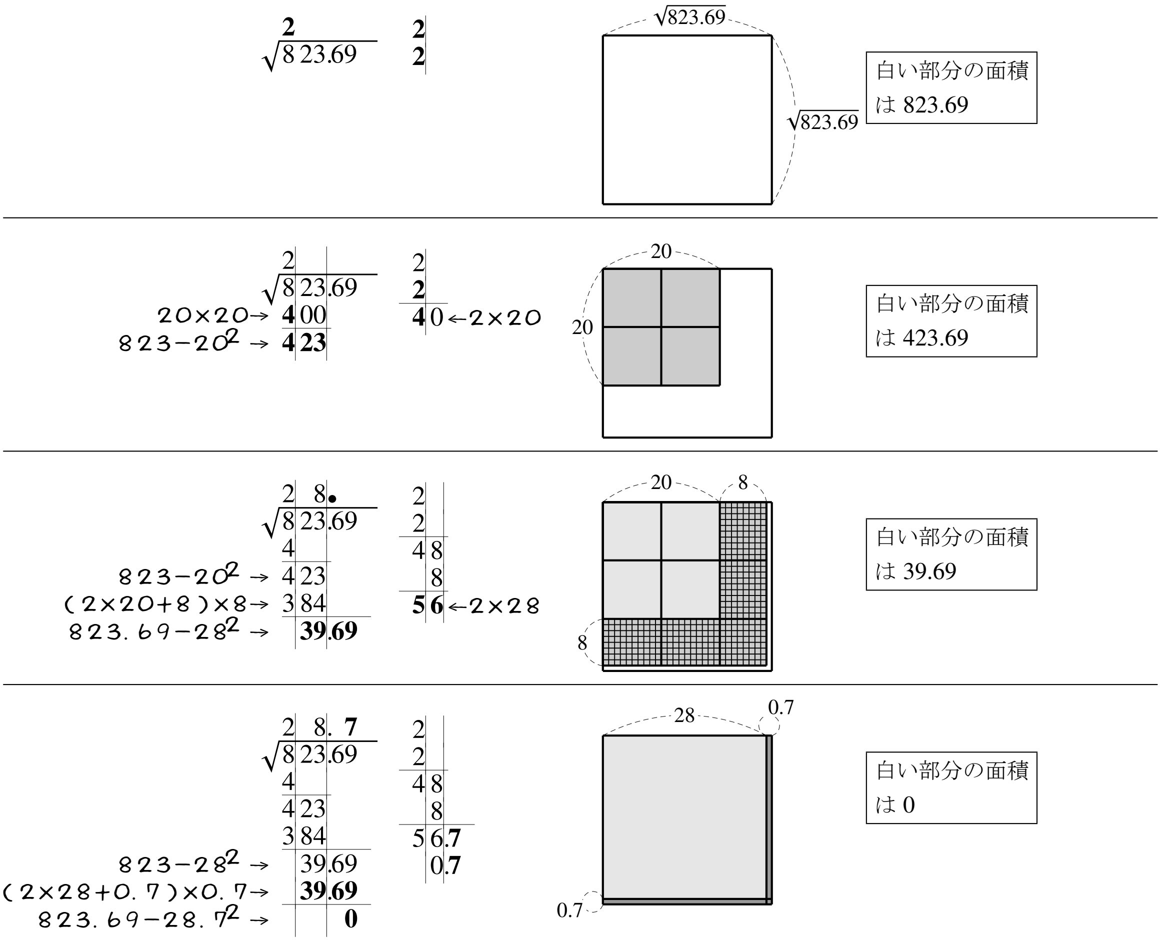
B. 開平法とは

「開平」とは「ある数の平方根を求めること」であり，「**開平法** (extraction of square root)」とは，その「開平」を筆算のような計算で求める方法である．いずれも和算[*29]の時代から使われた用語であり，開平法は古くからそろばんによって用いられていた．

開平法の計算は，化学や物理において必要とされることがある．

C. 開平法の仕組み

なぜ，前ページの開平法によって平方根が求められるのか，その仕組みを下に図で示しておく（途中の計算式の中に，実際の計算のときには必要のない数字があるので注意すること）．余裕のある人は，各自で考えてみよう．



*29 吉田光由著「塵劫記(1627)」などが大きなきっかけとなって発達した，江戸時代の開国以前における日本の数学の総称．関孝和(1640?42?〜1708)，建部賢弘(1664〜1739)などの傑出した人物が現れた．和算においては，微分積分学を初めとする関数の概念こそ大きな流れを作らなかったものの，方程式論，数値計算などの分野においては同時代のヨーロッパの数学を先んじることもあった．
また，和算が庶民にも広く流行していた点は，数学の歴史において特筆すべき事柄である．開国以後の日本が，ヨーロッパの数学を吸収して初等教育に導入するまであまり時間がかからなかった要因には，和算の影響がたいへん大きかったと考えられている．

【練習 58：開平法】

$\sqrt{153664}$，$\sqrt{1.1236}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{9.8}$ の値を開平法によって計算せよ（無限に続く場合は，四捨五入によって上から 3 桁まで計算せよ）.

【解答】 開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{153664} = \mathbf{392}$$

$$\begin{array}{r} 3\ \ 9\ \ 2 \\ \sqrt{15\ 36\ 64} \\ 9 \\ 6\ 36 \\ 6\ 21 \\ 15\ 64 \\ 15\ 64 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ \hline 69 \\ 9 \\ \hline 782 \\ 2 \end{array}$$

開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{1.1236} = \mathbf{1.06}$$

$$\begin{array}{r} 1.\ 0\ \ 6 \\ \sqrt{1.12\ 36} \\ 1 \\ 12 \\ 0 \\ 12\ 36 \\ 12\ 36 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \hline 20 \\ 0 \\ \hline 206 \\ 6 \end{array}$$

◀ 下のように，0 を引く部分を省略しても構わない．ただし，補助の計算から 0 を省略してはいけない．

$$\begin{array}{r} 1.\ 0\ \ 6 \\ \sqrt{1.12\ 36} \\ 1 \\ 12\ 36 \\ 12\ 36 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \hline 20 \\ 0 \\ \hline 206 \\ 6 \end{array}$$

開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{13} = 3.6\overset{1}{\cancel{0}}\cancel{5}\cdots = \mathbf{3.61}$$

$$\begin{array}{r} 3.\ 6\ \ 0\ \ 5 \\ \sqrt{13.} \\ 9 \\ 4\ 00 \\ 3\ 96 \\ 4\ 00 \\ 0 \\ 4\ 00\ 00 \\ 3\ 60\ 25 \\ 39\ 75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ \hline 66 \\ 6 \\ \hline 720 \\ 0 \\ \hline 7205 \\ 5 \end{array}$$

◀ 下のように，0 を引く部分を省略しても構わない．ただし，補助の計算から 0 を省略してはいけない．

$$\begin{array}{r} 3.\ 6\ \ 0\ \ 5 \\ \sqrt{13.} \\ 9 \\ 4\ 00 \\ 3\ 96 \\ 4\ 00\ 00 \\ 3\ 60\ 25 \\ 39\ 75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ \hline 66 \\ 6 \\ \hline 720 \\ 0 \\ \hline 7205 \\ 5 \end{array}$$

開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{9.8} = 3.13\cancel{0}\cdots = \mathbf{3.13}$$

$$\begin{array}{r} 3.\ 1\ \ 3\ \ 0 \\ \sqrt{9.80} \\ 9 \\ 80 \\ 61 \\ 19\ 00 \\ 18\ 69 \\ 31\ 00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ \hline 61 \\ 1 \\ \hline 623 \\ 3 \\ \hline 6260 \\ 0 \end{array}$$

◀ 9.8 とは，物理で重要となる「重力加速度 (m/s^2)」の近似値である．余談になるが，この答えは π に近い値である．

電卓で値を確かめながら，いろいろな値で練習しよう．

2.　複2次式の因数分解について

簡単のため，複2次式 ax^4+bx^2+c を $a\left(x^4+\dfrac{b}{a}x^2+\dfrac{c}{a}\right)$ と変形し，$\dfrac{b}{a}=A$，$\dfrac{c}{a}=B$ とおいた

$$x^4+Ax^2+B \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

という複2次式の因数分解について考える[*30].

i) $x^2=X$ とおく方法で因数分解できる条件

$$\begin{aligned} x^4+Ax^2+B &= X^2+AX+B \qquad \leftarrow x^2=X\text{ とおいた}\\ &= \left(X+\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}+B=\left(X+\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2-4B}{4}\end{aligned}$$

より，$A^2-4B \geqq 0$ ならば $\bigcirc^2-\triangle^2$ タイプの因数分解が可能となる.

ii) x^4 と B に着目する方法で因数分解できる条件

$$x^4+Ax^2+B=x^4+B+Ax^2$$

ここで，$B>0$ ならば

$$\begin{aligned} &= \left(x^2+\sqrt{B}\right)^2-2\sqrt{B}x^2+Ax^2\\ &= \left(x^2+\sqrt{B}\right)^2-\left(2\sqrt{B}-A\right)x^2\end{aligned}$$

また，$2\sqrt{B}-A>0$ となるのは

$$2\sqrt{B}>A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A<0)\\ \text{または}\\ \left(A \geqq 0 \text{ かつ } 4B>A^2\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A<0 \text{ かつ } (A^2-4B \geqq 0 \text{ または } A^2-4B<0))\\ \text{または}\\ \left(A \geqq 0 \text{ かつ } A^2-4B<0\right)\end{cases}$$

のときであるから，条件を整理すると

$$\begin{cases} (B>0 \text{ かつ } A<0 \text{ かつ } (A^2-4B \geqq 0 \text{ または } A^2-4B<0))\\ \text{または}\\ \left(B>0 \text{ かつ } A \geqq 0 \text{ かつ } A^2-4B<0\right)\end{cases}$$

のときである.

以上 i)，ii) を因数分解の手法として覚えやすくまとめると次のようになる.

$A^2-4B \geqq 0$ のときは，$x^2=X$ とおくことにより因数分解でき，$A^2-4B<0$ のときは x^4 と B に着目して変形することにより因数分解できる．特に，$A^2-4B \geqq 0$ かつ $A<0$ かつ $B \geqq 0$ のときには，どちらの方法でも因数分解できる.

[*30] この複2次式①が因数分解できれば，その式全体に a を掛けて，もとの複2次式 ax^4+bx^2+c の因数分解が得られる.

第2章　方程式・不等式と関数

第 2 章では，方程式・不等式と関数（のグラフ）の関係について学ぶ.
はじめに 1 次不等式・2 次方程式を学ぶが，後にこれらは，1 次関数・2 次関数のグラフと密接な関係があることが分かる．この関係をつかむことは，高校数学の最も大事なポイントの 1 つになっている.
最終的に，2 次不等式を解くときには，簡単な計算問題であっても，2 次関数を用いて解くことになる.
方程式・不等式からグラフへ，グラフから方程式・不等式へ．自由に行き来するまでに時間がかかるかもしれないが，じっくり考えて理解しよう.

2.1　1次不等式

2 つの数が等しいことは等号(=)を使った等式で表されるように，2 つの数の間の大小は，不等号(> や ≧ など)を使って表される．

1.　不等式の性質

A.　不等号とその読み方

2 つの数の大小関係は，**不等号** (a sign of inequality) を用いて表される．たとえば，「2 より 3 の方が大きい」ことは $2 < 3$ と表される．

	読み方*1	意味
$a < b$	a は b より小さい（a は b 未満である）	
$a \leqq b$	a は b 以下である	$a < b$ または $a = b$
$a > b$	a は b より大きい	
$a \geqq b$	a は b 以上である	$a > b$ または $a = b$

「～以○」は等号ありの不等号，「～より○○○」「～未満」は等号なしの不等号と理解できる．

B.　不等式とは何か

たとえば「ある数 a を 2 倍してから 3 を加えた数は，4 より大きい」ことは

$$2a + 3 > 4 \quad \cdots\cdots ①$$

と不等号を用いて表すことができる．① のように，2 つの式の大小関係を不等号を使って表したものを**不等式** (inequality) という．

等式の場合と同じように，不等号の左側にある式を**左辺** (left side)，右側にある式を**右辺** (right side)，左辺と右辺をあわせて**両辺** (both sides) という．①の左辺は $2a + 3$，右辺は 4 である．

【例題 1】 次の文章を不等式で表せ．また，その左辺，右辺を答えよ．

1. 「a と 3 の和は，b の 2 倍以上」
2. 「x の 2 倍から 3 引いた数は，x の (−2) 倍より小さい」

【解答】

1. 「$\underbrace{a\text{ と 3 の和}}_{a+3}$ は，$\underbrace{b\text{ の 2 倍}}_{2b}$ 以上」 → $\boldsymbol{a + 3 \geqq 2b}$　◀「A は B 以上」は $A \geqq B$

   左辺は $a + 3$，右辺は $2b$ である．

2. 「$\underbrace{\underbrace{x\text{ の 2 倍}}_{2x}\text{ から 3 引いた数}}_{2x-3}$ は，$\underbrace{x\text{ の (−2) 倍}}_{-2x}$ より小さい」 → $\boldsymbol{2x - 3 < -2x}$　◀「A は B より小さい」は $A < B$

   左辺は $2x - 3$，右辺は $-2x$ である．

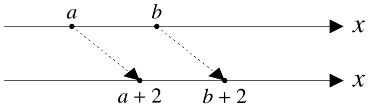
*1 次のような読み方もよく用いられる．
$a < b$:「a 小なり b」，$a \leqq b$:「a 小なりイコール b」，$a > b$:「a 大なり b」，$a \geqq b$:「a 大なりイコール b」

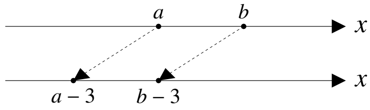
C.　不等式の性質

数直線上の点の移動をイメージしながら，不等式の性質を考えよう．

i) 両辺に同じ数を足す(引く)場合　**⇒不等号の向きは変わらない(″<″は″<″のまま)**

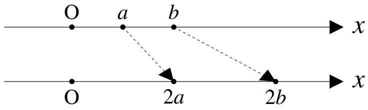
$a < b$ のとき，$a + 2 < b + 2$ である．　　$a < b$ のとき，$a - 3 < b - 3$ である．

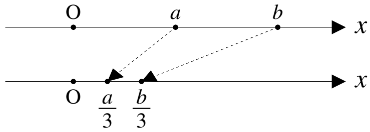




ii) 両辺に正の数を掛ける(割る)場合　**⇒不等号の向きは変わらない(″<″は″<″のまま)**

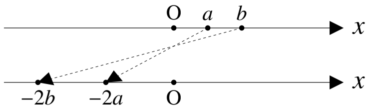
$a < b$ のとき，$2a < 2b$ である．　　$a < b$ のとき，$\dfrac{a}{3} < \dfrac{b}{3}$ である．

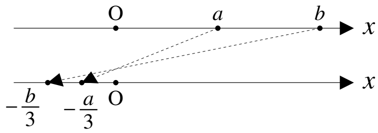




iii) 両辺に負の数を掛ける(割る)場合　**⇒不等号の向きが反対になる(″<″は″>″に変わる)**

$a < b$ のとき，$-2a > -2b$ である．　　$a < b$ のとき，$-\dfrac{a}{3} > -\dfrac{b}{3}$ である．





【例題 2】

1. $a > b$ のとき，次の $\boxed{}$ に入る不等号を書け．
   i. $a + 4 \boxed{} b + 4$　ii. $a - 2 \boxed{} b - 2$　iii. $a - 3 \boxed{} b - 3$　iv. $3a \boxed{} 3b$
   v. $2a \boxed{} 2b$　vi. $-3a \boxed{} -3b$　vii. $4a \boxed{} 4b$　viii. $-a \boxed{} -b$
2. i. ～v. のそれぞれについて，$a > b$, $a < b$, $a \geqq b$, $a \leqq b$ のいずれが成り立つか答えよ．
   i. $5a < 5b$　ii. $-2a < -2b$　iii. $a - 4 < b - 4$　iv. $\dfrac{a}{4} \leqq \dfrac{b}{4}$　v. $-\dfrac{a}{4} \leqq -\dfrac{b}{4}$

【解答】

1.　i. **>**　ii. **>**　iii. **>**　iv. **>**　v. **>**　vi. **<**　vii. **>**　viii. **<**

2.　i. $\boldsymbol{a < b}$　ii. $\boldsymbol{a > b}$　iii. $\boldsymbol{a < b}$　iv. $\boldsymbol{a \leqq b}$　v. $\boldsymbol{a \geqq b}$

不等式の性質

i)　すべての実数 c で　$a < b \iff a + c < b + c$ ，$a - c < b - c$

ii)　$0 < c$ のとき　$a < b \iff ac < bc$ ，$\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

iii)　$c < 0$ のとき　$a < b \iff ac > bc$ ，$\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$　**←逆符号！**

・・・・ これらの性質により，p.55 で学ぶように，不等式も方程式と同じようにして解くことができる．

【練習 3：不等式の性質】

以下の$\boxed{}$にあてはまる適当な数字を答えよ．

(1) $x+3<5$
$\Leftrightarrow$ $x+3-3<5-\boxed{\text{ア}}$
$\Leftrightarrow$ $x<\boxed{\text{イ}}$

(2) $2x<8$
$\Leftrightarrow$ $2x\times\dfrac{1}{2}<8\times\boxed{\text{ウ}}$
$\Leftrightarrow$ $x<\boxed{\text{エ}}$

(3) $-3x\geqq 15$
$\Leftrightarrow$ $-3x\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)\leqq 15\times\boxed{\text{オ}}$
$\Leftrightarrow$ $x\leqq\boxed{\text{カ}}$

【解答】

(1) ア: **3**，イ: **2**　(2) ウ: $\mathbf{\dfrac{1}{2}}$，エ: **4**　(3) オ: $\mathbf{-\dfrac{1}{3}}$，カ: **−5**

◀ 負の数を両辺にかけると，不等号が逆向きになる．

2.　1次不等式とその解法

A.　1次不等式とは何か

左辺，右辺とも（x について）次数が 1 次以下である不等式を，（x についての）**1 次不等式** (linear inequality) という．たとえば，次の式はすべて 1 次不等式である．

$2x+3>5x-3,\quad -x-5\geqq 2x+4,\quad 2x-3<7$

（x についての）不等式の**解** (solution) とは，不等式を満たす x の値のことをいう．たとえば，いろいろな x において，不等式

$2x+3>5x-3$ ……… ①

を満たすかどうか調べてみよう．$x=-2$ の時を調べると

（左辺）$=2\times(-2)+3=-1$
（右辺）$=5\times(-2)-3=-13$

となり，左辺の方が大きい．つまり，$x=-2$ は解である．

x	左辺	右辺	
−2	−1	−13	○
−1	1	−8	○
0	3	−3	○
1	5	2	○
2	7	7	×
3	9	12	×
4	11	17	×

このことを繰り返せば，右上の表を作る事ができ，①の解は無数にあることが分かる．

【例題 4】　不等式 $2x-1<x+2$ について，次の問いに答えよ．

1. $x=-2$ のとき，左辺の値，右辺の値をそれぞれ求めよ．また，$x=-2$ は解になるか．
2. $x=3$ のとき，左辺の値，右辺の値をそれぞれ求めよ．また，$x=3$ は解になるか．
3. $x=4$ のとき，左辺の値，右辺の値をそれぞれ求めよ．また，$x=4$ は解になるか．

【解答】

1. **（左辺）= −5,（右辺）= 0**，（右辺）の方が大きいので**解になる**．
2. **（左辺）= 5,（右辺）= 5**，左辺と右辺が等しいので**解にならない**．
3. **（左辺）= 7,（右辺）= 6**，（右辺）の方が小さいので**解にならない**．

◀ 左辺が右辺より小さくないと，解にならない．

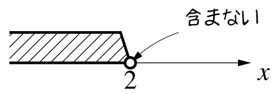
B. 不等式の解法と解の図示

不等式を**解く** (solve) とは「不等式の**すべての**解を求めること」を意味する．

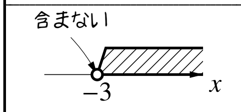
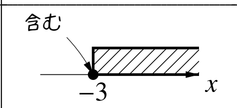
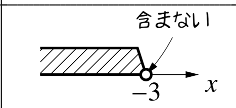
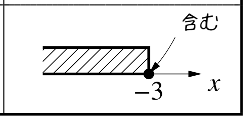
p.53 で学んだ性質から，不等式も，方程式と同じように**移項**（いこう） (transposition) を用いて解くことができる．たとえば，不等式 ① は次のように解くことができる．

$$
\begin{array}{lll}
 & 2x+3>5x-3 & \\
\Leftrightarrow & 2x-5x>-3-3 & \leftarrow \text{移項した} \\
\Leftrightarrow & -3x>-6 & \\
\Leftrightarrow & x<2 & \leftarrow -3\text{ で割った（符号の向きが逆になる！！）}
\end{array}
$$

こうして，「x は 2 より小さければ解になる」ことが求められる．このことは，数直線を用いて右図のように表すことができる．



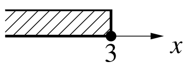
一般に，不等式の解は以下のように図示する．

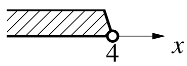
$-3<x$	$-3 \leqq x$	$x<-3$	$x \leqq -3$
			

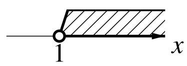
不等号 <, > のときは，境目を「白丸」「斜め線」で表す．

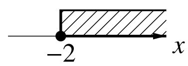
一方，不等号 ≦, ≧ のときは，境目を「黒丸」「垂直線」で表す．

【例題 5】 それぞれの図が表す，不等式の解を答えなさい．

1. 

2. 

3. 

4. 

【解答】

1. $\boldsymbol{x \leqq 3}$　2. $\boldsymbol{x < 4}$　3. $\boldsymbol{1 < x}$　4. $\boldsymbol{-2 \leqq x}$

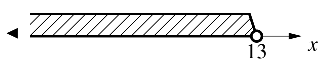
解の図示は，次で学ぶ「連立不等式」においてきわめて重要になる．

【例題 6】 次の 1 次不等式を解け．また，その解を数直線上に表せ．

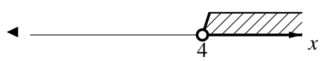
1. $x-8<5$　2. $4x-8>2x$　3. $5-3x \leqq 7-10x$

【解答】 解を表す数直線はすべて，右欄外に書いた．

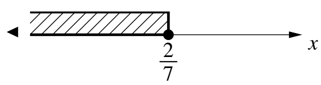
1. $x-8<5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x<13}$



2.
$$
\begin{array}{ll}
 & 4x-8>2x \\
\Leftrightarrow & 2x>8 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x>4}
\end{array}
$$



3.
$$
\begin{array}{ll}
 & 5-3x \leqq 7-10x \\
\Leftrightarrow & 5x+10x \leqq 7-5 \\
\Leftrightarrow & 7x \leqq 2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x \leqq \frac{2}{7}}
\end{array}
$$



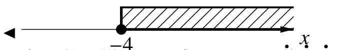
【練習 7：1 次不等式】

次の 1 次不等式を解け．また，その解を数直線上に表せ．

(1) $-8x \leqq 32$　　(2) $2(x-2) > 3(4-x)+4$　　(3) $3 - \dfrac{5x-1}{3} > 2x+1$

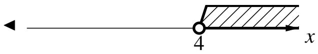
【解答】 解を表す数直線はすべて，右欄外に書いた．

(1)
$$
\begin{aligned}
& -8x \leqq 32 \\
\Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x \geqq -4}
\end{aligned}
$$



◀ 負の数を掛ける・割るときは逆符号

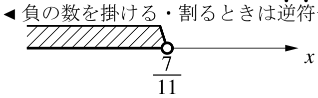
(2)
$$
\begin{aligned}
& 2(x-2) > 3(4-x)+4 \\
\Leftrightarrow\ & 2x-4 > 12-3x+4 \\
\Leftrightarrow\ & 5x > 20 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x > 4}
\end{aligned}
$$



(3)
$$
\begin{aligned}
& 3 - \frac{5x-1}{3} > 2x+1 \\
\Leftrightarrow\ & 9-(5x-1) > 6x+3 \\
\Leftrightarrow\ & 9-5x+1 > 6x+3 \\
\Leftrightarrow\ & -11x > -7 \\
\Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x < \frac{7}{11}}
\end{aligned}
$$

◀ 両辺を 3 倍した

◀ 負の数を掛ける・割るときは逆符号



【練習 8：不等式の解】

(1) 不等式 $2x-3<7$ において，$x=-3$ は解になるか，$x=5$ は解になるか．

(2) 不等式 $-x-5 \geqq 2x+4$ において，$x=-3$ は解になるか，$x=5$ は解になるか．

【解答】

(1) $x=5$ のとき，左辺，右辺とも 7 になり，**解ではない**．
　$x=-3$ は解になる．

(2) $x=-3$ のとき，左辺，右辺とも -2 になり，**解になる**．
　$x=5$ は解ではない．

◀「左辺が右辺より小さくなる x の値」が解なので，両辺が等しいときは解ではない．

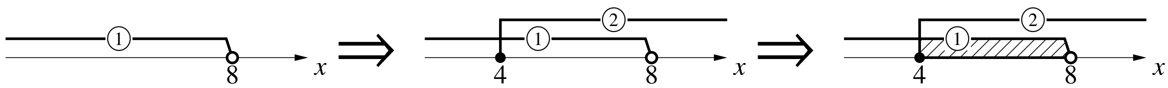
◀「左辺が右辺以上になる x の値」が解なので，両辺が等しくても解である．

C. 連立不等式

連立不等式 (simultaneous inequalities) とは，2 つ以上の満たすべき不等式の集まりを指す．連立不等式を解くとは，全ての不等式を同時に満たす x の範囲を求めることである．

たとえば，連立不等式 $\begin{cases} x-3<5 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x+1 \leqq 4x-3 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ を解こう．

①の解は $x<8$ であり，②の解は $4 \leqq x$ になる．これらをまとめて図示しよう．

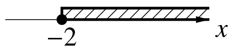


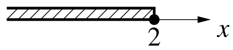
$x<8$ を図示した　　$4 \leqq x$ も書き込んだ　　同時に満たす部分を斜線で図示
（①と②の横線２本が重なる部分）

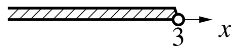
こうして，連立不等式の解は $4 \leqq x < 8$ と分かる．

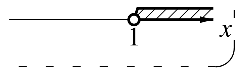
2 つの不等式を同時に満たす範囲がない場合は「解なし」と答える．

【例題 9】 以下の図に $x < 0$ を書き込み，同時に満たす x の範囲を答えなさい．同時に満たす x の範囲がなければ，「解なし」と答えなさい．

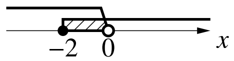
1. 

2. 

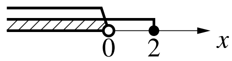
3. 

4. 

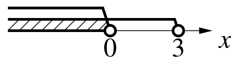
【解答】

1. 

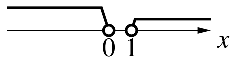
$-2 \leqq x < 0$

2. 

$x < 0$

3. 

$x < 0$

4. 

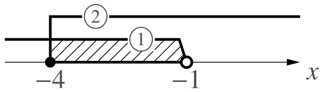
解なし

【例題 10】 連立不等式 $\begin{cases} 4x-3 < 2x-5 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x+1 \geqq 2x-3 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ を解け．

【解答】 ① $\Leftrightarrow$ $2x < -2$ 　　② $\Leftrightarrow$ $x \geqq -4$

$\Leftrightarrow$ $x < -1$

2 つの解を同じ数直線上に図示すれば，次のようになる．



よって，**$-4 \leqq x < -1$** が解になる．

連立不等式を解くときには必ず，解を数直線上に書き表すこと．

D. 3 つ以上の式による不等式

たとえば，x が不等式 $-2x+6 < x < 4x-3$ ……… ③ を満たすには，$-2x+6 < x$ と $x < 4x-3$ を同時に満たせばよい．つまり，③を解くには連立不等式 $\begin{cases} -2x+6 < x \\ x < 4x-3 \end{cases}$ を解けばよい．

【例題 11】 不等式 $-2x+6 < x < 4x-3$ を解け．

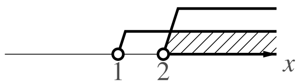
【解答】 $-2x+6 < x$ と $x < 4x-3$ をそれぞれ解くと

$-2x+6 < x$ 　　　　$x < 4x-3$

$\Leftrightarrow$ $6 < 3x$ 　　　　$\Leftrightarrow$ $-3x < -3$

$\Leftrightarrow$ $2 < x$ 　　　　$\Leftrightarrow$ $x > 1$

2 つの解を同じ数直線上に図示すれば，次のようになる．



よって，**$2 < x$** が解になる．

【練習 12：連立不等式】

次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} \dfrac{11}{4}x - \dfrac{3}{2} > 2x - 5 \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6} \leqq -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 0.25x - 0.18 \geqq 0.6 - 0.14x \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6} \leqq -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases}$

【解答】

(1) まず，$\dfrac{11}{4}x - \dfrac{3}{2} > 2x - 5$ を解く．

$\Leftrightarrow\ 11x - 6 > 8x - 20$　◀ 両辺を 4 倍した

$\Leftrightarrow\ 3x > -14$

$\Leftrightarrow\ x > -\dfrac{14}{3}$ ……………………… ①

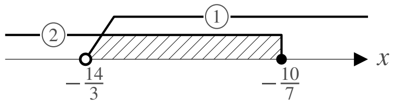
次に，$\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6} \leqq -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$ を解く．

$\Leftrightarrow\ 4x + 1 \leqq -3x - 9$　◀ 両辺を 6 倍した

$\Leftrightarrow\ 7x \leqq -10$

$\Leftrightarrow\ x \leqq -\dfrac{10}{7}$ ……………………… ②

これらを図示して



となるので，解は $\boldsymbol{-\dfrac{14}{3} < x \leqq -\dfrac{10}{7}}$ である．

(2) まず，$0.25x - 0.18 \geqq 0.6 - 0.14x$ を解く．

$\Leftrightarrow\ 25x - 18 \geqq 60 - 14x$　◀ 両辺を 100 倍した

$\Leftrightarrow\ 39x \geqq 78$

$\Leftrightarrow\ x \geqq 2$ ……………………… ③

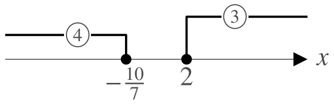
次に，$\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6} \leqq -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$ を解く．

$\Leftrightarrow\ 4x + 1 \leqq -3x - 9$　◀ 両辺を 6 倍した

$\Leftrightarrow\ 7x \leqq -10$

$\Leftrightarrow\ x \leqq -\dfrac{10}{7}$ ……………………… ④

これらを図示すると



となり，共通解は存在しないので，答えは**解なし**．

E. 発展 1次不等式の応用

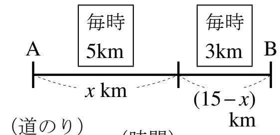
【練習 13：1次不等式の応用】

(1) A 地点から 15 km 離れた B 地点まで歩いた．はじめは急ぎ足で毎時 5 km，途中から疲れたので毎時 3 km の速さで歩いた．所要時間が 4 時間以内のとき，急ぎ足で何 km 以上歩いたか求めよ．

(2) 5 % の食塩水 800 g と 8 % の食塩水を何 g か混ぜて，6 % 以上の食塩水を作りたい．8 % の食塩水を何 g 以上混ぜればよいか求めよ．

【解答】

(1) 急ぎ足で歩いた距離を x km とする．

◀ 

疲れて歩いた距離は $(15-x)$ km となり，歩くのにかかる時間はそれぞれ，$\dfrac{x}{5}$ 時間，$\dfrac{15-x}{3}$ 時間となる．

◀ $\dfrac{(\text{道のり})}{(\text{速さ})} = (\text{時間})$

全体の所要時間は 4 時間以内であるから

$$\frac{x}{5} + \frac{15-x}{3} \leqq 4 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす x を求めればよい．

$$\begin{aligned} ① &\iff 3x + 5(15-x) \leqq 60 \\ &\iff -2x \leqq -15 \\ &\iff x \geqq \frac{15}{2} = 7.5 \end{aligned}$$

◀ 両辺に 15 を掛けた

◀ 負の数を掛ける・割るときは逆符号

よって，**急ぎ足では 7.5 km 以上歩いた**．

(2) 8% の食塩水を x g 混ぜるとして，x について解けばよい．5% の食塩水 800 g の中には $\left(\dfrac{5}{100} \times 800\right)$ g の食塩が溶けている．また，混ぜる 8% の食塩水 x g の中には，$\left(\dfrac{8}{100} \times x\right)$ g の食塩が溶けている．

◀

	食塩水の量 (g)	食塩の量 (g)
5%	800	$\frac{5}{100} \times 800$
8%	x	$\frac{8}{100}x$
	$800 + x$	$\frac{5}{100} \times 800 + \frac{8}{100}x$

これらを混ぜて，濃度が 6 % 以上になるから

$$\left(\frac{5}{100} \times 800 + \frac{8}{100} \times x\right) \div (800 + x) \geqq \frac{6}{100} \quad \cdots\cdots ②$$

◀ $\dfrac{(\text{食塩の量})}{(\text{食塩水の量})} = \dfrac{(\text{濃度})}{100}$

を満たす x を求めればよい．

$$\begin{aligned} ② &\iff \frac{5}{100} \times 800 + \frac{8}{100} \times x \geqq \frac{6}{100} \times (800 + x) \\ &\iff 5 \times 800 + 8 \times x \geqq 6 \times (800 + x) \\ &\iff 4000 + 8x \geqq 4800 + 6x \\ &\iff 2x \geqq 800 \\ &\iff x \geqq 400 \end{aligned}$$

◀ 両辺に $800 + x$ を掛けた

◀ 両辺に 100 を掛けた

よって，**8 % の食塩水は 400 g 以上混ぜればよい**．

F. 取り得る範囲を求める

【練習 14：取り得る範囲〜その１〜】

実数 x が $-2 < x < 4$ であるとき，以下の値の取り得る範囲を答えよ．

(1) $x+3$　(2) $x-2$　(3) $2x$　(4) $2x-5$　(5) $-2x$

【解答】

(1)
$$\begin{aligned} & -2 < x < 4 \\ \Leftrightarrow\ & -2+3 < x+3 < 4+3 \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{1 < x+3 < 7} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & -2 < x < 4 \\ \Leftrightarrow\ & -2-2 < x-2 < 4-2 \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{-4 < x-2 < 2} \end{aligned}$$

◀ 同じ数を足しても引いても，大小関係は変わらない．

(3)
$$\begin{aligned} & -2 < x < 4 \\ \Leftrightarrow\ & 2\times(-2) < 2x < 2\times 4 \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{-4 < 2x < 8} \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} & -2 < x < 4 \\ \Leftrightarrow\ & -4 < 2x < 8 \\ \Leftrightarrow\ & -4-5 < 2x-5 < 8-5 \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{-9 < 2x-5 < 3} \end{aligned}$$

◀ 正の同じ数を掛けても，大小関係は変わらない．

(5)
$$\begin{aligned} & -2 < x < 4 \\ \Leftrightarrow\ & -2\times(-2) > -2x > -2\times 4 \\ \Leftrightarrow\ & 4 > -2x > -8 \end{aligned}$$

$\therefore$ $\mathbf{-8 < -2x < 4}$

◀ 負の同じ数を掛けると，大小関係は逆になる．

【発展 15：取り得る範囲〜その２〜】

実数 a は小数第 1 位を四捨五入して 4 になり，実数 b は小数第 1 位を四捨五入して 6 になるという．

① $a,\ b$ の取り得る範囲を不等式で答えよ．

② $3a+b$ の取り得る範囲を不等式で答えよ．

③ $a-b$ の取り得る範囲を不等式で答えよ．

【解答】

① $\mathbf{3.5 \leqq a < 4.5,\ 5.5 \leqq b < 6.5}$

② $3.5 \leqq a < 4.5$ より $10.5 \leqq 3a < 13.5$

◀ すべての辺に 3 を掛けた．

これと $5.5 \leqq b < 6.5$ より

$$\begin{array}{rccccc} & 10.5 & \leqq & 3a & < & 13.5 \\ +) & 5.5 & \leqq & b & < & 6.5 \\ \hline & 16 & \leqq & 3a+b & < & 20 \end{array}$$

$\therefore$ $\mathbf{16 \leqq 3a+b < 20}$

③ $5.5 \leqq b < 6.5$ より $-6.5 < -b \leqq -5.5$ になるので

$$\begin{array}{rccccc} & 3.5 & \leqq & a & < & 4.5 \\ +) & -6.5 & < & -b & \leqq & -5.5 \\ \hline & -3 & < & a+(-b) & < & -1 \end{array}$$

$\therefore$ $\mathbf{-3 < a-b < -1}$

2.2 2次方程式の基礎

ここでは，2 次方程式の解法の基礎を学ぶ.

A. 2 次方程式とは

（x についての）**2 次方程式** (quadratic equation) とは，$a\ (\fallingdotseq 0)$，b，c を定数として

$ax^2 + bx + c = 0$

という形で表せる方程式のことである．与えられた 2 次方程式を満たす x の値をすべて求めることを「2 次方程式を解く」といい，その x の値をその「2 次方程式の解」とよぶ.

B. 因数分解を利用した解法

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の左辺が因数分解できる場合には，中学までで学んだように，因数分解を用いて解くのが一番よい．たとえば，$2x^2 - x - 3 = 0$ を解くと，次のようになる.

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^{*2}\, 2x - 3 = 0 \quad \text{または} \quad x + 1 = 0 \qquad \therefore x = \frac{3}{2}, -1 \ {}^{*3}$$

【例題 16】 2 次方程式 $3x^2 + 2x - 8 = 0$ の左辺は因数分解できて

$$\left(x + \boxed{\text{ア}}\right)\left(\boxed{\text{イ}}\,x - \boxed{\text{ウ}}\right) = 0$$

と変形できる．ここから $\boxed{\text{エ}} = 0$ または $\boxed{\text{オ}} = 0$ が成り立つ.

この 2 つの 1 次方程式をそれぞれ解いて $x = \boxed{\text{カ}}$，$x = \boxed{\text{キ}}$.

【解答】 ア : **2**，イ : **3**，ウ : **4**，
エ : $\boldsymbol{x+2}$，オ : $\boldsymbol{3x-4}$，カ : $\boldsymbol{-2}$，キ : $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

[*2] ここで用いられる性質は，実数 A，B についての積の性質
$AB = 0 \iff A = 0$ または $B = 0 \iff A = 0$ か $B = 0$ の一方でも成り立てばよい（両方でもよい）
である．通常の会話における「または」の意味は，「どちらかが正しく，残りは間違い」の意味であることが多い．しかし，数学における「または」は「少なくともどちらかが正しい（両方とも正しい場合を含む)」の意味で使われる．「または」の扱いについては，数学 A(p.2) において詳しく学ぶ.

[*3] 2 つの解の間にあるカンマ「,」は，「または」の代わりに使われている.

【練習 17：2 次方程式を解く（因数分解の利用)】

次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2-2x-15=0$　(2) $x^2-8x+16=0$　(3) $12x^2-17x+6=0$

(4) $3x^2+2x-3=-2x+1$　(5) $\dfrac{1}{9}x^2+x+2=0$

【解答】

(1) 左辺を因数分解して $(x+3)(x-5)=0$ なので，$\boldsymbol{x=-3, 5}$.

(2) 左辺を因数分解して $(x-4)^2=0$ なので，$\boldsymbol{x=4}$.

◂ $x=4$ または $x=4$，つまり $x=4$ のみが適する.

(3) 左辺を因数分解して $(4x-3)(3x-2)=0$ なので，$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}}$.

(4) 式を整理して $3x^2+4x-4=0$ となり，この左辺を因数分解して $(x+2)(3x-2)=0$ なので，$\boldsymbol{x=-2, \dfrac{2}{3}}$.

◂ まずは $ax^2+bx+c=0$ の形に整頓する

(5) 両辺を 9 倍すると $x^2+9x+18=0$ となるので，左辺を因数分解して $(x+6)(x+3)=0$ なので，$\boldsymbol{x=-6, -3}$.

◂ 係数が整数でないと，因数分解はやりにくい

C.（x の式)^2 =（定数）の形にする解法

2 次方程式 $x^2+4x-3=0$ は，左辺を因数分解できないが，次のように解くことができる.

$x^2+4x=3$　←定数項を右辺に移項

$x^2+4x+4=3+4$　←両辺に 4 を足すと

$(x+2)^2=7$　←左辺を 2 乗の形にできる

$x+2=\pm\sqrt{7}$　←つまり，$x+2=\sqrt{7}$ または $x+2=-\sqrt{7}$

$x=-2\pm\sqrt{7}$　←つまり，$x=-2+\sqrt{7}$ または $x=-2-\sqrt{7}$

【例題 18】 上と同じようにして $x^2+6x-13=0$ を解こう. $\boxed{}$ には

$x^2+6x=\boxed{ア}$　←定数項を右辺に移項

$x^2+6x+\boxed{イ}=\boxed{ア}+\boxed{イ}$　←両辺に $\boxed{イ}$ を足す

$(x+\boxed{ウ})^2=\boxed{エ}$　←左辺が 2 乗の形になった

$x+\boxed{ウ}=\pm\sqrt{\boxed{エ}}$

$x=\boxed{オ}\pm\sqrt{\boxed{エ}}$

これは，x の解が $\boxed{カ}$，$\boxed{キ}$ の 2 つあることを意味している.

【解答】 ア：**13**，イ：**9**，ウ：**3**，エ：**22**，オ：**−3**，カ：$\boldsymbol{-3+\sqrt{22}}$，キ：$\boldsymbol{-3-\sqrt{22}}$

D. 2 次方程式の解の公式

x^2 の係数が 1 でなくても，次のようにして $(x\text{ の式})^2 = (\text{定数})$ の形にして解くことができる．

具体的な 2 次方程式		一般の 2 次方程式
$3x^2+2x-8=0$		$ax^2+bx+c=0$
$3x^2+2x=8$	← 定数項を移項 →	$ax^2+bx=-c$
$x^2+\frac{2}{3}x=\frac{8}{3}$	← x^2 の係数を1にする →	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
$x^2+\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$	← x の係数の半分の 2 乗を両辺に足す →	$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$	← $(x+\bigcirc)^2$ を作る →	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$
$x+\frac{1}{3}=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$	← 平方根を求める（ただし，b^2-4ac の値は 0 以上とする） →	$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ……… ①
$x=-\frac{1}{3}+\frac{5}{3},\ -\frac{1}{3}-\frac{5}{3}$	← x について解く →	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x=\frac{4}{3},-2$		$\left(\text{つまり}, x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

①より下の変形は，右辺にある「b^2-4ac」の値が 0 以上でないといけない．

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となる．この式を 2 次方程式の**解の公式** (formula of solution) という．ただし，この解は $b^2-4ac \geqq 0$ のときに限る．
$b^2-4ac<0$ のときは $\sqrt{b^2-4ac}$ が意味をもたず，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は存在しない．

【例題 19】

1. 2 次方程式 $2x^2+3x-4=0$ を解こう．解の公式に $a=\boxed{\text{ア}}$, $b=\boxed{\text{イ}}$, $c=\boxed{\text{ウ}}$ を代入して，
$x=\dfrac{\boxed{\text{エ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となり，これが解である．
2. 2 次方程式 $x^2-4x+2=0$ を解こう．解の公式に $a=\boxed{\text{キ}}$, $b=\boxed{\text{ク}}$, $c=\boxed{\text{ケ}}$ を代入して，
$x=\dfrac{\boxed{\text{コ}}\pm\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ となる．これを約分して，解 $x=\boxed{\text{セ}}$ を得る．

【解答】

(1) **ア** : **2**, **イ** : **3**, **ウ** : **−4**, 解の公式に代入して $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-4)}}{2\cdot2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$ であるので，
エ : **−3**, **オ** : **41**, **カ** : **4**

(2) **キ** : **1**, **ク** : **−4**, **ケ** : **2**, 解の公式に代入して $x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\dfrac{4\pm2\sqrt{2}}{2}$ であるので，
コ : **4**, **サ** : **2**, **シ** : **2**, **ス** : **2**, $\dfrac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\cancel{2}\left(2\pm\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}}$ であるので，**セ** : $\mathbf{2\pm\sqrt{2}}$

【練習 20：2 次方程式を解く（解の公式の利用）】

次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2+7x+2=0$　　(2) $x^2+8x-3=0$　　(3) $x^2-x-3=0$

(4) $x^2-4x+5=0$　　(5) $4x^2+6x+1=0$　　(6) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}=0$

解の公式は暗記して，正確に使いこなせるようにしよう.

また，$\sqrt{}$ の中が負になったとき（$b^2-4ac<0$ のとき）は,「解なし」と答えればよい.

【解答】

(1) $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\boldsymbol{\dfrac{-7\pm\sqrt{41}}{2}}$

(2) $x=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}$

$=\dfrac{-8\pm2\sqrt{19}}{2}=\boldsymbol{-4\pm\sqrt{19}}$

◀「x の係数が偶数の場合の解の公式 (p.67)」を用いてもよい.

◀ $\dfrac{-8\pm2\sqrt{19}}{2}=\dfrac{\cancel{2}\left(-4\pm\sqrt{19}\right)}{\cancel{2}}$

(3) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\boldsymbol{\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}}$

◀ $b=-1$ なので $-b=1$ である.

(4) $x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\dfrac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$，答えは**解なし**.

◀ $\sqrt{-4}$ が意味をもたないため

(5) $x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}$

$=\dfrac{-6\pm2\sqrt{5}}{8}=\boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{4}}$

◀「x の係数が偶数の場合の解の公式 (p.67)」を用いてもよい.

◀ $\dfrac{-6\pm2\sqrt{5}}{8}=\dfrac{\cancel{2}\left(-3\pm\sqrt{5}\right)}{\cancel{8}^{\,4}}$

(6) 方程式の両辺に 6 を掛けて整理すると $x^2+3x-2=0$ となるので

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}}$

◀ 基本的には，分数をなくしてから解の公式を使うようにしよう.

E. 2 次方程式の解と因数分解

2 次方程式の 2 つの解法を見比べてみよう.

i) 因数分解を利用した解法　　ii) 解の公式を用いた解法

$x^2-3x-18=0$　　$x^2-5x-3=0$

$(x-6)(x+3)=0$　←左辺の因数分解→　？？？

$x=6,-3$　←方程式の解→　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ ←『解の公式』で求めた

i), ii) を見比べて，x^2-5x-3 の因数分解を得る.

$x^2-3x-18=(x-\underbrace{6}_{\text{解の 1 つ}})(x-\underbrace{(-3)}_{\text{もう 1 つの解}})$　　$x^2-5x-3=\left(x-\underbrace{\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}}_{\text{解の 1 つ}}\right)\left(x-\underbrace{\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}}_{\text{もう 1 つの解}}\right)$

実際，$\left(x-\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}\right)$ を展開すれば，この因数分解が正しいと分かる.

【例題 21】 x^2-3x+1 を実数の範囲で因数分解しなさい（因数には無理数が含まれてもよい）.

【解答】 2 次方程式 $x^2-3x+1=0$ を解けば，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ となるので

$$x^2-3x+1=\left(\boldsymbol{x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(\boldsymbol{x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

◀ 解の公式を用いて解く

F. 2 次方程式の解の個数～判別式 D

解の公式の根号 $\sqrt{\ \ }$ 内の b^2-4ac を，2 次方程式の**判別式** (discriminant) といい，D で表す.

2 次方程式の判別式と解の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の個数を調べるには判別式 $D=b^2-4ac$ の符号を調べればよい.

i) $D=b^2-4ac>0$ のとき，解は 2 つ存在する.

ii) $D=b^2-4ac=0$ のとき，解は 1 つ存在する.
このただ 1 つの解は**重解** (multiple solution) とよばれる.

iii) $D=b^2-4ac<0$ のとき，解は存在しない.

$D=0$ のとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b+\sqrt{0}}{2a}$，$\dfrac{-b-\sqrt{0}}{2a}$ であり，どちらも $x=-\dfrac{b}{2a}$ に等しくなり，解が重なってしまう．これが，重解の語源である[*4].

【例題 22】 2 次方程式 $x^2-(k-1)x+\dfrac{1}{4}k^2+k+1=0$ について，以下の問いに答えよ.

1. $k=2$ のとき，解はいくつあるか.
2. $k=-4$ のとき，解はいくつあるか.
3. 判別式 D を k の式で表せ.
4. 解が 2 個存在するための k の範囲を求めよ.

【解答】

1. $k=2$ のとき，2 次方程式は $x^2-x+4=0$ となる.
$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot4=-15<0$$
であるので，**解は存在しない**.
2. $k=-4$ のとき，2 次方程式は $x^2+5x+1=0$ となる.
$$D=5^2-4\cdot1\cdot1=21>0$$
であるので，**解は 2 つ存在する**.
3. x^2 の係数は 1，x の係数は $-(k-1)$，定数項は $\dfrac{1}{4}k^2+k+1$ であるので
$$\begin{aligned}D&=\{-(k-1)\}^2-4\cdot1\cdot\left(\frac{1}{4}k^2+k+1\right)\\&=k^2-2k+1-k^2-4k-4=\boldsymbol{-6k-3}\end{aligned}$$
◀ $\{-(k-1)\}^2=(k-1)^2$
4. $D=-6k-3>0$ を解いて $\boldsymbol{k<-\frac{1}{2}}$.

[*4] 厳密な数学の定義によれば，本来は**重根** (multiple root) とよぶべきである．しかし，高校数学においては「重解」という言葉が慣用的に用いられている．13th-note 数学 I も現状に従うこととする.

【練習 23：2 次方程式の解と因数分解】

以下の 2 次式を，実数の範囲で因数分解せよ．

(1) x^2+7x-4　(2) x^2-2x-5　(3) $2x^2-4x+1$

【解答】

(1) $x^2+7x-4=0$ を解けば，$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{65}}{2}$ となるので

$$x^2+7x-4=\boldsymbol{\left(x-\frac{-7+\sqrt{65}}{2}\right)\left(x-\frac{-7-\sqrt{65}}{2}\right)}$$

(2) $x^2-2x-5=0$ を解けば，$x=1\pm\sqrt{6}$ となるので

$$\begin{aligned}x^2-2x-5&=\left\{x-(1-\sqrt{6})\right\}\left\{x-(1+\sqrt{6})\right\}\\&=\boldsymbol{\left(x-1+\sqrt{6}\right)\left(x-1-\sqrt{6}\right)}\end{aligned}$$

(3) $2x^2-4x+1=0$ を解けば，$x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ となる．

$$\begin{aligned}2x^2-4x+1&=2\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right)\\&=\boldsymbol{2\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}\end{aligned}$$

◀ $2x^2-4x+1=0$ の解と $x^2-2x+\dfrac{1}{2}=0$ の解は一致する

【練習 24：2 次方程式の解の個数の判別】

2 次方程式 $x^2+(2a-1)x+a^2-2a+4=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 判別式 D を a の式で表せ．　(2) 解が存在しないための a の条件を求めよ．

【解答】

(1) x^2 の係数は 1，x の係数は $2a-1$，定数項は a^2-2a+4 であるので

$$\begin{aligned}D&=(2a-1)^2-4\cdot1\cdot(a^2-2a+4)\\&=4a^2-4a+1-4a^2+8a-16\\&=\boldsymbol{4a-15}\end{aligned}$$

(2) $D=4a-15<0$ を解いて $\boldsymbol{a<\dfrac{15}{4}}$.

G.　x の係数が偶数の場合

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において b が偶数の場合を考えよう．$b=2b'$ とおいて，$ax^2+2b'x+c=0$ に解の公式を用いると，次のようになる．

具体的な 2 次方程式	**一般の 2 次方程式**
$x^2+8x+3=0$	$ax^2+2b'x+c=0$
$x=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot3}}{2}$	$x=\dfrac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$
$=\dfrac{-8\pm\sqrt{64-12}}{2}$	$=\dfrac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$
$=\dfrac{-8\pm2\sqrt{13}}{2}$	$=\dfrac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$
$=-4\pm\sqrt{13}$　←2で約分	$=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$　←2で約分

こうして，必ず計算の最後に 2 で約分する必要があるとわかる．そのため，b が偶数の場合には，解の公式を別に用意して，この手間をはじめから回避することができる．

x の係数が偶数の場合の解の公式・判別式

$D\geqq0$ のとき，2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ である（$D<0$ のときは解なし）．また，解の個数は，$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ の符号を調べればよい．

$\dfrac{D}{4}$ による解の判別は慣れると大変使いやすい．一方，$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ は使いにくいと感じる人もいる．そのような人は，通常の解の公式で代用すればよい．

【例題 25】　2 次方程式 $x^2-6x+4=0$ を解け．

【解答】　x の係数が偶数の場合の解の公式より

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot4}}{1}=\mathbf{3\pm\sqrt{5}}$$

【例題 26】　**エ**，**ケ**には「ある」「ない」のいずれかを答えなさい．

1. $x^2+14x+4=0$ の判別式を D とする．$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ に，$b'=\boxed{ア}$，$a=1$，$c=\boxed{イ}$ を代入して，$\dfrac{D}{4}=\boxed{ウ}$ と分かる．よって，この 2 次方程式の解は$\boxed{エ}$．
2. $3x^2-16x+12=0$ の判別式を D とする．$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ に，$b'=\boxed{オ}$，$a=\boxed{カ}$，$c=\boxed{キ}$ を代入して，$\dfrac{D}{4}=\boxed{ク}$ と分かる．よって，この 2 次方程式は解を$\boxed{ケ}$．

【解答】

1. ア：**7**，イ：**4**，ウ：$\dfrac{D}{4}=7^2-1\cdot4=\mathbf{45}$，エ：ある
2. オ：**−8**，カ：**3**，キ：**12**，ク：$\dfrac{D}{4}=(-8)^2-3\cdot12=\mathbf{28}$，ケ：ある

◀ D を直接計算するには，14 の 2 乗を計算しないといけない．

【練習 27：2 次方程式の解の個数の判別（x の係数が偶数の場合）】

$3x^2-2(m+1)x+\frac{1}{3}m^2+m=0$ の解の個数は，定数 m の値によってどのように変わるか調べよ．

【解答】 $3x^2-2(m+1)x+\frac{1}{3}m^2+m=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-(m+1)\}^2-3\cdot\left(\frac{1}{3}m^2+m\right)$$
$$=m^2+2m+1-m^2-3m=-m+1$$

◀ x の係数が偶数の場合の判別式 (p.67)

i) $-m+1>0$，つまり $m<1$ のとき
$\frac{D}{4}>0$ となり，方程式の解は 2 つ存在する．

ii) $-m+1=0$，つまり $m=1$ のとき
$\frac{D}{4}=0$ となり，方程式の解は 1 つ存在する．

◀ つまり，重解をもつ．

iii) $-m+1<0$，つまり $m>1$ のとき
$\frac{D}{4}<0$ となり，方程式の解は存在しない．

以上 i)〜iii) より，解の個数は次のようになる．

$m<1$ のとき 2 個　$m=1$ のとき 1 個　$m>1$ のとき 0 個

【発展 28：2 次方程式を解く（係数に根号を含む場合）】

次の 2 次方程式を解け．

① $\sqrt{2}x^2-4x-\sqrt{2}=0$　② $2\left(2-\sqrt{3}\right)x^2+2\left(1-\sqrt{3}\right)x+1=0$

【解答】

① 方程式の両辺に $\sqrt{2}$ を掛けて整理すると

$$2x^2-4\sqrt{2}x-2=0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2-2\sqrt{2}x-1=0$$

◀ まず x^2 の係数は有理数にしておくとよい（解の分母を有理化しなくて済む）

x の係数が偶数の場合の解の公式より

$$x=\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2-1\cdot(-1)}=\boldsymbol{\sqrt{2}\pm\sqrt{3}}$$

② 方程式の両辺に $2+\sqrt{3}$ を掛けて整理すると

$$2(4-3)x^2+2\left(-1-\sqrt{3}\right)x+\left(2+\sqrt{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2x^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}=0$$

◀ まず x^2 の係数は有理数にしておくとよい（解の分母を有理化しなくて済む）．

x の係数が偶数の場合の解の公式より

$$x=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{\left\{-\left(1+\sqrt{3}\right)\right\}^2-2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2}$$
$$=\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}}}{2}=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$$

1.　関数とは

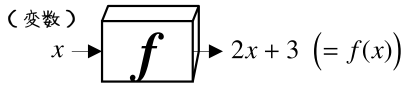
A.　関数とは何か

「実数 x を決めればただ 1 つの実数が決まる式」を（x の）**関数** (function) といい，$f(x)$，$g(x)$ のように表す[*5]．また，このときの x を**変数** (variable) という．

たとえば，3 m^3 の水が入っている水槽へ，毎分 2 m^3 の割合で水を入れることを考える．水を x 分間入れた後の，水槽の中の水の量は $2x+3$ (m^3) である．

つまり，「水槽の中の水の量 (m^3)」は x によって決まるので，それを $f(x)$ とおけば

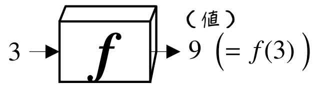
$$f(x) = 2x + 3 \qquad \cdots\cdots ①$$



時間 (x) から水の量を決める規則

と書くことができる．①の変数 x に，$x = 3$ を代入すれば

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$$



$x = 3$ を $f(x)$ に代入して 9 を得る

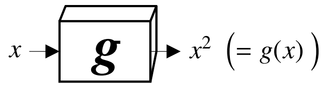
となって，3 秒後の水の量は 9 m^3 と分かる．

ここで，$f(3)$ は関数 $f(x)$ に $x = 3$ を代入して得られる**値** (value) と言う．

次のページで学ぶように，中学で学んだ関数の定義は，高校における関数の特別な場合になる．

【例題 29】　1 辺 x cm の正方形において「（x によって決まる）正方形の面積(cm^2)」を $g(x)$ とすれば

$$g(x) = x^2$$



正方形の 1 辺の長さ (x) から面積を決める規則

となる．この $g(x)$ について $g(4)$ を求めなさい．
また，その値は，どんな図形の面積を計算した結果になるか．

【解答】　$g(4) = 4^2 = \mathbf{16}$，**1 辺が 4 cm の正方形の面積 (cm^2)** を表している．

【例題 30】　ある関数 $h(x)$ が $h(x) = 2x^2 - 3x + 3$ で表されるとき，$h(1)$, $h(-2)$ の値を求めよ．

【解答】　$2x^2 - 3x + 3$ に $x = 1$, $x = -2$ を代入すればよい．

$h(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = \mathbf{2}$

$h(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 3 = \mathbf{17}$

[*5] $p(x)$，$a(x)$ などでもよいが，関数 (function) の頭文字である f からアルファベット順に，g，h などであることが多い．また，大文字の F，G なども使われる．

【練習 31：関数を表す】

次の関数を求めよ．また，それぞれ，変数を表す文字を答えよ．

(1) 縦が 4，横が x の長方形の面積 $a(x)$

(2) 6 m^3 の水が入っている水槽へ，毎分 3 m^3 の割合で水を入れたときの，w 分後の水の量 $b(w)\text{ m}^3$

【解答】

(1) $\boldsymbol{a(x) = 4x}$，変数は x　　(2) $\boldsymbol{b(w) = 3w + 6}$，変数は w

【練習 32：関数の値】

$f(x) = 2x + 3,\ g(x) = x^2,\ h(x) = 2x^2 - 3x + 3$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(2),\ f(5),\ g(2),\ g(5)$ を求めよ，また，「$x = 2t$ のときの $f(x)$ の値」である $f(2t)$ を t の式で表せ．

(2) $h(a),\ h(2t)$ の値を求めよ（$a,\ t$ を用いてよい）．

【解答】

(1) $f(2) = 2\cdot 2 + 3 = \boldsymbol{7}$,　$f(5) = 2\cdot 5 + 3 = \boldsymbol{13}$

$g(2) = 2^2 = \boldsymbol{4}$,　$g(5) = 5^2 = \boldsymbol{25}$　$f(2t) = 2\cdot(2t) + 3 = \boldsymbol{4t + 3}$

◂たとえば，$t = 1$ のときは $f(2)$ の値になる．

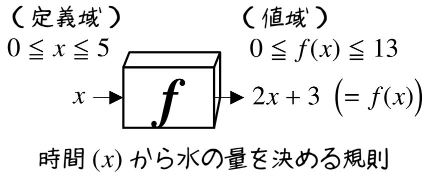
(2) $h(\boxed{a}) = 2\cdot \boxed{a}^2 - 3\cdot\boxed{a} + 3 = \boldsymbol{2a^2 - 3a + 3}$

$h(\boxed{2t}) = 2\cdot(\boxed{2t})^2 - 3\cdot\boxed{2t} + 3 = \boldsymbol{8t^2 - 6t + 3}$

B. 関数の定義域・値域・最大値・最小値

中学で学んだ関数と同じように，定義域，値域，最大値，最小値を考えることができる．

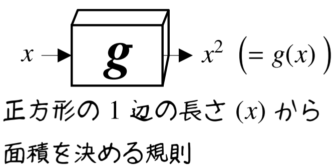
たとえば，p.69 の関数 $f(x)$ の例において，水槽の容積が 13m^3 であったならば，$f(x) = 2x + 3$ の**定義域**（ていぎいき） (domain) は $0 \leqq x \leqq 5$ である．というのも，$5 < x$ では水槽から水があふれてしまうし，$x < 0$ は意味では意味をもたない．



また，$f(x)$ の**値域**（ちいき） (range) は $0 \leqq f(x) \leqq 13$，**最小値** (minimum value) は $f(0) = 0$，**最大値** (maximum value) は $f(5) = 13$ である．

【例題 33】 1 辺 x cm の正方形において，「(x によって決まる) 正方形の面積 (cm^2)」を表す関数 $g(x) = x^2$ について，以下の問いに答えよ．

1. $x = 2$ は定義域に含まれるか．$x = -1,\ x = 0$ はどうか．
2. 定義域を $1 \leqq x < 5$ としたとき，$g(x)$ の値域を求めよ．最小値・最大値があれば求めよ．



【解答】

1. $\boldsymbol{x = 2}$ **は定義域に含まれる**．1 辺 (-1) cm の正方形や，1 辺 0 cm の正方形は存在しないので，$\boldsymbol{x = -1,\ 0}$ **は定義域に含まれない**．
2. 値域は $\boldsymbol{1 \leqq g(x) < 25}$，最小値は $\boldsymbol{g(1) = 1}$，**最大値は存在しない**．

◂$x = 5$ は定義域に含まれないので，$g(x) = 25$ になることはない．

C. y を与える x の関数 — $y = f(x)$

中学において「関数」と呼んでいた $y = 2x+3$ のような式も，「y を与える x の関数」として，単に関数とよぶことができる．このような「y を与える x の関数」は，一般的に $y = f(x)$ などと表される*6.

もう少し概念を広げれば，関数とは「変数を決めると，ただ 1 つの実数値が決まる規則」のことである．何かを入力すれば，何か実数値を出力するもの，それを「関数」とみなしてよい．

D. 文字定数

関数を表す式において，変数でない数値・文字を**定数** (constant) という．特に，変数でない文字を文字定数ということもある．

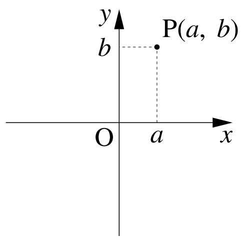
【例題 34】 関数 $f(x) = ax^3 + x^2 + bx + 2$ について，以下の問いに答えよ．

1. $f(x)$ に含まれる文字定数をすべて答えよ．
2. $a \fallingdotseq 0$ のとき，$f(x)$ は何次式か．
3. $a = 0$ のとき，$f(x)$ は何次式か．
4. $a = b = 0$ であるとき，$f(x)$ は何次式か．

【解答】

1. $\boldsymbol{a}$**,** $\boldsymbol{b}$　2. **3 次式**　3. $f(x) = x^2 + bx + 2$ となるので，**2 次式**
4. $f(x) = x^2 + 2$ となるので，**2 次式**

2. グラフによる関数の図示

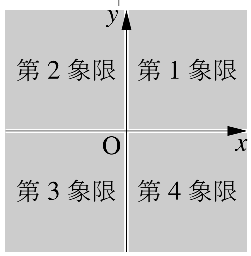


A. 座標平面

関数を図示するには，中学までと同じように，**座標平面** (coordinate plane) を用いる．これは，平面に 2 本の直交する数直線（**座標軸** (coordinate axes) という）で定められた平面である*7.

座標平面は，座標軸によって次の 4 つの部分に分けられ，時計回りに

$x > 0$，$y > 0$ の部分：**第 1 象限**（しょうげん） (first quadrant)
$x < 0$，$y > 0$ の部分：**第 2 象限** (second quadrant)
$x < 0$，$y < 0$ の部分：**第 3 象限** (third quadrant)
$x > 0$，$y < 0$ の部分：**第 4 象限** (fourth quadrant)



とよばれる．ただし，座標軸はどの象限にも含めない．

【例題 35】 $(-2,\ 2)$ は第 $\boxed{ア}$ 象限，$(1, -2)$ は第 $\boxed{イ}$ 象限，$(-2, -3)$ は第 $\boxed{ウ}$ 象限である．

【解答】 ア: **2**，イ: **4**，ウ: **3**

*6 2 つ以上の変数をもつ関数については，数学 II で詳しく学ぶ．
*7 右の図の場合は，特に xy（座標）平面といい，横の座標軸を x 軸，縦の座標軸を y 軸という．この x, y は他の文字でもよい．

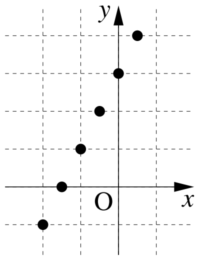
B. 関数のグラフ

「変数の値」と「関数の値」の対応は，中学校で学んだやり方で，座標平面上に表すことができる．たとえば，関数 $f(x) = 2x + 3$ について考えよう．

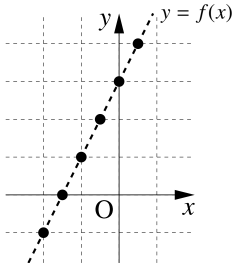
まず，$f(-2) = -1$，$f(-1) = 0$ などの値を計算して，左下のような表ができる．

x	$\cdots$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$

$\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$



それぞれを座標平面上に点でとっていくと，変数 x の値は無数にあるので最終的に直線となる．この直線を関数 $y = f(x)$ の**グラフ** (graph) という．

一般には，関数 $f(x)$ について，$(x,\ f(x))$ を座標とする点全体の作る座標平面上の図形を「関数 $y = f(x)$ の**グラフ** (graph)」という．

【例題 36】 以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．ただし，$f(x) = 2x + 3$ とする．

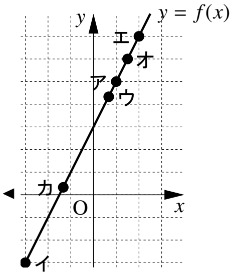
1. 点 A$(1, \boxed{ア})$，B$(-3, \boxed{イ})$，C$\left(\dfrac{2}{3}, \boxed{ウ}\right)$ は $y = f(x)$ のグラフ上にある．
2. 点 D$(\boxed{エ}, 7)$，E$(\boxed{オ}, 6)$，F$\left(\boxed{カ}, \dfrac{1}{3}\right)$ は $y = f(x)$ のグラフ上にある．
3. 1. と 2. で求めた点のうち，第 2 象限にある点を答えよ．

【解答】

1. **ア**: 変数 $x = 1$ のときの $f(x)$ の値，$f(1) = \mathbf{5}$.
   イ: $f(-3) = \mathbf{-3}$.　　**ウ**: $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \mathbf{\dfrac{13}{3}}$.
2. **エ**: 値 $f(x)$ が 7 になるときの x の値なので，
   $f(x) = 2x + 3 = 7$ を解いて，$x = \mathbf{2}$.
   オ: $f(x) = 2x + 3 = 6$ を解いて，$x = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$.
   カ: $f(x) = 2x + 3 = \dfrac{1}{3}$ を解いて，$x = \mathbf{-\dfrac{4}{3}}$.
3. $\mathbf{F\left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)}$

◀ $f(1) = 2 \cdot 1 + 3$

◀ $f(-3) = 2 \cdot (-3) + 3$

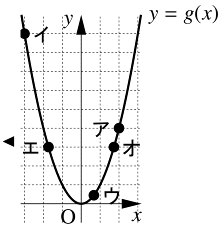


【例題 37】 以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．ただし，$g(x) = x^2$ とする．

1. 点 $(2, \boxed{ア})$，$(-3, \boxed{イ})$，$\left(\dfrac{2}{3}, \boxed{ウ}\right)$ は，$y = g(x)$ のグラフ上にある．
2. $y = g(x)$ のグラフ上にある y 座標が 3 の点は，$(\boxed{エ}, 3)$，$(\boxed{オ}, 3)$ である．

【解答】

1. **ア**: $g(1) = \mathbf{4}$，**イ**: $g(-3) = \mathbf{9}$，**ウ**: $g\left(\dfrac{2}{3}\right) = \mathbf{\dfrac{4}{9}}$.
2. **エ, オ**: 値 $g(x)$ が 3 になるときの x の値なので，
   $g(x) = x^2 = 3$ を解いて，$x = \mathbf{-\sqrt{3}}$，$\mathbf{\sqrt{3}}$.

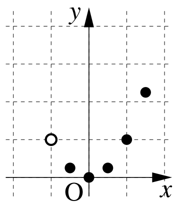


C. グラフと最大値・最小値

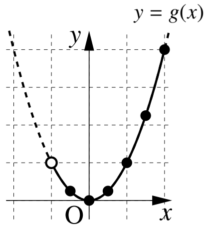
関数 $g(x) = x^2$ を定義域 $-1 < x \leqq 2$ において考えると，一番右のようなグラフ $y = g(x)$ $(-1 < x \leqq 2)$ を得る．

x	(-1)	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	(1)	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

$\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$



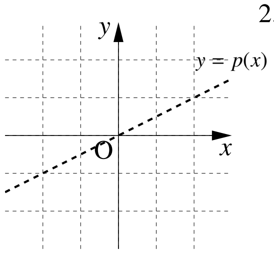
つまり，放物線の一部がグラフとなる．定義域から外れた部分は，右図のように点線で書く．$x = -1$ のように定義域の境目にあるが，定義域に含まれない点は，白丸で表す．

$x = -1$ は定義域に含まれないが，$x = -0.9, -0.99, -0.999, \cdots$ はすべて定義域に含まれるので，グラフは必ず白丸とつなぐ．

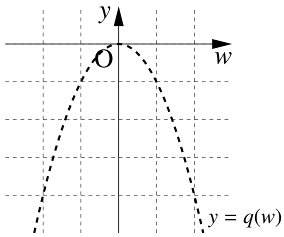
グラフの実数部分のうち，y 座標が一番小さい点は $(0, 0)$ であり，y 座標が一番大きい点は $(2, 4)$ である．ここから，関数 $g(x)$ の最小値が $g(0) = 0$ であり，最大値が $g(2) = 4$ であると分かる．

【例題 38】 関数 $p(x) = \frac{1}{2}x$, $q(w) = -w^2$ について，以下の問いに答えよ．

1. 右のグラフに関数 $y = p(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$ を書き込み，最大値・最小値があれば答えなさい．

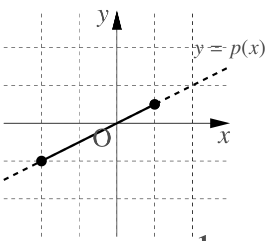


2. 右のグラフに関数 $y = q(w)$ $(-2 < w \leqq 1)$ を書き込み，最大値・最小値があれば答えなさい．



【解答】

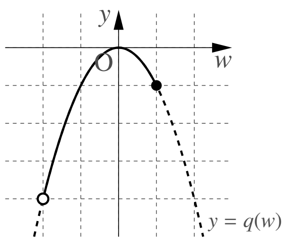
1.



最大値は $p(1) = \frac{1}{2}$

最小値は $p(-2) = -1$

2.



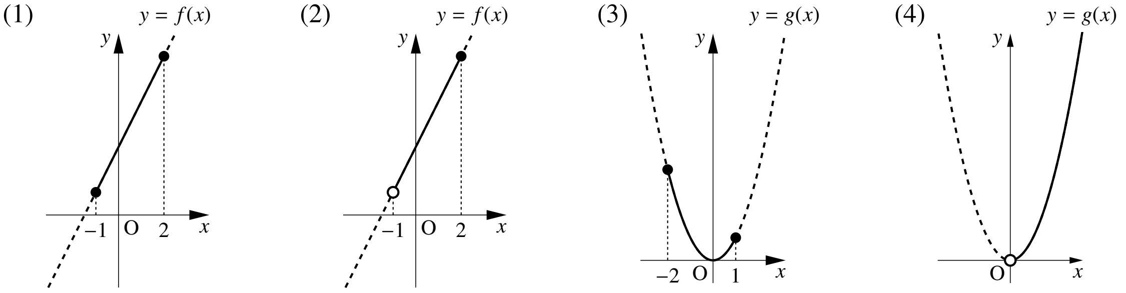
最大値は $q(0) = 0$

最小値はない

◀ $w = -2$ になることは無いので，$q(-2)$ は最小値ではない．

【練習 39：定義域，最大値，最小値，値域】

$f(x) = 2x + 3$，$g(x) = x^2$ とする．以下のグラフについて，それぞれ，定義域，最大値，最小値，値域を答えよ．最大値・最小値がない場合は「なし」でよい．



【解答】

(1) **定義域は $-1 \leqq x \leqq 2$**，
最大値は $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = \mathbf{7}$，
最小値は $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = \mathbf{1}$，
値域は $1 \leqq f(x) \leqq 7$．

◀ $1 \leqq y \leqq 7$ でもよい．

(2) **定義域は $-1 < x \leqq 2$**，
最大値は $f(2) = \mathbf{7}$，**最小値はなし**，
値域は $1 < f(x) \leqq 7$．

◀ $f(x)$ は，1.1，1.01，1.001，$\cdots$ を取ることができるが，1 になることはない．

(3) **定義域は $-2 \leqq x \leqq 1$**，
最大値は $g(-2) = (-2)^2 = \mathbf{4}$，最小値は $g(0) = \mathbf{0}$，
値域は $0 \leqq g(x) \leqq 4$．

(4) **定義域は $0 < x$，最大値も最小値もなし**，
値域は $0 < g(x)$．

◀ $g(x)$ はどんな大きい値も取れるので，最大値はない．$g(x)$ は，0.1，0.01，0.001，$\cdots$ を取ることができるが，0 になることはない．

3. 方程式・不等式の解と関数のグラフ

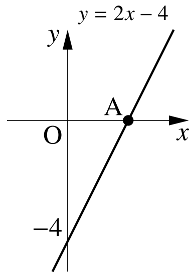
A. 1 次方程式の解・1 次関数のグラフ

たとえば，1 次関数 $y = 2x + 1$ が $y = 0$ となるときの x の値は 1 次方程式 $2x + 1 = 0$ を解けばよい．

このように，1 次関数の $y = 0$ となるときの値を求めるときに，1 次方程式を解く必要があり，その逆も成り立つ．

【暗記 40：1 次方程式と 1 次関数】

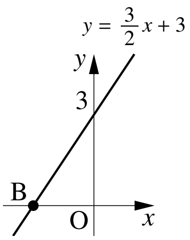
以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．



1. 1 次関数 $y = 2x - 4$ のグラフ上のうち y 座標が $\boxed{\text{ア}}$ になる点 A を求めるには，1 次方程式

   $\boxed{\text{イ}} = 0$

   を解けばよい．その結果，A($\boxed{\text{ウ}}$, 0) と分かる．



2. 1 次関数 $y = \dfrac{3}{2}x + 3$ と $\boxed{\text{エ}}$ 軸の交点 B を求めるには

   $\dfrac{3}{2}x + 3 = 0$

   という 1 次方程式の解を求めればよい．その結果，B($\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$) と分かる．

3. 次のいずれの場合も，1 次方程式 $3x - 9 = 0$ を解けばよい．
   - 関数 $\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ 軸の交点を求める．
   - 関数 $\boxed{\text{キ}}$ の y 座標が $\boxed{\text{ケ}}$ になるときの x 座標を求める．

【解答】

1. ア: 0，イ: $\mathbf{2x - 4}$，ウ: **2**
2. エ: x，（オ, カ) = (**−2, 0**)
3. キ: $\boldsymbol{y = 3x - 9}$，ク: x，ケ: 0

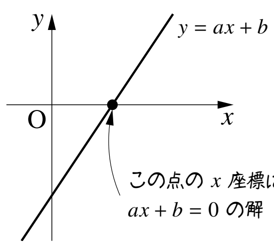
以上のことは，次のようにまとめられる．

1 次関数のグラフと 1 次方程式の解

$ax + b$ という 1 次式に対して

- $ax + b = 0$ を解く
- $y = ax + b$ のグラフと x 軸の交点（の x 座標）を求める
- $y = ax + b$ のグラフ上の y 座標が 0 になる点（の x 座標）を求める

はいずれも同じである．



B. 連立方程式の解・1 次関数のグラフ

【暗記 41：連立方程式と 1 次関数】

以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．

1. 2 つの 1 次関数 $y = 2x + 1$ と $y = -3x + 3$ の交点 A の座標は

 連立方程式 $\boxed{ア}$

 を解いて求めることができ，A($\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$) である．

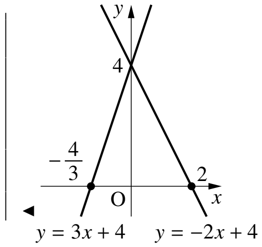
2. 連立方程式 $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ -2x + 4 = y \end{cases}$ の解は，2 つの 1 次関数 $\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$ の交点に一致し，$(x,\ y) = (\boxed{カ}, \boxed{キ})$

 である．

【解答】

1. ア: $\begin{cases} \boldsymbol{y = 2x + 1} \\ \boldsymbol{y = -3x + 3} \end{cases}$ ，(イ，ウ)：$\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{5}},\ \boldsymbol{\dfrac{9}{5}}\right)$

2. エ: $\boldsymbol{y = 3x + 4}$,　オ: $\boldsymbol{y = -2x + 4}$,
 (カ, キ) = $(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{4})$



2 つの 1 次関数のグラフの共有点と連立方程式

2 つの 1 次関数

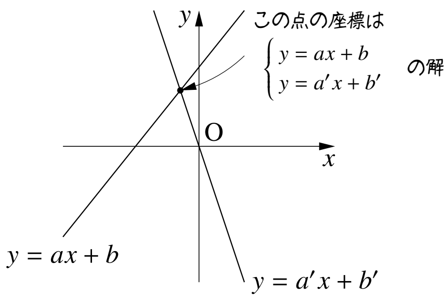
$y = ax + b$

$y = a'x + b'$

のグラフの共有点の (x 座標, y 座標) は，連立方程式

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

の解 $(x,\ y)$ に一致する．



1 次方程式 $ax + b = 0$ は，連立方程式 $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax + b \end{cases}$ の解に一致する．このことから，『1 次方程式の解・1 次関数のグラフ』の内容は，『連立方程式の解・1 次関数のグラフ』の特別な場合と考えることもできる．

C. 1 次不等式と 1 次関数の関係

【暗記 42：1 次不等式と 1 次関数】

$\boxed{}$ に適当な数値・文字を答えよ．$\boxed{ウ}$, $\boxed{ク}$ には $<$, $\leqq$, $>$, $\geqq$ の中から答えよ．

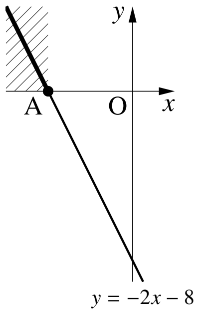
1. 右の直線 $y=-2x-8$ について，A の座標は

   1 次方程式 $\boxed{ア} = 0$

   を解いて，A($\boxed{イ}$, 0) と求められる．
   また，グラフの太線部分である $y \boxed{ウ} 0$ の範囲は

   1 次不等式 $\boxed{エ}$

   を解いて $\boxed{オ}$ と求められ，これは右上のグラフとも一致する．



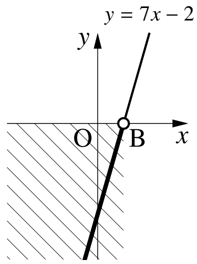
2. 右の直線 $y=7x-2$ について，B の座標は

   1 次方程式 $\boxed{カ} = 0$

   を解いて，B($\boxed{キ}$, 0) である．
   また，グラフの太線部分である $y \boxed{ク} 0$ の範囲は

   1 次不等式 $\boxed{ケ}$

   を解いて $\boxed{コ}$ と求められ，これは右上のグラフとも一致する．

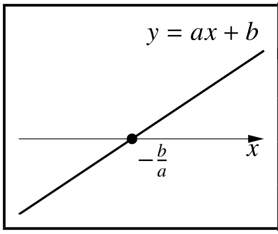


【解答】

1. ア: $\boldsymbol{-2x-8}$，イ: $\boldsymbol{-4}$，ウ: $\boldsymbol{\geqq}$,
   エ: $y \geqq 0$ に $y=-2x-8$ を代入して，$\boldsymbol{-2x-8 \geqq 0}$
   オ: $-2x-8 \geqq 0 \iff -2x \geqq 8 \iff \boldsymbol{x \leqq -4}$
2. カ: $\boldsymbol{7x-2}$，キ: $\boldsymbol{\dfrac{2}{7}}$，ク: $\boldsymbol{<}$,
   ケ: $y<0$ に $y=7x-2$ を代入して，$\boldsymbol{7x-2<0}$
   コ: $7x-2<0 \iff 7x<2 \iff \boldsymbol{x < \dfrac{2}{7}}$

1 次不等式の解

$a>0$ の場合の，1 次不等式と 1 次関数の解の関係はつぎのようにまとめることができる．



$ax+b=0$ の解	$x=-\frac{b}{a}$
$ax+b>0$ の解	$\boldsymbol{x > -\frac{b}{a}}$
$ax+b \geqq 0$ の解	$\boldsymbol{x \geqq -\frac{b}{a}}$
$ax+b<0$ の解	$\boldsymbol{x < -\frac{b}{a}}$
$ax+b \leqq 0$ の解	$\boldsymbol{x \leqq -\frac{b}{a}}$

上の表は覚えなくてよい．1 次不等式と 1 次関数の対応を確認できればよい．

4. 絶対値を含む 1 次関数・方程式・不等式

A. 絶対値と方程式・不等式の関係

『絶対値』（第 1 章）でも学んだように，実数 x の絶対値 $|x|$ は，数直線上での原点と実数 x に対応する点との距離を表すので，次のことがいえる．

絶対値と方程式・不等式の関係

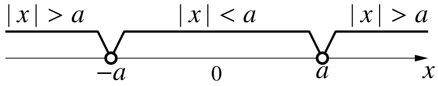
絶対値を含む x の方程式，不等式に関して

$|x| = a \iff x = \pm a$

$|x| < a \iff -a < x < a$

$|x| > a \iff x < -a$ または $a < x$

ただし，$a > 0$ とする[*8]．



【練習 43：絶対値を含む 1 次方程式・1 次不等式】

次の方程式・不等式を解け．

(1) $|x - 1| = 3$　(2) $|3x - 2| = 6$　(3) $|x + 1| > 4$　(4) $|5x - 2| \leqq 4$

【解答】

(1)（右辺）$= 3 > 0$ なので，$x - 1 = \pm 3$ より，$\boldsymbol{x = -2,\ 4}$

◀ $x - 1 = -3$ のときは $x = -2$
$x - 1 = 3$ のときは $x = 4$

(2)（右辺）$= 6 > 0$ なので，$3x - 2 = \pm 6$ より

$$3x - 2 = \pm 6$$

$$\iff 3x = -4,\ 8 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x = -\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}}$$

(3)（右辺）$= 4 > 0$ なので

$$x + 1 < -4 \text{ または } 4 < x + 1$$

$$\iff \boldsymbol{x < -5 \text{ または } 3 < x}$$

(4)（右辺）$= 4 > 0$ なので，$-4 \leqq 5x - 2 \leqq 4$ より

$$-4 \leqq 5x - 2 \leqq 4$$

$$\iff -2 \leqq 5x \leqq 6$$

$$\iff \boldsymbol{-\frac{2}{5} \leqq x \leqq \frac{6}{5}}$$

◀ 各辺に 2 を足した．
『不等式の性質 i)』(p.53) を利用．

◀ 各辺を 5 で割った．
『不等式の性質 ii)』(p.53) を利用．

[*8] 実数の絶対値は 0 以上の値なので，$a = 0$ や $a < 0$ の場合を考える必要性は低い．たとえば，不等式 $|x| < -2$ の解は「解なし」，不等式 $|x| > 0$ の解は「0 以外のすべての実数」である．

B. 場合に分けて絶対値を外す

前ページの関係が使えない場合は，場合に分けて絶対値を外す必要がある．

たとえば，関数 $y = x + |2x - 4|$ のグラフは，次のように場合に分けて描く．

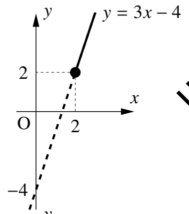
$y = x + |2x - 4|$ の絶対値を場合に分けて外す

$\Nearrow$

$2 \leqq x$ のとき，
$|2x - 4| = 2x - 4$ であるので

$$\begin{aligned} y &= x + |2x - 4| \\ &= x + (2x - 4) = 3x - 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

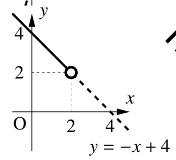


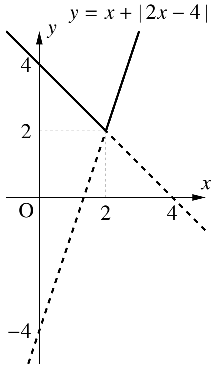
$\Searrow$

$x < 2$ のとき，
$|2x - 4| = -(2x-4)$ であるので

$$\begin{aligned} y &= x + |2x - 4| \\ &= x - (2x - 4) = -x + 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$





【練習 44：絶対値を含む 1 次関数】

次の式で与えられた関数のグラフを描け．

(1) $y = 2x + |x - 1|$ (2) $y = |x - 4|$

【解答】

(1) $x - 1$ が正か負かで，場合に分けてグラフを考える．

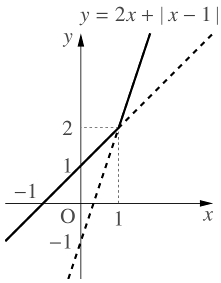
i) $x - 1 \geqq 0$，つまり $1 \leqq x$ のとき

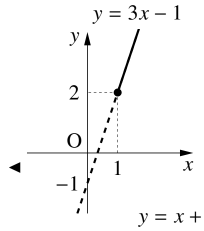
$$\begin{aligned} y &= 2x + (x - 1) \\ &= 3x - 1 \end{aligned}$$

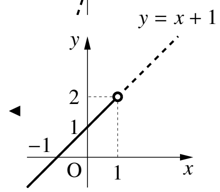
ii) $x - 1 < 0$，つまり $x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 2x - (x - 1) \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

以上 i)，ii) より，グラフは右図のようになる．







◀ $1 \leqq x$ の範囲でのグラフと，$x < 1$ の範囲でのグラフをつないだ．

(2) $x - 4$ が正か負かで，場合に分けてグラフを考える．

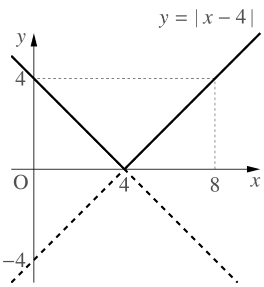
i) $x - 4 \geqq 0$，つまり $4 \leqq x$ のとき

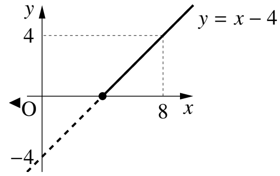
$$y = x - 4$$

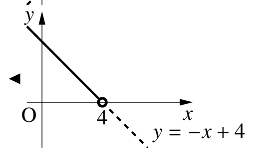
ii) $x - 4 < 0$，つまり $x < 4$ のとき

$$\begin{aligned} y &= -(x - 4) \\ &= -x + 4 \end{aligned}$$

以上 i)，ii) より，グラフは右図のようになる．







◀ $4 \leqq x$ の範囲でのグラフと，$x < 4$ の範囲でのグラフをつないだ．

(2) のグラフは，直線 $y = x - 4$ のうち $y < 0$ の部分を，$y > 0$ になるよう x 軸に対して対称移動したグラフになっている．

【発展 45：絶対値を含む 1 次方程式】

次の方程式を解け．

① $|x+1|=2x$　　② $|3x-4|=x+8$　　③ $|2x-2|=x-4$

【解答】

① i) $x+1 \geqq 0$，つまり $-1 \leqq x$ ……… ① のとき

$x+1=2x \qquad \therefore\ x=1$

これは，①に適している．

ii) $x+1<0$，つまり $x<-1$ ……… ② のとき

$-x-1=2x$

$\Leftrightarrow\ 3x=-1 \qquad \therefore\ x=-\dfrac{1}{3}$

これは，②に適さない．

i) または ii) を満たすものが解となり，$\boldsymbol{x=1}$

◀ $x+1$ が正のとき，負のときで場合に分けて考える．

② i) $3x-4 \geqq 0$，つまり $\dfrac{4}{3} \leqq x$ ……… ③ のとき

$3x-4=x+8$

$\Leftrightarrow\ 2x=12 \qquad \therefore\ x=6$

これは，③に適している．

ii) $3x-4<0$，つまり $x<\dfrac{4}{3}$ ……… ④ のとき

$-3x+4=x+8$

$\Leftrightarrow\ 4x=-4 \qquad \therefore\ x=-1$

これは，④に適している．

i) または ii) を満たすものが解となり，$\boldsymbol{x=-1,\ 6}$

◀ $3x-4$ が正のとき，負のときで場合に分けて考える．

③ i) $2x-2 \geqq 0$，つまり $1 \leqq x$ ……… ⑤ のとき

$2x-2=x-4 \qquad \therefore\ x=-2$

これは，⑤に適さない．

ii) $2x-2<0$，つまり $x<1$ ……… ⑥ のとき

$-2x+2=x-4$

$\Leftrightarrow\ -3x=-6 \qquad \therefore\ x=2$

これは，⑥に適さない．

i), ii) のどちらにも満たす解がないので，答えは**解なし**．

◀ $2x-2$ が正のとき，負のときで場合に分けて考える．

◀ 実際，$y=|2x-2|$，$y=x-4$ のグラフを両方書いてみると，交点をもたない．

【発展 46：絶対値を含む 1 次不等式】

次の不等式を解け．

① $|x+6| > 3x$　　　② $|2x-1| \leqq x+2$

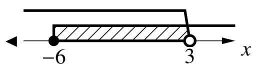
【解答】

① i) $x+6 \geqq 0$，つまり $-6 \leqq x$ ……… ① のとき

$$x+6 > 3x$$

$$\Leftrightarrow\ 2x < 6 \qquad \therefore\ x < 3$$

これと，①を合わせて，$-6 \leqq x < 3$

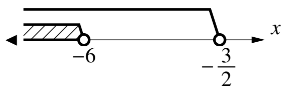


ii) $x+6 < 0$，つまり $x < -6$ ……… ② のとき

$$-x-6 > 3x$$

$$\Leftrightarrow\ 4x < -6 \qquad \therefore\ x < -\frac{3}{2}$$

これと，②を合わせて，$x < -6$

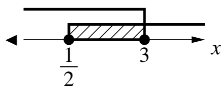


i) または ii) を満たすものが解となり，$\boldsymbol{x < 3}$

② i) $2x-1 \geqq 0$，つまり $\frac{1}{2} \leqq x$ ……… ③ のとき

$$2x-1 \leqq x+2 \qquad \therefore\ x \leqq 3$$

これと，③を合わせて，$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3$

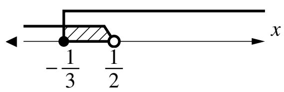


ii) $2x-1 < 0$，つまり $x < \frac{1}{2}$ ……… ④ のとき

$$-2x+1 \leqq x+2$$

$$\Leftrightarrow\ -1 \leqq 3x \qquad \therefore\ -\frac{1}{3} \leqq x$$

これと，④を合わせて，$-\frac{1}{3} \leqq x < \frac{1}{2}$



i) または ii) を満たすものが解となり，$\boldsymbol{-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 3}$

2.4　2次関数とそのグラフ

2 次関数のグラフは，「頂点」「軸（に対する対称性）」という大きな特徴を持ち，2 次方程式，2 次不等式を解くときの重要な道具ともなる．

1.　2次関数のグラフ

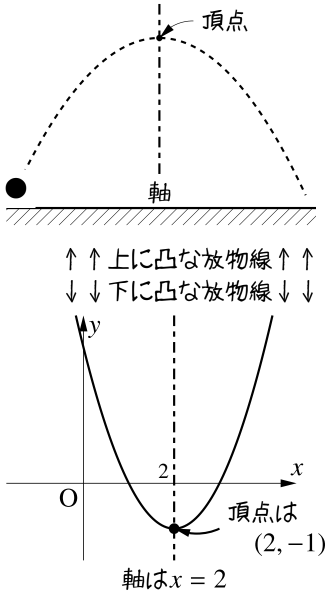
A.　2 次関数の定義

関数 $f(x)$ が x の 2 次式で表されるとき，つまり，$a\ (\fallingdotseq 0)$，b，c を定数として

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

の形で表されるとき，$f(x)$ は x の **2 次関数** (quadratic function) であるという．

2 次関数の値を y とおいた式 $y = ax^2 + bx + c$ も，(y を与える）x の 2 次関数という．



B.　2 次関数のグラフの基本

後で見るように，2 次関数のグラフは必ず**放物線**(ほうぶつせん) (parabola) になる[*9]．

放物線は必ず対称軸をもつ．この対称軸のことを単に**軸** (axis) といい，この軸と放物線の交点のことを**頂点** (vertex) という．

また，放物線の頂点が上にあれば「上に凸(とつ) (convex)」な放物線といい，頂点が下にあれば「下に凸」な放物線という．

C.　直線 $x = a$

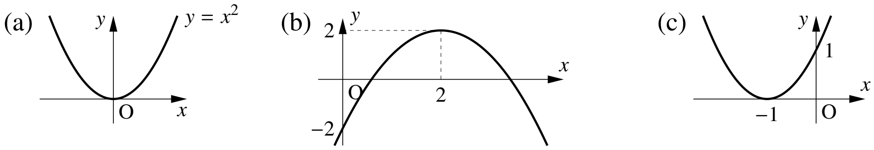
右の放物線の軸は，図中の直線 - - -　である．この直線は

「x 座標が 2 である点を全て集めてできる直線」

に一致するので，「直線 $x = 2$」とよばれる．

数学 I で学ぶ放物線の軸は，必ず「直線 $x = a$」の形をしている．

【例題 47】 3 つの放物線 (a)-(c) について，以下の問いに答えよ．



1. 上に凸なグラフ，下に凸なグラフをそれぞれすべて選びなさい．
2. 頂点の座標，軸の方程式をそれぞれ答えなさい．

【解答】

1. **上に凸なグラフは (b)，下に凸なグラフは (a), (c).**

[*9] 放物線とは，空中に物を放り投げたときにできる軌跡(きせき)（物の通った跡）のことである．野球のホームランの打球や，サッカーのゴールキック，バレーボールのトスなど，ボールはいずれも放物線を描く．そのため，物理において投げられた物体の通り道について学ぶとき，2 次関数が用いられる．

2. (a) 頂点は $(0,\ 0)$，軸は直線 $x = 0$　(b) 頂点は $(2,\ 2)$，軸は直線 $x = 2$.
(c) 頂点は $(-1,\ 0)$，軸は直線 $x = -1$.

この確認問題の (a) のグラフを「放物線 $y = x^2$」と言うことがある．
このように「2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ」のことを「放物線 $y = ax^2 + bx + c$」と言うこともある．このときの $y = ax^2 + bx + c$ は，**放物線の方程式** (equation of parabola) といわれる．

【例題 48】 y 軸上の点は，x 座標が $\boxed{\text{ア}}$ となるので，y 軸は「直線 $\boxed{\text{イ}}$」とも言われる．

【解答】 ア : **0**，イ : $x = 0$

D. $y = ax^2$ のグラフ

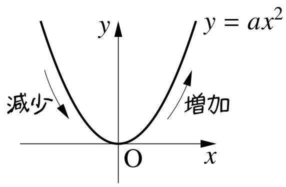
2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において $b = c = 0$ の場合，つまり $y = ax^2$ のグラフは，中学校で学んだように次のような特徴がある．

$y = ax^2$ のグラフの特徴

I) 軸は直線 $x = 0$（y 軸），頂点は原点 $(0,\ 0)$ の放物線になる．

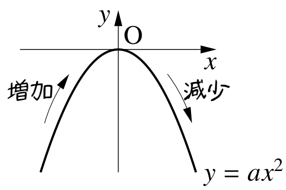
II) i) **$a > 0$ のとき**

- $y \geqq 0$ の範囲にある．
- 放物線は「下に凸」である．
- x の増加に対し $\begin{cases} x < 0 \text{ では } y \text{ は減少する} \\ x > 0 \text{ では } y \text{ は増加する} \end{cases}$



ii) **$a < 0$ のとき**

- $y \leqq 0$ の範囲にある．
- 放物線は「上に凸」である．
- x の増加に対し $\begin{cases} x < 0 \text{ では } y \text{ は増加する} \\ x > 0 \text{ では } y \text{ は減少する} \end{cases}$



【例題 49】 3 つの放物線 (a)-(c) について，以下の問いに答えよ．

(a) 放物線 $y = x^2$　(b) 放物線 $y = -3x^2$　(c) 放物線 $y = 2x^2$

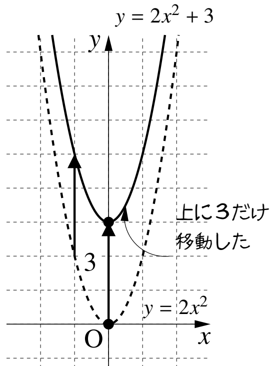
1. 上に凸なグラフ，下に凸なグラフをそれぞれすべて選びなさい．
2. $x > 0$ で y が増加するグラフをすべて求めなさい．
3. それぞれ，グラフ上における x 座標が 1 である点の座標を答えなさい．

【解答】

1. **上に凸なグラフは (b)，下に凸なグラフは (a), (c)**.　2. **(a), (c)**
3. (a) $y = x^2$ に $x = 1$ を代入して $y = 1$ を得るので $\mathbf{(1,\ 1)}$.
(b) $y = -3x^2$ に $x = 1$ を代入して $y = -3$ を得るので $\mathbf{(1, -3)}$.
(c) $y = 2x^2$ に $x = 1$ を代入して $y = 2$ を得るので $\mathbf{(1,\ 2)}$.

◀ $x > 0$ で y が増加するグラフは，下に凸である．

E. $y = ax^2 + c$ のグラフ



例として，次の 2 つの 2 次関数の関係を考えてみよう．

$y = 2x^2$ ， $y = 2x^2 + 3$

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	18	8	2	0	2	8	18	$\cdots$
$2x^2 + 3$	$\cdots$	21	11	5	3	5	11	21	$\cdots$

3 を足す

上の表から，$y = 2x^2 + 3$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを y 軸方向に +3 平行移動した放物線とわかる[*10]．

この平行移動によって，放物線の軸が y 軸から変わることはない．しかし，頂点は移動し，原点より y 軸方向に 3 大きい点 (0, 3) であることがわかる．

【例題 50】 $\boxed{}$ に適当な数・式を答え，放物線 $\boxed{ウ}$，$\boxed{キ}$，$y = 2x^2 - 4$ のグラフを書け．

1. 頂点 (0, 0) の放物線 $y = -x^2$
   $\Downarrow$ y 軸方向に +3 平行移動
   頂点 ($\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$) の放物線 $\boxed{ウ}$
   これは $\left(1, \boxed{エ}\right)$ を通る

2. 頂点 (0, 0) の放物線 $y = 3x^2$
   $\Downarrow$ y 軸方向に +5 平行移動
   頂点 ($\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$) の放物線 $\boxed{キ}$
   これは $\left(1, \boxed{ク}\right)$ を通る

3. 頂点 (0, 0) の放物線 $y = 2x^2$
   $\Downarrow$ y 軸方向に $\boxed{ケ}$ 平行移動
   頂点 ($\boxed{コ}$, $\boxed{サ}$) の放物線 $y = 2x^2 - 4$
   これは $\left(1, \boxed{シ}\right)$ を通る

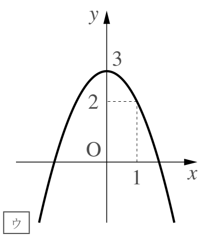
高校数学においてグラフを描くときは，方眼紙を用いず，概形を示すだけのことが多い．
放物線の場合，頂点と，他の 1 点を書き入れれば十分である．

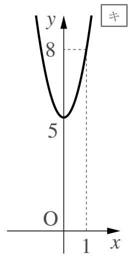
【解答】

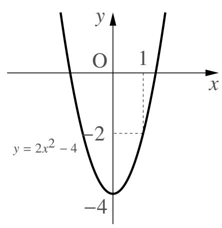
1. ア,イ : **(0, 3)**
   ウ : $\boldsymbol{y = -x^2 + 3}$
   エ : **2**

2. オ,カ : **(0, 5)**
   キ : $\boldsymbol{y = 3x^2 + 5}$
   ク : **8**

3. ケ : **−4**
   コ,サ : **(0, −4)**
   シ : **−2**







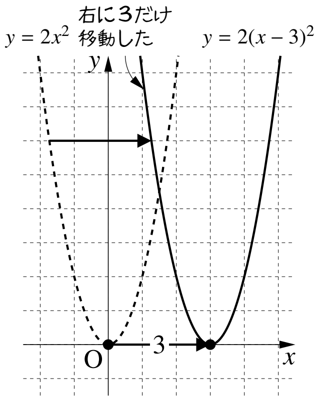
◀ 2 次関数の式に $x = 1$ を代入すればよい．たとえば，1. ならば $y = -x^2 + 3$ に $x = 1$ を代入して，$y = -1^2 + 3 = 2$ となる．

$y = ax^2 + c$ のグラフ

$y = ax^2 + c$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを
「y 軸方向に c だけ平行移動」
した放物線である．このとき，軸は y 軸(直線 $x = 0$)，頂点は $(0, c)$ となる．

[*10] このことは，式の形からも理解できる．同じ x の値を代入しても，$y = 2x^2 + 3$ の y の値の方が，$y = 2x^2$ の y の値より 3 だけ大きく計算されるからである．

F. $y = a(x-p)^2$ のグラフ



例として，次の 2 つの 2 次関数の関係を考えてみよう．

$y = 2x^2$ ，$y = 2(x-3)^2$

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	18	32	50	$\cdots$
$2(x-3)^2$	$\cdots$	50	32	18	8	2	0	2	8	$\cdots$

上の表から，$y = 2(x-3)^2$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に $+3$ 平行移動した放物線とわかる[*11]．

この平行移動によって，軸は x 軸方向に 3 移動し，直線 $x = 3$ に重なる．また，頂点も移動し，原点より x 軸方向に 3 大きい点 $(3,\ 0)$ であることがわかる．

【例題 51】 $\boxed{}$ に適当な数・式を答え，放物線 $\boxed{エ}$，$\boxed{ケ}$，$y = -2(x-4)^2$ のグラフを書け．

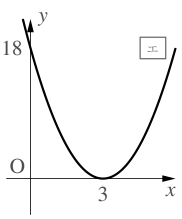
1. 頂点 $(0,\ 0)$，軸 $x = 0$
の放物線 $y = 2x^2$
$\Downarrow$ x 軸方向に $+3$ 平行移動
頂点 $(\boxed{ア},\ \boxed{イ})$，
軸 $\boxed{ウ}$ の放物線 $\boxed{エ}$
これは $\left(0,\ \boxed{オ}\right)$ を通る

2. 頂点 $(0,\ 0)$，軸 $x = 0$
の放物線 $y = -3x^2$
$\Downarrow$ x 軸方向に -2 平行移動
頂点 $(\boxed{カ},\ \boxed{キ})$，
軸 $\boxed{ク}$ の放物線 $\boxed{ケ}$
これは $\left(0,\ \boxed{コ}\right)$ を通る

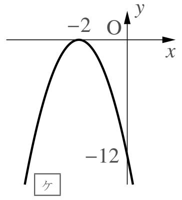
3. 頂点 $(0,\ 0)$，軸 $x = 0$
の放物線 $y = -2x^2$
$\Downarrow$ x 軸方向に $\boxed{サ}$ 平行移動
頂点 $(\boxed{シ},\ \boxed{ス})$，軸 $\boxed{セ}$
の放物線 $y = -2(x-4)^2$
これは $\left(0,\ \boxed{ソ}\right)$ を通る

【解答】

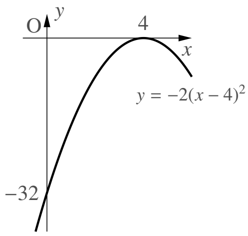
1. ア,イ : **(3, 0)**
ウ : $\boldsymbol{x = 3}$
エ : $\boldsymbol{y = 2(x-3)^2}$
オ : **18**



2. カ,キ : **(−2, 0)**
ク : $\boldsymbol{x = -2}$
ケ : $\boldsymbol{y = -3(x+2)^2}$
コ : **−12**



3. サ : **+4**
シ,ス : **(4, 0)**
セ : $\boldsymbol{x = 4}$
ソ : **−32**



◀ 2 次関数の式に $x = 0$ を代入すればよい．たとえば, 1. ならば $y = 2(x-3)^2$ に $x = 0$ を代入して，$y = 2\cdot(-3)^2 = 18$ となる．

$y = a(x-p)^2$ のグラフ

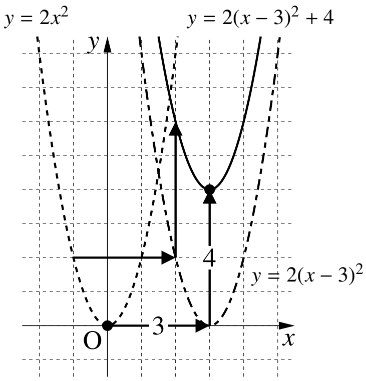
$y = a(x-p)^2$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを

「x 軸方向に p だけ平行移動」

した放物線である．このとき，軸は直線 $x = p$，頂点は $(p,\ 0)$ となる．

[*11] このことは，式の形からも理解できる．$y = 2(x-3)^2$ の y の値と $y = 2x^2$ の y の値を一致させるには，$2(x-3)^2$ の x には，$2x^2$ の x より 3 大きい値を代入しなければならない．

G. $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ



たとえば，$y = 2(x-3)^2 + 4$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを次のように移動させればよい．

$$y = 2x^2 \xrightarrow[\text{3平行移動}]{x\text{軸方向に}} y = 2(x-3)^2$$

$$\xrightarrow[\text{4平行移動}]{y\text{軸方向に}} y = 2(x-3)^2 + 4$$

この平行移動によって，頂点は，原点より x 軸方向に 3 大きく y 軸方向に 4 大きい点 (3, 4) に移動する．軸は直線 $x = 3$ になる．

【例題 52】 $\boxed{}$ に適当な数・式を答え，放物線 $\boxed{ク}$，$\boxed{チ}$，$\boxed{ニ}$ のグラフを書け．

1. 放物線 $y = 2x^2$

$\Downarrow$ x 軸方向に +1 平行移動

頂点 ($\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$)，軸 $\boxed{ウ}$ の放物線 $\boxed{エ}$

$\Downarrow$ y 軸方向に +3 平行移動

頂点 ($\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$)，軸 $\boxed{キ}$ の放物線 $\boxed{ク}$

これは $\left(0, \boxed{ケ}\right)$ を通る

2. 放物線 $y = -x^2$

$\Downarrow$ x 軸方向に −4 平行移動

頂点 ($\boxed{コ}$, $\boxed{サ}$)，軸 $\boxed{シ}$ の放物線 $\boxed{ス}$

$\Downarrow$ y 軸方向に +7 平行移動

頂点 ($\boxed{セ}$, $\boxed{ソ}$)，軸 $\boxed{タ}$ の放物線 $\boxed{チ}$

これは $\left(0, \boxed{ツ}\right)$ を通る

3. 放物線 $y = 3x^2$

x 軸方向に $\boxed{テ}$ 平行移動

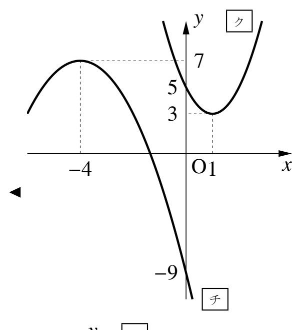
$\Downarrow$ y 軸方向に $\boxed{ト}$ 平行移動

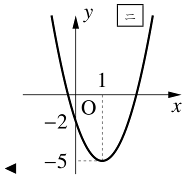
頂点 $(1, -5)$，軸 $\boxed{ナ}$ の放物線 $\boxed{ニ}$

これは $\left(0, \boxed{ヌ}\right)$ を通る

【解答】

1. **ア,イ : $(1, 0)$,　ウ : $x = 1$,　エ : $y = 2(x-1)^2$**
   オ,カ : $(1, 3)$,　キ : $x = 1$,　ク : $y = 2(x-1)^2 + 3$
   ケ : $y = 2(x-1)^2 + 3$ に $x = 0$ を代入して，$y = 2 \cdot (-1)^2 + 3 = \mathbf{5}$
   グラフは右欄外の図のようになる．
2. **コ,サ : $(-4, 0)$，シ : $x = -4$，ス : $y = -(x+4)^2$**
   セ,ソ : $(-4, 7)$，タ : $x = -4$，チ : $y = -(x+4)^2 + 7$
   ツ : $-(x+4)^2 + 7$ に $x = 0$ を代入して，$y = -4^2 + 7 = \mathbf{-9}$
   グラフは右欄外の図のようになる．
3. **テ : $+1$，ト : -5，ナ : $x = 1$，ニ : $y = 3(x-1)^2 - 5$**
   ケ : $y = 3(x-1)^2 - 5$ に $x = 0$ を代入して，$y = 3 \cdot (-1)^2 - 5 = \mathbf{-2}$
   グラフは右欄外の図のようになる．





$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを

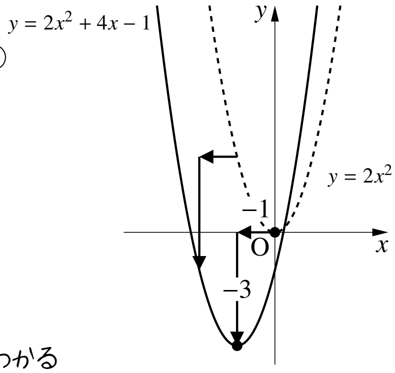
「x 軸方向に p だけ平行移動し，y 軸方向に q だけ平行移動」

した放物線である．このとき，軸は直線 $x = p$，頂点は (p, q) となる．

H. 平方完成

2 次式 $ax^2 + bx + c$ を $a(x - p)^2 + q$ の形に変形することを，**平方完成** (completing square) という[*12]．たとえば，

$$y = 2x^2 + 4x - 1 \qquad \cdots\cdots ①$$



のグラフを描くには，次のような平方完成が必要となる．

$$\begin{aligned}
y &= 2x^2 + 4x - 1 \\
&= 2\left\{x^2 + 2x\right\} - 1 && \leftarrow x^2 \text{ の係数でくくる} \\
&= 2\left\{(x + 1)^2 - 1\right\} - 1 && \leftarrow \text{平方の形にする（平方完成）} \\
&= 2(x + 1)^2 - 2 - 1 && \leftarrow \{\quad\} \text{をはずす} \\
&= 2(x + 1)^2 - 3 && \leftarrow \text{定数項を整理する，これで頂点の座標がわかる}
\end{aligned}$$

①のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 平行移動した放物線になるとわかる．

平方完成の変形のうち，平方を作る変形を取り出すと，以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&x^2 + \bigcirc x \\
&\qquad \downarrow \text{半分} \\
&= \left(x + \frac{\bigcirc}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

↑ここの 2 乗を引く↗

【例題 53】 以下の 2 次式を平方完成しなさい．

1. $x^2 + 6x$　2. $x^2 - 4x$　3. $x^2 - 8x + 5$　4. $2x^2 - 4x$　5. $2x^2 + 4x + 3$　6. $-3x^2 - 6x + 1$

【解答】

1.
$$\begin{aligned} &x^2 + 6x \\ =\ &\boldsymbol{(x + 3)^2 - 9} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} &x^2 - 4x \\ =\ &\boldsymbol{(x - 2)^2 - 4} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} &x^2 - 8x + 5 \\ =\ &(x - 4)^2 - 16 + 5 \\ =\ &\boldsymbol{(x - 4)^2 - 11} \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} &2x^2 - 4x \\ =\ &2(x^2 - 2x) \\ =\ &2\left\{(x - 1)^2 - 1\right\} \\ =\ &\boldsymbol{2(x - 1)^2 - 2} \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} &2x^2 + 4x + 3 \\ =\ &2(x^2 + 2x) + 3 \\ =\ &2\left\{(x + 1)^2 - 1\right\} + 3 \\ =\ &2(x + 1)^2 - 2 + 3 \\ =\ &\boldsymbol{2(x + 1)^2 + 1} \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} &-3x^2 - 6x + 1 \\ =\ &-3(x^2 + 2x) + 1 \\ =\ &-3\left\{(x + 1)^2 - 1\right\} + 1 \\ =\ &-3(x + 1)^2 + 3 + 1 \\ =\ &\boldsymbol{-3(x + 1)^2 + 4} \end{aligned}$$

[*12] 変形によって，$(x - p)^2$ という平方（2 乗）を作ることから，この名称が付いている．これはたいへん重要な式変形であり，実際，2 次方程式の解の公式も，平方完成の考え方で導かれている．

【練習 54：平方完成】

以下の 2 次式を（x について）平方完成しなさい.

(1) x^2-6x　(2) x^2+4x　(3) x^2-3x　(4) x^2-6x+3　(5) x^2-3x+1　(6) $2x^2-8x$

(7) $-2x^2-4x$　(8) $2x^2+8x+1$　(9) $-3x^2+9x+2$　(10) $\frac{1}{2}x^2+2x$　(11) $-\frac{1}{3}x^2-4x+3$

(12) $-\frac{3}{2}x^2-5x+1$　(13) x^2-2ax　(14) $2x^2+4ax+a^2$

【解答】

(1) x^2-6x
$=\boldsymbol{(x-3)^2-9}$

(2) x^2+4x
$=\boldsymbol{(x+2)^2-4}$

(3) x^2-3x
$=\boldsymbol{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}$

(4) x^2-6x+3
$=(x-3)^2-9+3$
$=\boldsymbol{(x-3)^2-6}$

(5) $x^2-3x+1=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+1$　◀ 平方完成した
$=\boldsymbol{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}$　◀ 定数項を整理した

(6) $2x^2-8x$
$=2\left\{x^2-4x\right\}$
$=2\left\{(x-2)^2-4\right\}$
$=\boldsymbol{2(x-2)^2-8}$

(7) $-2x^2-4x$
$=-2\left\{x^2+2x\right\}$
$=-2\left\{(x+1)^2-1\right\}$
$=\boldsymbol{-2(x+1)^2+2}$

(8) $2x^2+8x+1$
$=2\left\{x^2+4x\right\}+1$　◀ 括弧でまとめて，x^2 の係数を 1 にした
$=2\left\{(x+2)^2-4\right\}+1$　◀ 括弧の中を平方完成した
$=2(x+2)^2-8+1$
$=\boldsymbol{2(x+2)^2-7}$

(9) $-3x^2+9x+2$
$=-3\left\{x^2-3x\right\}+2$
$=-3\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+2$
$=-3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}+2$
$=\boldsymbol{-3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{35}{4}}$

(10) $\frac{1}{2}x^2+2x$
$=\frac{1}{2}\left\{x^2+4x\right\}$
$=\frac{1}{2}\left\{(x+2)^2-4\right\}$
$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(x+2)^2-2}$

(11) $-\frac{1}{3}x^2-4x+3$
$=-\frac{1}{3}\left\{x^2+12x\right\}+3$
$=-\frac{1}{3}\left\{(x+6)^2-36\right\}+3$
$=-\frac{1}{3}(x+6)^2+12+3$
$=\boldsymbol{-\frac{1}{3}(x+6)^2+15}$

(12) $-\frac{3}{2}x^2-5x+1$
$=-\frac{3}{2}\left\{x^2+\frac{10}{3}x\right\}+1$
$=-\frac{3}{2}\left\{\left(x+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right\}+1$
$=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+\frac{25}{6}+1$
$=\boldsymbol{-\frac{3}{2}\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+\frac{31}{6}}$

(13) $x^2-2ax=\boldsymbol{(x-a)^2-a^2}$

(14) $2x^2+4ax+a^2=2(x^2+2ax)+a^2$
$=2\left\{(x+a)^2-a^2\right\}+a^2=\boldsymbol{2(x+a)^2-a^2}$

I. $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

次のようにして，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが必ず放物線になることが分かる．

$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

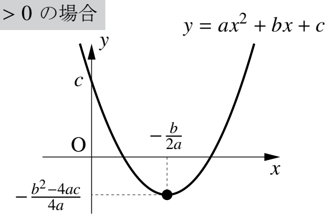
$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x\right\} + c && \leftarrow x^2 \text{ の係数でくくる} \\
&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c && \leftarrow \text{平方完成} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c && \leftarrow \{\quad\}\text{をはずす} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} && \leftarrow \text{定数項を整理する}
\end{aligned}
$$

と平方完成して，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは

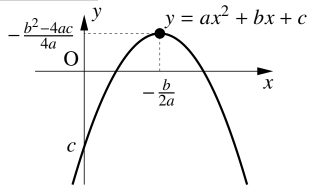
- 軸は直線 $x = -\dfrac{b}{2a}$，頂点は $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

の放物線となる．また，y 軸との交点は $(0,\ c)$ である．

$a > 0$ の場合



$a < 0$ の場合



上の結果を暗記する必要はない．2 次関数のグラフを考えるときは毎回，平方完成をしよう．また，2 次関数のグラフには，放物線の開き具合を決めるため，y 軸との交点を必ず書きこむ（軸が直線 $x = 0$ であった場合は，適当な 1 点を書き込む）．

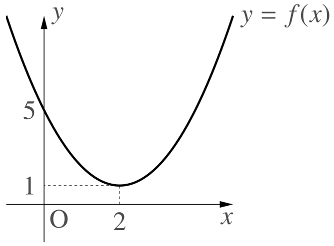
【例題 55】 2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$ について，以下の問いに答えなさい．

1. $f(x)$, $g(x)$ を平方完成しなさい．
2. $y = f(x)$ の頂点の座標，軸の方程式を求め，グラフを書きなさい（y 軸との交点を書き込むこと）．
3. $y = g(x)$ の頂点の座標，軸の方程式を答え，グラフを書きなさい（y 軸との交点を書き込むこと）．

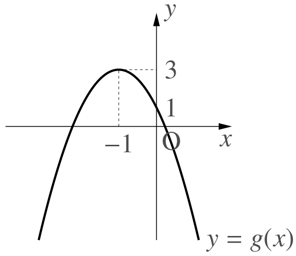
【解答】

1.
$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-2)^2 - 4 + 5 \\
&= \boldsymbol{(x-2)^2 + 1}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
g(x) &= -2\left\{x^2 + 2x\right\} + 1 \\
&= -2\left\{(x+1)^2 - 1\right\} + 1 \\
&= -2(x+1)^2 + 2 + 1 \\
&= \boldsymbol{-2(x+1)^2 + 3}
\end{aligned}
$$

2. $f(x)$ の頂点は $\mathbf{(2,\ 1)}$，
軸は $\boldsymbol{x = 2}$ である．



3. $g(x)$ の頂点は $\mathbf{(-1,\ 3)}$
軸は $\boldsymbol{x = -1}$ である．



【練習 56：放物線を描く】

次の放物線の頂点の座標と軸の方程式を答え，グラフを描け．

(1) $y=x^2-2x+3$　　(2) $y=-3x^2+6x$　　(3) $y=2x^2+8x+5$

(4) $y=-2x^2-6x-\dfrac{5}{2}$　　(5) $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$

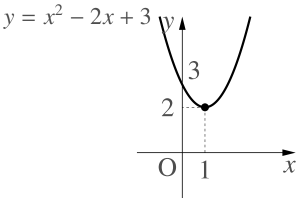
【解答】

(1) $y=(x-1)^2-1+3$

$\quad =(x-1)^2+2$

頂点は $(1,\ 2)$，軸は $x=1$ であり，

グラフは右図のようになる．



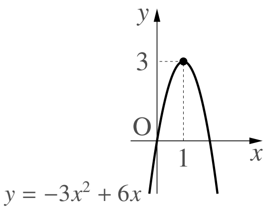
(2) $y=-3\left\{x^2-2x\right\}$

$\quad =-3\left\{(x-1)^2-1\right\}$

$\quad =-3(x-1)^2+3$

頂点は $(1,\ 3)$，軸は $x=1$ であり，

グラフは右図のようになる．



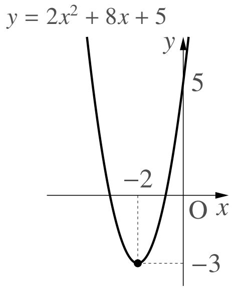
(3) $y=2\left\{x^2+4x\right\}+5$

$\quad =2\left\{(x+2)^2-4\right\}+5$

$\quad =2(x+2)^2-3$

頂点は $(-2,-3)$，軸は $x=-2$ であり，

グラフは右図のようになる．



(4) $y=-2\left\{x^2+3x\right\}-\dfrac{5}{2}$

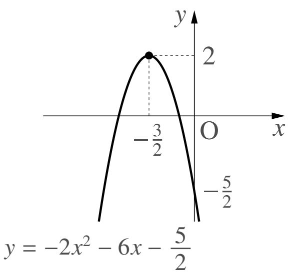
$\quad =-2\left\{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\right\}-\dfrac{5}{2}$

$\quad =-2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}-\dfrac{5}{2}$

$\quad =-2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+2$

頂点は $\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$，軸は $x=-\dfrac{3}{2}$ であり，

グラフは右図のようになる．



(5) $y=\dfrac{1}{2}\left\{x^2-2x\right\}-2$

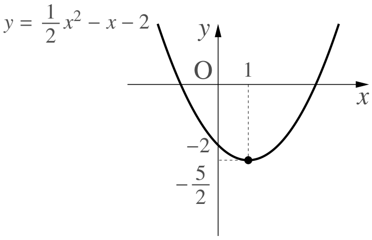
$\quad =\dfrac{1}{2}\left\{(x-1)^2-1\right\}-2$

$\quad =\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{1}{2}-2$

$\quad =\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{5}{2}$

頂点は $\left(1,-\dfrac{5}{2}\right)$，軸は $x=1$ であり，

グラフは右図のようになる．



【練習 57：2 次関数の平行移動】

放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを平行移動し，頂点が $(-2, -6)$ となったグラフを C とする．

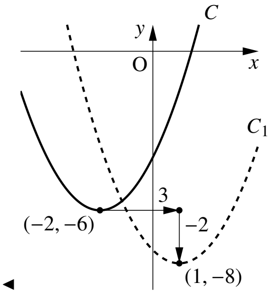
(1) 放物線 C の方程式を求めよ．

(2) C を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 平行移動したグラフを C_1 とする．C_1 の頂点の座標と，C_1 の方程式を求めよ．

(3) C を平行移動した結果，頂点が $(-3,\ 2)$ にあるグラフを C_2 とする．C_2 の式を求めよ．このとき，C をどのように平行移動して C_2 になっただろうか．

【解答】

(1) 頂点が $(-2, -6)$ であり，x^2 の係数が $\dfrac{1}{2}$ であるので，求める C の方程式は $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}(x + 2)^2 - 6}$ である．



(2) 平行移動によって C の頂点は

$$\begin{array}{ccc} C\ \text{の頂点} & \xrightarrow[y\ \text{軸方向に}\ -2]{x\ \text{軸方向に}\ 3} & C_1\ \text{の頂点} \\ (-2, -6) & & (1, -8) \end{array}$$

と移動するので，C_1 の頂点は $\boldsymbol{(1, -8)}$ である．

また，C_1 の x^2 の係数は，C と同じ $\dfrac{1}{2}$ であるので，C_1 の方程式は次のようになる．

◀ C_1 は，C を平行移動してできる放物線であるから．

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 8} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{15}{2}}$$

◀ 答えは，平方完成された状態のままで構わない．

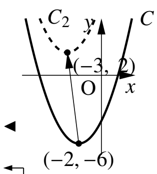
【別解：『グラフの平行移動と方程式』(p.99) を用いて解く】(1) で求めた C の式の x を $x - 3$ に，y を $y + 2$ に代えて，C_1 の式を得る．

$$y + 2 = \frac{1}{2}\{(x - 3) + 2\}^2 - 6 \iff \boldsymbol{y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 8}$$

(3) C_2 の x^2 の係数は，C と同じ $\dfrac{1}{2}$ であり，C_2 の頂点の座標は $(-3,\ 2)$ であるので，C_2 の方程式は

◀ C_2 は，C を平行移動してできる放物線であるから．

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{13}{2}}$$



となる．また，頂点が $(-2, -6)$ から $(-3,\ 2)$ へ動いて C_2 になるので，これは，**x 軸方向に -1，y 軸方向に 8 平行移動した**結果である．

◀ $-3 - (-2) = -1,\ 2 - (-6) = 8$

2.　2次関数の決定

A.　準備１〜方程式への代入

たとえば，関数 $y = x^2 + bx$ のグラフが $(2,\ 1)$ を通るならば，$y = x^2 + bx$ に $(x,\ y) = (2,\ 1)$ を代入した等式は成り立つ．つまり

$$1 = \cdot 2^2 + b \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 4 + 2b$$

より $b = -\dfrac{3}{2}$ と分かる．一般に，関数 $y = f(x)$ のグラフが $(p,\ q)$ を通るなら $q = f(p)$ が成り立つ (p.72).

【例題 58】　以下の問いに答えなさい．

1. 放物線 $y = -x^2 + bx + 3$ が $(-1, -3)$ を通るとき，b の値を求めよ．
2. 放物線 $y = 2(x - p)^2 + 3$ が $(1,\ 5)$ を通るとき，p の値を求めよ．

【解答】

1. $y = -x^2 + bx + 3$ に $(x,\ y) = (-1, -3)$ を代入して

$$-3 = -(-1)^2 + b \cdot (-1) + 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 = -1 - b + 3 \quad \therefore\ \boldsymbol{b = 5}$$

◀ b について方程式を解いた

2. $y = 2(x - p)^2 + 3$ に $(x,\ y) = (1,\ 5)$ を代入して

$$5 = 2(1 - p)^2 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 - 2p = 0 \quad \therefore\ \boldsymbol{p = 0,\ 2}$$

◀ p について（2 次）方程式を解いた

B.　準備２〜連立 3 元 1 次方程式を解く

一般に，未知の文字を 3 つ含む，3 つの（1 次）連立方程式のことを連立 3 元 1 次方程式という．これを解くには，消去する文字を決め，代入法・加減法によって消去すればよい．

【例題 59】　連立 3 元 1 次方程式 $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x + y - z = 4 & \cdots\cdots\cdots ② \\ x - 2y + 3z = -1 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$ を解こう．

① − ② によって，$\boxed{\text{ア}}$ を消去した式 $\boxed{\text{イ}}$ を得る．

2 × ① + ③ によって，$\boxed{\text{ウ}}$ を消去した式 $\boxed{\text{エ}}$ を得る．

イ と **エ** を連立して，$(x,\ z) = \left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ を得て，最後に②から $y = \boxed{\text{キ}}$ を得る．

「連立 3 元 1 次方程式を解く」とは，上の問題でいえば「式①，②，③を全て同時に満たす $(x,\ y,\ z)$ の組を見つける」ということになる．

【解答】　① − ② によって

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ -) & x & + & y & - & z & = & 4 \\ \hline & x & & & - & z & = & -3 \end{array}$$

であるから，(ア) $\underline{y}$ を消去した式 (イ) $\underline{\boldsymbol{x - z = -3}}$ （$\cdots$②′）を得る．

また，2 × ① + ③ によって

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 4x & + & 2y & - & 4z & = & 2 \\ +) & x & - & 2y & + & 3z & = & -1 \\ \hline & 5x & & & - & z & = & 1 \end{array}$$

であるから，$\underline{y}_{(ウ)}$ を消去した式$_{(エ)}$$\underline{\mathbf{5x - z = 1}}$ （$\cdots$③′）を得る．

次に z を消すために ②′ − ③′ をすれば

$$\begin{array}{rrrrrr} & x & - & z & = & -3 \\ -) & 5x & - & z & = & 1 \\ \hline & -4x & & & = & -4 \end{array} \quad \therefore\ x = \underline{\mathbf{1}}_{(オ)}$$

◀ ②′，③′ の 2 つで，連立方程式
$\begin{cases} x - z - 3 \cdots ②' \\ 5x - z = 1 \cdots ③' \end{cases}$
になった．

この x の値を ②′ に代入して $1 - z = -3$ なので $z = \underline{\mathbf{4}}_{(カ)}$

x，z の値を②に代入して，$1 + y - 4 = 4$ $\therefore$ $y = \underline{\mathbf{7}}_{(キ)}$

◀ ①，③より，②に代入する方が計算が簡単に済む．

C. 一般型 $y = ax^2 + bx + c$ の決定〜軸や頂点について何もわかっていない場合

グラフが通る 3 点を与えるだけでも，2 次関数はただ 1 つに決まる．この場合は，求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ の形でおいて考える．

【例題 60】 (1. 5), (−1, 1), (−2, 2) を通る 2 次関数を求めてみよう．

1. 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく．これが
   (1, 5) を通るので等式 $\boxed{ア}$ を満たし，
   (−1, 1) を通るので等式 $\boxed{イ}$ を満たし，
   (−2, 2) を通るので等式 $\boxed{ウ}$ を満たす．
2. $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ の 3 元一次連立方程式を解いて，$(a, b, c) = \left(\boxed{エ}, \boxed{オ}, \boxed{カ}\right)$ を得るので，求める 2 次関数は $\boxed{キ}$ と分かる．

【解答】

1. **ア** : $5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \iff \boldsymbol{a + b + c = 5}$
   イ : $1 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \iff \boldsymbol{a - b + c = 1}$
   ウ : $2 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \iff \boldsymbol{4a - 2b + c = 2}$
2. **ア − イ** より

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & a & + & b & + & c & = & 5 \\ -) & a & - & b & + & c & = & 1 \\ \hline & & & 2b & & & = & 4 \end{array}$$

であるので，$b = 2$．

また，**ウ − イ** より

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 4a & - & 2b & + & c & = & 2 \\ -) & a & - & b & + & c & = & 1 \\ \hline & 3a & - & b & & & = & 1 \end{array}$$

であり，$b = 2$ を代入して解けば，$a = 1$．

これを**イ**に代入して，$c = 2$ を得る．つまり，**エ** : **1**，**オ** : **2**，**カ** : **2**.

これらを $y = ax^2 + bx + c$ に代入して，**キ** : $\boldsymbol{y = x^2 + 2x + 2}$ となる．

【練習 61：軸や頂点について何もわかっていない場合】

グラフが 3 点 A(1, 6)，B(−2, −9)，C(4, 3) を通るような 2 次関数を求めよ．

【解答】　求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく．このグラフは

A を通ることから　$6 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$

B を通ることから　$-9 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$

C を通ることから　$3 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = a + b + c & \cdots\cdots\cdots ① \\ -9 = 4a - 2b + c & \cdots\cdots\cdots ② \\ 3 = 16a + 4b + c & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を得る．以下，3 つの文字を含むこの連立方程式を解く．

◀『連立 3 元 1 次方程式』(p.92)

◀頂点や軸に関する情報がないので，一般的な 2 次関数で考える

まず，② − ① より

$$\begin{array}{rrrrrr} & 4a & -\ 2b & +\ c & = & -\ 9 \\ -) & a & +\ \ b & +\ c & = & 6 \\ \hline & 3a & -\ 3b & & = & -15 \end{array} \qquad \therefore\ a - b = -5 \qquad \cdots ④$$

◀両辺を 3 で割った．

さらに，③ − ② より

$$\begin{array}{rrrrrr} & 16a & +\ 4b & +\ c & = & 3 \\ -) & 4a & -\ 2b & +\ c & = & -\ 9 \\ \hline & 12a & +\ 6b & & = & 12 \end{array} \qquad \therefore\ 2a + b = 2 \qquad \cdots ⑤$$

◀両辺を 6 で割った．

④，⑤の連立方程式を解いて $a = -1$，$b = 4$．さらに，これらを①に代入して $c = 3$ を得る．

よって，求める 2 次関数は $\boldsymbol{y = -x^2 + 4x + 3}$ である．

【練習 62：連立 3 元 1 次方程式】

連立 3 元 1 次方程式 $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 7 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x + 3y = -5 & \cdots\cdots\cdots ② \\ -3x + z = -7 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$ を解け．

【解答】　まず z を消そう．① + 2 × ③ によって

◀ y を消去してもよいが，少し計算が増える．
x を消去した場合は，加減法の回数が 1 回余分に必要になる．

$$\begin{array}{rrrrrr} & 3x & +\ 2y & -\ 2z & = & 7 \\ +) & -6x & & +\ 2z & = & -14 \\ \hline & -3x & +\ 2y & & = & -\ 7 \end{array} \qquad \cdots\cdots\cdots ①'$$

◀これと②の 2 つで，通常の（文字が 2 つの）連立方程式になった．

次に x を消すために ①′ + 3 × ② をすれば

$$\begin{array}{rrrrr} & -3x & +\ \ 2y & = & -\ 7 \\ +) & 3x & +\ \ 9y & = & -15 \\ \hline & & 11y & = & -22 \end{array} \qquad \therefore\ y = -2$$

この y の値を②に代入して $x + 3 \cdot (-2) = -5$　$\therefore$　$x = 1$

さらに，x の値を③に代入して $-3 + z = -7$　$\therefore$　$z = -4$

つまり，求めるべき解は $\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (1, -2, -4)}$．

D.　平方完成型 $y = a(x-p)^2 + q$ の決定〜軸や頂点について条件が与えられた場合

頂点とグラフが通る 1 点，もしくは，軸とグラフが通る 2 点がわかれば，2 次関数はただ 1 つに決まる．p.86 の『$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ』で学んだことを用いて考えよう．

【例題 63】　次の 4 つの 2 次関数について，問いに答えなさい．

a) $y = a(x-p)^2 + 2$　　b) $y = a(x-3)^2 + q$　　c) $y = 3(x-2)^2 + q$　　d) $y = a(x-2)^2 + 3$

1. 上の 2 次関数のうち，a, p, q の値に関係なく頂点が $(2, 3)$ であるものを選べ．また，そのグラフが $(1, 2)$ を通るとき，2 次関数を決定せよ．
2. 上の 2 次関数のうち，軸が $x = 3$ であるものを選べ．また，そのグラフが $(1, 4)$, $(-1, -2)$ を通るとき，2 次関数を決定せよ．

【解答】

1. 頂点が $(2, 3)$ であるものは **d)** である．グラフが $(1, 2)$ を通るときは，$y = a(x-2)^2 + 3$ に $(x, y) = (1, 2)$ を代入して
   $$2 = a(1-2)^2 + 3 \iff 2 = a + 3$$
   より $a = -1$ となるので，$\boldsymbol{y = -(x-2)^2 + 3}$ と決定される．
2. 軸が $x = 3$ であるものは **b)** である．
   グラフが $(1, 4)$, $(-1, -2)$ を通るときは，$y = a(x-3)^2 + q$ が
   $(x, y) = (1, 4)$ を通ることから　$4 = a(1-3)^2 + q$
   $(x, y) = (-1, -2)$ を通ることから $-2 = a(-1-3)^2 + q$
   $$\iff \begin{cases} 4 = 4a + q & \cdots\cdots\cdots ① \\ -2 = 16a + q & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$
   ② − ① から連立方程式を解いて $(a, q) = \left(-\dfrac{1}{2}, 6\right)$ となる．つまり，$\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{2}(x-3)^2 + 6}$ と決定される．

◀「グラフが $(1, 2)$ を通る」⇔「方程式に $(x, y) = (1, 2)$ を代入しても等号が成り立つ」

上の問題で，a) は「頂点の y 座標が 2 であるグラフ」，c) は「軸が $x = 2$ であり，$y = 3x^2$ を平行移動してできたグラフ」ということができる．

【例題 64】　2 点 $(0, 0)$, $(3, 6)$ を通り，軸が $x = 1$ である放物線の方程式を求めよ．

【解答】　求める方程式は $y = a(x-1)^2 + q$ とおくことができる．
$(0, 0)$ を通ることから　$0 = a(0-1)^2 + q$
$(3, 6)$ を通ることから $6 = a(3-1)^2 + q$
$$\iff \begin{cases} 0 = a + q & \cdots\cdots\cdots ① \\ 6 = 4a + q & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$
②−① から連立方程式を解いて $(a, q) = (2, -2)$ となる．つまり，$\boldsymbol{y = 2(x-1)^2 - 2}$ と決定される．

◀いいかえれば，頂点の座標を $(1, q)$ とおいた

【練習 65：頂点や軸について条件が与えられた場合】

グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が $(1, -3)$ で，点 $(-1,\ 5)$ を通る．

(2) 軸が直線 $x = -2$ で，2 点 $(-3,\ 2)$，$(0, -1)$ を通る．

(3) 発展　放物線 $y = -2x^2$ を平行移動した結果，直線 $y = 2x + 1$ 上に頂点があり，$(3,\ 3)$ を通る．

【解答】

(1) グラフの頂点が $(1, -3)$ であるから，求める 2 次関数は

$$y = a(x-1)^2 - 3 \quad \cdots\cdots ①$$

◀『$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ』(p.86)

と表せる．さらに，このグラフは点 $(-1,\ 5)$ を通るから

$$5 = a(-1-1)^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow\ 5 = 4a - 3 \qquad \therefore\ a = 2$$

◀つまり，①は $x = -1$ のとき $y = 5$ になると分かるので，式①に $(x,\ y) = (-1,\ 5)$ を代入した．

式①に $a = 2$ を代入して，求める 2 次関数は

$\boldsymbol{y = 2(x-1)^2 - 3}$（または $\boldsymbol{y = 2x^2 - 4x - 1}$）

◀答えは，平方完成された状態のままでも構わない．

(2) 軸が直線 $x = -2$ であるから，求める 2 次関数は

$$y = a(x+2)^2 + q \quad \cdots\cdots ②$$

◀頂点の x 座標は 2，y 座標は分からないので q とおいた．

と表せる．さらに，このグラフは 2 点 $(-3,\ 2)$，$(0, -1)$ を通るから

$$\begin{cases} 2 = a(-3+2)^2 + q \\ -1 = a(0+2)^2 + q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a + q \\ -1 = 4a + q \end{cases}$$

◀②に $(x,\ y) = (-3,\ 2)$，$(0, -1)$ をそれぞれ代入し，整頓した

この連立方程式を解いて，$a = -1$，$q = 3$ を得る．②に代入して

$\boldsymbol{y = -(x+2)^2 + 3}$（または $\boldsymbol{y = -x^2 - 4x - 1}$）

◀答えは，平方完成された状態のままでも構わない．

(3) 求める 2 次関数は

$$y = -2(x-p)^2 + 2p + 1 \quad \cdots\cdots ③$$

◀頂点の x 座標を p とすれば，y 座標は $2p + 1$ となる．

とおくことができる．さらに，$(3,\ 3)$ を通るから

$$\begin{aligned} 3 = -2(3-p)^2 + 2p + 1 &\Leftrightarrow\ 2 = -2(9 - 6p + p^2) + 2p \\ &\Leftrightarrow\ 1 = -(9 - 6p + p^2) + p \\ &\Leftrightarrow\ p^2 - 7p + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ (p-2)(p-5) = 0 \end{aligned}$$

◀右辺の 1 だけ移項すれば，両辺を 2 で割れる．

よって，$p = 2,\ 5$ と分かる．③に代入して

$p = 2$ のとき，$\boldsymbol{y = -2(x-2)^2 + 5}$　（または $\boldsymbol{y = -2x^2 + 8x - 3}$）

$p = 5$ のとき，$\boldsymbol{y = -2(x-5)^2 + 11}$　（または $\boldsymbol{y = -2x^2 + 20x - 39}$）

2 次関数の決定にあたっては，未知の 2 次関数を

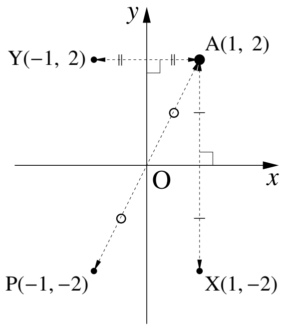
- $y = ax^2 + bx + c$（一般型）
- $y = a(x-p)^2 + q$（平方完成型）
- $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$（因数分解型）← p.121 で学ぶ

のうち，どの形で表現するかが重要になっている．

3. 2 次関数の対称移動・平行移動

A. 点の対称移動

まず，点 A(1, 2) を対称移動することを考えよう．



- x 軸について対称移動したとき　A(1, 2)　→　X(1, −2)
  x 座標はそのままにし，y 座標のみ符号を逆転，と同じである．
- y 軸について対称移動したとき　A(1, 2)　→　Y(−1, 2)
  x 座標のみ符号を逆転，y 座標はそのまま，と同じである．
- 原点につして対称移動したとき　A(1, 2)　→　P(−1, −2)
  x 座標も y 座標も符号を逆転させることと同じである．

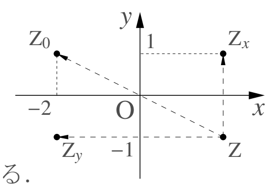
たとえば，y 軸について対称移動しても対称の中心となる y (座標) はそのままと理解できる．

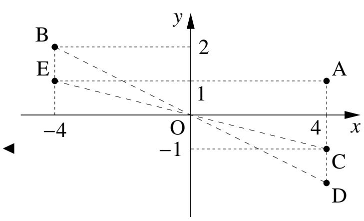
【例題 66】

1. Z(2, −1) を x 軸について対称移動した点 Z_x，y 軸について対称移動した点 Z_y，原点について対称移動した点 Z_0 をそれぞれ求めよ．
2. 以下の点について，x 軸対称な 2 点の組，y 軸対称な 2 点の組，原点対称な 2 点の組をそれぞれすべて答えよ．
   A(4, 1),　B(−4, 2),　C(4, −1),　D(4, −2),　E(−4, 1)

【解答】

1. 座標平面上での位置関係は右図のようになる．
   Z_x(2, 1)，Z_y(−2, −1)，Z_0(−2, 1)
2. 座標平面上での位置関係は右図のようになる．
   x 軸対称は A と C，y 軸対称は A と E，
   原点対称は B と D，C と E





【練習 67：点の対称移動】

次の 2 点は，x 軸，y 軸，原点のうち，何について対称か，それぞれ答えよ．

a) $(-3,\ 5)$ と $(3, 5)$　　b) $(1,\ 3)$ と $(-1, -3)$　　c) $(-2, -3)$ と $(2, -3)$

d) $(3,\ 5)$ と $(3, -5)$　　e) $(-2,\ 3)$ と $(2, -3)$　　f) $(0,\ 3)$ と $(0, -3)$

【解答】 符号に注意すればよい．

a) y 軸　　b) 原点　　c) y 軸

d) x 軸　　e) 原点　　f) x 軸，または原点

◀ 慣れないうちは図を描こう．

B. 文字の置き換えで対称移動を考える

点の対称移動について，以下のことが成り立っていた（p.97）．

- x 軸について対称移動するには，y 座標のみ符号を逆転させればよい．
- y 軸について対称移動するには，x 座標のみ符号を逆転させればよい．
- 原点につして対称移動するには，x 座標も y 座標も符号を逆転させればよい．

同じことを，グラフの対称移動にもあてはめることができる．

たとえば，放物線 $y = x^2 + 3x + 2$ の対称移動は次のようになる．

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{（x 軸対称移動）}]{\text{y を −y に代える}} -y = x^2 + 3x + 2 \quad \left(\Leftrightarrow \ y = -x^2 - 3x - 2 \right)$$

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{（y 軸対称移動）}]{\text{x を −x に代える}} y = (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 2 \quad \left(\Leftrightarrow \ y = x^2 - 3x + 2 \right)$$

$$y = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow[\text{（原点対称移動）}]{\text{x を −x に代えて，y を −y に代える}} -y = (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 2 \quad \left(\Leftrightarrow \ y = -x^2 + 3x - 2 \right)$$

【例題 68】 放物線 $y = 2x^2 - 8x + 9$ を C とする．

- C を x 軸に関して対称移動した放物線 C_x の方程式は $\boxed{ア}$ であり，頂点は $\boxed{イ}$ になる．
- C を y 軸に関して対称移動した放物線 C_y の方程式は $\boxed{ウ}$ であり，頂点は $\boxed{エ}$ になる．
- C を原点に関して対称移動した放物線 C_o の方程式は $\boxed{オ}$ であり，頂点は $\boxed{カ}$ になる．
- C の頂点は $\boxed{キ}$ である．C と C_x の頂点を比べると，たしかに $\boxed{キ}$ と $\boxed{イ}$ が x 軸対称になっているのが分かる．同様に，$\boxed{キ}$ と $\boxed{エ}$ は y 軸対称，$\boxed{キ}$ と $\boxed{カ}$ は原点対称であるのが分かる．

【解答】 ア：$-y = 2x^2 - 8x + 9 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -2x^2 + 8x - 9}$

イ：C_x の式を平方完成して $y = -2(x-2)^2 - 1$ を得るので $\boldsymbol{(2, -1)}$

ウ：$y = 2(-x)^2 - 8(-x) + 9 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 2x^2 + 8x + 9}$

エ：C_y の式を平方完成して $y = 2(x+2)^2 + 1$ を得るので $\boldsymbol{(-2,\ 1)}$

オ：$y = -2(-x)^2 + 8(-x) - 9 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -2x^2 - 8x - 9}$

カ：C_0 の式を平方完成して $y = -2(x+2)^2 - 1$ を得るので $\boldsymbol{(-2, -1)}$

キ：C の式を平方完成して $y = 2(x-2)^2 + 1$ を得るので $\boldsymbol{(2,\ 1)}$

◀ C の式の y を $-y$ におきかえた．

◀ C の式の x を $-x$ におきかえた．

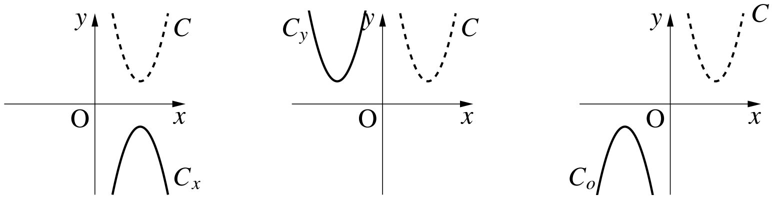
◀ C の式の x を $-x$ に，y を $-y$ におきかえた．

一般に，次のことがどんな関数のグラフでも成り立つ．特に，1 次関数や 2 次関数でも正しい．詳しい証明については，「一般の対称移動について (p.142)」を参照すること．

グラフの対称移動

- x 軸について対称移動するには，y を $-y$ に代えればよい．
- y 軸について対称移動するには，x を $-x$ に代えればよい．
- 原点について対称移動するには，x を $-x$ に代え，y を $-y$ に代えればよい．

前ページの【例題 68】におけるグラフの移動を実際に図示すると，次のようになる．



C. 文字の置き換えで平行移動を考える

『$y=a(x-p)^2$ のグラフ』(p.85) は放物線 $y=ax^2$ を「x 軸方向に p 平行移動」したグラフであり

$$y=ax^2 \xrightarrow{\text{xをx−pに代える}} y=a(x-p)^2$$

と考えられる．同様に，「y 軸方向に q 平行移動」することは y を $y-q$ におきかえることと同じである．

たとえば，放物線 $y=x^2+3x+2$ を x 軸方向に 4，y 軸方向に -1 移動すれば，次のようになる．

$$y=x^2+3x+2 \xrightarrow[\text{(x軸方向に4移動)}]{\text{xをx−4に代える}} y=(x-4)^2+3(x-4)+2 \quad \left(\Leftrightarrow\ y=x^2-5x+6\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(y軸方向に−1移動)}]{\text{yをy+1に代える}} y+1=(x-4)^2+3(x-4)+2 \quad \left(\Leftrightarrow\ y=x^2-5x+5\right)$$

【例題 69】 放物線 $y=2x^2-8x+9$ を C とする．
C を x 軸方向に 1 移動した放物線 C_1 の方程式は $\boxed{\text{ア}}$ であり，さらに，C_1 を y 軸方向に -4 に移動した放物線 C_2 の方程式は $\boxed{\text{イ}}$ である．C の頂点は $\boxed{\text{ウ}}$，C_2 の頂点は $\boxed{\text{エ}}$ であり，たしかに，$\boxed{\text{ウ}}$ の x 座標に $+1$，y 座標に -4 すると $\boxed{\text{エ}}$ になる．

【解答】 ア：$y=2(x-1)^2-8(x-1)+9 \Leftrightarrow \boldsymbol{y=2x^2-12x+19}$

イ：$y+4=2x^2-12x+19 \Leftrightarrow \boldsymbol{y=2x^2-12x+15}$

ウ：C の式を平方完成して $y=2(x-2)^2+1$ を得るので **(2, 1)**

エ：C_2 の式を平方完成して $y=2(x-3)^2-3$ を得るので **(3, −3)**

◀ C の式の x を $x-1$ におきかえた．

◀ C_1 の式の y を $y-1$ におきかえた．

グラフの平行移動と方程式

- 「x 軸方向に p 平行移動する」には，方程式の x を $x-p$ に代えればよい．
- 「y 軸方向に q 平行移動する」には，方程式の y を $y-q$ に代えればよい．

一般のグラフの平行移動については，「一般の平行移動について (p.143)」を参照のこと．

【練習 70：平行移動・対称移動と 2 次関数の決定】

2 次関数 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$ のグラフを C とする．

(1) C を y 軸について対称移動し，y 軸方向に 2 平行移動したグラフ C_1 の式を求めよ．

(2) 発展 グラフ C_2 を x 軸について対称移動し，x 軸方向に 2 平行移動したら C と一致した．C_2 の式を求めよ．

【解答】

(1) C を y 軸対称移動すれば，

◀ x を $-x$ に代えた

$$y = \frac{1}{2}(-x)^2 + 2\cdot(-x) - 4 = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4 \quad \cdots\cdots ①$$

である．さらに y 軸方向に 2 平行移動させて，C_1 の式を得る．

◀ 式①の y を $y-2$ に代えた

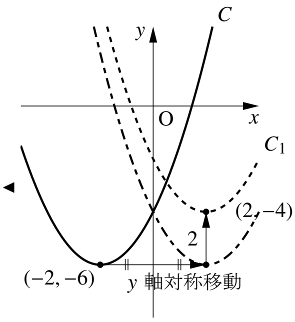
$$y - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2}$$

【別解】C を平方完成すれば $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 6$ となり，C の頂点は

$$(-2, -6) \xrightarrow{y\text{ 軸対称移動}} (2, -6) \xrightarrow{y\text{ 軸方向に }2} (2, -4)$$

と移動するので，C_1 の頂点は $(2, -4)$ と分かる．C の式と C_1 の式では x^2 の係数は同じなので放物線 C_1 の式は次のようになる．

◀



$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 4} \text{ または } \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2}$$

(2) C を x 軸方向に -2 平行移動し，x 軸について対称移動すれば C_2 の式を得る．

◀ 操作を逆に辿った．別解に，C_2 の式を $y = ax^2 + bx + c$ とおいて x 軸移動から $-y = ax^2 + bx + c$，x 軸方向に 2 移動から $-y = a(x-2)^2 + b(x-2) + c$，これを展開して C の式と係数を比べてもよい．

$$-y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2(x+2) - 4 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 2}$$

【別解】放物線 C_2 の頂点の座標を $(p,\ q)$ とおく．C_2 の頂点は

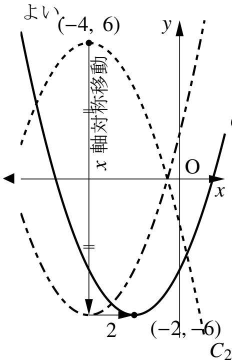
$$(p,\ q) \xrightarrow{x\text{ 軸対称移動}} (p, -q) \xrightarrow{x\text{ 軸方向に }2} (p+2, -q)$$

と移動する．これが C の頂点 $(-2, -6)$ と一致するので

$$p + 2 = -2, \qquad -q = -6$$

これを解いて，$p = -4$，$q = 6$ とわかる．C_2 と C では，式の x^2 の係数は正負が逆転して $-\frac{1}{2}$ になるので C_2 の式は次のようになる．

◀



$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}(x+4)^2 + 6} \text{ または } \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 2}$$

頂点の移動に着目して，放物線の移動を考えることもできる．くわしくは「頂点の移動を用いて 2 次関数の移動を考える (p.143)」を参照のこと．

4.　2 次関数の最大・最小

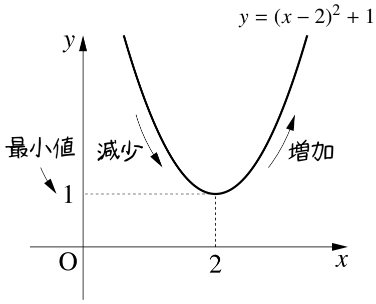
A.　2 次関数の最大・最小

たとえば，2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ の最大値・最小値を考えよう．

$y = f(x)$ とおけば，$f(x)$ の最大値・最小値は y の最大値・最小値に等しい．$y = f(x)$ のグラフを書けば

$$y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

より右図のようになる．



グラフ上で最も y 座標が小さいのは，$x = 2$ における 1 である．また，y の値はいくらでも大きくなるので，y の最大値は存在しない．

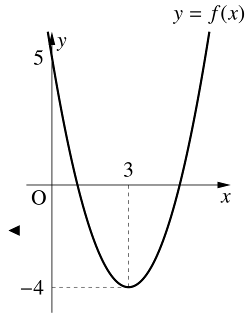
こうして，$f(x)$ は「最小値 $f(2) = 1$，最大値なし」とわかる．

【例題 71】　$f(x) = x^2 - 6x + 5$ について，$y = f(x)$ のグラフを書き，最大値・最小値を答えよ．

【解答】　$f(x)$ を平方完成すれば

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 5 \\ &= (x-3)^2 - 9 + 5 \\ &= (x-3)^2 - 4 \end{aligned}$$

つまり，$y = f(x)$ のグラフは右欄外のようになり，
最大値はなし，最小値は $f(3) = -4$ となる．



B.　定義域が限定された 2 次関数の最大・最小

定義域をすべての実数にすれば，2 次関数には最大値が最小値のどちらかが存在しない．しかし，定義域が限定された場合は，そうとは限らない．

【例題 72】　$f(x) = -x^2 - x - 2$（$-1 \leqq x \leqq 2$）について，定義域内での $y = f(x)$ のグラフを書き，$f(x)$ の最大値・最小値をそれぞれ求めよ．

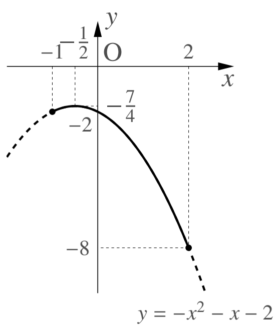
【解答】　$f(x)$ を平方完成すると

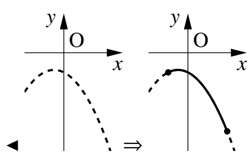
$$f(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$$

$y = f(x)$（$-1 \leqq x \leqq 2$）のグラフは右図の実線部分となるので

　最大値 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-\frac{7}{4}}$

　最小値 $f(2) = \mathbf{-8}$





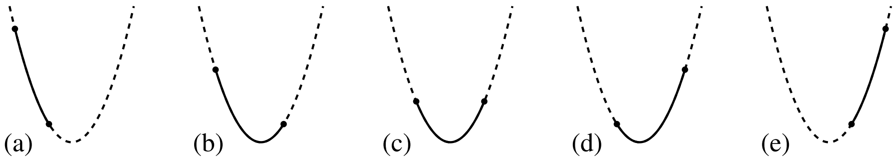
ノートに描くときは、まず点線で描いた後、定義域の範囲内だけ実線へすると、きれいに描きやすい。

【練習 73：2 次関数の最大・最小〜その 1 〜】

2 次関数 $f(x) = x^2 - 2x - 2$ を，次の定義域において考える．

(1) $-2 \leqq x \leqq 0$　(2) $-1 \leqq x \leqq 2$　(3) $0 \leqq x \leqq 2$　(4) $0 \leqq x \leqq 3$　(5) $3 \leqq x \leqq 4$

それぞれについて，(i) $y = f(x)$ のグラフを描き，(ii) グラフの形を下の (a)-(e) から 1 つ選び，(iii) $f(x)$ の最大値・最小値をそれぞれ求めよ．



【解答】　平方完成によって $f(x) = (x-1)^2 - 3$ と変形できる．そこで $y = (x-1)^2 - 3$ のグラフを，与えられた定義域内で描いて考える．

◂ グラフを描くため平方完成した．放物線は下に凸になる．

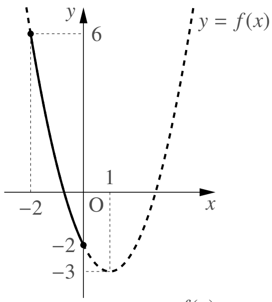
(1) 定義域が $-2 \leqq x \leqq 0$ の場合

(i) $y = f(x)$ のグラフは右図の実線部分

(ii) **グラフの形は (a)**

(iii) **最大値 $f(-2) = 6$**

最小値 $f(0) = -2$



◂ 軸は定義域より右側にあり，y の値は常に減少している．

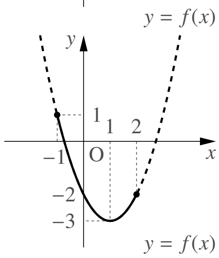
(2) 定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ の場合

(i) $y = f(x)$ のグラフは右図の実線部分

(ii) **グラフの形は (b)**

(iii) **最大値 $f(-1) = 1$**

最小値 $f(1) = -3$



◂ 軸は定義域内の右側にある．

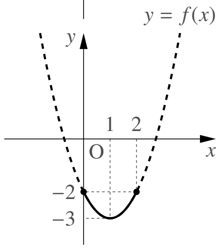
(3) 定義域が $0 \leqq x \leqq 2$ の場合

(i) $y = f(x)$ のグラフは右図の実線部分

(ii) **グラフの形は (c)**

(iii) **最大値 $f(2) = f(0) = -2$**

最小値 $f(1) = -3$



◂ 軸は定義域内の真ん中にある．

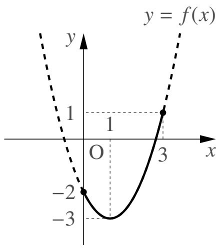
(4) 定義域が $0 \leqq x \leqq 3$ の場合

(i) $y = f(x)$ のグラフは右図の実線部分

(ii) **グラフの形は (d)**

(iii) **最大値 $f(3) = 1$**

最小値 $f(1) = -3$



◂ 軸は定義域内の左側にある．

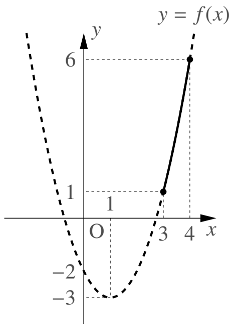
(5) 定義域が $3 \leqq x \leqq 4$ の場合

(i) $y = f(x)$ のグラフは右図の実線部分

(ii) **グラフの形は (e)**

(iii) **最大値 $f(4) = 6$**

最小値 $f(3) = 1$



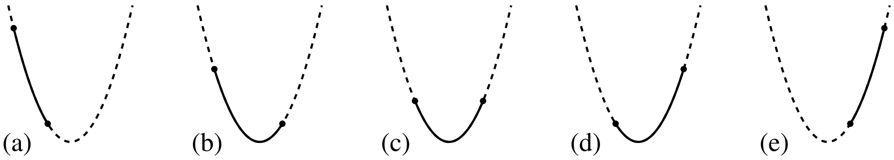
◂ 軸は定義域より左側にあり，y の値は常に増加している．

【練習 74：2 次関数の最大・最小〜その２〜】

(1)〜(3) の 2 次関数は，定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ とする．

(1) $f(x) = x^2 + 4x - 3$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 3$　　(3) $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$

それぞれについて，(i) $y = f(x)$ のグラフを描き，(ii) グラフの形を下の (a)-(e) から 1 つ選び（上に凸なグラフは，上下に反転したものを考えること），(iii) $f(x)$ の最大値・最小値をそれぞれ求めよ．



【解答】

(1) $f(x)$ を平方完成すると

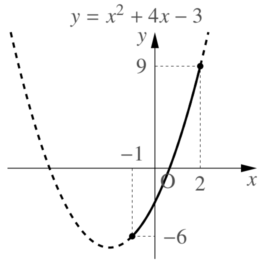
$$f(x) = (x + 2)^2 - 7$$

となり，定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ の場合

(i) $y = f(x)$ のグラフは右図の実線部分

(ii) **グラフの形は (e)**

(iii) **最大値** $f(2) = \mathbf{9}$，**最小値** $f(-1) = \mathbf{-6}$



◀ グラフを描くため平方完成した．放物線は下に凸になる．

◀ 軸は定義域より左側にあり，y の値は常に増加している．

(2) $f(x)$ を平方完成すると

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{7}{2}$$

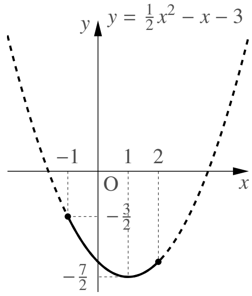
となり，定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ の場合

(i) $y = f(x)$ のグラフは右図の実線部分

(ii) **グラフの形は (b)**

(iii) **最大値** $f(-1) = \mathbf{-\dfrac{3}{2}}$

最小値 $f(1) = \mathbf{-\dfrac{7}{2}}$



◀ 放物線は下に凸

◀ 軸は定義域内の右側にある．

(3) $f(x)$ を平方完成すると

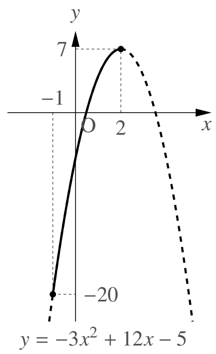
$$f(x) = -3(x - 2)^2 + 7$$

となり，定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ の場合

(i) $y = f(x)$ のグラフは右図の実線部分

(ii) **グラフの形は (a)**

(iii) **最大値** $f(2) = \mathbf{7}$，**最小値** $f(-1) = \mathbf{-20}$

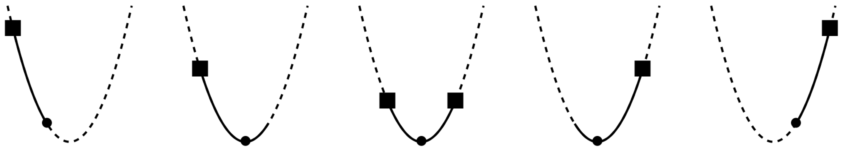


◀ 放物線は上に凸

◀ 軸は定義域内の右端にあり，y の値は常に増加している．

C. 文字定数を含む 2 次関数の最大・最小

定義域が限定された放物線は，最大値・最小値を与えるグラフ上の点に着目すれば，結局次の 5 種類である（y 座標が最大になる点を■，最小になる点を ● で表している）．



【練習 75：文字定数を含む 2 次関数の形の判別】

放物線 $C : y = x^2 - 4ax + a^2$ $(-5 \leqq x \leqq 5)$ について以下の問に答えよ．

(1) この放物線の軸の方程式を，a を用いて表せ．

(2) $a = 2$ のとき，y が最大・最小となるときの x の値を，それぞれ求めよ．

(3) $a = -1$ のとき，y が最大・最小となるときの x の値を，それぞれ求めよ．

(4) C の軸が定義域より左側にあるための，a の範囲を求めよ．また，定義域内における C の y 座標の最大値，最小値を求めよ．

(5) C の軸が定義域より右側にあるための，a の範囲を求めよ．また，定義域内における C の y 座標の最大値，最小値を求めよ．

(6) C の軸が定義域の中にあるための，a の範囲を求めよ．

(7) (6) のうち，定義域の左端で C の y 座標が最大となるような a の範囲を求め，このときの C の y 座標の最大値，最小値を求めよ．

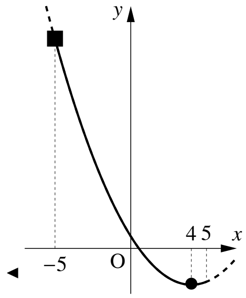
【解答】

(1) $y = x^2 - 4ax + a^2$ の右辺を平方完成すると

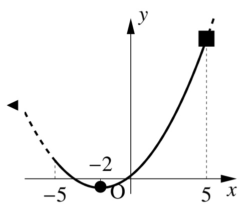
$$\begin{aligned} y &= (x-2a)^2 - 4a^2 + a^2 \\ &= (x-2a)^2 - 3a^2 \end{aligned}$$

となるので，このグラフの**軸は $x = 2a$** である．

(2) 定義域 $-5 \leqq x \leqq 5$ の放物線 C は右欄外の図のようになるので，
最大値をとるのは $x = -5$ のとき．
最小値をとるのは $x = 4$ のとき．



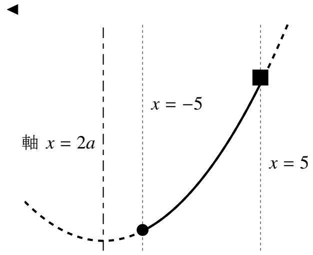
(3) 定義域 $-5 \leqq x \leqq 5$ の放物線 C は右欄外の図のようになるので，
最大値をとるのは $x = 5$ のとき．
最小値をとるのは $x = -2$ のとき．



(4) C の軸 $x = 2a$ が定義域の左端 $x = -5$ より左にあればよいので

$$2a < -5 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a < -\frac{5}{2}}$$

y 座標が最大となるのは定義域の右端なので
最大値 $a^2 - 20a + 25$（$x = 5$ のとき）
y 座標が最小となるのは定義域の左端なので
最小値 $a^2 + 20a + 25$（$x = -5$ のとき）



(5) C の軸 $x = 2a$ が定義域の右端 $x = 5$ より右にあればよい．

$$5 < 2a \iff \boldsymbol{\frac{5}{2} < a}$$

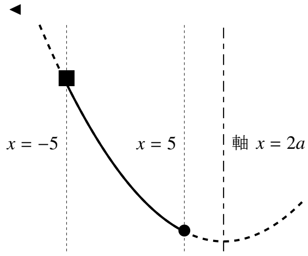
y 座標が最大となるのは定義域の左端なので

最大値 $\boldsymbol{a^2 + 20a + 25}$（$x = -5$ のとき）

y 座標が最小となるのは定義域の右端なので

最小値 $\boldsymbol{a^2 - 20a + 25}$（$x = 5$ のとき）

◀



(6) C の軸 $x = 2a$ が定義域の中にあるためには

$$-5 \leqq 2a \leqq 5 \iff \boldsymbol{-\frac{5}{2} \leqq a \leqq \frac{5}{2}}$$

◀ 各辺を 2 で割った．
『不等式の性質 ii)』(p.53) を利用．

(7) (5) のうち，定義域の左端で y 座標が最大となるには，軸が定義域の右半分に存在すればよい．つまり

$$0 \leqq 2a \leqq 5 \iff \boldsymbol{0 \leqq a \leqq \frac{5}{2}}$$

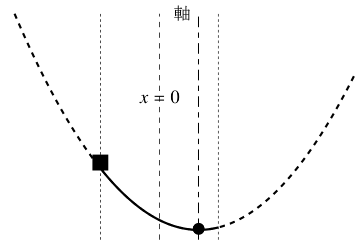
y 座標が最大となるのは定義域の左端なので

最大値 $\boldsymbol{a^2 + 20a + 25}$（$x = -5$ のとき）

y 座標が最小となるのは C の頂点なので

最小値 $\boldsymbol{-3a^2}$（$x = 2a$ のとき）

◀



上の問題において，$a = 0$ のときは定義域の両端で最大値をとる．

【練習 76：2 次関数の最大・最小（文字定数を含む場合）〜その１〜】

以下の場合における，2 次関数 $f(x) = x^2 - 2ax$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値・最小値を求めよ．

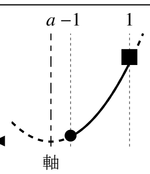
(1) $a \leqq -1$　　(2) $1 \leqq a$　　(3) $-1 < a < 0$

【解答】 $f(x) = (x - a)^2 - a^2$ と平方完成できるので，$y = f(x)$ は軸 $x = a$ の放物線になる．

(1) 軸は定義域より左側にあり，右欄外の図のようになるので

最大値 $\boldsymbol{f(1) = 1 - 2a}$，最小値 $\boldsymbol{f(-1) = 1 + 2a}$

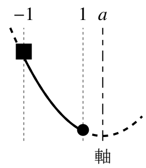
◀



(2) 軸は定義域より右側にあり，右欄外の図のようになるので

最大値 $\boldsymbol{f(-1) = 1 + 2a}$，最小値 $\boldsymbol{f(1) = 1 - 2a}$

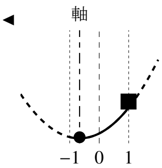
◀



(3) 軸は定義域の左半分にあり，右欄外の図のようになるので

最大値 $\boldsymbol{f(1) = 1 - 2a}$，最小値 $\boldsymbol{f(a) = -a^2}$

◀



【発展 77：2 次関数の最大・最小（文字定数を含む場合）～その２～】

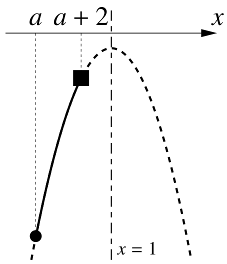
2 次関数 $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ について，以下の問いに答えよ．

① $f(x)$ の最大値・最小値を求めよ．　② $f(x)$ の最大値が -3 となるときの a の値を求めよ．

【解答】

① $f(x) = -2(x^2 - 2x) - 3 = -2\left\{(x-1)^2 - 1\right\} - 3 = -2(x-1)^2 - 1$

◀ グラフを書くため平方完成した



i. $a+2<1$ のとき

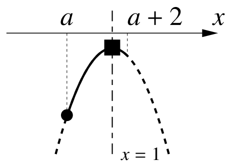
つまり $a<-1$ のとき

最大値は

$$f(a+2) = -2(a+2-1)^2 - 1 = -2a^2 - 4a - 3$$

最小値は

$f(a) = -2a^2 + 4a - 3$



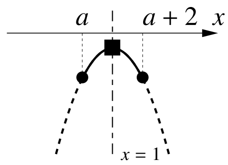
ii. $a+1<1$ かつ $1 \leqq a+2$ のとき

つまり $-1 \leqq a < 0$ のとき

最大値は $f(1) = -1$

最小値は

$f(a) = -2a^2 + 4a - 3$

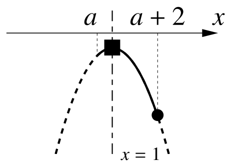


iii. $a+1=1$ のとき

つまり $a=0$ のとき

最大値は $f(1) = -1$

最小値は $f(0) = f(2) = -3$



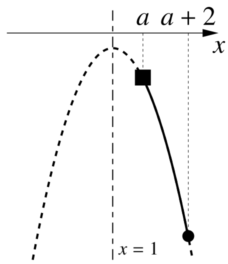
iv. $a \leqq 1$ かつ $1 < a+1$ のとき

つまり $0 < a \leqq 1$ のとき

最大値は $f(1) = -1$

最小値は

$f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3$



v. $1<a$ のとき

最大値は

$f(a) = -2a^2 + 4a - 3$

最小値は

$f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3$

以上をまとめれば次のようになる．

$$\text{最大値}\begin{cases} a<-1 \text{ のとき} & f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3 \\ -1 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき} & f(1) = -1 \\ 1<a \text{ のとき} & f(a) = -2a^2 + 4a - 3 \end{cases}$$

$$\text{最小値}\begin{cases} a \leqq 0 \text{ のとき} & f(a) = -2a^2 + 4a - 3 \\ 0<a \text{ のとき} & f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3 \end{cases}$$

（a の場合分けについて，等号の付け方が違っても良い．たとえば，最大値ならば「$a \leqq -1$ のとき」「$-1 < a < 1$ のとき」「$1 \leqq a$ のとき」と場合分けしてもよい．最小値なども同様である.）

◀ 以下のように答えてもよい．

$a<-1$ のとき

最大値 $f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3$

最小値 $f(a) = -2a^2 + 4a - 3$

$-1 \leqq a < 0$ のとき

最大値 $f(1) = -1$

最小値 $f(a) = -2a^2 + 4a - 3$

$a = 0$ のとき

最大値 $f(1) = -1$，最小値 $f(0) = f(2) = -3$

$0 < a \leqq 1$ のとき

最大値 $f(1) = -1$

最小値 $f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3$

$1 < a$ のとき

最大値 $f(a) = -2a^2 + 4a - 3$

最小値 $f(a+2) = -2a^2 - 4a - 3$

② 最大値が -3 となるには

a. **$a < -1$ のとき**

$-2a^2 - 4a - 3 = -3$ であればよい．これを解いて $a = 0, -2$.

$a < -1$ であるので $a = -2$ のみ適する．

b. **$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき**，最大値が -3 になることはない．

◀ というのも，最大値は常に -1 に等しい．

c. **$a < -1$ のとき**

$-2a^2 + 4a - 3 = -3$ であればよい．これを解いて $a = 0,\ 2$.

$1 < a$ であるので $a = 2$ のみ適する．

以上より，最大値が -3 になるのは $\boldsymbol{a = -2,\ 2}$ のときである．

【発展 78：2 次関数の最大・最小（文字定数を含む場合）〜その３〜】

$a > 0$ とする．2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 5\ \ (0 \leqq x \leqq a)$ について以下の問に答えよ．

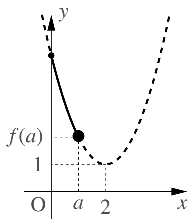
① 最小値を求めよ．　② 最大値を求めよ．

a の値を 0 から増やしていくとき，グラフの最大値・最小値をとる点がいつ変わるのかグラフを描いて考えて，場合分けをしよう．

【解答】 $y = f(x)$ を平方完成すれば $y = (x-2)^2 + 1$ となる．

① i) **$0 < a < 2$ のとき**

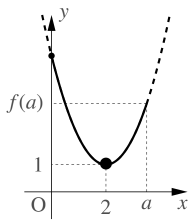
$0 \leqq x \leqq a$ における $y = f(x)$ のグラフは右図のようになるので，最小値は $f(a) = a^2 - 4a + 5$ となる．



◀ この定義域内では，関数の値は減少している

ii) **$2 \leqq a$ のとき**

$0 \leqq x \leqq a$ における $y = f(x)$ のグラフは右図のようになるので，最小値は $f(2) = 1$ となる．



◀ この場合には，定義域内に軸 $x = 2$ が含まれる

◀ 場合分けは「$0 < a \leqq 2$ のとき」「$2 < a$ のとき」でもよい．

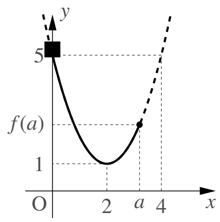
以上 i), ii) をまとめると

$0 < a < 2$ のとき，　最小値 $f(a) = a^2 - 4a + 5$

$2 \leqq a$ のとき，　最小値 $f(2) = 1$

② i) **$0 < a < 4$ のとき**

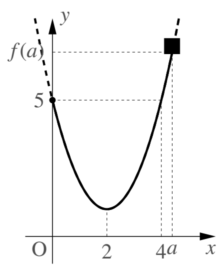
$0 \leqq x \leqq a$ における $y = f(x)$ のグラフは右図のようになるので，最大値は $f(0) = 5$ となる．



◀ この場合には，定義域の両端の y 座標を比べると，左端の方が大きい．

ii) **$4 \leqq a$ のとき**

$0 \leqq x \leqq a$ における $y = f(x)$ のグラフは右図のようになるので，最大値は $f(a) = a^2 - 4a + 5$ となる．



◀ この場合には，定義域の両端の y 座標を比べると，右端の方が大きい．

以上 i), ii) をまとめると

$0 < a < 4$ のとき，　最大値 $f(0) = 5$

$4 \leqq a$ のとき，　最大値 $f(a) = a^2 - 4a + 5$

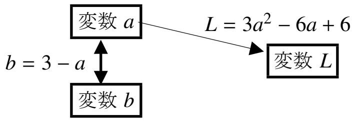
5.　2次関数の応用問題

A.　x や y 以外の文字を用いて関数を表現する

$a+b=3$ のとき，式 $L=2a^2+b^2-3$ のとる値について考えてみよう．

このLの値は a のみによって決まる．実際，$b=3-a$ を L に代入すれば

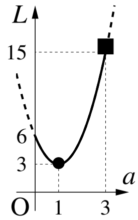
$$L=2a^2+(3-a)^2-3=3a^2-6a+6$$
$$=3(a-1)^2+3 \quad \leftarrow\text{平方完成した}$$



となって，L は a のみで決まることが分かる．そのうえ，平方完成の結果，最大値は無し，最小値は $a=1$ のときの $L=3$ と分かる．このとき，$b=2$ である．

さらに，$0\leqq a$, $0\leqq b$ に限れば，$b=3-a$ を $0\leqq b$ に代入して

$$0\leqq b \iff 0\leqq 3-a \iff a\leqq 3$$



から，$0\leqq a\leqq 3$ と分かるので，右上のグラフから，L の最大値は $a=3$ のときの $L=15$ と分かる．このとき，$b=0$ である．

…… $a=3-b$ によって a を消去して考えても，L の最大・最小について同じ結果を得る．

【例題 79】　実数 p, q に対して，$L=p^2-q^2$ とする．

1. $p+2q=9$ であるとき，L の最大値・最小値と，そのときの p, q の値を求めよ．
2. 1. に加えて $0\leqq p$, $0\leqq q$ であるとき，L の最大値・最小値と，そのときの p, q の値を求めよ．

【解答】

1. $p=9-2q$ を L に代入して平方完成すれば

$$\begin{aligned} L=(9-2q)^2-q^2 &= 3q^2-36q+81 \\ &= 3(q^2-12q)+81 \\ &= 3\left\{(q-6)^2-36\right\}+81 \\ &= 3(q-6)^2-27 \end{aligned}$$

◀ $q=\dfrac{9-p}{2}$ を代入してもよいが，計算は大変になる．

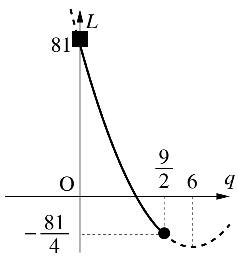
となる．$q=6$ のときに最小値 -27 をとる．$q=6$ のときは $p=-3$ なので，L の**最大値はなし，最小値は -27（$p=-3$, $q=6$）**である．

◀ $p=9-2q$ に $q=6$ を代入すれば，$p=-3$ を得る．

2. $p=9-2q$ を $0\leqq p$ に代入して

$$0\leqq p \iff 0\leqq 9-2q \iff q\leqq\frac{9}{2}$$

であるので $0\leqq q\leqq\dfrac{9}{2}$ である．$L=3(q-6)^2-27\ \left(0\leqq q\leqq\dfrac{9}{2}\right)$ のグラフは右欄外の図のようになるので，$q=0$ のとき L は最大，$q=\dfrac{9}{2}$ のとき L は最小と分かる．よって，**$p=9$, $q=0$ のとき最大値 81**，**$p=0$, $q=\dfrac{9}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{81}{4}$** と求められる．



◀

◀ $p=9-2q$ に $q=0$ を代入すれば，$p=9$ を得る．

◀ $p=9-2q$ に $q=\dfrac{9}{2}$ を代入すれば，$p=0$ を得る．

B. 2 次関数の最大・最小の応用

2 次関数の知識を利用して，身近にある様々な問題を解くことができる．

【練習 80：2 次関数の身近な例への応用】

(1) 長さ 20 cm の針金を 2 つに切り，それぞれの針金で正方形を作るとき，それらの面積の和の最小値を求めよ．また，そのとき針金は何 cm ずつに切り分けられているか求めよ．

(2) ある品物の売価が 1 個 120 円のときには，1 日の売上個数は 400 個であり，売価を 1 個につき 1 円値上げするごとに，1 日の売上個数は 2 個ずつ減るという．1 日の売上金額を最大にするには，売価をいくらに設定すればよいか求めよ．

【解答】

(1) 20 cm の針金を，$4x$ cm と $(20-4x)$ cm に切り分けたとする．ただし，$0<x<5$ とする．それぞれの針金から作られる正方形の面積は

$$\frac{4x}{4}\times\frac{4x}{4}=x^2,\qquad \frac{20-4x}{4}\times\frac{20-4x}{4}=(5-x)^2$$

となる．2 つの正方形の面積の和を $f(x)$ (cm^2) とすると

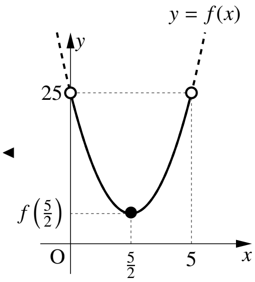
$$\begin{aligned} f(x)=x^2+(5-x)^2 &= 2x^2-10x+25\\ &=2\left\{x^2-5x\right\}+25\\ &=2\left\{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right\}+25\\ &=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}\end{aligned}$$

と変形できるから，$y=f(x)$（$0<x<5$）のグラフは右欄外の図のようになる．これより最小値は $f\left(\frac{5}{2}\right)$ と分かるので，面積の和の最小値は $\boldsymbol{\frac{25}{2}}$ **cm^2** であり，$4x=10$ のとき最小値となるから針金は **10 cm ずつに切り分けられる**．

◀ x cm と $(20-x)$ cm に切り分けた，とおいてもよいが，計算はとても大変になる．

◀ x の値によって「2 つの正方形の面積の和」を決める式を $f(x)$ とおいている．

◀ $f(x)$ の最小値を求めたいので平方完成する



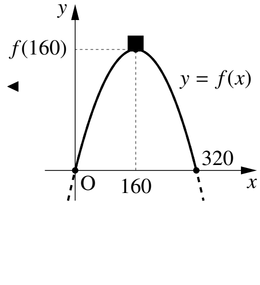
(2) 売価を 1 個 x 円$(0\leqq x\leqq 320)$とすると，120 円より $(x-120)$ 円値上げしたことになる．その結果，1 日の売上個数は $2(x-120)$ 個減る．
よって，1 日の売上金額 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x)=x\{400-2(x-120)\} &= x(640-2x)\\ &=-2x^2+640x\\ &=-2(x^2-320x)\\ &=-2\left\{(x-160)^2-25600\right\}\\ &=-2(x-160)^2+51200\end{aligned}$$

と変形できるから，$y=f(x)$ のグラフは $0\leqq x\leqq 320$ で右欄外の図のようになる．これより，$x=160$ で最大値をとると分かるので，売価を **160 円**にすればよい．

◀ 値上げすれば売上個数は減る．しかし，売上個数を増やすために値下げすればよいとも限らない．

◀【別解】$f(x)=-2x(x-320)$ と変形すると，放物線の軸に対する対称性から，$f(x)=0$ の 2 解 0, 320 の真ん中 $x=160$ において，$f(x)$ が最大値をもつとわかる．詳しくは p.121 を参照のこと．



【練習 81：1 つの文字に帰着できる 2 次関数】

$0 \leqq x$，$0 \leqq y$，$2x + y = 10$ のとき，$L = x^2 + y^2 - 3$ の最大値・最小値を求めよ．また，そのときの x，y を求めよ．

【解答】 $2x + y = 10$ より $y = 10 - 2x$．これを $0 \leqq y$ に代入すれば

$$0 \leqq y \Leftrightarrow 0 \leqq 10 - 2x \Leftrightarrow x \leqq 5$$

であるので $0 \leqq x \leqq 5$ である．

◀ 条件式と，最大・最小を求めたい関数から，y を消去することが目的．
x について解いてもよいが，分数が出てしまう．

さらに，$x^2 + y^2 - 3$ に $y = 10 - 2x$ を代入すれば

$$x^2 + y^2 - 3 = x^2 + (10 - 2x)^2 - 3 = 5x^2 - 40x + 97$$

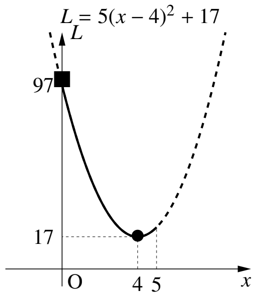
である．これを $f(x)$ とおいて平方完成すると

$$f(x) = 5(x - 4)^2 + 17$$

そこでグラフ $L = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 5)$ を描けば，右欄外のようになり，$f(x)$ の最大値は $f(0) = 97$，最小値は $f(4) = 17$ とわかる．よって

$x = 0$, $y = 10$ のとき最大値 97，$x = 4$, $y = 2$ のとき最小値 17

◀



C. 式の一部を置き換える

【発展 82：式の一部を文字でおく】

① $t = x^2 - 2x$ について，t の値のとりうる範囲を求めよ．

② 関数 $y = (x^2 - 2x)^2 + 4x^2 - 8x + 5$ について，y の値のとりうる範囲を求めよ．

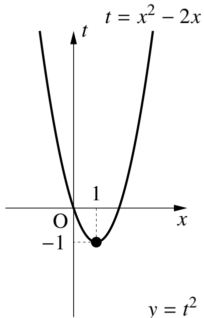
【解答】

① 平方完成によって

$$t = (x - 1)^2 - 1$$

であるので，右欄外の図より **$t \geqq -1$**．

◀

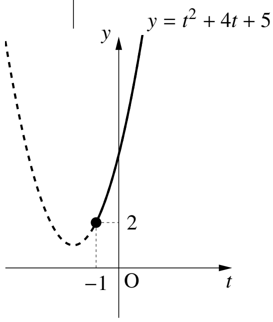


② y を t で表し平方完成すれば

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) + 5 \\ &= t^2 + 4t + 5 \\ &= (t + 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

となる．(1) より $-1 \leqq t$ であるので，t に対する y のグラフは右欄外の図のようになる．つまり，**$y \geqq 2$**.

◀



【発展 83：2 文字 2 次式の最大・最小】

x の 2 次関数 $y = 2x^2 + 4kx + k^2 + 4k - 2$ について，y の最小値 m を k を用いて表せ．さらに，m の最大値とそのときの k の値を求めよ．

【解答】　x について平方完成すれば

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 + 2kx) + k^2 + 4k - 2 \\ &= 2\left\{(x+k)^2 - k^2\right\} + k^2 + 4k - 2 \\ &= 2(x+k)^2 - k^2 + 4k - 2 \end{aligned}$$

であるので，y の最小値 m は，$x = -k$ のときの $\boldsymbol{m = -k^2 + 4k - 2}$ である．さらに

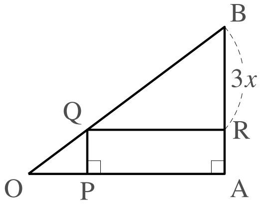
$$m = -(k-2)^2 + 2$$

と変形できるので，**$k = 2$ のとき m は最大値 2** をとる．

【発展 84：2 次関数の利用】

3 辺が 3 cm，4 cm，5 cm の直角三角形の紙から，はさみを使って鋭角を切り落とし，面積が最大の長方形を作るにはどのようにすればよいか．

【解答】　右図のように，OA = 4，AB = 3，OB = 5 の直角三角形と長方形 PQRA で考える．



BR = $3x$ とおく（$0 < x < 1$）と，QR // OA より △BRQ ∽ △BAO であるので

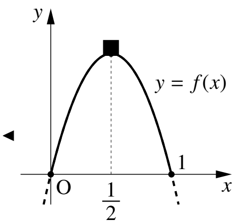
BR : RQ = BA : AO　⇔　$3 : x = 3 : 4$

から QR = $4x$ になる．また，AR = $3 - 3x$ になる．

◀ この問題では，どこを x とおいても解くことができる．たとえば RA = x とおいた場合は，QR = x と △QPO ∽ △BAO を使うのがよい．
ただし，BR = x のようにおくと計算が大変になる．

よって，長方形 PQRA の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 4x(3-3x) = -12x^2 + 12x \\ &= -12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 \end{aligned}$$



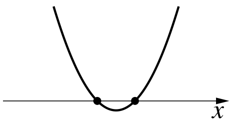
となるから，$x = \dfrac{1}{2}$ のとき，面積最大と分かる．このとき，BR = $\dfrac{3}{2}$，QR = 2 であるから，**各辺の中点に長方形の頂点が来るように作ればよい**と分かる．

6.　放物線と x 軸の位置関係 — 判別式 D

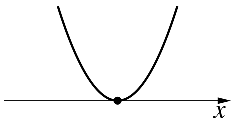
A.　放物線と x 軸の共有点

放物線と x 軸の共有点は，最大で 2 個になる．たとえば，下に凸な放物線ならば以下のようになる．

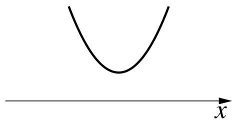
i) x 軸と 2 つの共有点をもつ



ii) x 軸と 1 つの共有点をもつ



iii) x 軸と共有点をもたない



放物線が上に凸の場合も，上下が逆になる以外は同様の結果になる．

【例題 85】　次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を，それぞれ答えよ．

1. $y = (x-1)^2 - 5$
2. $y = -(x-3)^2 - 2$
3. $y = 2x^2 + 8x + 1$

【解答】　グラフを書いて考える．

1. 共有点を **2 つ**もつ．
2. 共有点は**ない**．
3. 平方完成すれば $y = 2(x+2)^2 - 7$ となり，共有点を **2 つ**もつ．

B.　放物線の判別式 D

放物線と x 軸の共有点の個数は，放物線の頂点の y 座標が正であるか，0 であるか，負であるかによって決定される．一般の放物線 $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ の平方完成は

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

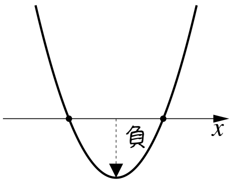
となり，頂点の y 座標は，$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ である（p.89）．よって，$a > 0$ の場合は次のようになる．

$a > 0$ の場合

i) $b^2 - 4ac > 0$ のとき

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{（正）}{（正）}$$

より，頂点の y 座標は負．

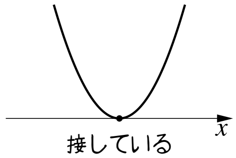


x 軸との共有点は 2 つ

ii) $b^2 - 4ac = 0$ のとき

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{0}{（正）}$$

より，頂点の y 座標は 0．

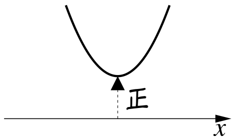


x 軸との共有点は 1 つ
放物線の頂点が共有点

iii) $b^2 - 4ac < 0$ のとき

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{（負）}{（正）}$$

より，頂点の y 座標は正．



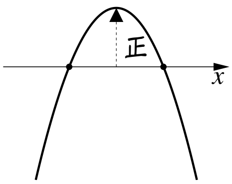
x 軸との共有点はない

【例題 86】 $a < 0$ とする．以下の $\boxed{}$ に「正」「負」「0」「1」「2」のいずれかを入れよ．

i) $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$ **のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

より，頂点の y 座標は $\boxed{ウ}$．

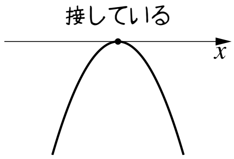


x 軸との共有点は $\boxed{エ}$ 個

ii) $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$ **のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$$

より，頂点の y 座標は $\boxed{キ}$．

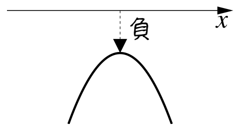


x 軸との共有点は $\boxed{ク}$ 個

iii) $\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$ **のとき**

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$$

より，頂点の y 座標は $\boxed{サ}$．



x 軸との共有点は $\boxed{シ}$ 個

【解答】

i) ア : 正，イ : 負，ウ : 正，エ : **2**　　ii) オ : **0**，カ : 負，キ : **0**，ク : **1**

iii) ケ : 負，コ : 負，サ : 負，シ : **0**

放物線の判別式 D

放物線 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ と x 軸の共有点の個数は，判別式 $D = b^2 - 4ac$ を用いて判別できる．

i) $\boldsymbol{D > 0}$ **のとき**

放物線 $y = f(x)$ は x 軸と「2 つの共有点をもつ」

ii) $\boldsymbol{D = 0}$ **のとき**

放物線 $y = f(x)$ は x 軸と「1 つの共有点をもち」，「x 軸と**接する** (contact) 」．

ただ 1 つの共有点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ 0\right)$ は**接点** (point of contact) とよばれ，放物線の頂点に一致する．

iii) $\boldsymbol{D < 0}$ **のとき**

放物線 $y = f(x)$ は x 軸と「共有点をもたない」

「x 軸との共有点の個数を判別する」2 次関数の判別式 D と，「実数解の個数を判別する」2 次方程式の判別式 D（p.65）の関係については p.115 で学ぶ．

【例題 87】 以下の $\boxed{}$ に適当な数値を入れよ．

1. 放物線 $y = 2x^2 + 5x - 1$ は，判別式 D の値が $\boxed{ア}$ なので，x 軸との共有点は $\boxed{イ}$ 個である．
2. 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$ は，判別式 D の値が $\boxed{ウ}$ なので，x 軸との共有点は $\boxed{エ}$ 個である．
3. 放物線 $y = \frac{2}{3}x^2 + 3x + 5$ は，判別式 D の値が $\boxed{オ}$ なので，x 軸との共有点は $\boxed{カ}$ 個である．

【解答】

(1) ア： $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = \mathbf{33}$，イ : **2**

(2) ウ： $D = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = \mathbf{0}$，イ : **1**

(3) ア： $D = 3^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \boldsymbol{-\frac{13}{3}}$，イ : **0**

【練習 88：放物線と x 軸との共有点の個数の判別】

2 次関数 $y = x^2 - (k-1)x + \frac{1}{4}k^2 + k + 1$ のグラフ C について，以下の問いに答えよ.

(1) $k = -4$ のとき，放物線 C と x 軸との共有点の個数はいくつあるか.

(2) $k = 2$ のとき，放物線 C と x 軸との共有点の個数はいくつあるか.

(3) C と x 軸との共有点の個数が 2 個，1 個，0 個であるための，定数 k の条件をそれぞれ答えよ.

【解答】

(1) $k = -4$ のとき，C： $y = x^2 + 5x + 1$ であるので

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$$

であるので，共有点は **2 個**存在する.

(2) $k = 2$ のとき，C： $y = x^2 - x + 4$ であるので

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$$

であるので，共有点は**存在しない**

(3) $y = x^2 - (k-1)x + \frac{1}{4}k^2 + k + 1$ の判別式を D とすると

$$D = (k-1)^2 - 4\left(\frac{1}{4}k^2 + k + 1\right)$$
$$= k^2 - 2k + 1 - k^2 - 4k - 4 = -6k - 3$$

i) 共有点が 2 個，つまり，$D > 0$ のとき
$-6k - 3 > 0$ を解いて $k < -\frac{1}{2}$

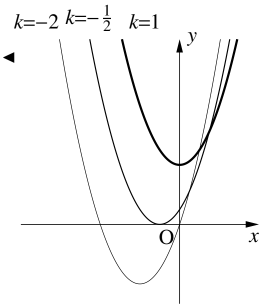
ii) 共有点が 1 個，つまり，$D = 0$ のとき
$-6k - 3 = 0$ を解いて $k = -\frac{1}{2}$ のとき

◀ このとき，グラフと x 軸は接している.

iii) 共有点が 0 個，つまり，$D < 0$ のとき
$-6k - 3 < 0$ を解いて $k > -\frac{1}{2}$

以上 i)〜iii) より，共有点の個数は次のようになる.

◀



$\boldsymbol{k < -\frac{1}{2}}$ **のとき　2個**　　$\boldsymbol{k = -\frac{1}{2}}$ **のとき　1個**

$\boldsymbol{k > -\frac{1}{2}}$ **のとき　0個**

2.5　2次方程式と2次関数

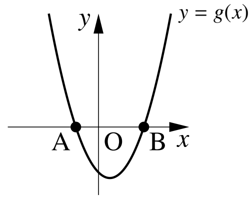
1.　2次方程式の判別式 D と2次関数の判別式 D を同一視する

A.　放物線と x 軸の共有点

2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ において，判別式 $D = b^2 - 4ac$ が0以上であれば，放物線 $y = f(x)$ が x 軸と共有点をもつ (p.113)．このとき，「共有点の x 座標」を求めてみよう．

【暗記 89：2次関数と x 軸の共有点の座標〜その1〜】

以下の $\boxed{}$ にあてはまる数値・式・言葉を答えよ．



1. 2次関数 $y = x^2 - x - 2$ のグラフにおいて，y 座標が0になる点を求めるには，2次方程式

   $\boxed{ア} = 0$

   を解けばよい．その結果，A($\boxed{イ}$, 0)，B($\boxed{ウ}$, 0) と分かる．
2. 2次関数 $y = x^2 - 2x - 4$ のグラフと $\boxed{エ}$ 軸の共有点を求めるには，2次方程式

   $x^2 - 2x - 4 = 0$

   を解けばよい．その結果，($\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$)，($\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$) と分かる．
3. 2次関数 $y = x^2 - 2x + 4$ のグラフにおいて y 座標が0になる点を求めるには

   $\boxed{ケ} = 0$ ……………………①

   という2次方程式を解けばよい．この2次方程式の判別式 D を計算すると0より $\boxed{コ}$ ため，①は解を持たない．つまり，2次関数 $y = x^2 - 2x + 4$ のグラフは y 座標が0になることはない．

【解答】

1. ア: $\boldsymbol{x^2 - x - 2}$，　イ: $\boldsymbol{-1}$，　ウ: $\boldsymbol{2}$
2. エ: $\boldsymbol{x}$，　(オ, カ) = $(\boldsymbol{1 - \sqrt{5}},\ \boldsymbol{0})$，　(キ, ク) = $(\boldsymbol{1 + \sqrt{5}},\ \boldsymbol{0})$
3. ケ: $\boldsymbol{x^2 - 2x + 4}$

   コ: $\dfrac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \cdot 4 < 0$ より，0より**小さい**

◀ $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

◀ $x^2 - 2x - 4 = 0$ を解の公式で解いた．

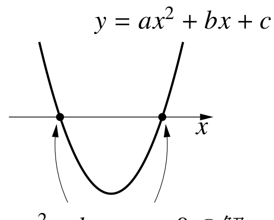
放物線と x 軸との共有点

判別式 D が0以上である2次関数

$y = ax^2 + bx + c$

のグラフと x 軸 ($y = 0$) との共有点の x 座標は，次の2次方程式の解である．

$ax^2 + bx + c = 0$



【練習 90：放物線と x 軸との共有点を調べる】

次の放物線と x 軸との共有点があるならば，その共有点の座標を求めよ．

(1) $y = x^2 - x - 1$　　(2) $y = -4x^2 + 4x - 1$　　(3) $y = x^2 - x + 1$

【解答】

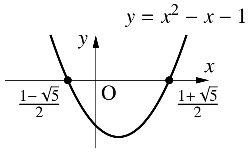
(1) 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ を解けば

◀『解の公式』(p.63)

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

であるので，このグラフと x 軸の共有点の座標は

$\left(\boldsymbol{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ 0}\right)$，$\left(\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ 0}\right)$ となる．

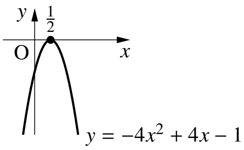
◀ 

(2) 2 次方程式 $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ を解けば

$\Leftrightarrow\ 4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow\ (2x - 1)^2 = 0$

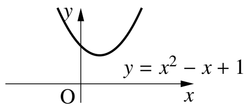
より，$x = \dfrac{1}{2}$ なので，$\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2},\ 0}\right)$ が共有点である．

◀ 

(3) 2 次方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の判別式を D とすると

$D = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$

なので，**x 軸と共有点をもたない**．

◀ 

【練習 91：x 軸と接するための条件】

放物線 $y = 4x^2 + 2(k-1)x - k + 4$ が x 軸と接するよう定数 k の値を定めよ．また，そのときの接点を求めよ．

【解答】　2 次関数 $y = 4x^2 + 2(k-1)x - k + 4$ の判別式 $D = 0$ であればよい．

◀『判別式 D と放物線の関係』(p.113)

◀ または $D = 4k^2 + 8k - 60$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{4} &= (k-1)^2 - 4(-k+4) \\
&= k^2 - 2k + 1 + 4k - 16 \\
&= k^2 + 2k - 15 = 0
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow\ (k+5)(k-3) = 0$　　$\therefore\ \boldsymbol{k = -5,\ 3}$

$k = -5$ のとき

$y = 4x^2 + 2(k-1)x - k + 4 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$

より，**接点は** $\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2},\ 0}\right)$ である．

$k = 3$ のとき

$y = 4x^2 + 2(k-1)x - k + 4 = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$

より，**接点は** $\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{2},\ 0}\right)$ である．

B.　2 次方程式の解をグラフで表す

p.115 の「放物線と x 軸との共有点」を逆に考えれば，次のことがわかる．

2 次方程式の解をグラフに表す

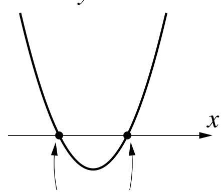
判別式 D が 0 以上である 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解は，2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

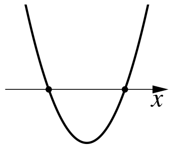
のグラフと x 軸との「共有点の x 座標」に表れる．



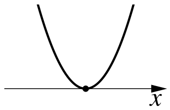
【暗記 92：2 次方程式の解をグラフで表す】

次の空欄に適当な数字または文字を入れよ．

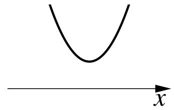
(a)



(b)



(c)



1. 2 次方程式 $x^2 - 4x - 5 = 0$ の解は

　2 次関数 $\boxed{ア}$ ……………………… ①

　と x 軸との「共有点の x 座標」に一致し，$\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$ である．

　また，2 次関数①のグラフは，上の (a), (b), (c) のうち，$\boxed{エ}$ に一番近い．

2. 2 次方程式 $9x^2 - 6x + 1 = 0$ の解は

　2 次関数 $\boxed{オ}$ ……………………… ②

　と x 軸との「共有点の x 座標」に一致し，$\boxed{カ}$ である．

　また，2 次関数②のグラフは，上の (a), (b), (c) のうち，$\boxed{キ}$ に一番近い．

3. 2 次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の解は

　2 次関数 $\boxed{ク}$ ……………………… ③

　と x 軸との「共有点の x 座標」に一致するが，これは存在しない．

　2 次関数③のグラフは，上の (a), (b), (c) のうち，$\boxed{ケ}$ に一番近い．

【解答】

1. ア: $\boldsymbol{y = x^2 - 4x - 5}$，イ: **−1**，ウ: **5**，エ: **(a)**
2. オ: $\boldsymbol{y = 9x^2 - 6x + 1}$，カ: $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$，キ: **(b)**
3. ク: $\boldsymbol{y = x^2 - 4x + 5}$，ケ: **(c)**

◀ イ，ウは $x^2 - 4x - 5 = 0$ の 2 解

◀ カは $9x^2 - 6x + 1 = 0$ の解

◀ $x^2 - 4x + 5 = 0$ は $\dfrac{D}{4} = -1 < 0$ であり，解を持たない．

C. 判別式 D

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ においても，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ においても，判別式 D は同一の式

$D=b^2-4ac$

で定義され，以下のことが成り立つ．

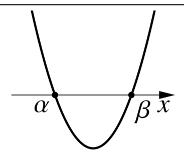
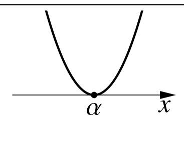
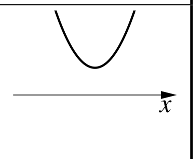
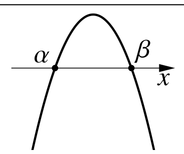
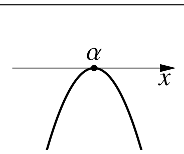
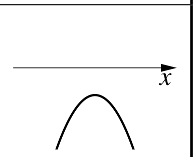
「2 次方程式の解」と「放物線と x 軸との共有点の x 座標」の対応

$a\neq 0$ である 2 次式 ax^2+bx+c に対し
- 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸の共有点の個数
- 方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の個数

は一致し，判別式 $D=b^2-4ac$ に対して

$D>0$ ならば 2 個，$D=0$ ならば 1 個[*13]，$D<0$ ならば 0 個

である．また，$D\geqq 0$ ならば次も一致する．
- 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との共有点の x 座標
- 方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の値

判別式 D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフ（$a>0$ のとき）			
$y=ax^2+bx+c$ のグラフ（$a<0$ のとき）			
$ax^2+bx+c=0$ の解	2 解 $\alpha,\ \beta$	重解 α	なし

【例題 93】 以下の $\boxed{}$ に当てはまる語句・式・値を答えよ．
- 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 D は $\boxed{ア}$ を判別する式である．
- 放物線 $y=ax^2+bx+c$ の判別式 D は $\boxed{イ}$ を判別する式である．
- これら 2 つの判別式は一致する．なぜなら，$\boxed{イ}$ を判別するには，$y=ax^2+bx+c$ の $\boxed{ウ}$ に $\boxed{エ}$ を代入して得られる方程式 $\boxed{オ}$ を解くからである．

【解答】 ア：（2 次方程式の）解の個数，イ：放物線と x 軸の共有点の個数（または，位置関係）
ウ：y，エ：0，オ：$ax^2+bx+c=0$

[*13] ここでは重解を「1 個」と数えている．一般的には，重複度を込めて「2 個」と数えることが多い．

§2.6 で学ぶ 2 次不等式において，前ページの内容は必要不可欠になる．

2.　2次方程式・2次関数の応用

A.　放物線と直線・放物線の共有点

放物線と直線・放物線の共有点についても，p.76 のときと同じことが成り立つ．

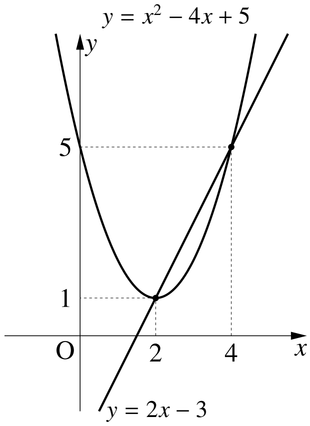
つまり，グラフの共有点の座標と連立方程式の解は一致する．

連立方程式の解が無い場合は，グラフの共有点も無い．解の個数も，解の数値も，「グラフの共有点の座標と連立方程式の解は一致する」．

たとえば，放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ と直線 $y = 2x - 3$ の共有点の座標 $(x,\ y)$ は

$y = x^2 - 4x + 5$ ……… ①

$y = 2x - 3$ ……… ②



を同時に満たす $(x,\ y)$ と等しい．つまり，連立方程式①，②を解けばよい．①を式②の左辺に代入して解けば

$$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 - 6x + 8 = 0 \qquad \therefore\ \ x = 2,\ 4$$

となる．そこで，②に代入して y を求めれば

$x = 2$ のとき $y = 1$，$x = 4$ のとき②より $y = 5$

であるので，共有点の座標は $(2,\ 1)$，$(4,\ 5)$ とわかる．

【例題 94】 放物線 C: $y = x^2 - 2x + 3$ と直線 L: $y = -x + 5$ との共有点を求め，C と L のグラフを描け．

【解答】 C と L の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 & \cdots\cdots ① \\ y = -x + 5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の解に一致する．②の左辺に①を代入して解けば

$$x^2 - 2x + 3 = -x + 5$$

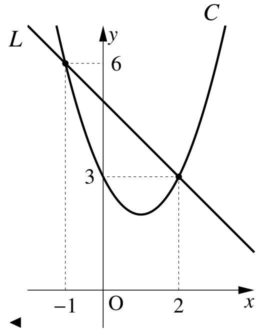
$$\Leftrightarrow\ x^2 - x - 2 = 0 \qquad \therefore\ \ x = 2,\ -1$$

となる．②に代入して y を求めれば

$x = -1$ のとき $y = 6$，　$x = 2$ のとき $y = 3$

であるので，共有点の座標は $\mathbf{(-1,\ 6)}$，$\mathbf{(2,\ 3)}$．

グラフは，右欄外のようになる．



【練習 95：放物線と直線・放物線の共有点】

放物線 C : $y = x^2 - 2x + 3$ について

(1) 放物線 C_1 : $y = -x^2 - x + 6$ との共有点を求め，C と C_1 のグラフを描け．

(2) 直線 L : $y = -2x - k$ との共有点が 1 つであるように，k の値を定めよ．
また，そのときの C と L のグラフを描け．

【解答】

(1) C と C_1 の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 & \cdots\cdots ① \\ y = -x^2 - x + 6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の解に一致する．②の左辺に①を代入して解けば

$$x^2 - 2x + 3 = -x^2 - x + 6$$

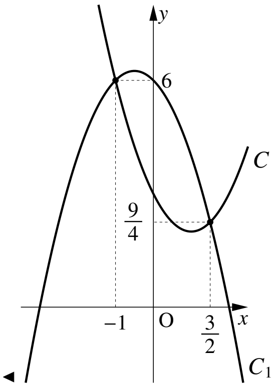
$$\Leftrightarrow\ 2x^2 - x - 3 = 0 \qquad \therefore\ x = \frac{3}{2},\ -1$$

となる．②に代入し y を求めれば

$$x = \frac{3}{2} \text{ のとき } y = \frac{9}{4}\ ,\quad x = -1 \text{ のとき } y = 6$$

であるので，共有点の座標は $\boldsymbol{(-1,\ 6)}$，$\boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)}$.

グラフは，右欄外のようになる．



(2) 2 つのグラフの共有点が 1 つであるには，連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 & \cdots\cdots ③ \\ y = -2x - k & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

の解が重解であればよい．④の左辺に③を代入して

$$x^2 - 2x + 3 = -2x - k$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + 3 + k = 0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となる．⑤の判別式を D が 0 となればよいので，

◀ x の係数は 0 である．

$$\frac{D}{4} = 0^2 - 1 \cdot (3 + k) = 0 \quad \therefore\ \boldsymbol{k = -3}$$

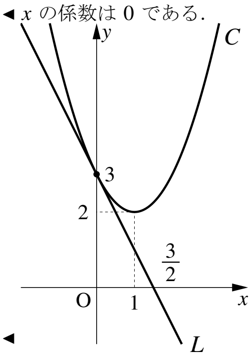
④に代入して，直線 L を表す式は $y = -2x + 3$ となる．

C と L の共有点は，再び連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

を解いて $(x,\ y) = (0,\ 3)$.

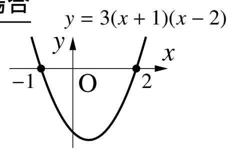
つまり，グラフは右欄外のようになる．



放物線と直線・放物線の共有点が 1 点のときも，その 2 つのグラフは「接している」といい，その共有点をやはり「接点」という．たとえば，(2) において，直線 L と放物線 C は接していて，その接点は $(0,\ 3)$ である．

B.　2 次関数・因数分解型 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の決定〜x 軸との共有点が与えられた場合

たとえば，2 次関数 $y=3(x+1)(x-2)$ と x 軸の共有点を考えよう．これは 2 次方程式 $3(x+1)(x-2)=0$ の 2 解であり，ただちに $x=-1,\ 2$ を得て，右図のようなグラフを描くことができる．



【例題 96】 次の 2 次関数と x 軸の共有点を求めよ．

1. $y=(x+2)(x-3)$　　2. $y=2(x-1)(x+3)$　　3. $y=-3(x-4)(x+1)$

【解答】

1. 共有点の座標は $\boldsymbol{(-2,\ 0),\ (3,\ 0)}$ である．
2. 共有点の座標は $\boldsymbol{(-3,\ 0),\ (1,\ 0)}$ である．
3. 共有点の座標は $\boldsymbol{(4,\ 0),\ (-1,\ 0)}$ である．

◀ $(x+2)(x-3)=0$ を解いた
◀ $2(x-1)(x+3)=0$ を解いた
◀ $-3(x-4)(x+1)=0$ を解いた

上の事実を逆に応用して，『2 次関数の決定』(p.92) をすることができる．

【例題 97】 放物線 C と x 軸との共有点の x 座標が 1，3 であったならば，C の方程式は

$y=a(x-\boxed{\text{ア}})(x-\boxed{\text{イ}})$

と書ける．もし，C が $(2,-2)$ を通るならば，C の方程式は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

【解答】　ア：**1**，イ：**3**（ア，イは順不同）

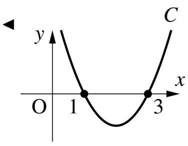
ウ: 式 $y=a(x-1)(x-3)$ に $(x,\ y)=(2,-2)$ を代入して

$-2=a(2-1)(2-3)\iff -2=-a$

つまり，$a=2$ となるので，C の方程式は

$y=2(x-1)(x-3)\iff \boldsymbol{y=2x^2-8x+6}$ となる．

◀



◀ 因数分解型については展開した方がよい．

【練習 98：2 次関数の決定（x 軸との共有点の座標が与えられた場合）】

x 軸と $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，点 $(1,\ 2)$ を通る放物線の方程式を求めよ．

【解答】　求める方程式は $y=a(x+1)(x-2)$ とおける．これは $(1,\ 2)$ を通るので

$2=a(1+1)(1-2)\iff 2=-2a$

を得る．これより，$a=-1$ となるので，求める 2 次関数は

$y=-(x+1)(x-2)\iff \boldsymbol{y=-x^2+x+2}$ となる．

◀ 放物線と x 軸の共有点の x 座標が -1，2

2.6　2次不等式と2次関数

この節では，2 次式で表された不等式「2 次不等式」について学ぶ．p.77 で学んだように，1 次不等式は 1 次関数と 1 次方程式と深い関係があった．

2 次不等式の場合は，むしろ，2 次関数と 2 次方程式を用いて解くことになる．

1.　2次不等式の解法の基礎

2 次式を含む不等式を **2 次不等式** (quadratic inequality) といい，不等式を満たす x の値の範囲をその不等式の解，解を求めることを不等式を解くという．たとえば，2 次不等式

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす x の値について考えてみると，$x = 2,\ 3$ は①を満たすので解であり，$x = 0,\ 5$ は解ではない．

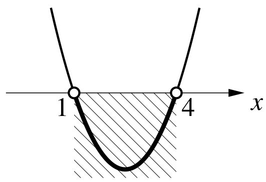
A.　2次不等式の解法の基本

2 次不等式を解くには，次のように考えるのが最もよい．

「2 次不等式 $x^2 - 5x + 4 < 0$ を解け」

$\leftrightarrow$　$y = x^2 - 5x + 4$ とおいたとき，$y < 0$ であるような x の範囲を求めよ

$\leftrightarrow$「2 次関数 $y = x^2 - 5x + 4$ のグラフにおいて，
　y 座標が 0 より小さいときの x 座標の範囲を求めよ」



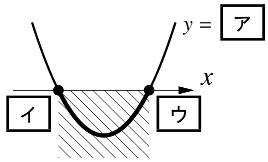
こうして，2 次不等式を解くことを，2 次関数と 2 次方程式の問題として考えることができる．①の場合

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x-1)(x-4)}_{y\text{とおく}} < 0 \leftarrow \text{因数分解した}$$

であるので，この左辺を y とおいた，2 次関数 $y = (x-1)(x-4)$ のグラフを描けば右上図のようになる．$y < 0$ となる x の範囲は $1 < x < 4$ であるので，①の解は $\boldsymbol{1 < x < 4}$ となる．

【例題 99】　2 次不等式 $x^2 - 6x + 8 \leqq 0$ を解こう．

1. 左辺を因数分解すると $\boxed{\text{ア}} \leqq 0$ となるので，$y = \boxed{\text{ア}}$ のグラフは右欄外のようになる．
2. $y \leqq 0$ となる x の範囲が解なので，$\boxed{\text{エ}}$ が解になる．

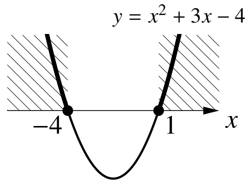


【解答】

1. ア : $\boldsymbol{(x-2)(x-4)}$，イ : **2**，ウ : **4**　　2. エ : $\boldsymbol{2 \leqq x \leqq 4}$

…… 2 次不等式を解くためには，2 次関数の頂点を求める必要がない．x 軸との共有点の座標さえ求めれば十分である．

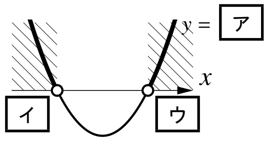
2 次不等式 $x^2+3x-4 \geqq 0$ の場合は



$$x^2+3x-4 \geqq 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+4)(x-1)}_{y\text{とおく}} \geqq 0 \qquad \leftarrow \text{因数分解した}$$

であるので，この左辺を y とおいた，2 次関数 $y=(x+4)(x-1)$ のグラフを描けば右上図のようになる．$y \geqq 0$ となる x の範囲は $x \leqq -4,\ 1 \leqq x$ であるので，$x^2+3x-4 \geqq 0$ の解は $\boldsymbol{x \leqq -4,\ 1 \leqq x}$ となる．

【例題 100】 2 次不等式 $x^2-x-6>0$ を解こう．



1. 左辺を因数分解すると $\boxed{\text{ア}} > 0$ となるので，$y = \boxed{\text{ア}}$ のグラフは右欄外のようになる．
2. $y>0$ となる x の範囲が解なので，$\boxed{\text{エ}}$ が解になる．

【解答】

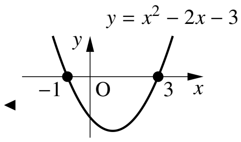
1. ア : $\boldsymbol{(x+2)(x-3)}$，イ : $\boldsymbol{-2}$，ウ : $\boldsymbol{3}$
2. エ : $\boldsymbol{x<-2,\ 3<x}$

【例題 101】

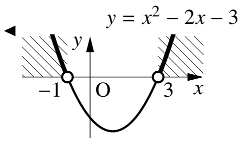
1. 2 次関数 $y=x^2-2x-3$ のグラフと x 軸との共有点があれば求めよ．
2. 次の 2 次不等式を解け．

 i) $x^2-2x-3>0$　　ii) $x^2-2x-3 \geqq 0$　　iii) $x^2-2x-3<0$　　iv) $x^2-2x-3 \leqq 0$

【解答】



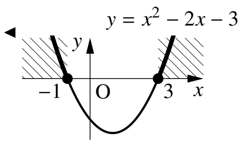
1. 2 次方程式 $x^2-2x-3=0$ を解けば $x=-1,\ 3$ となるので，共有点の座標は $\boldsymbol{(-1,\ 0),\ (3,\ 0)}$ になる．



2. i) $\underbrace{x^2-2x-3}_{y\text{の値}}>0$ となるのは右欄外の図の斜線部分であるので

$$\boldsymbol{x<-1\ ,\ 3<x}$$

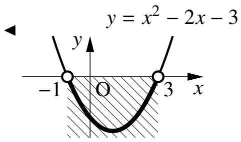
が 2 次不等式 $x^2-2x-3>0$ の解となる．



ii) $\underbrace{x^2-2x-3}_{y\text{の値}} \geqq 0$ となるのは右欄外の図の斜線部分であるので

$$\boldsymbol{x \leqq -1\ ,\ 3 \leqq x}$$

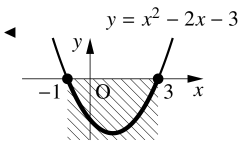
が 2 次不等式 $x^2-2x-3 \geqq 0$ の解となる．



iii) $\underbrace{x^2-2x-3}_{y\text{の値}}<0$ となるのは右欄外の図の斜線部分であるので

$$\boldsymbol{-1<x<3}$$

が 2 次不等式 $x^2-2x-3<0$ の解となる．



iv) $\underbrace{x^2-2x-3}_{y\text{の値}} \leqq 0$ となるのは右欄外の図の斜線部分であるので

$$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 3}$$

が 2 次不等式 $x^2-2x-3 \leqq 0$ の解となる．

【練習 102：2 次不等式〜その１〜】

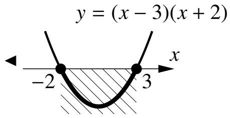
次の 2 次不等式を解け．

(1) $(x-3)(x+2) \leqq 0$　(2) $x^2-6x+8<0$　(3) $x^2+3x+2 \geqq 0$　(4) $2x^2+3x-2>0$

(5) $x^2-16<0$　(6) $-x^2-2x+8 \geqq 0$　(7) $-2x^2+3x-1<0$　(8) $1-x^2>0$

【解答】

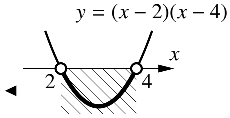
(1) 右欄外の図より，$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 3}$ が解となる．



(2) $x^2-6x+8<0$ の左辺を因数分解して

$$\Leftrightarrow\ (x-2)(x-4)<0$$

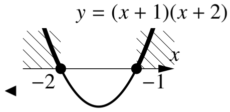
となる．右欄外の図より，$\boldsymbol{2<x<4}$ が解となる．



(3) $x^2+3x+2 \geqq 0$ の左辺を因数分解して

$$\Leftrightarrow\ (x+1)(x+2) \geqq 0$$

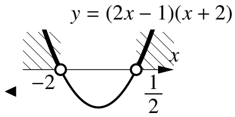
となる．右欄外の図より，$\boldsymbol{x \leqq -2,\ -1 \leqq x}$ が解となる．



(4) $2x^2+3x-2>0$ の左辺を因数分解して

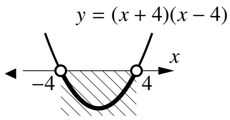
$$\Leftrightarrow\ (2x-1)(x+2)>0$$

となる．右欄外の図より，$\boldsymbol{x<-2,\ \dfrac{1}{2}<x}$ が解となる．



(5)
$$x^2-16<0$$
$$\Leftrightarrow\ (x+4)(x-4)<0$$

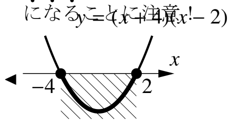
から，$\boldsymbol{-4<x<4}$ が解となる．



(6)
$$-x^2-2x+8 \geqq 0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2+2x-8 \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow\ (x+4)(x-2) \leqq 0$$

両辺を -1 倍した．不等号が逆になることに注意！

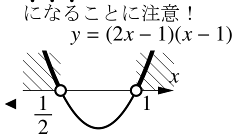
となる．右欄外の図より，$\boldsymbol{-4 \leqq x \leqq 2}$ が解となる．



(7)
$$-2x^2+3x-1<0$$
$$\Leftrightarrow\ 2x^2-3x+1>0$$
$$\Leftrightarrow\ (2x-1)(x-1)>0$$

両辺を -1 倍した．不等号が逆になることに注意！

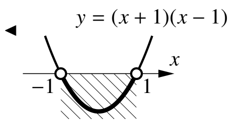
から，$\boldsymbol{x<\dfrac{1}{2},\ 1<x}$ が解となる．



(8)
$$1-x^2>0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2-1 \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow\ (x+1)(x-1) \leqq 0$$

両辺を -1 倍した．不等号が逆になることに注意！

となる．右欄外の図より，$\boldsymbol{-1<x<1}$ が解となる．



x^2 の係数が負の場合は両辺を (-1) 倍して，x^2 の係数を正にすれば，下に凸なグラフだけを考えればよい，

B. 解の公式が必要な 2 次不等式

2 次式を有理数の範囲で因数分解できないときは，解の公式を用いればよい (p.63).

【例題 103】

1. 2 次関数 $y = x^2 - 2x - 1$ のグラフと x 軸との共有点の座標を求めなさい.
2. 2 次不等式 $x^2 - 2x - 1 < 0$ を解け.

【解答】

1. 2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解を解いて

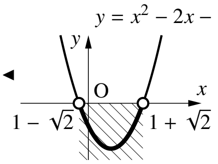
$$x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

◀『解の公式』を用いて，$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4}}{2}$ でもよい.

なので，共有点は $\boldsymbol{\left(1 - \sqrt{2},\ 0\right)}$, $\boldsymbol{\left(1 + \sqrt{2},\ 0\right)}$ となる.

2. $y = x^2 - 2x - 1$ のグラフは右欄外の図のようになり，$y < 0$ は斜線部分である．よって，求める解は $\boldsymbol{1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}}$ である.

◀



【練習 104：2 次不等式〜その２〜】

次の 2 次不等式を解け.

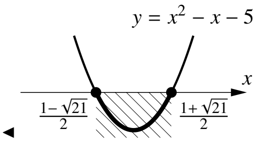
(1) $x^2 - x - 5 \leqq 0$　(2) $x^2 - 4x + 1 < 0$　(3) $2x^2 - 3x - 4 \geqq 0$　(4) $x^2 - 13 > 0$

【解答】

(1) $x^2 - x - 5 = 0$ を解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 20}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

右欄外の図より，$\boldsymbol{\dfrac{1 - \sqrt{21}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2}}$ が解となる.

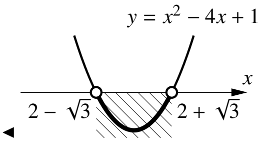


◀

(2) $x^2 - 4x + 1 = 0$ を解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

右欄外の図より，$\boldsymbol{2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}}$ が解となる.

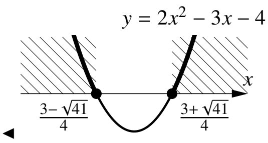


◀

(3) $2x^2 - 3x - 4 = 0$ を解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

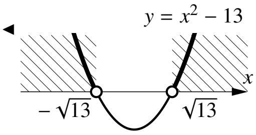
右欄外の図より，$\boldsymbol{x \leqq \dfrac{3 - \sqrt{41}}{4},\ \dfrac{3 + \sqrt{41}}{4} \leqq x}$ が解となる.



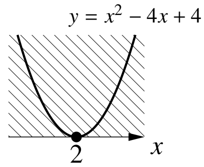
◀

(4) $x^2 - 13 = 0$ を解くと $x = \pm\sqrt{13}$ なので，$\boldsymbol{x < -\sqrt{13},\ \sqrt{13} < x}$ が解となる.

◀



C. 判別式 $D=0$ の場合の 2 次不等式



2 次不等式 $x^2-4x+4 \geqq 0$ の場合は

$$x^2-4x+4 \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x-2)^2}_{y\text{とおく}} \geqq 0 \leftarrow \text{因数分解した}$$

であるので，この左辺を y とおいた，2 次関数 $y=(x-2)^2$ のグラフを描けば右上図のようになる．$y \geqq 0$ となる x の範囲はすべての実数であるので，$x^2-4x+4 \geqq 0$ の解は「すべての実数」となる．

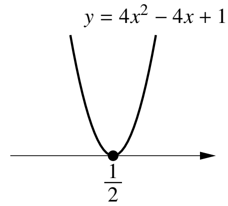
【例題 105】

1. 2 次関数 $y=4x^2-4x+1$ のグラフと x 軸との共有点があれば求めよ．
2. 次の 2 次不等式を解け．

   i) $4x^2-4x+1>0$　　ii) $4x^2-4x+1 \geqq 0$　　iii) $4x^2-4x+1<0$　　iv) $4x^2-4x+1 \leqq 0$

【解答】

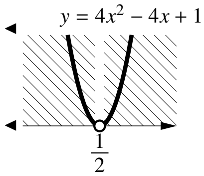
1. 2 次方程式 $4x^2-4x+1=0$ を解けば



$$4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \ x=\frac{1}{2}$$

となるので，共有点の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{0}\right)$ である(接点)．

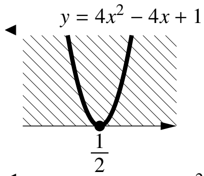
2. i) 右欄外のように図を描けば，$\underbrace{4x^2-4x+1}_{y\text{の値}}>0$ となるのは斜線部分である．



よって，2 次不等式 $4x^2-4x+1>0$ の解は $\boldsymbol{x<\frac{1}{2}}$ **,** $\boldsymbol{\frac{1}{2}<x}$ である．

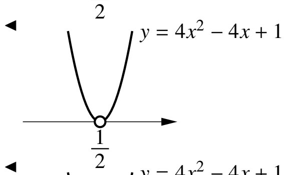
◀「x は $\frac{1}{2}$ 以外のすべての実数」という答え方でもよい

ii) 右欄外のように図を描けば，$\underbrace{4x^2-4x+1}_{y\text{の値}} \geqq 0$ となるのは斜線部分である．



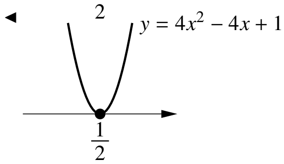
よって，2 次不等式 $4x^2-4x+1 \geqq 0$ の解は**すべての実数**である．

iii) 右欄外のように図を描けば，$\underbrace{4x^2-4x+1}_{y\text{の値}}<0$ となる x は存在しないとわかる．



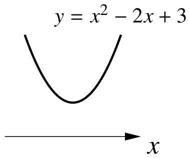
よって，2 次不等式 $4x^2-4x+1<0$ の解は**解なし**である．

iv) 右欄外のように図を描けば，$\underbrace{4x^2-4x+1}_{y\text{の値}} \leqq 0$ となるのは $x=\frac{1}{2}$ のときのみとわかる．



よって，2 次不等式 $4x^2-4x+1 \leqq 0$ の解は $\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$ である．

D.　判別式 $D < 0$ の場合の 2 次不等式



2 次不等式 $x^2-2x+3 < 0$ の場合, 左辺を因数分解できない．そこで, $x^2-2x+3 = 0$ を解の公式を用いて解くと，$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = 1 \pm \sqrt{-2}$ となる．

つまり，$x^2 - 2x + 3 < 0$ の左辺を y とおいた，2 次関数 $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフは右上図のようになる．$y < 0$ となる x の範囲はないので，$x^2 - 2x + 3 < 0$ の解は「解なし」となる．

逆に，2 次不等式 $x^2 - 2x + 3 > 0$ の解は「すべての実数」となる．必ず，グラフを描いて考える癖をつけよう．

【例題 106】

1. 2 次関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフと x 軸との共有点があれば求めよ．
2. 次の 2 次不等式を解け．

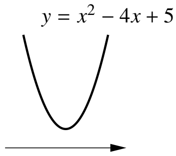
　i) $x^2 - 4x + 5 > 0$　　ii) $x^2 - 4x + 5 \geqq 0$　　iii) $x^2 - 4x + 5 < 0$　　iv) $x^2 - 4x + 5 \leqq 0$

【解答】

1. 2 次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ を解けばよい．しかし，この 2 次方程式の判別式を D とすると

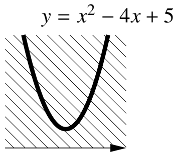
$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot 5 < 0$$

より，解を持たない．つまり，**共有点は存在しない**．



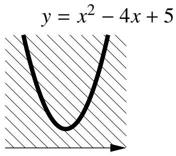
2. 　i) 右欄外のように図を描けば，$\underbrace{x^2 - 4x + 5}_{y\text{ の値}} > 0$ となるのは斜線部分である．

よって，2 次不等式 $x^2 - 4x + 5 > 0$ の解は**すべての実数**である．



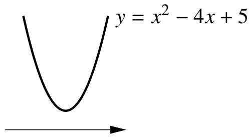
ii) 右欄外のように図を描けば，$\underbrace{x^2 - 4x + 5}_{y\text{ の値}} \geqq 0$ になるのは斜線部分である．

よって，2 次不等式 $x^2 - 4x + 5 \geqq 0$ の解は**すべての実数**である．



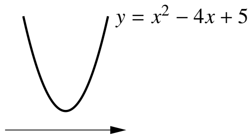
iii) 右欄外のように図を描けば，$\underbrace{x^2 - 4x + 5}_{y\text{ の値}} < 0$ となる x は存在しないとわかる．

よって，2 次不等式 $x^2 - 4x + 5 < 0$ の解は**解なし**である．



iv) 右欄外のように図を描けば，$\underbrace{x^2 - 4x + 5}_{y\text{ の値}} \leqq 0$ となる x は存在しないとわかる．

よって，2 次不等式 $x^2 - 4x + 5 \leqq 0$ の解は**解なし**である．



不等式 $x^2 - 2x + 3 < 0$ が解なしであることは，$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$ と変形して，$(x - 1)^2$ が非負であることからも理解できる．

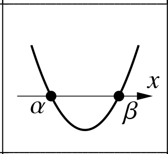
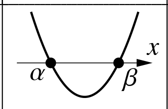
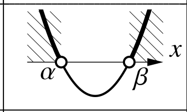
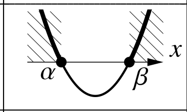
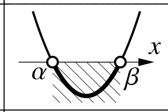
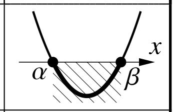
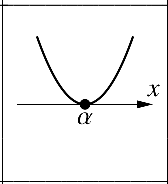
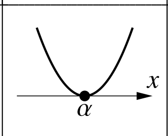
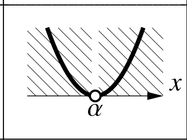
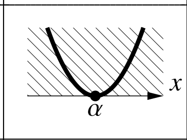
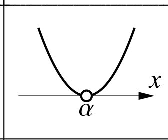
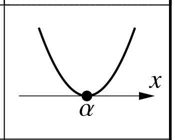
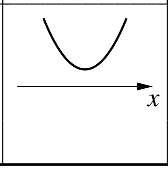
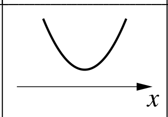
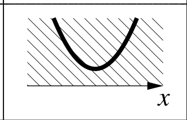
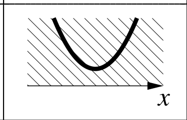
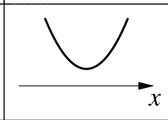
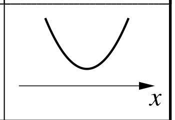
E. 2次不等式の解法のまとめ

結局，2次不等式を解くには，次の手順を踏めばよい．

- 片方の辺を0にし，他方の x^2 の係数を正にする．
- 2次式を因数分解する．整数の範囲で因数分解できない場合は解の公式を用いる (p.64)．ただし，解を持たない場合もある（判別式 $D < 0$ の場合）．
- 簡単なグラフを書き，適する範囲を答える．

2次不等式の解

$a > 0$ の場合の，2次不等式の解はつぎのようにまとめることができる．

	$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ	$ax^2 + bx + c = 0$ の解	$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$ax^2 + bx + c \geqq 0$ の解	$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$ax^2 + bx + c \leqq 0$ の解
$D > 0$		 **2解 α, β**	 **$x < \alpha,\ \beta < x$**	 **$x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x$**	 **$\alpha < x < \beta$**	 **$\alpha \leqq x \leqq \beta$**
$D = 0$		 **重解 α**	 **α 以外の実数**	 **すべての実数**	 **なし**	 **$x = \alpha$**
$D < 0$		 **解なし**	 **すべての実数**	 **すべての実数**	 **なし**	 **なし**

……この結果を暗記する必要はない．結果を確認できればよい．

【練習 107：2次不等式〜その３〜】

次の2次不等式を解け．

(1) $x^2 - 2x - 1 < 0$　(2) $-2x^2 - x - 6 \geqq 0$　(3) $x^2 - 2x + 1 \geqq 0$　(4) $x^2 < 8$

(5) $x^2 \geqq 2x$　(6) $-2x^2 - 4 > 0$　(7) $\dfrac{1}{3}x^2 + x + \dfrac{2}{3} \geqq 0$　(8) $x^2 - x - 6 \geqq 2x - 4$

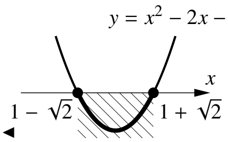
(9) $-x^2 - x - 9 < x - 3$　(10) $\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{5}{3} \geqq \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x + 1$

【解答】

(1) $x^2 - 2x - 1 = 0$ を解けば

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

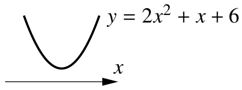
であるので，$\mathbf{1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}}$ が解である．



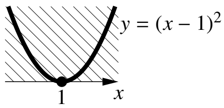
(2) 式全体に -1 を掛けて，（与式）$\Leftrightarrow$ $2x^2 + x + 6 \leqq 0$ となる．

◀ x^2 の係数は正にした方がよい

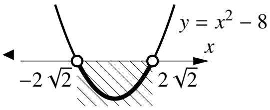
$y = 2x^2 + x + 6$ は判別式 $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 < 0$ なので，グラフは右欄外の図のようになる．グラフの y 座標が 0 以下になることはないので，**解なし**．



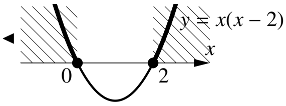
(3) （与式）$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geqq 0$ であり，右欄外の図より，**すべての実数**が解と分かる．



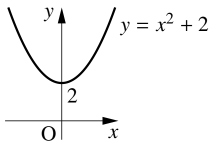
(4) （与式）$\Leftrightarrow x^2 - 8 < 0$ である．$x^2 - 8 = 0$ の解は $x = \pm 2\sqrt{2}$ であるので，右欄外の図より，$\boldsymbol{-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}}$ が解と分かる．



(5) （与式）$\Leftrightarrow x^2 - 2x \geqq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geqq 0$ である．
右欄外の図より，$\boldsymbol{x \leqq 0,\ 2 \leqq x}$ が解と分かる．



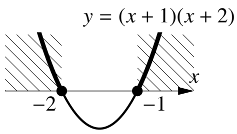
(6) （与式）$\Leftrightarrow x^2 + 2 < 0$ であり，$y = x^2 + 2$ のグラフは右欄外の図のようになる．グラフの y 座標が負になることはないので，**解なし**．



(7) 両辺を 3 倍して整理すると

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &\Leftrightarrow\ x^2 + 3x + 2 \geqq 0 \\
&\Leftrightarrow\ (x+1)(x+2) \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって，$\boldsymbol{x \leqq -2,\ -1 \leqq x}$ が解と分かる．

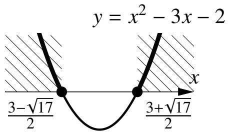


(8) 移項して整理すると，（与式）$\Leftrightarrow\ x^2 - 3x - 2 \geqq 0$.
$x^2 - 3x - 2 = 0$ を解けば

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

◀『解の公式』(p,63)

であるので，$\boldsymbol{x \leqq \frac{3-\sqrt{17}}{2},\ \frac{3+\sqrt{17}}{2} \leqq x}$ が解である．

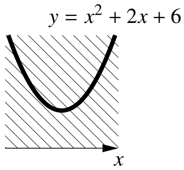


(9) 移項して整理すると

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &\Leftrightarrow\ -x^2 - 2x - 6 < 0 \\
&\Leftrightarrow\ x^2 + 2x + 6 > 0
\end{aligned}
$$

◀ x^2 の係数は正にした方がよい

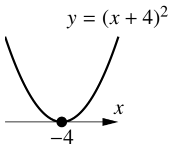
$y = x^2 + 2x + 6$ の判別式 D について $\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \cdot 6 < 0$ であるので，グラフは右欄外の図のようになる．つまり，解は**すべての実数**.



(10) 両辺を 6 倍して整理すると

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &\Leftrightarrow\ 3x^2 - 6x - 10 \geqq 4x^2 + 2x + 6 \\
&\Leftrightarrow\ 0 \geqq x^2 + 8x + 16 \\
&\Leftrightarrow\ 0 \geqq (x+4)^2
\end{aligned}
$$

$y = (x+4)^2$ のグラフを描くと右欄外の図のようになる．よって，この不等式の解は $\boldsymbol{x = -4}$.



F. 連立 2 次不等式

連立 2 次不等式を解くときも，連立 1 次不等式（p.56）の場合と同じように，数直線を必ず描こう．

【練習 108：連立 2 次不等式】

次の不等式を解け．

(1) $\begin{cases} x^2 - 5x - 14 \geqq 0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x^2 - 11x - 40 < 0 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 25 - 9x^2 > 0 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ 3x^2 + 4x - 6 < 0 & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$

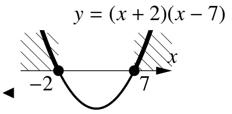
【解答】

(1) ① $\Leftrightarrow\ x^2 - 5x - 14 \geqq 0$

$\Leftrightarrow\ (x+2)(x-7) \geqq 0$

$\Leftrightarrow\ x \leqq -2,\ 7 \leqq x$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①′

◀

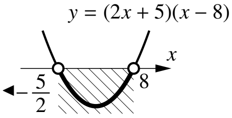


② $\Leftrightarrow\ 2x^2 - 11x - 40 < 0$

$\Leftrightarrow\ (2x+5)(x-8) < 0$

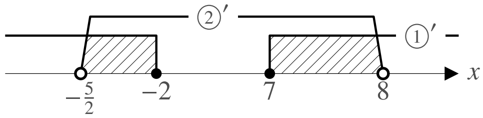
$\Leftrightarrow\ -\dfrac{5}{2} < x < 8$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②′

◀



以上 ①′，②′ を共通して満たす x は

$$\boldsymbol{-\frac{5}{2} < x \leqq -2,\ 7 \leqq x < 8}$$



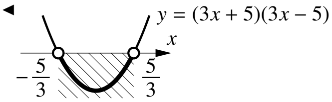
(2) ③ $\Leftrightarrow\ 9x^2 - 25 < 0$

◀ x^2 の係数が正になるように両辺に -1 を掛けた

$\Leftrightarrow\ (3x+5)(3x-5) < 0$

$\Leftrightarrow\ -\dfrac{5}{3} < x < \dfrac{5}{3}$ $\cdots$ ③′

◀



④を解くため，$3x^2 + 4x - 6 = 0$ を解けば

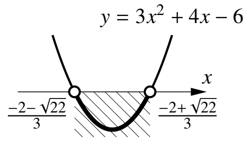
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 3\cdot(-6)}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{3}$$

◀『x の係数が偶数の場合の解の公式』(p.67)

であるので，右欄外の図より④の解は

$$\frac{-2-\sqrt{22}}{3} < x < \frac{-2+\sqrt{22}}{3}$$ $\cdots$ ④′

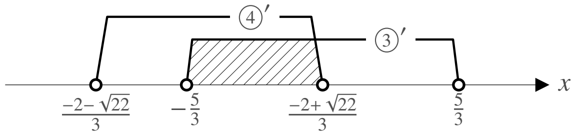
◀



となる．以上 ③′，④′ を共通して満たす x は

$$\boldsymbol{-\frac{5}{3} < x < \frac{-2+\sqrt{22}}{3}}$$

◀ $4 < \sqrt{22} < 5$ より
$-2 + \sqrt{22} = 2.\cdots$ なので
$\dfrac{-2+\sqrt{22}}{3} = 0.\cdots$
$-2 - \sqrt{22} = -6.\cdots$ なので
$\dfrac{-2-\sqrt{22}}{3} = -2.\cdots$



2.　2次関数・2次方程式・2次不等式の応用問題

A.　範囲に注意すべき2次関数の最大・最小

【練習 109：範囲に注意すべき 2 次関数の最大・最小】

$x^2+y^2=1$ のとき，$L=x+y^2-1$ の最大値・最小値，そのときの x，y を求めよ．

x^2+y^2 を含む条件式があるときは，$0 \leqq x^2$, $0 \leqq y^2$ に注意しよう．

【解答】　まず，$x^2+y^2=1$ を変形して

$y^2=1-x^2$ ……………………①

◀ $L=x+y^2-1$ から y を消去することが目的

①を $L=x+y^2-1$ に代入し，平方完成すると

$$L=x+(1-x^2)-1$$
$$=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

◀ 最大・最小を求めたいので平方完成する

一方，①において，$y^2 \geqq 0$ でないといけないので

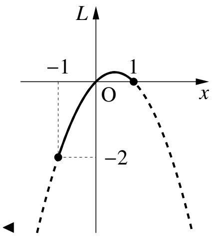
$$y^2=1-x^2 \geqq 0$$
$$\Leftrightarrow\ (x-1)(x+1) \leqq 0 \qquad \therefore\ -1 \leqq x \leqq 1$$

◀ 条件に 2 乗などがあるときは，このように，範囲に注意しないといけない．

である．つまり

$$L=f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\ (-1 \leqq x \leqq 1) \qquad \cdots\cdots②$$

において，L の最大値・最小値を求めればよい．そこで，②のグラフを描けば，右欄外の図のようになる．

◀ 

$L=f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

図から，最大値は $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ であり，$x=\frac{1}{2}$ を①に代入して $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる．

また，最小値は $f(-1)=-2$ であり，$x=-1$ を①に代入して $y=0$ となる．まとめると

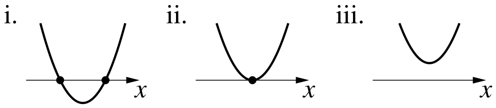
$$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \text{ **のとき最大値** } \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

$(x,\ y)=(-1,\ 0)$ のとき最小値 -2

B. 2次不等式の解からグラフを考える

【例題 110】 2次不等式 $x^2 - kx + 1 > 0$ の解が「すべての実数」であったという．

1. 左辺を y とおいた2次関数 $y = x^2 - kx + 1$ のグラフは，右のうちどれになるか．
2. 条件を満たす k の範囲を答えよ．



【解答】

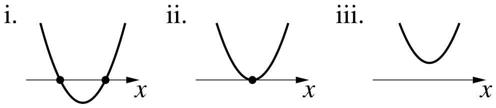
1. x がどんな値でも $y > 0$ になるので，**iii.** のグラフになる．
2. $y = x^2 - kx + 1$ の判別式 D が負であるよう，k について解けば

$$D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \iff (k-2)(k+2) < 0$$

よって，$\boldsymbol{-2 < k < 2}$ が解と分かる．

【例題 111】 2次不等式 $x^2 + ax + b < 0$ の解が $-2 < x < 1$ であったという．

1. 左辺を y とおいた2次関数 $y = x^2 + ax + b$ のグラフの概形は，右のうちどれになりうるか．
2. a, b の値を答えよ．



【解答】

1. x がいったん $y < 0$ となるので，**i.** のグラフになる．
2. 不等式の解が $-2 < x < 1$ なので i. のグラフは $x = -2,\ 1$ で交わり，方程式は $y = k(x+2)(x-1) = k(x^2 + x - 2)$ とおける．
   これが $y = x^2 + ax + b$ と一致するので，まず，$k = 1$ である．さらに，$x^2 + x - 2$ と $x^2 + ax + b$ を比べて，$\boldsymbol{a = 1,\ b = -2}$ と分かる．

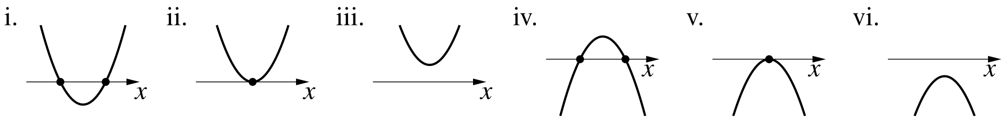
◀『2次関数の決定・因数分解型』(p.121)

◀ x^2 の係数を比べた

【練習 112：2次不等式の解からグラフを考える】

2次不等式 $ax^2 - 2x + a > 0$ の解が「解なし」であったという．

(1) 左辺を y とおいた2次関数 $y = ax^2 - 2x + a$ のグラフは，下のうちどれになりうるか．



(2) 条件を満たす a の範囲を答えよ．

【解答】

(1) x がどんな値でも $y > 0$ にならないので，**v, vi.** のグラフになる．

(2) まず，グラフが上に凸なので $a < 0$ でないといけない．

$y = ax^2 - 2x + a$ の判別式 D が負であるよう，a について解けば

$$\begin{aligned} D = (-2)^2 - 4 \cdot a \cdot a < 0 &\iff 4 - 4a^2 < 0 \\ &\iff a^2 - 1 > 0 \\ &\iff (a+1)(a-1) > 0 \quad \therefore\ a < -1,\ 1 < a \end{aligned}$$

これと $a < 0$ をあわせて，$\boldsymbol{a < -1}$ が解と分かる．

◀ x^2 の係数が負

【練習 113：2 次不等式の解】

$2x^2 + kx + 3 > 0$ がすべての実数で成り立つような k の範囲を求めよ.

【解答】 $y = 2x^2 + kx + 3$ のグラフが $y > 0$ の範囲にあればよいので判別式 $D < 0$ であればよい.

$D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = k^2 - 24 < 0$, これを解いて $\boldsymbol{-2\sqrt{6} < k < 2\sqrt{6}}$ になる.

【練習 114：放物線と x 軸の大小関係】

放物線 $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$ のグラフについて，以下の問いに答えよ.

(1) このグラフが x 軸と共有点をもつように a の範囲を定めよ.

(2) このグラフが x 軸よりも下にあり，かつ x 軸と共有点をもたないように a の範囲を定めよ.

(3) 2 次不等式 $ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5 < 0$ の解が存在しないとき，a の範囲を定めよ.

【解答】

(1) $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$ の判別式 D が 0 以上であればよいので,

$$\frac{D}{4} = \{-(a+1)\}^2 - a \cdot (2a+5) \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow \ -a^2 - 3a + 1 \geqq 0$$

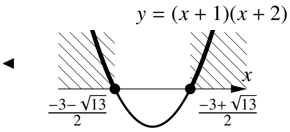
$$\Leftrightarrow \ a^2 + 3a - 1 \leqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

となるような a の範囲を求めればよい. $a^2 + 3a - 1 = 0$ を解けば

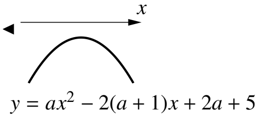
◀ a についての 2 次方程式を解く.

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

より，$y = a^2 + 3x - 1$ と a 軸は右欄外の図のように交わる. つまり，① の解は $\boldsymbol{\frac{-3-\sqrt{13}}{2} \leqq a \leqq \frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$ である.

◀ 

(2) 右欄外のような図にならなければならない. そのため

◀ 

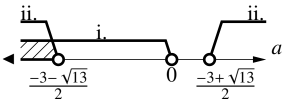
i. $a < 0$ でないといけない

ii. $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$ の判別式 D が負でないといけない

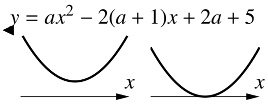
ii. は，$\frac{D}{4} = -a^2 - 3a + 1 < 0$ からので $a < \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$，$\frac{-3+\sqrt{13}}{2} < a$.

◀ (1) の結果を利用した

i., ii. の条件を共通して満たす a は，$\boldsymbol{a < \frac{-3-\sqrt{13}}{2}}$.

◀ 

(3) 左辺を y とおいた 2 次関数 $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$ のグラフが，右欄外のようにならなければならない. そのため

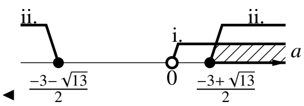
◀ 

i. $a > 0$ でないといけない

ii. $y = ax^2 - 2(a+1)x + 2a + 5$ の判別式 D が負か 0 でないといけない

(2) の ii. より，$a \leqq \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$，$\frac{-3+\sqrt{13}}{2} \leqq a$ である.

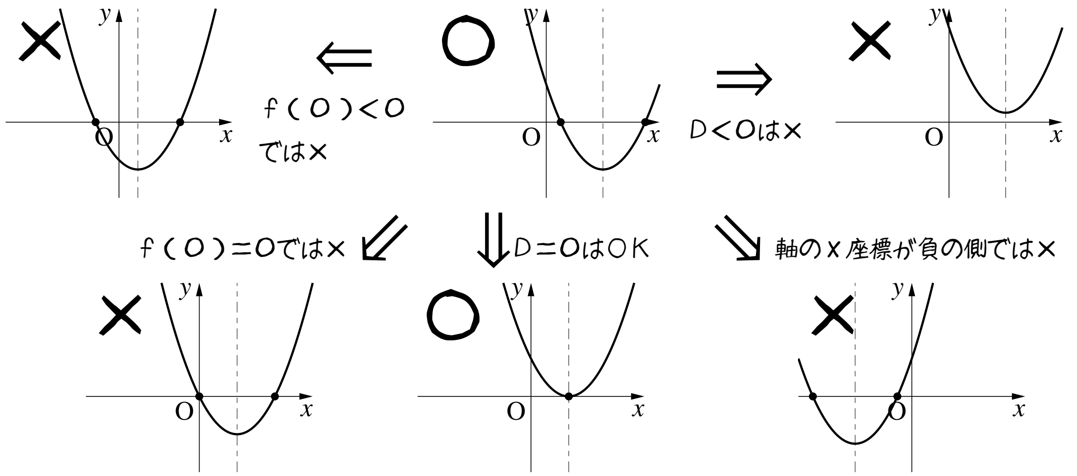
i., ii. の条件を共通して満たす a は，$\boldsymbol{\frac{-3+\sqrt{13}}{2} \leqq a}$.

◀ 

C. 2 次方程式の解の配置

2 次方程式 $x^2 - ax + (a^2 - 3) = 0$ が正の解だけをもつような a の条件を考えよう．

これは，$y = f(x) = x^2 - ax + (a^2 - 3)$ と x 軸が，正の部分で交わる条件に一致する．そのようなグラフを描いてみよう．



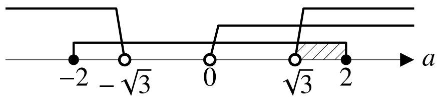
結果的に，次の条件をすべて同時に満たせばよい．

$D \geqq 0$,（軸の x 座標）> 0, $f(0) > 0$

それらをそれぞれ解こう．$f(x) = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + a^2 - 3$ から，軸の方程式は $x = \dfrac{a}{2}$ であるから

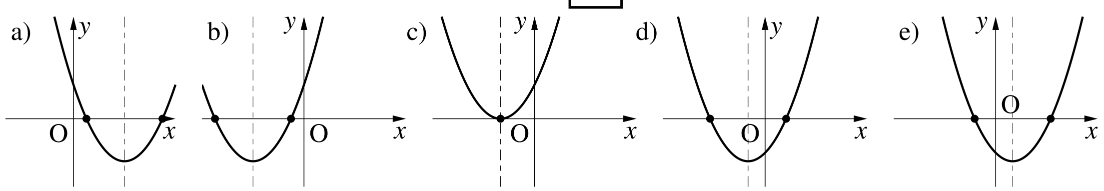
$$\begin{cases} D \geqq 0 \\ \text{（軸の } x \text{ 座標）} > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geqq 0 \\ \dfrac{a}{2} > 0 \\ f(0) = a^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 \leqq 0 \\ a > 0 \\ (a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqq a \leqq 2 \\ 0 < a \\ a < -\sqrt{3},\ \sqrt{3} < a \end{cases}$$

と分かる．これらを数直線上に表わせば右のようになるので，$\sqrt{3} < a \leqq 2$ が求める条件であると分かる．



上のように，2 次方程式 $f(x) = 0$ の解の配置を調べる問題では，「判別式 D」「軸の x 座標」「$f(a)$（$x = a$ を境に解の適・不適が定まる）」の 3 点を必ず調べよう．ただし，後で見るように，このうち 1 つまたは 2 つが不要になることもある．

【例題 115】 $f(x) = x^2 + 2ax + a + 2 = 0$ が負の解だけをもつ（……… ①）ような a の条件を求めるため，（　）には「<」「≦」「>」「≧」のいずれかを，$\boxed{}$ には記号・条件を入れなさい．



①を満たすときの $f(x) = 0$ のグラフとして，適しているものを上からすべて選ぶと $\boxed{\text{ア}}$ になる．

よって，①を満たすには D（ イ ）0,（軸の方程式）（ ウ ）0, $f(0)$（ エ ）0 が成り立てばよい．

これらをすべて計算し連立して解けば，$\boxed{\text{オ}}$ が求める条件と分かる．

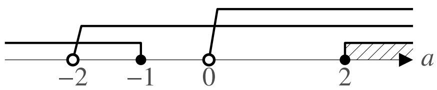
【解答】 ①を満たすには，$y=f(x)$ と x 軸の交点が負のみであればよいので $_{(ア)}$**b), c)**になる．よって，①を満たすには $_{(イ)}$$\boldsymbol{D \geqq 0}$，$_{(ウ)}$**（軸の $\boldsymbol{x}$ 座標）$\boldsymbol{< 0}$**，$_{(エ)}$$\boldsymbol{f(0) > 0}$ が成り立てばよい．

$\dfrac{D}{4} = a^2-(a+2) \geqq 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-2) \geqq 0 \Leftrightarrow a \leqq -1,\ 2 \leqq a$

$f(x)=(x+a)^2-a^2+a+2$ から，（軸の x 座標）$=-a<0 \Leftrightarrow 0<a$

$f(0)=a+2>0 \Leftrightarrow a>-2$

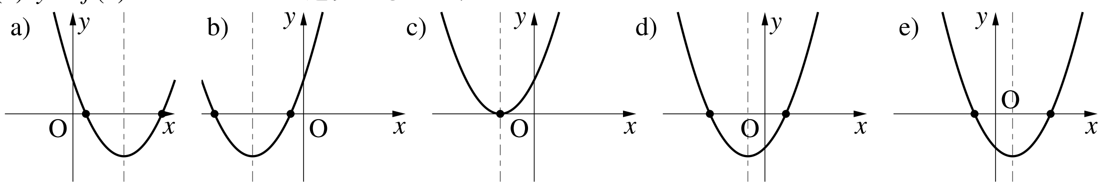
これらを以下のように連立して，$\boldsymbol{2 \leqq a}$ と分かる．



【練習 116：2 次方程式の解の配置～その１～】

$f(x)=2x^2+3ax+a-3=0$ が正の解と負の解を 1 つずつ持つとき，以下の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフとして適切なものをすべて選べ．



(2) 条件を満たすような a の範囲を求めよ．

【解答】

(1) グラフと x 軸が，正の部分と負の部分で 1 回ずつ交わっている，**d), e)**.

(2) $f(0)<0$ であれば，$y=f(x)$ は x 軸の正の部分，負の部分の両方で交わるので，$f(0)=a-3<0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a<3}$

◀ d), e) どちらも適することから，軸は正負どちらもよいと分かる．
また，$f(0)<0$ が成り立つならば，必ず $D<0$ なので，$D<0$ は解く必要がない．

【練習 117：2 次方程式の解の配置～その２～】

$x^2-4cx+c^2+4c=0$ が，2 よりも大きな，2 つの異なる解をもつような c の条件を求めよ．

【解答】 $f(x)=x^2-4cx+c^2+4c$ とおくと，$D>0$，（軸の x 座標）>2，$f(2)>0$ を満たせばよい．

$$\frac{D}{4}=(2c)^2-(c^2+4c)>0 \Leftrightarrow 3c^2-4c>0$$

$$\Leftrightarrow 3c\left(c-\frac{4}{3}\right)>0 \qquad \therefore c<0,\ \frac{4}{3}<c$$

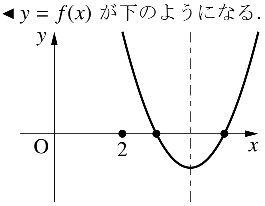
（軸の x 座標）$=2c>2 \Leftrightarrow 1<c$

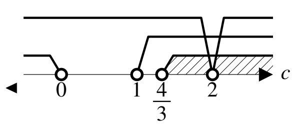
$$f(2)=4-8c+c^2+4c>0 \Leftrightarrow c^2-4c+4>0$$

$$\Leftrightarrow (c-2)^2>0 \qquad \therefore c<2,\ 2<c$$

以上を連立すると右欄外の図のようになるので，$\boldsymbol{\dfrac{4}{3}<c<2,\ 2<c}$.

◀ $y=f(x)$ が下のようになる．





D.　放物線と他のグラフの大小関係を調べる

【練習 118：2 次関数と直線・放物線の大小関係】

2 次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax - 1$ とが共有点をもつための a の範囲を求めよ．

(2) 発展　$g(x) = bx^2 - x + 2$ とする．$f(x) > g(x)$ が常に成立するための定数 b の範囲を求めよ．

【解答】

(1) 連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y = ax - 1 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

が解をもつときの a の範囲を求めればよい．①と②から y を消去して

◀ ①の y に②を代入した

$$ax - 1 = x^2 - 2x + 3$$

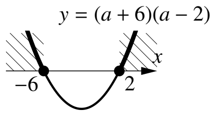
$$\Leftrightarrow\ x^2 - (a+2)x + 4 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

方程式③が解をもつには，③の判別式 D が $D \geqq 0$ でないといけない．$D \geqq 0$ となる a の範囲を求めると

$$D = (a+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow\ a^2 + 4a - 12 \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow\ (a+6)(a-2) \geqq 0$$

◀ 

つまり，$\boldsymbol{a \leqq -6,\ 2 \leqq a}$ であれば共有点をもつ．

(2)　$f(x) > g(x)$ が常に成立する

$\Leftrightarrow\ x^2 - 2x + 3 > bx^2 - x + 2$ がすべての x で成立する

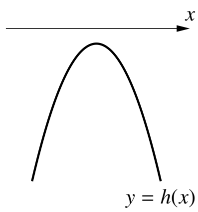
$\Leftrightarrow\ 0 > (b-1)x^2 + x - 1$ がすべての x で成立する

◀ 移項した

よって，$h(x) = (b-1)x^2 + x - 1$ としたとき，

$y = h(x)$ のグラフにおいて y 座標が常に負となればよい．$\cdots\cdots ④$

1. $b - 1 = 0$ のとき，つまり，$b = 1$ のとき
   $h(x) = x - 1$ となり，直線 $y = h(x)$ のグラフは ④ となることはない．よって不適．
2. $b - 1 \neq 0$ のとき，つまり，$b \neq 1$ のとき
   $y = h(x)$ のグラフは放物線となる．④ であるためには，グラフは右欄外のようにならないといけない．つまり
   i. $b - 1 < 0$ でないといけない．
   ii. $y = h(x) = (b-1)x^2 + x - 1$ の判別式 D が負

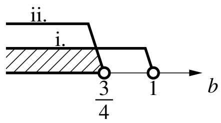
   ◀ 

   ii. について，D を計算して解くと

$$D < 0 \ \Leftrightarrow\ 1^2 - 4 \cdot (b-1) \cdot (-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow\ 4b < 3 \ \therefore\ b < \frac{3}{4}$$

これと i. を連立して，$\boldsymbol{b < \frac{3}{4}}$ であればよいとわかる．

◀ 

3.　絶対値を含む 2 次関数・方程式・不等式

場合に分けて絶対値を外して (p.79 参照)，考えていこう．

【練習 119：絶対値を含む 2 次関数】

次の式で与えられた関数のグラフを描け．

(1) $y = 2x - |x^2 - 4|$　　　　(2) $y = |x^2 - 4x - 6|$

【解答】

(1)　i) $x^2 - 4 \geqq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) \geqq 0$

$\Leftrightarrow x \leqq -2,\ 2 \leqq x$

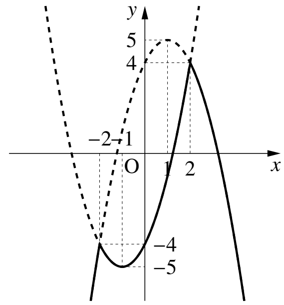
のとき，$|x^2 - 4| = x^2 - 4$ なので

$$\begin{aligned} y &= 2x - (x^2 - 4) \\ &= -x^2 + 2x + 4 \\ &= -(x-1)^2 + 5 \end{aligned}$$

ii) $x^2 - 4 < 0$，つまり $-2 < x < 2$ のとき，$|x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$ であるので

$$\begin{aligned} y &= 2x + (x^2 - 4) \\ &= x^2 + 2x - 4 \\ &= (x+1)^2 - 5 \end{aligned}$$

以上 i)，ii) より，グラフは右欄外の図のようになる．



$y = 2x - |x^2 - 4|$

(2)　i) $x^2 - 4x - 6 \geqq 0$，つまり $x \leqq 2 - \sqrt{10}$，$2 + \sqrt{10} \leqq x$ のとき，$|x^2 - 4x - 6| = x^2 - 4x - 6$ なので

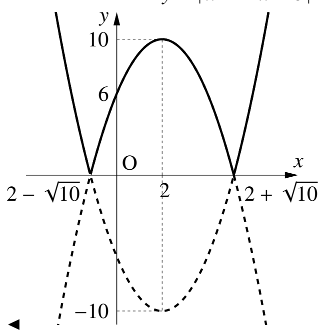
◀ 方程式 $x^2 - 4x - 6 = 0$ の解を利用した

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x - 6 \\ &= (x-2)^2 - 10 \end{aligned}$$

ii) $x^2 - 4x - 6 < 0$，つまり $2 - \sqrt{10} < x < 2 + \sqrt{10}$ のとき，$|x^2 - 4x - 6| = -(x^2 - 4x - 6)$ なので

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 - 4x - 6) \\ &= -(x-2)^2 + 10 \end{aligned}$$

以上 i)，ii) より，グラフは右欄外の図のようになる．

$y = |x^2 - 4x - 6|$


この問の (2) のグラフは，$y = x^2 - 4x - 6$ のグラフのうち x 軸より下にある部分を x 軸について上側へ折り返したものになっている．これは，右辺の関数全体に絶対値がついている式の形からも理解できる．

【練習 120：絶対値を含む 2 次方程式】

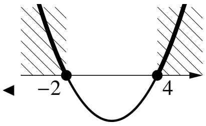
次の方程式を解け．

(1) $|x^2 - 2x - 8| = 6x + 1$　　(2) $|x^2 - 4x + 3| = 2 - x$

【解答】

(1)　i) $x^2 - 2x - 8 \geqq 0$，つまり

$y = (x+2)(x-4)$



$\Leftrightarrow (x+2)(x-4) \geqq 0$

$\Leftrightarrow x \leqq -2$，$4 \leqq x$ のとき　　……①

（与式）$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 6x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$　　$\therefore\ x = -1,\ 9$

①の範囲で考えているので，$x = 9$

ii) $x^2 - 2x - 8 < 0$，つまり $-2 < x < 4$ ……… ② のとき

◀ i) の x の範囲以外

（与式）$\Leftrightarrow -(x^2 - 2x - 8) = 6x + 1$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 6x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 7 = 0$　　$\therefore\ x = -2 \pm \sqrt{11}$

◀『x の係数が偶数の場合の解の公式』(p.67)

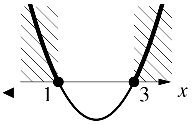
②の範囲で考えているので，$x = -2 + \sqrt{11}$

◀ $3 < \sqrt{11} < 4$ より
$-2 + \sqrt{11} = 1.\cdots$

以上 i)，ii) より，求める解は $\boldsymbol{x = -2 + \sqrt{11},\ 9}$

(2)　i) $x^2 - 4x + 3 \geqq 0$，つまり

$y = (x-1)(x-3)$



$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) \geqq 0$

$\Leftrightarrow x \leqq 1$，$3 \leqq x$ のとき　　……③

（与式）$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 2 - x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$　　$\therefore\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

◀『解の公式』(p.63)

③の範囲で考えているので，$x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$

◀ $\sqrt{5} = 2.2360679\cdots$

ii) $x^2 - 4x + 3 < 0$，つまり $1 < x < 3$ ……… ④ のとき

◀ i) の x の範囲以外

（与式）$\Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 3) = 2 - x$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0$　　$\therefore\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

◀『解の公式』(p.63)

④の範囲で考えているので，$x = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}$

以上 i)，ii) より，求める解は

$$\boldsymbol{x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},\ \frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

【発展 121：絶対値を含む 2 次不等式】

次の不等式を解け．

① $3x^2 + |x^2 - 9| < 16x$　　② $|x^2 - 8x - 3| - 2x - 8 > 0$

【解答】

① i) $x^2 - 9 \geqq 0$，つまり

$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) \geqq 0$

$\Leftrightarrow x \leqq -3,\ 3 \leqq x$ ……①

のとき，与えられた不等式は

$3x^2 + x^2 - 9 < 16x$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 16x - 9 < 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(2x-9) < 0$　　$\therefore\ -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{9}{2}$

これと，①を合わせて，$3 \leqq x < \dfrac{9}{2}$

ii) $x^2 - 9 < 0$，つまり $-3 < x < 3$ ……② のとき

（与式）$\Leftrightarrow 3x^2 - (x^2 - 9) < 16x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 9 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{8 - \sqrt{46}}{2} < x < \dfrac{8 + \sqrt{46}}{2}$

これと，②を合わせて，$\dfrac{8 - \sqrt{46}}{2} < x < 3$

以上 i)，ii) より求める解は $\boldsymbol{\dfrac{8 - \sqrt{46}}{2} < x < \dfrac{9}{2}}$

② i) $x^2 - 8x - 3 \geqq 0$，つまり

$\Leftrightarrow x \leqq 4 - \sqrt{19},\ 4 + \sqrt{19} \leqq x$ のとき ……③

（与式）$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 3 - 2x - 8 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 11 > 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-11) > 0$　　$\therefore\ x < -1,\ 11 < x$

これと，③を合わせて，$x < -1,\ 11 < x$

ii) $x^2 - 8x - 3 < 0$，つまり $4 - \sqrt{19} < x < 4 + \sqrt{19}$ ……④ のとき

（与式）$\Leftrightarrow -(x^2 - 8x - 3) - 2x - 8 > 0$

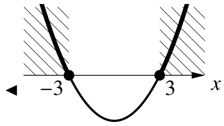
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-5) < 0$　　$\therefore\ 1 < x < 5$

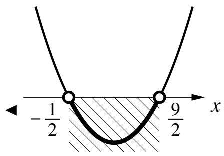
これと，④を合わせて，$1 < x < 5$

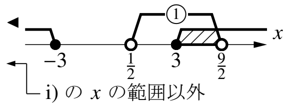
以上 i)，ii) より求める解は $\boldsymbol{x < -1,\ 1 < x < 5,\ 11 < x}$．

$y = (x+3)(x-3)$



$y = (2x+1)(2x-9)$





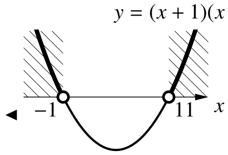
◀ i) の x の範囲以外

◀ 方程式 $2x^2 - 16x + 9 = 0$ の解を利用した

◀ $6 < \sqrt{46} < 7$ より
$\dfrac{8 - \sqrt{46}}{2} = 0.\cdots$
$\dfrac{8 + \sqrt{46}}{2} = 7.\cdots$

◀ 方程式 $x^2 - 8x - 3 = 0$ の解を利用した

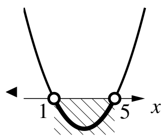
$y = (x+1)(x-11)$



◀ $\sqrt{19} = 4.\cdots$

◀ i) の x の範囲以外

$y = (x-1)(x-5)$



【発展 122：絶対値記号を複数含む式】

① 関数 $y=|2x-4|+|x-5|$ のグラフを書け．

② 方程式 $|x-3|+|x-5|=3$ を解け．

③ 不等式 $|x^2-4x+3|+|x-2|<x$ を解け．

表などで場合分けを整頓して，解答を作ろう．複雑な場合分けをしてもミスをしないためには，暗算に頼りすぎず，適度にメモを残しながら解くことが大事である．

【解答】

① まず，場合分けについて考える．

$2x-4 \geqq 0$ を解くと $x \geqq 2$，$x-5 \geqq 0$ を解くと $x \geqq 5$

よって，右欄外の表のようになる．

◀0 になる場合は省略している．

x	～2	2～5	5～
$2x-4$	−	+	+
$x-5$	−	−	+

i) $x \leqq 2$ のとき

$$y=-(2x-4)-(x-5)$$
$$=-3x+9$$

ii) $2<x<5$ のとき

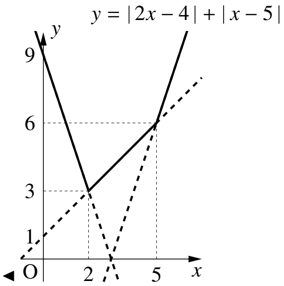
$$y=(2x-4)-(x-5)$$
$$=x+1$$

iii) $5 \leqq x$ のとき

$$y=(2x-4)+(x-5)$$
$$=3x-9$$

以上 i)，ii)，iii) より，グラフは右欄外の図のようになる．

◀



② まず，場合分けについて考える．

$x-3 \geqq 0$ を解くと $x \geqq 3$，$x-5 \geqq 0$ を解くと $x \geqq 5$

よって，右欄外の表のようになる．

◀0 になる場合は省略している．

x	～3	3～5	5～
$x-3$	−	+	+
$x-5$	−	−	+

i) $x \leqq 3$ ········ ① のとき

$$-(x-3)-(x-5)=3$$
$$\Leftrightarrow\ -x+3-x+5=3$$
$$\Leftrightarrow\ -2x=-5 \qquad \therefore\ x=\frac{5}{2}$$ これは①に適する．

ii) $3<x<5$ ········ ② のとき

$$(x-3)-(x-5)=3$$
$$\Leftrightarrow\ x-3-x+5=3$$
$$\Leftrightarrow\ 2=3$$

x がいくつでも，この等式を満たすことはありえない．よって，この場合には解は無い．

iii) $5 \leqq x$ ········ ③ のとき

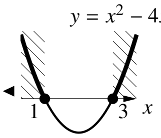
$$(x-3)+(x-5)=3$$

$\Leftrightarrow\ x-3+x-5=3$

$\Leftrightarrow\ 2x=11 \qquad \therefore\ x=\dfrac{11}{2}$ これは③に適する．

以上 i)，ii)，iii) より，求める解は $\boldsymbol{x=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{11}{2}}$

③ まず，場合分けについて考える．



$x^2-4x+3 \geqq 0$ を解くと，$x \leqq 1,\ 3 \leqq x$

$x-2 \geqq 0$ を解くと，$x \geqq 2$

よって，右欄外の表のようになる．

◀0 になる場合は省略している．

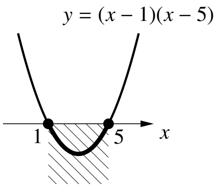
x	～1	1～2	2～3	3～
x^2-4x+3	+	−	−	+
$x-2$	−	−	+	+

i) $x \leqq 1$ ……… ④ のとき

$(x^2-4x+3)-(x-2)<x$

$\Leftrightarrow\ x^2-6x+5<0$

$\Leftrightarrow\ (x-1)(x-5)<0 \qquad \therefore\ 1<x<5$



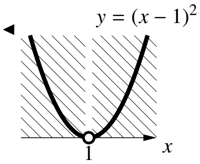
これと，④を合わせて，この場合は解が無い．

ii) $1<x \leqq 2$ ……… ⑤ のとき

$-(x^2-4x+3)-(x-2)<x$

$\Leftrightarrow\ -x^2+2x-1<0$

$\Leftrightarrow\ (x-1)^2>0 \qquad \therefore\ x<1,\ 1<x$



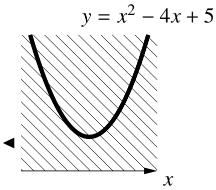
これと，⑤を合わせて，$1<x \leqq 2$

iii) $2<x \leqq 3$ ……… ⑥ のとき

$-(x^2-4x+3)+(x-2)<x$

$\Leftrightarrow\ -x^2+4x-5<0$

$\Leftrightarrow\ x^2-4x+5>0$



x^2-4x+5 の判別式を D すると，$\dfrac{D}{4}=2^2-5<0$ であり，グラフを考えると，解はすべての実数．

これと，⑥を合わせて，$2<x \leqq 3$

iv) $3<x$ ……… ⑦ のとき

$(x^2-4x+3)+(x-2)<x$

$\Leftrightarrow\ x^2-4x+1<0$

$\Leftrightarrow\ 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$

◀方程式 $x^2-4x+1=0$ の解を利用した

これと，⑦を合わせて，$3<x<2+\sqrt{3}$

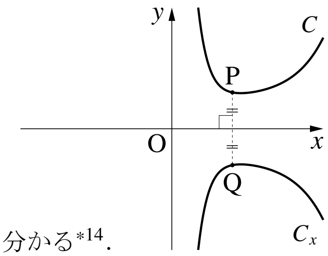
以上 i)，ii)，iii)，iv) より，求める解は $\boldsymbol{1<x<2+\sqrt{3}}$

2.7　第2章の補足

1.　一般のグラフの移動について

ここで示される内容は，数学 II 以降で学ぶ関数についても成立するが，特に，$f(x)$ が 1 次関数，2 次関数であっても成立する．

A.　一般の対称移動について

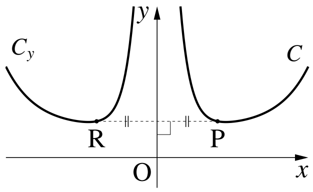


関数 $y = f(x)$ のグラフ C を，x 軸に関して対称に移動したグラフ C_x を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(x, v)$ を，x 軸に関して対称に移動して C_x 上の点 $\mathrm{Q}(x, y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y = f(x)$ 上にある」 $\Longleftrightarrow$ 　$v = f(x)$

ii. 「P と Q は x 軸対称」 $\Longleftrightarrow$ 　$v = -y$

ii. を i. に代入して，$-y = f(x)$ となり，$\mathrm{Q}(x, y)$ がグラフ $-y = f(x)$ 上にあると分かる[*14]．

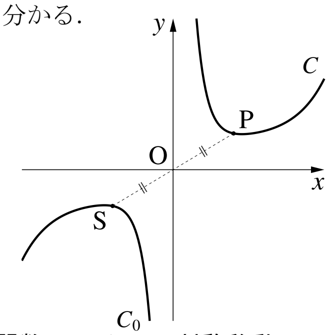


また，関数 $y = f(x)$ のグラフ C を，y 軸に関して対称に移動したグラフ C_y を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(u, y)$ を，y 軸に関して対称に移動して C_y 上の点 $\mathrm{R}(x, y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y = f(x)$ 上にある」 $\Longleftrightarrow$ 　$y = f(u)$

ii. 「P と R は y 軸対称」 $\Longleftrightarrow$ 　$u = -x$

ii. を i. に代入して，$y = f(-x)$ となり，$\mathrm{R}(x, y)$ がグラフ $y = f(-x)$ 上にあると分かる．



最後に，関数 $y = f(x)$ のグラフ C を，原点に関して対称に移動したグラフ C_0 を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(u, v)$ を，原点に関して対称に移動して C_0 上の点 $\mathrm{S}(x, y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y = f(x)$ 上にある」 $\Longleftrightarrow$ 　$v = f(u)$

ii. 「P と S は原点対称」 $\Longleftrightarrow$ 　$u = -x,\ v = -y$

ii. を i. に代入して，$-y = f(-x)$ となり，$\mathrm{S}(x, y)$ がグラフ $-y = f(-x)$ 上にあると分かる．

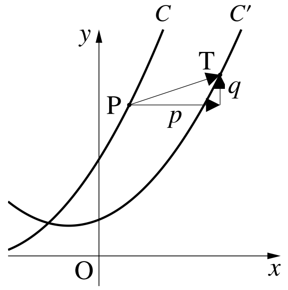
関数 $y = f(x)$ の対称移動

関数 $y = f(x)$ のグラフを，x 軸に関して，y 軸に関して，原点に関して対称移動したグラフを表す関数は，それぞれ次のようになる．

$-y = f(x)$	x 軸に関する対称移動	←y を −y に代えた
$y = f(-x)$	y 軸に関する対称移動	←x を −x に代えた
$-y = f(-x)$	原点に関する対称移動	←x を −x に，y を −y に代えた

[*14] 厳密には，$-y = f(x)$ を満たす任意の点 Q をとり，その対称移動した点が C 上にあることを示さないといけないが，ここでは省略した．C_y, C_0 についても同様である．詳しくは，数学 II の「軌跡」で学ぶ．

B. 一般の平行移動について



関数 $y=f(x)$ のグラフ C を，x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動したグラフ C' を表す関数について考える．C 上の点を $\mathrm{P}(u, v)$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動して C' 上の点 $\mathrm{T}(x, y)$ に移動したとしよう．このとき

i. 「P はグラフ $y=f(x)$ 上にある」 $\iff$ $v=f(u)$

ii. 「P を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動して T になる」

$\iff$ $x=u+p,\ y=v+q$ $\iff$ $u=x-p,\ v=y-q$

ii. を i. に代入して，$\mathrm{S}(x, y)$ がグラフ $y-q=f(x-p)$ 上にあると分かる．

関数 $y=f(x)$ の平行移動

関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフを表す関数は

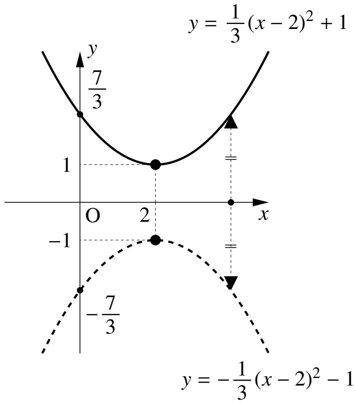
$y-q=f(x-p)$ ←xをx−pに，yをy−qに代えた

で表される．

2. 頂点の移動を用いて 2 次関数の移動を考える

2 次関数の移動については，頂点の移動を用いて考えることもできる．ただし，x^2 の係数には気をつけることになる．

A. 頂点の移動から 2 次関数の対称移動を考える（x 軸）



まず，x 軸についての対称移動を考えよう．

たとえば，2 次関数 $y=\frac{1}{3}(x-2)^2+1$ のグラフを x 軸について対称移動すると，頂点は

$$(2,\ 1) \xrightarrow{\text{x軸対称移動}} (2, -1)$$

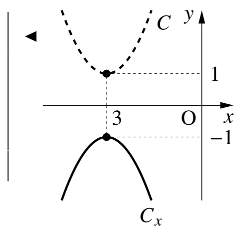
と移動し，さらに x^2 の係数の符号が反対になる．つまり，点線 ------ のグラフの式は，$y=-\frac{1}{3}(x-2)^2-1$ と分かる．

【例題 123】 放物線 C : $y=(x+3)^2+1$ を x 軸について対称移動してできる放物線 C_x の方程式，頂点の座標，軸の方程式を求めよ．

【解答】 右欄外の図のグラフを書けば，

$$C \text{ の頂点 } (-3, 1) \xrightarrow{\text{x軸対称移動}} \boldsymbol{C_x \text{ の頂点 } (-3, -1)}$$

と移動し，x^2 の係数は 1 から −1 になる．よって，**C_x の方程式は $y=-(x+3)^2-1$，軸は $x=-3$** である．



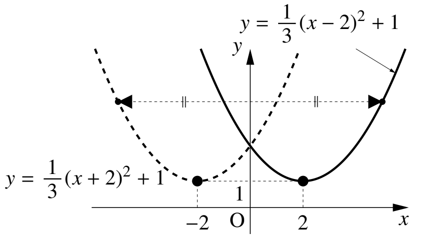
B. 頂点の移動から 2 次関数の対称移動を考える（y 軸，原点）

次に，x 軸についての対称移動を考えよう．

たとえば，2 次関数 $y=\dfrac{1}{3}(x-2)^2+1$ のグラフを y 軸について対称移動すると，頂点は

$$(2,1)\xrightarrow{y\text{ 軸対称移動}}(-2,1)$$

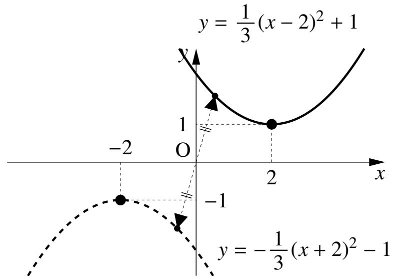
と移動する．x^2の係数は変化しない．つまり，点線 ⋯⋯ のグラフの式は，$y=\dfrac{1}{3}(x+2)^2+1$ と分かる．



最後に，2 次関数 $y=\dfrac{1}{3}(x-2)^2+1$ のグラフを原点について対称移動すると，頂点は

$$(2,\ 1)\xrightarrow{\text{原点対称移動}}(-2,-1)$$

と移動し，さらに x^2の係数の符号が反対になる．つまり，点線 ⋯⋯ のグラフの式は，$y=-\dfrac{1}{3}(x+2)^2-1$ と分かる．



【例題 124】 放物線 C： $y=(x+3)^2+1$ について，以下の問いに答えよ．

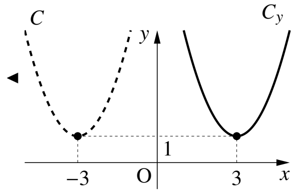
1. 放物線 C を y 軸について対称移動した放物線 C_y の方程式，頂点の座標，軸の方程式を求めよ．
2. 放物線 C を原点について対称移動した放物線 C_0 の方程式，頂点の座標，軸の方程式を求めよ．

【解答】

1. 右欄外の図のグラフを書けば，

$$C\text{ の頂点 }(-3,\ 1)\xrightarrow{y\text{ 軸対称移動}}\boldsymbol{C_y}\textbf{ の頂点 }\boldsymbol{(3,\ 1)}$$

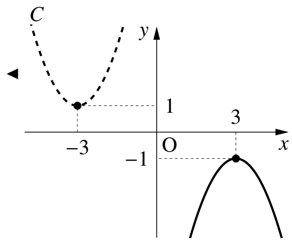
と移動し，x^2 の係数は変わらない．よって，$\boldsymbol{C_y}$ **の方程式は** $\boldsymbol{y=(x-3)^2-1}$，**軸は** $\boldsymbol{x=3}$ である．



2. 右欄外の図のグラフを書けば，

$$C\text{ の頂点 }(-3,1)\xrightarrow{\text{原点対称移動}}\boldsymbol{C_0}\textbf{ の頂点 }\boldsymbol{(3,-1)}$$

と移動し，x^2 の係数は 1 から −1 になる．よって，$\boldsymbol{C_0}$ **の方程式は** $\boldsymbol{y=-(x-3)^2-1}$，**軸は** $\boldsymbol{x=3}$ である．



第3章　三角比と図形の計量

たとえば，3 辺の長さが 4 cm，5 cm，7 cm の三角形は，1 つに決まる．しかし，その三角形の内角は何度くらいなのか，そもそも鋭角三角形か，鈍角三角形なのかは，描いてみないと分からない．

三角比を用いると，この問題を簡単な計算で解決する．

3.1　鋭角の三角比

この節では，直角三角形を用いて，90° より小さな角(鋭角)の三角比を学ぶ．

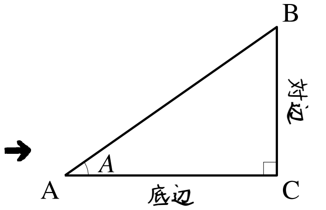
1.　三角比の定義 — 正接 (tan)，余弦 (cos)，正弦 (sin)

A.　直角三角形の辺の名前

AB が**斜辺** (hypotenuse) である直角三角形 ABC を ∠A から見るとき[*1]

辺 BC のことを**対辺** (opposite side)，辺 CA のことを**底辺** (base)

という．右図を「➔」の位置から見るとき，「➔」の反対側に対辺があり，三角形の底に底辺がある．



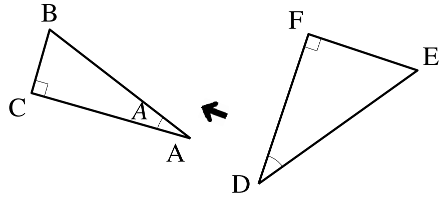
【例題 1】　右の △ABC を「➔」の位置から見たとき

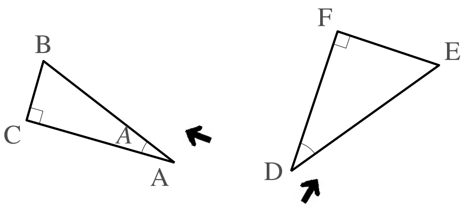
辺 AB は斜辺，辺 BC は $\boxed{\text{ア}}$，辺 CA は $\boxed{\text{イ}}$

である．また，△DEF を頂点 D から見たときは

辺 $\boxed{\text{ウ}}$ は斜辺，辺 $\boxed{\text{エ}}$ は対辺，辺 $\boxed{\text{オ}}$ は底辺

である．





【解答】

ア：対辺，イ：底辺

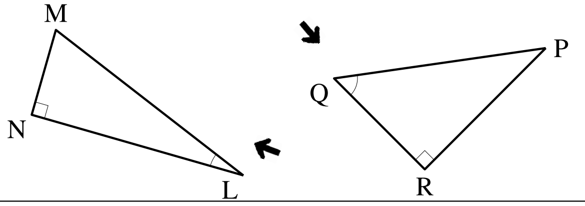
ウ：**DE**，エ：**EF**，オ：**FD**

◀ 慣れないうちは，図を回転させるなどして考えよう．

[*1] この章の図にある "➔" は，本文中で「〜からみたときの」とある場合の説明の補助として使われている．自分も同じ所から見つめているつもりになって，図形を考えてみよう．

【練習 2：直角三角形の辺の名称】

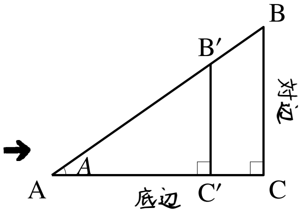
「➔」の位置から見たとき，左の三角形の LM，MN，NL，右の三角形の PQ，QR，RP は，それぞれ対辺，底辺，斜辺のいずれか，



【解答】 左では，**辺 MN は対辺**，**辺 NL は底辺**，**辺 LM は斜辺**になる．
右では，**辺 PR は対辺**，**辺 QR は底辺**，**辺 PQ は斜辺**になる．

B. 正接 (tan)

右図において，∠A から見たときの $\dfrac{(\text{対辺})}{(\text{底辺})}$ の値は，∠A の大きさだけで決まる．実際に測ってみれば，$\dfrac{\mathrm{C'B'}}{\mathrm{AC'}} = \dfrac{0.75\times\mathrm{CB}}{0.75\times\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}}$ である（△AB'C' は △ABC の 0.75 倍で描かれている）．



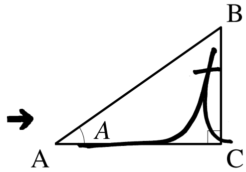
正接 (tan) の定義

右図の直角三角形 ABC において

$$\overset{\text{タンジェントエー}}{\boldsymbol{\tan A}} = \frac{(\text{対辺})}{(\text{底辺})} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}}$$

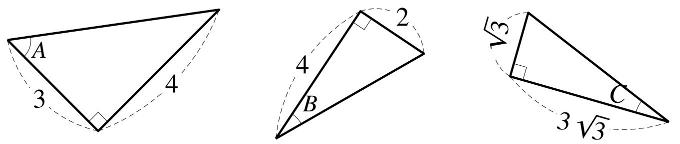
←筆記体が終わる辺
←筆記体が始まる辺

と定義し[*2]，A の**正接**（せいせつ）または，A の**タンジェント** (tangent) という．
$\tan A$ は，∠A から見た底辺に対する対辺の倍率を表している．



tan の定義は t の筆記体を用いて覚える．右上図では，t の筆記体は，分母の AC で始まり，分子の CB で終わる．

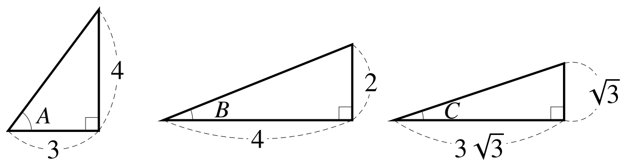
【例題 3】 右の図において，$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ をそれぞれ求めよ．



【解答】 右の図より，$\boldsymbol{\tan A = \dfrac{4}{3}}$

$\boldsymbol{\tan B} = \dfrac{2}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$\boldsymbol{\tan C} = \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

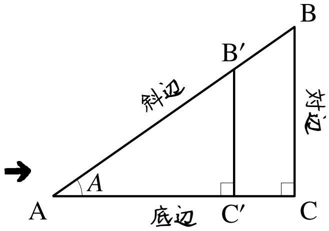


必ず，筆記体を用いた定義を確認しよう．慣れれば，問題の図を回したり，自分で描きなおす事なく求められるようになる．

[*2] この tan というのは，3 文字で 1 つの記号であり $t\times a\times n$ のことではない．これを明確にするため，数学では tan と斜体では書かず，tan と立体で書く．これは，次にでてくる sin，cos も同様である．

C. 余弦 (cos)・正弦 (sin)

右図において，∠A から見たときの $\dfrac{(\text{底辺})}{(\text{斜辺})}$，$\dfrac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})}$ の値は ∠A の大きさだけで決まる．実際，次が成り立つ．



$$\frac{(\text{底辺})}{(\text{斜辺})} = \frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{B'A}} = \frac{0.75\times\mathrm{AC}}{0.75\times\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BA}}$$

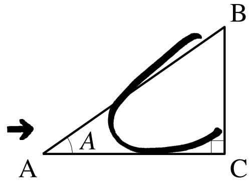
$$\frac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{AB'}} = \frac{0.75\times\mathrm{BC}}{0.75\times\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$

余弦・正弦の定義

右図の直角三角形 ABC において

コサインエー

$$\cos A = \frac{(\text{底辺})}{(\text{斜辺})} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BA}}$$ ←筆記体が終わる辺 ←筆記体が始まる辺

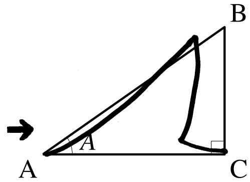


と定義し，A の**余弦**（よげん），または，A の**コサイン** (cosine) という．

$\cos A$ は，∠A からみた斜辺に対する底辺の倍率を表している．また

サインエー

$$\sin A = \frac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$ ←筆記体が終わる辺 ←筆記体が始まる辺



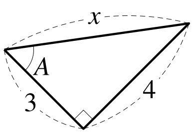
と定義し，A の**正弦**（せいげん），または，A の**サイン** (sine) という．

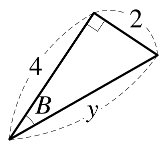
$\sin A$ は，∠A からみた斜辺に対する対辺の倍率を表している．

cos，sin の定義も，それぞれ c，s の筆記体を用いて覚える．tan も含めたすべて，「筆記体が始まる辺」が分母に，「筆記体が終わる辺」が分子になる．

【例題 4】 右の図において

1. 長さ x，y を求めよ．
2. $\cos A$，$\sin A$ を求めよ．
3. $\cos B$，$\sin B$ を求めよ．





【解答】

1. 三平方の定理より，$x = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

   $y = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = \mathbf{2\sqrt{5}}$

2. 定義にしたがって

   $\boldsymbol{\cos A = \dfrac{3}{5}}$，$\boldsymbol{\sin A = \dfrac{4}{5}}$

3. 定義にしたがって

   $\cos B = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$，$\sin B = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$

筆記体の c は角を回り込むように書き，筆記体の s は角から斜辺へ向かう，と理解するとよい．

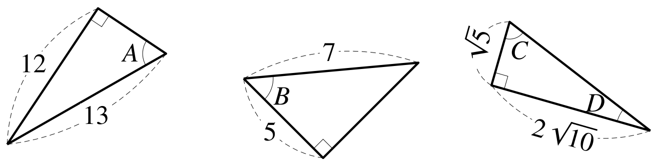
【練習 5：余弦・正弦・正接の定義】

(1) $\cos A$，$\sin A$，$\tan A$ を求めよ．

(2) $\cos B$，$\sin B$，$\tan B$ を求めよ．

(3) $\cos C$，$\sin C$，$\tan C$ を求めよ．

(4) $\cos D$，$\sin D$，$\tan D$ を求めよ．



【解答】

(1) 残りの 1 辺は $\sqrt{13^2-12^2}=5$ である．定義から

$\boldsymbol{\cos A=\dfrac{5}{13}}$，$\boldsymbol{\sin A=\dfrac{12}{13}}$，$\boldsymbol{\tan A=\dfrac{12}{5}}$

◀三平方の定理を用いた

(2) 残りの 1 辺は $\sqrt{7^2-5^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ であるので

$\boldsymbol{\cos B=\dfrac{5}{7}}$，$\boldsymbol{\sin B=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}}$，$\boldsymbol{\tan B=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}$

(3) 斜辺は $\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ であるので

$\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$，$\sin C=\dfrac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

$\tan C=\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

(4) $\cos D=\dfrac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$，$\sin D=\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$\tan D=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

D.　三角比の値

正接，余弦，正弦をまとめて，**三角比** (trigonometric ratio) という．いろいろな角度に関する三角比の値を p.207 にまとめてある．

【例題 6】 p.207 を用いて次の問に答えよ．ただし，$0^\circ < A < 90^\circ$ である．

1. $\cos 40^\circ$ の値を調べよ．また，$\sin A=0.97$ のとき，A のおよその値を求めよ．
2. $\cos B$ が $\sin 20^\circ$ に等しいとき，B の値を求めよ．

【解答】

1. p.207 の表より $\cos 40^\circ \fallingdotseq \boldsymbol{0.766}$，$\boldsymbol{A=76^\circ}$．
2. p.207 の表より $\sin 20^\circ \fallingdotseq 0.342$，このとき，$\boldsymbol{B \fallingdotseq 70^\circ}$

◀後の，『$90^\circ - A$ の三角比 (p.158)』から精確に $B=70^\circ$ であることがわかる．

E.　分数と分数の比 — 複分数

「3 を 10 で割った値」を $\dfrac{3}{10}$ と表すように，「$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ を $\dfrac{1}{7}$ で割った値」を $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}}$ と表すこともできる．このように，$\dfrac{a}{b}$ の分子または分母がさらに分数であるとき，$\dfrac{a}{b}$ を**複分数**(ふくぶんすう) (complex fraction) [*3] という．複分数は三角比の計算においてよく現れる．

複分数は，分母と分子に同じ数を掛ければ複分数でなくなる[*4].

$$\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\boxed{3}}}{\frac{1}{\boxed{7}}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}\times 21}{\frac{1}{7}\times 21} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{3}_1}\times \cancel{21}^7}{\frac{1}{\cancel{7}_1}\times \cancel{21}^3} = \dfrac{\sqrt{2}\times 7}{1\times 3} = \dfrac{7\sqrt{2}}{3}$$

【例題 7】 複分数 $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{2}{3}}$ を，普通の分数の（複分数でない）形にしなさい．

【解答】 5 と 3 の最小公倍数 15 を分母と分子に掛ければよい．

$$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{\boxed{5}}}{\frac{2}{\boxed{3}}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{5}\times 15}{\frac{2}{3}\times 15} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{5}}\times \cancel{15}^3}{\frac{2}{\cancel{3}}\times \cancel{15}^5} = \dfrac{\sqrt{3}\times 3}{2\times 5} = \dfrac{3\sqrt{3}}{10}$$

F.　有名角の三角比

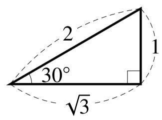
30°，45°，60° の三角比の値は，知っているものとされる．これらの角は，有名角といわれる．

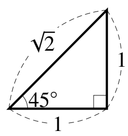
【暗記 8：有名角の三角比】

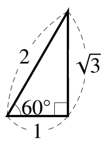
1. 3 辺の長さが 1，2，$\sqrt{3}$ の直角三角形を用い，cos 30°，sin 30°，tan 30° を求めよ．
2. 3 辺の長さが 1，1，$\sqrt{2}$ の直角三角形を用い，cos 45°，sin 45°，tan 45° を求めよ．
3. cos 60°，sin 60°，tan 60° を求めよ．

【解答】

1. 右欄外の図より $\cos 30^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\sin 30^\circ = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$
2. 右欄外の直角三角形より
$$\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}},\quad \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}},\quad \tan 45^\circ = \dfrac{1}{1} = \boldsymbol{1}$$
3. 右欄外の直角三角形より
$$\cos 60^\circ = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}},\quad \sin 60^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}},\quad \tan 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$







有名角でない三角比の値を覚える必要はない．必要なときは．p.207 の表を用いる．

[*3] 繁(はん)分数 (compound fraction) ともいう．

[*4] $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}}$ は $\dfrac{\sqrt{2}}{3} \div \dfrac{1}{7}$ を計算しても求められる．

【練習 9：複分数】

次の複分数を，普通の分数の形になおしなさい（分母の有理化もすること）.

(1) $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{7}}$　(2) $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{25}{9}}$　(3) $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$　(4) $\dfrac{2a}{\frac{1}{2}}$

【解答】

(1) $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{7}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}\times 28}{\frac{1}{7}\times 28} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}^{1}}\times \cancel{28}^{7}}{\frac{1}{\cancel{7}^{1}}\times \cancel{28}^{4}} = \boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{3}}{4}}$

◂ 4 と 7 の最小公倍数である 28 を，分母と分子に掛ける.

(2) $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{25}{9}} = \dfrac{\frac{5}{8}\times 72}{\frac{25}{9}\times 72} = \dfrac{\frac{5}{\cancel{8}^{1}}\times \cancel{72}^{9}}{\frac{25}{\cancel{9}^{1}}\times \cancel{72}^{8}} = \dfrac{\cancel{5}^{1}\times 9}{\cancel{25}^{5}\times 8} = \boldsymbol{\dfrac{9}{40}}$

◂ 8 と 9 の最小公倍数である 72 を，分母と分子に掛ける.

(3) $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{3}^{1}}\times \cancel{6}^{2}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}^{1}}\times \cancel{6}^{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{9}}$

◂ 2 と 3 の最小公倍数である 6 を，分母と分子に掛ける.
その後，分母を有理化する.

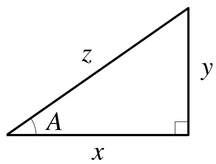
(4) $\dfrac{2a}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2a\times 2}{\frac{1}{2}\times 2} = \dfrac{2a\times 2}{\frac{1}{\cancel{2}}\times \cancel{2}} = \boldsymbol{4a}$

2.　三角比の利用

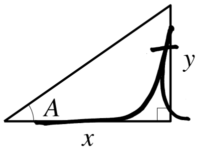
A.　三角比から辺の長さを求める

等式 $\tan A = \dfrac{y}{x}$ の両辺に x を掛けて

$$x\times\tan A = x\times\frac{y}{x} \quad\Leftrightarrow\quad x\tan A = y$$



という式を得る．この結果は，「x から t を書（か）いて，y にたどりつく」筆記体と



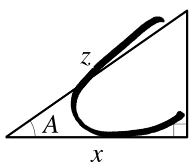
「x に tan を掛（か）けて，y を求める」ことを結びつけて覚えるとよい.

$$\overbrace{x\tan A}^{x\to y\text{ に筆記体 t を書く}} = y$$

同じようにして，cos，sin についても，以下の結果が成り立つ.

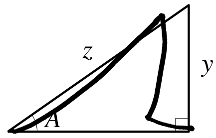
z から x を求める式

$$\overbrace{z\cos A}^{z\to x\text{ に筆記体 c を書く}} = x$$



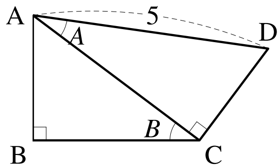
z から y を求める式

$$\overbrace{z\sin A}^{z\to y\text{ に筆記体 s を書く}} = y$$



これら 3 つの式を用いると，三角比から辺の長さを計算しやすい.

【例題 10】 右の図形について



$$\sin A = \frac{3}{5},\ \cos A = \frac{4}{5},\ \tan B = \sqrt{2},\ \cos B = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

とする．以下の問いに答えよ．

1. 辺 $\boxed{\text{ア}}$ から始めて ∠A について筆記体の s を書けば，辺 CD で終わるので，
   $\mathrm{CD} = \boxed{\text{ア}}\sin A = \boxed{\text{イ}}$
2. 辺 AD から始めて ∠A について筆記体の c を書き，∠B について筆記体の c を書けば辺 $\boxed{\text{ウ}}$ で終わるので，$\boxed{\text{ウ}} = (\mathrm{AD}\cos A)\cos B = \mathrm{AD}\cos A\cos B = \boxed{\text{エ}}$

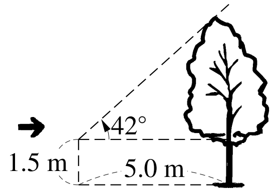
【解答】

1. ア ： **AD**，イ ： $5 \times \frac{3}{5} = \mathbf{3}$
2. ウ ： **BC**，エ ： $5 \times \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \mathbf{\frac{4\sqrt{6}}{3}}$

B. 身近な例への三角比の応用

大きなものの長さや高さを測るために，三角比は有効である．

【例題 11】 目の高さが 1.5 m にある人が，木から 5.0 m 離れた地点に立って木のてっぺんを見上げた．すると，水平な地面と視線のなす角[*5]が 42° であった．
この木の高さはおよそ何 m か．(右図参照)
p.207 の三角比の表を使って，小数第 2 位を四捨五入して答えなさい．

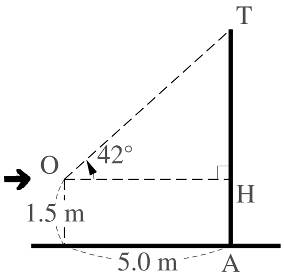


【解答】 右図のように O，T，H，A をとると，木の高さは TA の長さになる．

△OTH に注目して

$\mathrm{TH} = \mathrm{OH} \times \tan 42^\circ$
$\fallingdotseq 5.0\ \mathrm{m} \times 0.9004$
$\fallingdotseq 4.5\ \mathrm{m}$

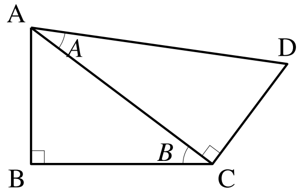
よって，木の高さはおよそ 4.5 + 1.5 = **6.0 m**



◂ p.207 の表より
$\tan 42^\circ \fallingdotseq 0.9004$

[*5] この角度のことを，仰角（ぎょうかく）という．

【練習 12：三角比と辺の長さ】



右の図形について，次の問いに答えよ．

(1) AD = 6 のとき，長さが $6\sin A$，$6\cos A\sin B$ に等しい線分を，それぞれ答えよ．

(2) AC = 5 のとき，CD，AB，AD の長さを，A，B で表せ．

【解答】

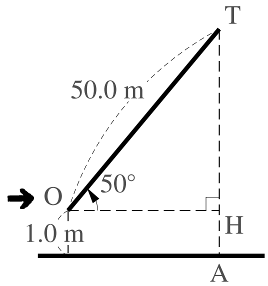
(1) 長さ 6 の AD から筆記体の s を書けば CD で終わるので，$6\sin A =$ **CD**.
長さ 6 の AD から筆記体の c を書けば AC で終わり，AC から筆記体の s を書けば AB で終わるので，$6\cos A\sin B = \mathrm{AC}\sin B =$ **AB**

(2) 長さ 5 の AC から筆記体の t を書けば CD で終わるので，CD $= \mathbf{5\tan A}$.
長さ 5 の AC から筆記体の s を書けば AB で終わるので，AB $= \mathbf{5\sin B}$.
また，$\mathrm{AD}\cos A = 5$ より，AD $= \boldsymbol{\dfrac{5}{\cos A}}$

【練習 13：身近な例への三角比の応用】

凧揚(たこあ)げをしていたら，水平な地面に対し 50° の角度で長さ 50.0 m のひもが伸びきった．ひもを持つ手は 1.0 m の高さにあり，糸が一直線に伸びているならば，この凧は地面からおよそ何 m の高さにあるか．p.207 の三角比の表を使って，小数第 2 位を四捨五入して答えなさい．

【解答】　右図のように O，T，H，A をとると，たこの高さは TA の長さになる．△OTH に注目して

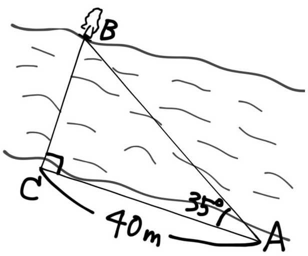


$$
\begin{aligned}
\mathrm{TH} &= \mathrm{OT} \times \sin 50^\circ \\
&\fallingdotseq 50.0\ \mathrm{m} \times 0.7660 \\
&= 38.3\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

◀ p.207 の表より $\sin 50^\circ \fallingdotseq 0.7660$

よって，たこの高さはおよそ 38.3 + 1.0 = **39.3 m**

【練習 14：川を渡らず川幅を知る方法】



川の長さを測るため，左図の A 点と C 点から，B 点の木を観測したところ，∠BCA = 90°，∠BAC = 35°，AC = 40 m であった．

(1) 川の幅 BC は何 m か．p.207 の三角比の表を使い，小数第 2 位を四捨五入して答えなさい．

(2) C 点から 80 m 離れた点 D から木を見ると，∠BDC はおよそ何度か．p.207 の三角比の表を使い，整数値で答えなさい．

【解答】

(1) $\mathrm{BC} = 40\ \mathrm{m} \times \tan 35^\circ = 40 \times 0.7002 \fallingdotseq$ **28.0 (m)**.

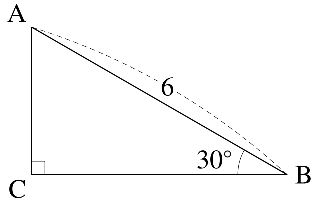
(2) $\tan\angle\mathrm{BDC} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DC}} = \dfrac{28}{80} = 0.35$ である．p.207 より，**およそ 19°**.

◀ p.207 より，$\tan 35^\circ = 0.7002$

◀ $\tan 19^\circ = 0.3443$
$\tan 20^\circ = 0.3640$

上の例題のようにすれば，原理的には，B へ誰も行くことなく川幅を測ることができる．

C. 15° の三角比とその周辺



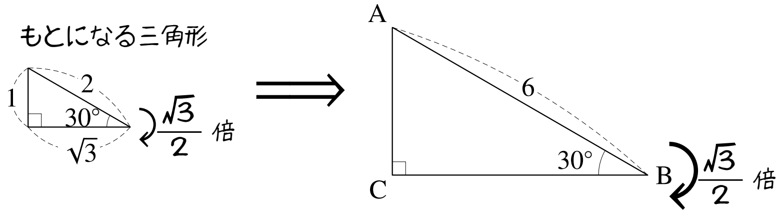
たとえば，右の直角三角形の BC の長さを考えよう．

この三角形は 30°, 60°, 90° の直角三角形なので，$AB : BC = 2 : \sqrt{3}$ から

$$6 : BC = 2 : \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2BC = 6\sqrt{3}$$

であるので，$BC = 3\sqrt{3}$ と求められる．

しかし，BC が AB の何倍なのか考えると，三角比を用いる必要もなく，さらに計算がしやすい．

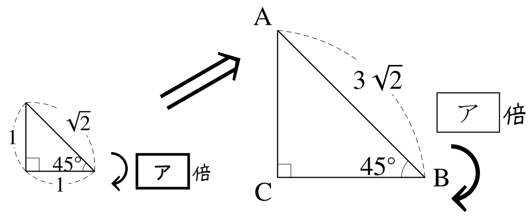


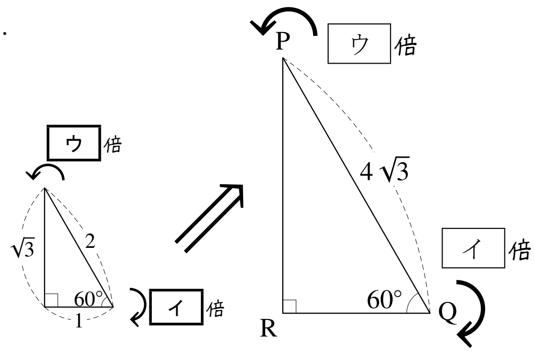
つまり

$$BC = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

上のやり方は結果的には，三角比の値を用いずに，等式 $BC = 6\cos 30°$ を用いている．

【例題 15】 次の図について，以下の問いに答えなさい．





1. 上の図の $\boxed{}$ に当てはまる値を答えなさい．値の分母は有理化しなくてよい．
2. BC，RQ，PR の長さを求めなさい．

【解答】

1. ア : $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$，イ : $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$，ウ : $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
2. $BC = 3\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{3}$

   $RQ = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \mathbf{2\sqrt{3}}$，$PR = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{6}$

D.　15°，75° の三角比

有名角以外にも，15°，75°，18°，36°，72° の三角比も計算で求められる（18°，36°，72° の三角比については，p.202 を参照のこと）[*6].

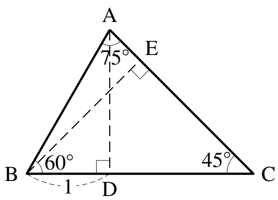
【練習 16：15°，75° の三角比】

△ABC は ∠A = 75°，∠B = 60°，∠C = 45° であり，A から辺 BC へ下ろした垂線の足[*7]を D，B から辺 CA へ下ろした垂線の足を E とする．BD = 1 とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) AB，AD の長さを求めよ．　(2) AC，BC の長さを求めよ．　(3) BE，AE の長さを求めよ．

(4) cos 15°，sin 15°，tan 15° を求めよ．　(5) cos 75°，sin 75°，tan 75° を求めよ．

【解答】



(1) △ABD は DB : BA : AD = 1 : 2 : $\sqrt{3}$ の直角三角形である．
BD = 1 より $\mathbf{AB = 2,\ AD = \sqrt{3}}$.

(2) △ACD は AD : DC : CA = 1 : 1 : $\sqrt{2}$ の直角三角形である．

$\mathrm{AD} = \sqrt{3}$ より $\mathrm{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{1}\mathrm{AD} = \boldsymbol{\sqrt{6}}$，$\mathrm{CD} = \mathrm{AD} = \sqrt{3}$.

よって，$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} + \mathrm{CD} = \mathbf{1 + \sqrt{3}}$.

(3) △BEC は BE : EC : CB = 1 : 1 : $\sqrt{2}$ の直角三角形である．

$\mathrm{BC} = 1 + \sqrt{3}$ より $\mathrm{BE} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{BC} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$，$\mathrm{EC} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

よって，$\mathrm{AE} = \mathrm{AC} + \mathrm{CE} = \sqrt{6} - \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$.

(4) △AEB を ∠B からみて

$$\cos 15^\circ = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \mathbf{2 - \sqrt{3}}$$

(5) △AEB を ∠A からみて

$$\cos 75^\circ = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\tan 75^\circ = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AE}} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \mathbf{2 + \sqrt{3}}$$

[*6] 15°，75°，18°，36°，72° の三角比の値を覚える必要はない．

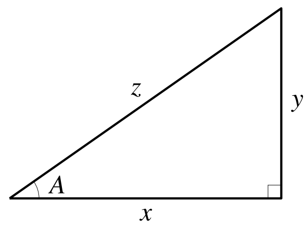
[*7] 「A から辺 BC へ下ろした垂線の足」とは，「A から引いた辺 BC に垂直な線が，辺 BC と交わる点」のことである．

3.　三角比の相互関係

A.　$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

右図の直角三角形において，p.150 で学んだように

$$x = z\cos A \ , \quad y = z\sin A \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$



であった．①を用いて

$$\tan A = \frac{y}{x} = \frac{z\sin A}{z\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

となる．つまり，次の等式 $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ が成り立つ．

B.　$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

三平方の定理より $x^2 + y^2 = z^2$ であるから，これに①を代入して

$$(z\cos A)^2 + (z\sin A)^2 = z^2$$
$$\Leftrightarrow z^2(\cos A)^2 + z^2(\sin A)^2 = z^2$$
$$\Leftrightarrow (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．普通 $(\cos A)^2$，$(\sin A)^2$，$(\tan A)^2$ は，それぞれ $\cos^2 A$，$\sin^2 A$，$\tan^2 A$ と書かれる[*8]．つまり，等式②は $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ と書かれる．

【例題 17】

1. $\sin A = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin^2 A$ はいくらか．$\cos^2 A$ はいくらか．$\cos A$ はいくらか．
2. $\sin A = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ．

【解答】

1. $\sin^2 A = (\sin A)^2 = \mathbf{\dfrac{4}{9}}$，$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = \mathbf{\dfrac{5}{9}}$，

   $\cos A > 0$ なので，$\cos A = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$

2. $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ より　　◀『三角比の相互関係 ii)』

   $$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

   $\cos A > 0$ なので，$\cos A = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \mathbf{\dfrac{4}{5}}$ である．

   また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より，$\tan A = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$　　◀『三角比の相互関係 i)』，『複分数』(p.149)

*8 A の 2 乗の cos の値である $\cos(A^2)$ と，$\cos A$ の 2 乗である $(\cos A)^2$ は，全く別の式であるが，かっこを省略して書くと，どちらも $\cos A^2$ となり区別できない．そのため，$\cos A^2$ と書かれたときは常に $\cos(A^2)$ を表すと決まっている．$(\cos A)^2$ のかっこを省略するときには，本文にもあるように $\cos^2 A$ と書く．

【練習 18：三角比の相互関係の利用〜その１〜】

$0° < A < 90°$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\cos A = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めよ．

(2) $\sin A = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ．

【解答】

(1) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ より

◀『三角比の相互関係 ii)』

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$\sin A > 0$ なので，$\sin A = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ である．

また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より

◀『三角比の相互関係 i)』

$$\tan A = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

◀『複分数』(p.149)

(2) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ より

◀『三角比の相互関係 ii)』

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$\cos A > 0$ なので，$\cos A = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$ である．

また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より

◀『三角比の相互関係 i)』

$$\tan A = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

◀『複分数』(p.149)

【暗記 19：$\tan A$ と他の三角比との関係】

等式 $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ を用いて，$\dfrac{1}{\tan A}$ を，$\cos A$，$\sin A$ で表せ．

【解答】

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \iff \frac{\tan A}{1} = \frac{\sin A}{\cos A}$$
$$\iff \boldsymbol{\frac{1}{\tan A} = \frac{\cos A}{\sin A}}$$

◀分母と分子をひっくり返しても，等式は成立する．

C.　$\tan A$ から $\sin A$，$\cos A$ を求める式

$\tan A$ しか与えられていないときは，別の公式が必要になる．

これは，$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ の両辺を $\sin^2 A$ で割って得られる．

$$\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 A} + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}$$

次ページで証明する式 iv) と合わせ，次のようにまとめられる．

三角比の相互関係

右図の直角三角形において

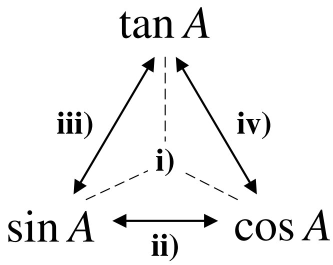
i) $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$　　（$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の関係）

ii) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$　　（$\sin A$ と $\cos A$ の関係）

が成り立つ．また，次の等式も成り立つ．

iii) $\dfrac{1}{\tan^2 A} + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 A}$　　（$\tan A$ と $\sin A$ の関係）

iv) $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$　　（$\cos A$ と $\tan A$ の関係）



iii) と iv) の式を覚える必要はない．ii) の両辺を $\sin^2 A$ や $\cos^2 A$ で割ればよい，と理解しておけばよい．

【例題 20】 $0° < A < 90°$ とする．$\tan A = 7$ のとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ．

【解答】 $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$ より　　◀『三角比の相互関係 iv)』

$$\cos^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A} = \frac{1}{1 + 7^2} = \frac{1}{50}$$

$\cos A > 0$ なので，$\cos A = \sqrt{\dfrac{1}{50}} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{10}}$ である．

また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より　　◀『三角比の相互関係 i)』

$$\sin A = \tan A \times \cos A = 7 \times \frac{\sqrt{2}}{10} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{2}}{10}}$$

【暗記 21：$\tan A$ と $\cos A$ との関係】

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ から，等式 $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$ を導け.

【解答】 $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ の両辺を $\cos^2 A$ で割ると

$$1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$$

【練習 22：三角比の相互関係の利用〜その２〜】

$0^\circ < A < 90^\circ$ とする．$\tan A = \dfrac{1}{5}$ のとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ.

【解答】 $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$ より

◄『三角比の相互関係 iv)』

$$\cos^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{26}{25}} = \frac{25}{26}$$

$\cos A > 0$ なので，$\cos A = \sqrt{\dfrac{25}{26}} = \boldsymbol{\dfrac{5}{\sqrt{26}}}$ である.

また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より

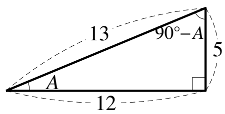
◄『三角比の相互関係 i)』

$$\sin A = \tan A \times \cos A = \frac{1}{5} \times \frac{5}{\sqrt{26}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{26}}}$$

D. $90^\circ - A$ の三角比

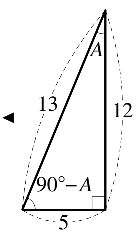
【例題 23】 右図の直角三角形において

1. $\cos A$，$\sin A$，$\tan A$ を求めよ.
2. $\cos(90^\circ - A)$，$\sin(90^\circ - A)$，$\tan(90^\circ - A)$ を求めよ.



【解答】

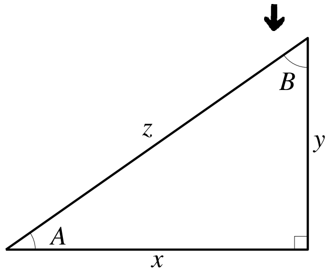
1. $\boldsymbol{\cos A = \dfrac{12}{13}}$，$\boldsymbol{\sin A = \dfrac{5}{13}}$，$\boldsymbol{\tan A = \dfrac{5}{12}}$
2. 右欄外の図のように考えて
$\boldsymbol{\cos(90^\circ - A) = \dfrac{5}{13}}$，$\boldsymbol{\sin(90^\circ - A) = \dfrac{12}{13}}$，$\boldsymbol{\tan(90^\circ - A) = \dfrac{12}{5}}$

◄ 

右図の直角三角形において

$B = 90^\circ - A$

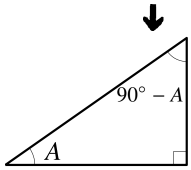
であるから，以下のように表すことができる．



$$\cos(90^\circ - A) = \cos B = \frac{y}{z} = \sin A$$
$$\sin(90^\circ - A) = \sin B = \frac{x}{z} = \cos A$$
$$\tan(90^\circ - A) = \tan B = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan A}$$

90° − A の三角比

右図の直角三角形を考えて，以下の等式が成り立つ．



$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$
$$\sin(90^\circ - A) = \cos A$$
$$\tan(90^\circ - A) = \frac{1}{\tan A}$$

…この式は暗記するようなものではない．「$90^\circ - A$ の三角比は A だけを使った三角比で表せる」ことを理解し，公式を作れるようにすればよい．

【練習 24：$90^\circ - A$ の三角比の利用】

(1) 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ．

1) $\sin 80^\circ$　　2) $\cos 46^\circ$　　3) $\tan 82^\circ$

(2) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$ を簡単にしなさい．

【解答】

(1) 1) $\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \mathbf{\cos 10^\circ}$

◀ $\sin(90^\circ - A) = \cos A$

2) $\cos 46^\circ = \cos(90^\circ - 44^\circ) = \mathbf{\sin 44^\circ}$

◀ $\cos(90^\circ - A) = \sin A$

3) $\tan 82^\circ = \tan(90^\circ - 8^\circ) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\tan 8^\circ}}$

◀ $\tan(90^\circ - A) = \dfrac{1}{\tan A}$

(2) $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ なので

$\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = \mathbf{1}$

◀『三角比の相互関係 ii)』$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

…$45^\circ < A < 90^\circ$ の三角比は，$0^\circ < A < 45^\circ$ の三角比になおすことができる．
p.207 の三角比の表において，$\cos 89^\circ = \sin 1^\circ$，$\cos 88^\circ = \sin 2^\circ$，$\cdots$ を確認してみよう．

3.2　三角比の拡張

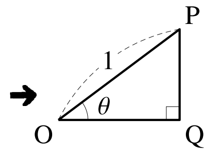
これまでは，鋭角の三角比のみを考えてきた．ここでは三角比の考えを直角・鈍角・0°・180° へと拡張し，0° から 180° までの三角比を統一的に扱う．

1.　座標と三角比の関係

A.　斜辺が 1 である直角三角形の三角比

斜辺が 1 である直角三角形 OPQ について，三角比を考えよう．すると，正弦，余弦，正接はそれぞれ

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = PQ, \qquad \cos\theta = \frac{OQ}{PO} = OQ$$

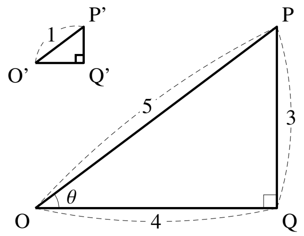


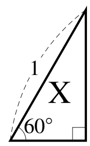
と書ける[*9]．つまり，斜辺の長さが 1 である直角三角形では

「対辺の長さは $\sin\theta$ の値を表し，底辺の長さは $\cos\theta$ の値を表す」

【例題 25】

1. $\triangle$OPQ と $\triangle$O'P'Q' は相似である．O'Q'，Q'P' の長さを求めなさい．また，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めなさい．
2. 右奥の直角三角形 X について，斜辺以外の 2 辺の長さを求めなさい．





【解答】

1. $\triangle$OP'Q' は，$\triangle$OPQ を $\frac{1}{5}$ 倍に縮小したものなので，

◀ OP : OP' = 5 : 1

$$OQ' = OQ \times \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{4}{5}}, \quad Q'P' = QO \times \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

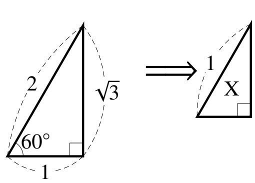
さらに，$\triangle$OP'Q' は斜辺が 1 であるので

◀ $\triangle$OPQ から，三角比の定義でも求められる．

$$\cos\theta = \frac{OQ'}{1} = \mathbf{\frac{4}{5}}, \quad \sin\theta = \frac{Q'P'}{1} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

2. 3 辺の長さが 1, 2, $\sqrt{3}$ の直角三角形を $\frac{1}{2}$ 倍に縮小すると，直角三角形 X になる．

◀



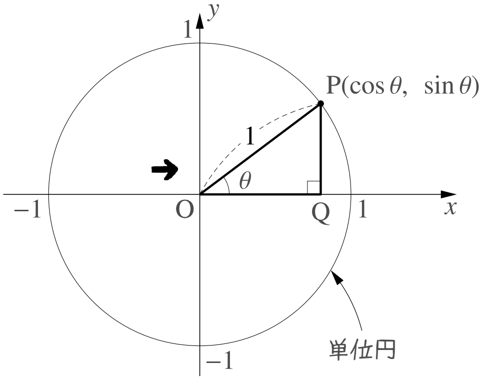
このとき，長さ $\sqrt{3}$ の辺は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ に，長さ 1 の辺は $\frac{1}{2}$ になる．

よって，斜辺以外の 2 辺は $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$**,** $\mathbf{\frac{1}{2}}$ である．

[*9] 拡張された三角比では，θ（シータ），φ（ファイ）などギリシア文字を使うことが多い．ギリシア文字の一覧は p.vi 参照．

B. 単位円と直角三角形

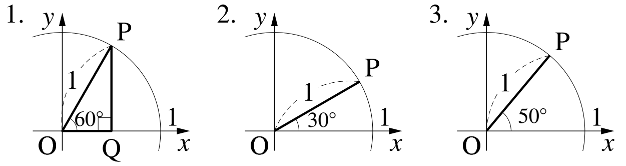
座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を**単位円** (unit circle) という．前ページの $\triangle$OPQ を，左図のように単位円の (上半分の) 中に描いてみよう．そのようにすれば



$$\cos\theta = \text{OQ} = (\text{P の } x \text{ 座標})$$
$$\sin\theta = \text{QP} = (\text{P の } y \text{ 座標})$$
$$\tan\theta = \frac{\text{QP}}{\text{OQ}} = \frac{\text{P の } y \text{ 座標}}{\text{P の } x \text{ 座標}} = (\text{線分 OP の傾き})$$

となる．

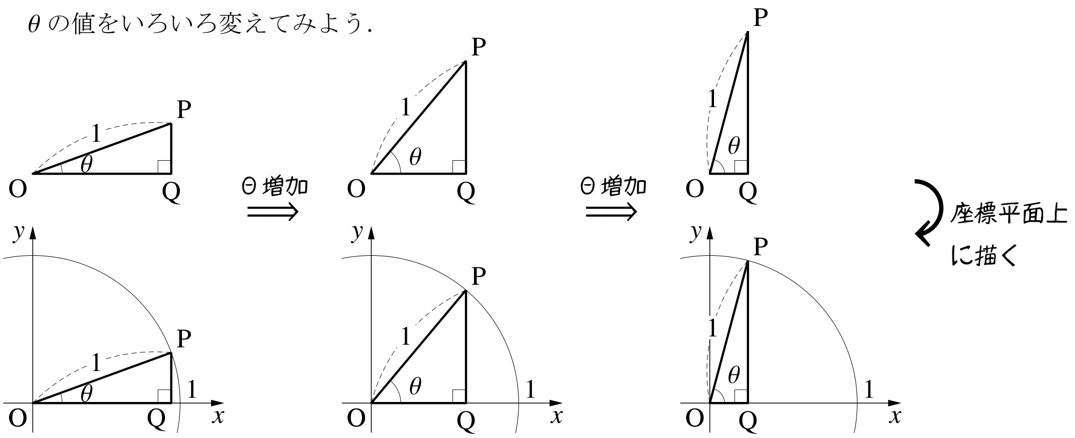
【例題 26】 右の各図について，点 P の座標をそれぞれ求めなさい．ただし，3. については「三角比の表 (p.207)」を用いなさい．



【解答】

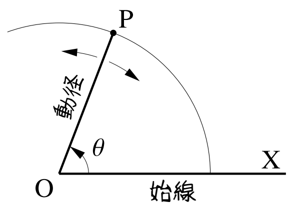
1. $\triangle$OPQ は 3 辺の長さが 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるので，P の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$
2. P から垂線を始線へ下ろせば 1. と同じ直角三角形ができるので，P の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)}$
3. P の x 座標は $\cos 50°$ に，y 座標は $\sin 50°$ に一致する．「三角比の表 (p.207)」から P の座標は **(0.6428, 0.766)** である．

θ の値をいろいろ変えてみよう．



常に単位円周上にある点 P を**角点** (angular point) という[*10]．

上の図において，角 θ の大きさは，角点 P の位置で決まる．θ の増加に伴い，角点 P は反時計回りに回る．このとき，回転する線分 OP を**動径** (radial vector)，固定された半直線 OX を**始線** (initial line) という．

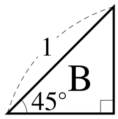


[*10] この「角点」という用語は 13th-note の造語であるので注意のこと．

【練習 27：斜辺が 1 である直角三角形】

(1) 右の直角三角形 B について，斜辺以外の 2 辺の長さを求めなさい．

(2) 斜辺の長さが 1，底辺の長さが $\dfrac{12}{13}$ である直角三角形について，対辺の長さを求めなさい．



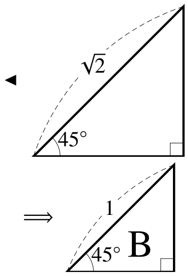
【解答】

(1) 3 辺の長さが 1，1，$\sqrt{2}$ の直角三角形を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に縮小したものなので，斜辺以外の辺は **2 辺とも $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$** になる．

(2) 対辺の長さを x とおくと，三平方の定理より

$$x^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{13^2 - 12^2}{13^2} = \frac{25}{13^2}$$

であるので，$x = \sqrt{\dfrac{25}{13^2}} = \boldsymbol{\dfrac{5}{13}}$ となる．

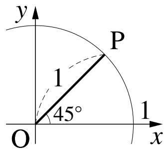


【練習 28：単位円と角点】

右図について，以下の問いに答えなさい．

(1) 動径と始線はどれか．右図に書き込みなさい．

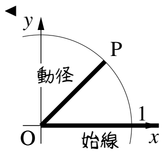
(2) 角点 P の座標をそれぞれ求めなさい．



【解答】

(1) 右欄外のようになる．

(2) P から垂線を始線へ下ろせば，3 辺が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，1 の直角三角形ができるので，P の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ である．



C. 三角比の拡張

角点 P の動く範囲を第 2 象限に広げれば，鈍角の三角比の定義を得る．

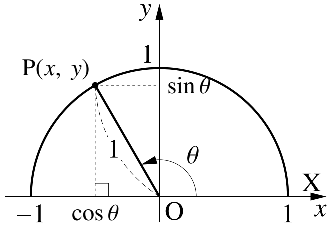
0° から 180° までの三角比

点 O を原点とする座標平面上に単位円の上半分をとり，その周上に角点 P をとる．x 軸の正の部分 OX に対し，$\angle\mathrm{POX} = \theta$ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ とするとき

$\cos\theta =$（角点 P の x 座標）

$\sin\theta =$（角点 P の y 座標）

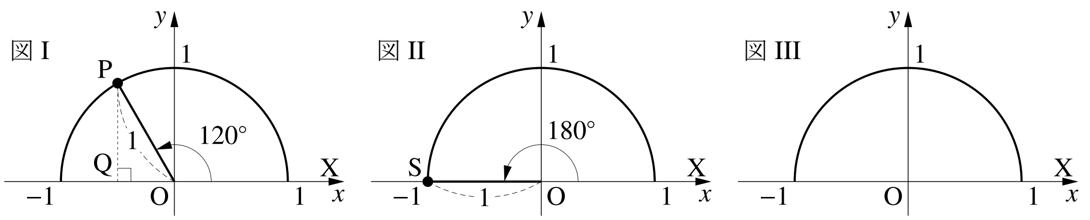
$\tan\theta = \dfrac{\text{（角点 P の } y \text{ 座標）}}{\text{（角点 P の } x \text{ 座標）}} =$ [*11]（動径 OP の傾き）



とする．ただし，角点 P の x 座標が 0 のとき，つまり，$\theta = 90°$ のときは $\tan\theta$ を定義しない．

[*11] この等号は，（動径 OP の傾き）$= \dfrac{\text{（点 P の } y \text{ 座標）} - \text{（点 O の } y \text{ 座標）}}{\text{（点 P の } x \text{ 座標）} - \text{（点 O の } x \text{ 座標）}}$ であることから導かれる．

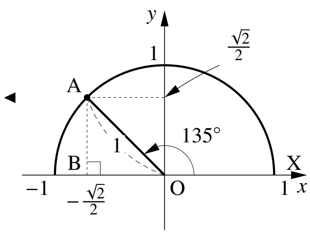
【例題 29】



1. 図 I の角点 P，図 II の角点 S の座標を求めよ．
2. $\cos 120°$，$\sin 120°$，$\tan 120°$，$\cos 180°$，$\sin 180°$，$\tan 180°$ の値を求めなさい．
3. $\angle AOX = 135°$ となるときの角点 A のおよその位置を図 III に書き込み，A の座標を答えよ．
4. $\sin 135°$，$\cos 135°$，$\tan 135°$ の値を求めよ．

【解答】

1. $\angle POQ = 60°$ より，$\triangle OPQ$ は 3 辺が $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，1 の直角三角形であるから，$\mathbf{P}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である．
   また，図 II について $\mathbf{S(-1,\ 0)}$ である．
2. $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$，　$\sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$\tan 120° = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$
   $\cos 180° = -1$，　$\sin 180° = 0$，　$\tan 180° = \dfrac{0}{-1} = 0$
3. 右欄外のようになり，$\triangle AOB$ は 3 辺の長さが $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，1 の直角三角形であるので，$\mathbf{P}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ である．
4. $\cos 135° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 135° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　$\tan 135° = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$



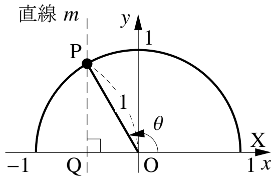
D.　三角比から角度を求める

（p.207 の三角比の表を用いずに）三角比から角度を求めることを考えよう．そのためには，単位円を書いて，角点がどこにあるのかを書き込めばよい．

【例題 30】 $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求めたい．それには

（角点 P の $\boxed{\text{ア}}$ 座標）$= -\dfrac{1}{2}$

となればよい．直線 m ： $\boxed{\text{ア}} = -\dfrac{1}{2}$ と単位円の交点は右図の P になり，$\angle POQ = \boxed{\text{イ}}$ である．よって，図中の角 θ は $\boxed{\text{ウ}}$ であるから $\theta = \boxed{\text{ウ}}$ とわかる．



【解答】　ア : x

イ : $\triangle OPQ$ は 3 辺の長さが 1，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1}{2}$ の直角三角形なので $\angle POQ = \mathbf{60°}$

ウ : $\theta = \angle POX = 180° - \angle POQ = \mathbf{120°}$．

【暗記 31：拡張された三角比】

図 I

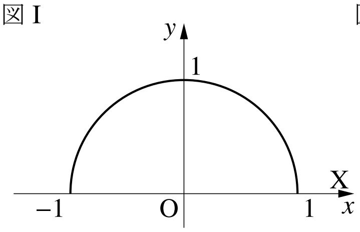


図 II

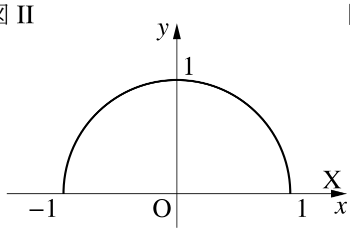
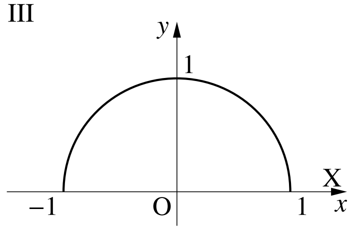


図 III

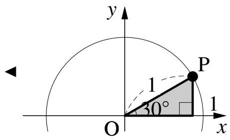


1. $\angle\mathrm{POX} = 30^\circ$ となる角点 P を図 I に書き込み，$\cos 30^\circ$，$\sin 30^\circ$，$\tan 30^\circ$ の値を求めよ．
（図に書き込む点は**およその位置**でよい，これは以下の問題でも同様である．）
2. $\angle\mathrm{QOX} = 150^\circ$ となる角点 Q を図 II に書き込み，$\cos 150^\circ$，$\sin 150^\circ$，$\tan 150^\circ$ の値を求めよ．
3. $\angle\mathrm{ROX} = 90^\circ$ となる角点 R を図 III に書き込み，$\cos 90^\circ$，$\sin 90^\circ$ の値を求めよ．

【解答】

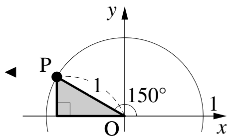
1. 角点 P の位置は，右欄外の図のようになる．塗りつぶされた直角三角形の 3 辺は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，1 であるので，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となり，

$\boldsymbol{\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\boldsymbol{\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}}$，　$\tan 30^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

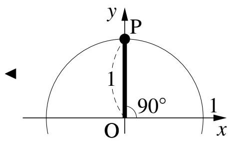


2. 角点 P の位置は，右欄外の図のようになる．塗りつぶされた直角三角形の 3 辺は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，1 であるので，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となり，

$\boldsymbol{\cos 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\boldsymbol{\sin 150^\circ = \dfrac{1}{2}}$，　$\tan 150^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$



3. 角点 P の位置は，右欄外の図のようになる．P (0, 1) であり，
$\boldsymbol{\cos 90^\circ = 0}$，$\boldsymbol{\sin 90^\circ = 1}$

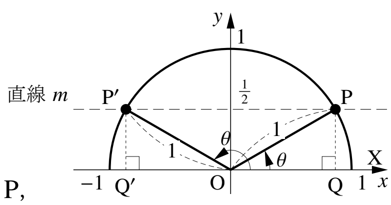


【練習 32：三角比を含む方程式〜その１〜】

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求めたい．それには

（角点の $\boxed{\text{ア}}$ 座標）$= \dfrac{1}{2}$

となればよい．直線 m ：$\boxed{\text{ア}} = \dfrac{1}{2}$ と単位円の交点は右図の角点 P，P' になり，∠POQ も ∠P'OQ' も $\boxed{\text{イ}}$ に等しい．よって，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ の解は $\theta = \boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ になる．



【解答】　ア：y

イ：△OPQ も △OP'Q' も 3 辺が 1，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1}{2}$ の直角三角形なので
∠POQ = ∠P'OQ' = 30°

ウ：∠POX = **30°**　　エ：∠P'OX = 180° − ∠P'OQ' = **150°**.

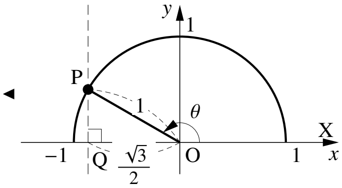
【練習 33：三角比を含む方程式〜その２〜】

以下の式を満たす θ を求めよ．ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

(1) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$　　(4) $\sin\theta = 1$

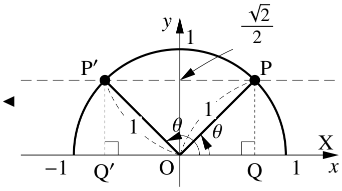
【解答】

(1)（角点の x 座標の値）$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となればよい．そのようになるのは，右欄外の P である．△OPQ は辺の長さが $\dfrac{1}{2} : 1 : \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の直角三角形なので $\angle \mathrm{POQ} = 30°$．つまり，$\theta = 180° - 30° = \mathbf{150°}$.



(2)（角点の y 座標の値）$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となればよい．そのようになる点は 2 つ存在し，右欄外の P，P’ である．△OPQ，△OP′Q′ とも直角二等辺三角形であるので $\angle \mathrm{POQ} = 45°, \angle \mathrm{P'OQ'} = 45°$.

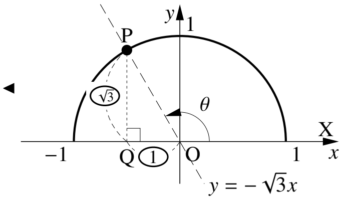
つまり，$\boldsymbol{\theta = 45°}$，または，$\theta = 180° - 45° = \mathbf{135°}$.



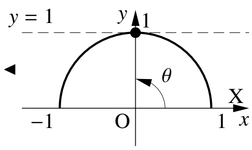
(3) 動径 OP の傾きが $-\sqrt{3}$ になればよい．そのような点は右欄外の P である．

△OPQ は辺の長さが $1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形なので $\angle \mathrm{POQ} = 60°$.

つまり，$\theta = 180° - 60° = \mathbf{120°}$.



(4)（角点の y 座標の値）$= 1$ となればよい．そのようになる点は，右欄外の P であるから，$\boldsymbol{\theta = 90°}$.



【発展 34：三角比を含む不等式】

以下の式を満たす θ を求めよ．ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

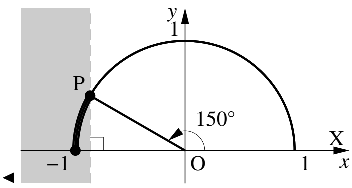
① $\cos\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　② $\sin\theta > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　③ $\tan\theta > -\sqrt{3}$

【解答】

① 上半分の単位円周上において（x 座標の値）$\leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であればよい．

そのようになるのは，右欄外の太線部分であるので，

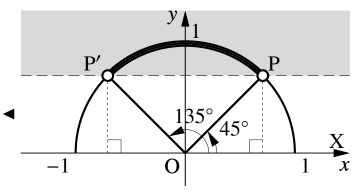
$\mathbf{150° \leqq \boldsymbol{\theta} \leqq 180°}$.



② 上半分の単位円周上において（y 座標の値）$> \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であればよい．

そのようになるのは，右欄外の太線部分であるので，

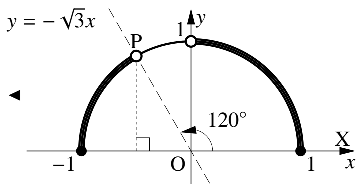
$\mathbf{45° < \boldsymbol{\theta} < 135°}$.



③ 上半分の単位円周上において（動径の傾き）$> -\sqrt{3}$ であればよい．

そのようになるのは，右欄外の太線部分であるので，

$\mathbf{0° \leqq \boldsymbol{\theta} < 90°}$，$\mathbf{120° < \boldsymbol{\theta} \leqq 180°}$.



【練習 35：有名角の三角比】

0°，30°，45°，60°，90°，120°，135°，150°，180° の三角比の値をそれぞれ求めよ．

【解答】

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	なし	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

これらの値は，単位円を用いていつでも導けるようにしておこう．また，90° 以上の有名角でない角の三角比の値は，p.207 の三角比の表，『$90° + \theta$ の三角比』(p.171)，『$180° - \theta$ の三角比』(p.170) を用いて求める．

2. 拡張された三角比の相互関係

A. 拡張された三角比の相互関係

鋭角の三角比において成立した以下の式は，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ においても成立する．

拡張された三角比の相互関係

角 θ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の式が成り立つ．（ただし，i), iii), iv) において，分母が 0 となる場合は考えない．）

i) $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の関係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

ii) $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の関係

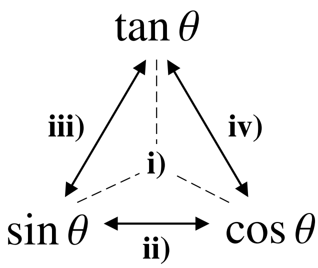
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

iii) $\tan\theta$ と $\sin\theta$ の関係

$$1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

iv) $\cos\theta$ と $\tan\theta$ の関係

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

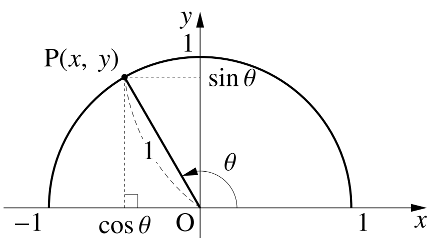


右図の単位円において $\cos\theta = x$，$\sin\theta = y$ であり

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

は tan の定義であった[*12]．また，三平方の定理より $x^2 + y^2 = 1$ であるから

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$



が成り立つ．この等式から，鋭角の時と同じように iii), iv) は導かれる（自力で導けるよう練習しよう）．

*12 p.162 の脚注を参照のこと

【例題 36】 次の問に答えよ．ただし $0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ である．

1. $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．
2. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

公式 ii)，iii)，iv) を用いるときは，sin は負の値にならないことに注意して解く必要がある．
一方，cos，tan の値は，負の値もとりうることに注意しよう．

【解答】

1. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ より

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

◀『三角比の相互関係 ii)』

よって，$\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \boldsymbol{\pm\dfrac{4}{5}}$.

また，$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より，

◀『三角比の相互関係 i)』

$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ のとき $\tan\alpha = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ のとき $\tan\alpha = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{4}}$

◀ $\cos\alpha = \pm\dfrac{4}{5}$，$\tan\alpha = \pm\dfrac{3}{4}$（複号同順）と書いてもよい

2. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ より

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

◀『三角比の相互関係 ii)』

$\sin\alpha \geqq 0$ なので，$\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$.

◀ $0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ のとき，定義から $\sin\alpha \geqq 0$.

また，$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より $\tan\alpha = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$ である．

◀『三角比の相互関係 i)』

【暗記 37：$\tan\theta$ と $\cos\theta$ との関係】

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ から，等式 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ を導け．

【解答】 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta} \quad ■$$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ の両辺を $\sin^2\theta$ で割ると

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+1=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2\theta}+1=\frac{1}{\sin^2\theta} \quad ■$$

【練習 38：三角比の相互関係の利用〜その３〜】

『拡張された三角比の相互関係』を使って次の問に答えよ．ただし $0°\leqq\alpha\leqq180°$ である．

(1) $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

(2) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

(3) $\tan\alpha=7$ のとき，$\cos\alpha$，$\sin\alpha$ の値を求めよ．

【解答】

(1) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ より

◀『三角比の相互関係 ii)』

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

$\sin\alpha\geqq0$ なので，$\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{9}{16}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$.

◀$0°\leqq\alpha\leqq180°$ のとき，定義から $\sin\alpha\geqq0$.

また，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}}=-\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\boldsymbol{-\dfrac{3\sqrt{7}}{7}}$

(2) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ より

◀『三角比の相互関係 ii)』

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$$

よって，$\cos\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{7}{9}}=\boldsymbol{\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$.

また，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より，

◀『三角比の相互関係 i)』

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ のとき $\tan\alpha=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{14}}{7}}$

$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ のとき $\tan\alpha=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{-\frac{\sqrt{7}}{3}}=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{14}}{7}}$

◀$\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，$\tan\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{7}$（複号同順）と書いてもよい

(3) $\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ より

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+7^2} = \frac{1}{50}$$

よって，$\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{50}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ である.

また，$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より

$$7 = \frac{\sin\alpha}{\pm\frac{\sqrt{2}}{10}} \quad \therefore\quad \sin\alpha = 7\times\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \pm\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$0 \leqq \sin\alpha$ であるので，$\sin\alpha = -\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ は不適．よって

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10},\quad \sin\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}}$$

◀ 三角比の相互関係 iv)

◀『三角比の相互関係 i)』

◀ 実際，単位円を書けば，tan の値が正であることから，cos は正の値しかありえないことがわかる.

【練習 39：三角比の計算】

次の式を簡単にせよ.

(1) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

(2) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}
&(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2\\
&= (\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) + (\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\\
&= 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\\
&= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

◀『三角比の相互関係 ii)』

(2)
$$\begin{aligned}
&\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\\
&= \frac{\cos\theta(1-\sin\theta) - \cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\
&= \frac{-2\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}\\
&= -\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}\\
&= -\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}\\
&= \boldsymbol{-2\tan\theta}
\end{aligned}$$

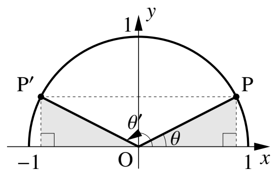
◀ 通分した

◀『三角比の相互関係 ii)』

◀『三角比の相互関係 i)』

B.　180° − θ の三角比

【例題 40】　右の単位円において，角点 P の座標は (0.891, 0.454) である．以下の問いに答えよ．



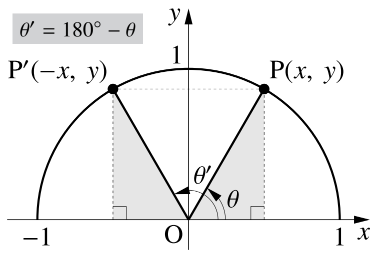
1. $\cos\theta$，$\sin\theta$ を求めよ．
2. 図中の θ' を θ で表せ．
3. P′ の座標を求めよ．
4. $\cos\theta'$，$\sin\theta'$ を求めよ．

【解答】

1. 角点 P の座標は (0.891, 0.454) なので，$\boldsymbol{\cos\theta = 0.891}$，$\boldsymbol{\sin\theta = 0.454}$.
2. $\theta + \theta' = 180°$ なので，$\boldsymbol{\theta' = 180° - \theta}$.
3. P と y 座標が一致しているので，**P′ (−0.891, 0.454)**.
4. P′ の座標は (−0.891, 0.454) なので，$\boldsymbol{\cos\theta' = -0.891}$，$\boldsymbol{\sin\theta' = 0.454}$.

◀ P′ は，y 軸について P と対称である．

右図のように，単位円周上に角 θ の動径 OP と角 180° − θ (= θ' とする)の動径 OP′ をとる．



点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 P′ の座標は $(-x,\ y)$ であり

$$\sin\theta' = y = \sin\theta,\qquad \cos\theta' = -x = -\cos\theta,$$

$$\tan\theta' = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

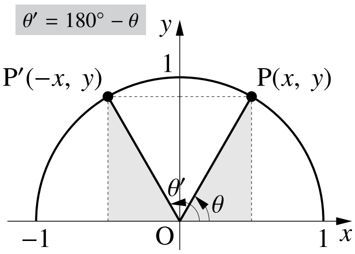
と表すことができる．ここで，$\theta' = 180° - \theta$ であるから，次のようにまとめることができる．

180° − θ の三角比

角 θ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の三角比において

$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$$

が成り立つ(ただし，tan 90° は考えない)．



つまり，$90° < \theta \leqq 180°$ の三角比は，$0° \leqq \theta < 90°$ の三角比になおして，その値を求めることができる．

【例題 41】 次の式を満たすように $\boxed{}$ の中に 90° より小さい角を入れよ．

1. $\sin 100° = \sin \boxed{}$
2. $\cos 179° = -\cos \boxed{}$
3. $\tan 125° = -\tan \boxed{}$

【解答】

1. $\sin 100° = \sin(180° - 80°) = \sin \mathbf{80°}$　◀ $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$
2. $\cos 179° = \cos(180° - 1°) = -\cos \mathbf{1°}$　◀ $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$
3. $\tan 125° = \tan(180° - 55°) = -\tan \mathbf{55°}$　◀ $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

この式は暗記するようなものではない．「$180° - \theta$ の三角比は θ だけを使った三角比で表せる」ことを理解し，必要なときに，上のように単位円を描き，導出できるようにしておこう．

【例題 42】 p.207 を用いて，$\cos 110°$，$\sin 110°$，$\tan 110°$ の値を求めよ．

【解答】 『$180° - \theta$ の三角比』より，$\cos 110° = -\cos 70°$ である．p.207 の表から $\cos 70° = 0.3420$ であるので，$\mathbf{\cos 110° = -0.3420}$．同様にして

$\sin 110° = \sin 70° = \mathbf{0.9397}$, $\tan 110° = -\tan 70° = \mathbf{-2.7475}$

◀『$90° + \theta$ の三角比』を用いてもよい．その場合は，$\cos 110° = -\sin 20° = -0.3420$ となる．

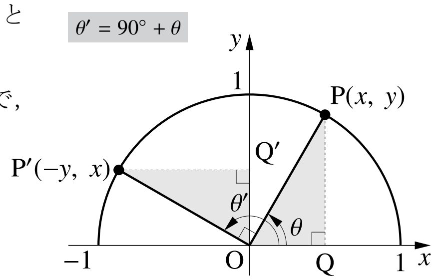
C. $90° + \theta$ の三角比

右図のように，単位円周上に角 θ の動径 OP と角 $90° + \theta$ ($= \theta'$ とする)の動径 OP′ をとる．

点 P の座標を (x, y) とすると，$\triangle$OPQ と $\triangle$OP′Q′ は合同なので，点 P′ の座標は $(-y, x)$ となるから

$$\sin\theta' = x = \cos\theta, \qquad \cos\theta' = -y = -\sin\theta,$$

$$\tan\theta' = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\tan\theta}$$



と表すことができる．ここで，$\theta' = 90° + \theta$ であるから，次のようにまとめることができる．

$90° + \theta$ の三角比

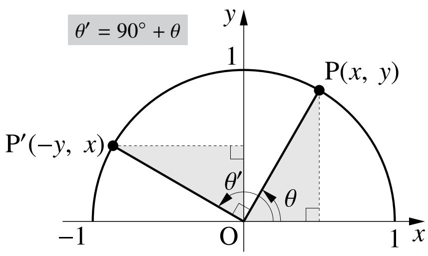
角 θ が $0° \leqq \theta \leqq 90°$ の三角比において

$$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(90° + \theta) = -\frac{1}{\tan\theta}$$

が成り立つ(ただし，$\tan 90°$ は考えない)．



【例題 43】 次の式を満たすように $\boxed{}$ の中に 90° より小さい角を入れよ．

1. $\sin 100° = \cos \boxed{}$
2. $\cos 179° = -\sin \boxed{}$
3. $\tan 125° = -\dfrac{1}{\tan \boxed{}}$

【解答】

1. $\sin 100° = \sin(90° + 10°) = \cos \mathbf{10°}$
2. $\cos 179° = \cos(90° + 89°) = -\sin \mathbf{89°}$
3. $\tan 125° = \tan(90° + 35°) = -\dfrac{1}{\tan \mathbf{35°}}$

◀ $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

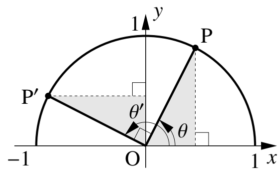
◀ $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

◀ $\tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

この式も暗記するようなものではない．「$90° + \theta$ の三角比は θ だけを使った三角比で表せる」ということを理解し，必要なときに，上のように単位円を描いて導出できるようにしておこう．

【暗記 44：$90^\circ+\theta$ の三角比の導出】

右の単位円において，角点 P の座標は $(a,\ b)$ である．以下の問いに答えよ．



1. $\cos\theta$, $\sin\theta$ を a, b で表せ.
2. 図中の θ' を θ で表せ.
3. P′ の座標を a, b で表せ.
4. $\cos\theta'$, $\sin\theta'$ を a, b で表せ.

【解答】

1. 角点 $P(a,\ b)$ の x 座標が $\cos\theta$，y 座標が $\sin\theta$ なので，$\boldsymbol{\cos\theta=a}$，$\boldsymbol{\sin\theta=b}$.
2. $\angle POP' = 90^\circ$ なので，$\boldsymbol{\theta'=90^\circ+\theta}$.
3. 塗りつぶされた 2 つの直角三角形は合同なので，**P′** $\boldsymbol{(-b,\ a)}$.
4. P′ の座標は $(-b,\ a)$ なので，$\boldsymbol{\cos\theta'=-b}$，$\boldsymbol{\sin\theta'=a}$.

【練習 45：$180^\circ-\theta$，$90^\circ+\theta$ の三角比の利用〜その１〜】

次の式を満たすように $\boxed{}$ の中に 90° より小さい角を入れよ.

(1) $\cos 120^\circ = -\cos\boxed{ア}$，$\sin 120^\circ = \sin\boxed{イ}$　　(2) $\cos 120^\circ = -\sin\boxed{ウ}$，$\sin 120^\circ = \cos\boxed{エ}$

(3) $\tan 120^\circ = -\tan\boxed{オ} = -\dfrac{1}{\tan\boxed{カ}}$

【解答】

(1) 『$180^\circ-\theta$ の三角比』より，**ア：60**，**イ：60**

(2) 『$90^\circ+\theta$ の三角比』より，**ウ：30**，**エ：30**

(3) 『$180^\circ-\theta$ の三角比』より，**オ：60**

『$90^\circ+\theta$ の三角比』より，**カ：30**

【練習 46：$180^\circ-\theta$，$90^\circ+\theta$ の三角比の利用〜その２〜】

次の式を簡単にしなさい.

(1) $\sin 20^\circ+\sin 50^\circ+\sin 80^\circ+\cos 110^\circ+\cos 140^\circ+\cos 170^\circ$

(2) $\cos 10^\circ+\cos 50^\circ+\cos 90^\circ+\cos 130^\circ+\cos 170^\circ$

【解答】

(1) 『$90^\circ+\theta$ の三角比』より

$$\begin{aligned}&\sin 20^\circ+\sin 50^\circ+\sin 80^\circ+\cos 110^\circ+\cos 140^\circ+\cos 170^\circ\\ =\ &\sin 20^\circ+\sin 50^\circ+\sin 80^\circ-\sin 20^\circ-\cos 50^\circ-\cos 80^\circ=\mathbf{0}\end{aligned}$$

(2) 『$180^\circ-\theta$ の三角比』より

$$\begin{aligned}&\cos 10^\circ+\cos 50^\circ+\cos 90^\circ+\cos 130^\circ+\cos 170^\circ\\ =\ &\cos 10^\circ+\cos 50^\circ+0-\cos 50^\circ-\cos 10^\circ=\mathbf{0}\end{aligned}$$

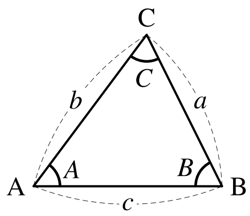
3.3　余弦定理・正弦定理

1.　辺と角の名前

△ABC において，次のように略すことが多い．目的は，後で学ぶ公式を見やすくする事である．

∠A，∠B，∠C の大きさ　⟶　それぞれ A，B，C

辺 BC，CA，AB の長さ ⟶　それぞれ a，b，c



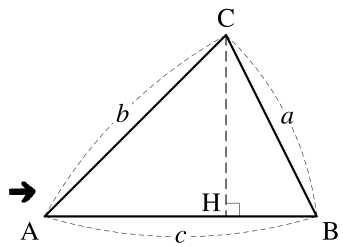
たとえば，角 A の向かい側にある辺 BC を a と表すことになる．

今後，特に断りのない限りこの記法にしたがうこととする．

2.　余弦定理（第 2 余弦定理）

A.　点 A からみた余弦定理

A が鋭角である △ABC において，右図のように垂線 CH をひき，△BCH に三平方の定理を用いると



$$\begin{aligned}a^2 = \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2\\ &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2\\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A\\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A\\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A\end{aligned}$$

という等式が成り立つ．この等式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

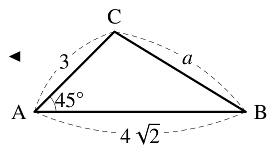
を（点 A からみた）**余弦定理** (cosine theorem) と呼ぶ[*13]．

【例題 47】 △ABC において，$b = 3$，$c = 4\sqrt{2}$，$A = 45°$ のとき，a の値を求めよ．

【解答】　点 A からみる余弦定理より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A = 3^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 3\cdot 4\sqrt{2}\cos 45°$$

$$= 9 + 32 - 24\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 17$$



よって，$\boldsymbol{a = \sqrt{17}}$ である．

---

*13　**第 2 余弦定理** (second cosine theorem) ともいう．第 1 余弦定理については p.205 を参照のこと．単に「余弦定理」というときにはこちらを指す．

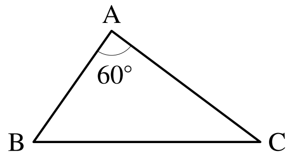
【練習 48：余弦定理の利用〜その１〜】

右図の $\triangle$ABC について，以下の問いに答えなさい．

(1) a, b, c は，通常どの辺の長さを表すか．右図に書き込みなさい．

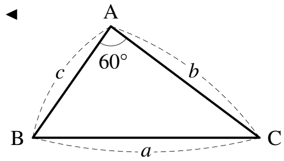
(2) $b = 3$，$c = 2$ のとき，a の値を求めよ．

(3) $a = 3\sqrt{7}$，$c = 6$ のとき，b の値を求めよ．



【解答】

(1) 右欄外のようになる．



(2) 余弦定理より $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ なので

$$a^2 = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ$$

$$= 9 + 4 - 2\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 7$$

$a > 0$ より，$\boldsymbol{a = \sqrt{7}}$ である．

(3) 余弦定理より $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ なので

$$\left(3\sqrt{7}\right)^2 = b^2 + 6^2 - 2\cdot b\cdot 6\cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow\ 63 = b^2 + 36 - \cancel{2}\cdot b\cdot 6\cdot\frac{1}{\cancel{2}}$$

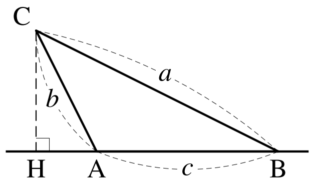
$$\Leftrightarrow\ 0 = b^2 - 6b - 27$$

$$\Leftrightarrow\ (b-9)(b+3) = 0$$

$b > 0$ より，$\boldsymbol{b = 9}$ である．

B. 辺の長さを求める

（点 A からみた）余弦定理は，A が鋭角でなくても成り立つ．右下の図のように，直線 AB 上に垂線 CH をひき，$\triangle$BCH に三平方の定理を用いると



$$\text{（左辺）} = a^2 = \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2$$

$$= \{b\sin(180^\circ - A)\}^2 + \{c + b\cos(180^\circ - A)\}^2$$

$$= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$$ ←『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.170)

（Aが鋭角の時と同じ計算になるので，省略）

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A = \text{（右辺）}$$

角 A が直角のときも，上の等式において $A = 90^\circ$ とすれば成立する．

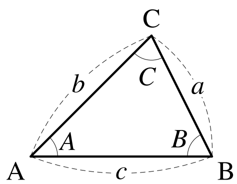
余弦定理（辺の長さを求める）

$\triangle$ABC において，次の等式が成り立つ．

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ （点Aからみた余弦定理）

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ （点Bからみた余弦定理）

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ （点Cからみた余弦定理）



たとえば，点 A から見る代わりに点 B から見ると，a は b に，b は c に，c は a に，A は B になって，点 A からみた余弦定理は点 B からみた余弦定理となる．

この公式は，「2 辺とその間の角が分かれば三角形は決定し，特に，もう 1 辺の長さが決まる」事実に対応している．ただし，上の例題 (3) や p.177, 181 のように「2 辺とその間でない角」が与えられた三角形においても，この余弦定理は利用できる．

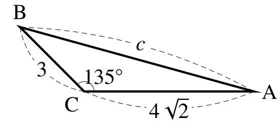
【例題 49】 △ABC において，$a = 3$，$b = 4\sqrt{2}$，$C = 135°$ のとき，c の値を求めよ．

【解答】 点 C からみた余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 3^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 3\cdot 4\sqrt{2}\cos 135°$$
$$= 9 + 32 - \cancel{2}\cdot 3\cdot 4\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = 65$$

$c > 0$ より，$\boldsymbol{c = \sqrt{65}}$ である．

◂



C. 角（の余弦）の大きさを求める

点 A から見た余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を $\cos A$ について解けば

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2 \quad\Leftrightarrow\quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

となるので，a, b, c の大きさから角 A（の余弦）求めることができる．

この等式も，単に余弦定理と呼ばれることが多い．

【例題 50】 △ABC において，$a = \sqrt{19}$，$b = 3$，$c = 5$ のとき，A の値を求めよ．また，$\cos C$ を求めよ．

「$\cos C$ を求めよ」のような問題では，角 C の値を求める必要はない．

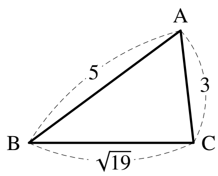
【解答】 △ABC に点 A からみた余弦定理を用いて

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 5^2 - \left(\sqrt{19}\right)^2}{2\cdot 3\cdot 5} = \frac{1}{2}$$

よって，$\boldsymbol{A = 60°}$ となる．また，点 A からみた余弦定理を用いて

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\left(\sqrt{19}\right)^2 + 3^2 - 5^2}{2\cdot\sqrt{19}\cdot 3} = \frac{\cancel{3}}{2\cdot\sqrt{19}\cdot\cancel{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{19}}}$$

◂

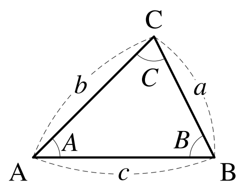


◂ 分母を有理化すれば $\dfrac{\sqrt{19}}{38}$

余弦定理（角の余弦を求める）

△ABC において，次の等式が成り立つ．

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad（点Aからみた余弦定理）$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad（点Bからみた余弦定理）$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad（点Cからみた余弦定理）$$



この等式は「3 辺を決めれば三角形も決定し，内角の大きさが決まる」ことに対応している．

この形で余弦定理を覚えてもよい．覚えやすい方で覚え，もう一方へ変形できれば十分である．

【暗記 51：余弦定理の式変形】

1. 等式 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ から，$\cos B$ を a, b, c で表す式を導け．

2. 等式 $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ から，c^2 を求める式を導け．

【解答】

1. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \Leftrightarrow 2ca\cos B = c^2 + a^2 - b^2$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}}$$

2. $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow 2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

3. 三角形の決定（１）

A. 三角形の決定条件・その１〜３辺が与えられた場合

3 辺の長さを与えれば，三角形はただ 1 つに決定し，余弦定理を用いて，各頂点の角度の大きさを計算できる．これは，三角形の合同条件「3 辺が等しい(3 辺相等)」に対応している．

【練習 52：余弦定理の利用〜その２〜】

△ABC の 3 辺の長さが $a = \sqrt{21}$，$b = 4$，$c = 5$ のとき

(1) A の値を求めよ．　(2) $\cos C$ を求め，∠C は鋭角か鈍角か答えよ．

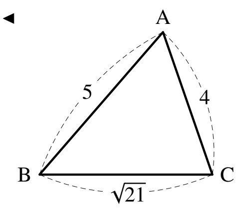
【解答】

(1) △ABC に点 A からみた余弦定理を用いて

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 5^2 - \left(\sqrt{21}\right)^2}{2\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{2}$$

よって，$\boldsymbol{A = 60^\circ}$ となる．

◀



(2) 点 C からみた余弦定理を用いて

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{21}\right)^2 + 4^2 - 5^2}{2\cdot\sqrt{21}\cdot 4} = \frac{\cancel{12}^3}{\cancel{8}^2\sqrt{21}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{14}}$$

$\cos C$ が正なので $C < 90^\circ$ と分かる．よって，**∠C は鋭角**である．

◀ 参考までに，$\dfrac{\sqrt{21}}{14} \fallingdotseq 0.327$ であるので，p.207 の表より $C \fallingdotseq 71^\circ$ である．

B. 鋭角三角形・鈍角三角形

鋭角三角形なのか，鈍角三角形なのかは，三角形の一番大きな角が鋭角か，鈍角か調べれば十分である．

【練習 53：鋭角三角形・鈍角三角形】

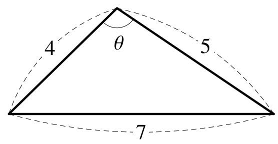
3 辺が 4, 5, 7 の三角形において，最も大きな角はどこか．また，これは鋭角三角形か，鈍角三角形か．

【解答】 三角形を図示すると右欄外の図のようになり，**長さ 7 の辺の向かいの角が一番大きい**と分かる．その角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{4^2+5^2-7^2}{2\cdot4\cdot5} = \frac{-8}{2\cdot4\cdot5} < 0$$

から $\theta > 90^\circ$ と分かるので，この三角形は**鈍角三角形**である．

◂



点 A からみた余弦定理 $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2ab}$ を用いて，次の事実が導かれる．

A が鋭角 $\Leftrightarrow$ $\cos A > 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 < b^2+c^2$

A が直角 $\Leftrightarrow$ $\cos A = 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 = b^2+c^2$ **（三平方の定理に一致）**

A が鈍角 $\Leftrightarrow$ $\cos A < 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2 > b^2+c^2$

C. 三角形の決定条件・その２～２辺とその間の角が与えられた場合

2 辺とその間の角を与えれば三角形はただ 1 つに決定し，余弦定理を用いて残りの辺の長さと角度の大きさを計算できる．これは，三角形の合同条件「2 辺とその間の角が等しい(2 辺 夾(きょう) 角相等)」に対応している．

【例題 54】 △ABC において，$a=3$，$b=3\sqrt{2}$，$C=135^\circ$ のとき，c，$\cos B$ の値を求めよ．

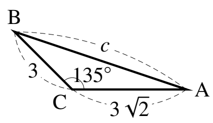
【解答】 点 C からみた余弦定理より

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C = 3^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot3\cdot3\sqrt{2}\cos 135^\circ$$
$$= 9+18-\cancel{2}\cdot3\cdot3\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = 45$$

$c>0$ より，$\boldsymbol{c = 3\sqrt{5}}$ である．さらに，点 B から見た余弦定理より

$$\cos B = \frac{\left(3\sqrt{5}\right)^2+3^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot3\sqrt{5}\cdot3} = \frac{\cancel{36}^{\,2}}{\cancel{18}\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{2}{5}\sqrt{5}}$$

◂



◂ ちなみに $\cos A = \dfrac{3}{10}\sqrt{10}$

D. 答えが 2 つある三角形

2 辺とその間でない角が与えられた場合も，余弦定理を用いて計算できる．しかし，三角形が決定するとは限らず，答えが 2 つになる場合がある．この問題については p.181 において再び取り上げられる．

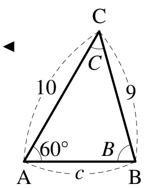
【練習 55：2 辺とその間でない角が与えられた場合～その１～】

$A=60^\circ$，$a=9$，$b=10$ である三角形において，c を求めよ．

【解答】 点 A からみた余弦定理より

$$9^2 = 10^2+c^2-2\cdot10c\cos 60^\circ$$
$$\Leftrightarrow\ 81 = 100+c^2-\cancel{2}\cdot10c\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ c^2-10c+19=0 \qquad \therefore c = \boldsymbol{5\pm\sqrt{6}}$$

◂



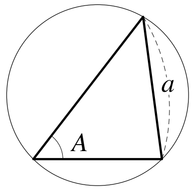
◂『解の公式 (p.63)』を用いて

$$\frac{10\pm\sqrt{100-76}}{2} = \frac{\cancel{2}(5\pm\sqrt{6})}{\cancel{2}}$$

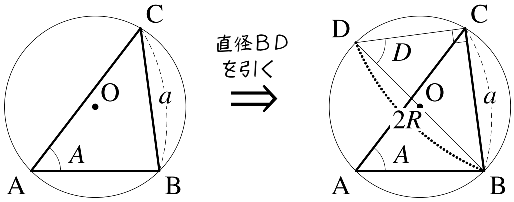
4. 正弦定理

A. 外接円と正弦定理

三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円** (circumscribed circle) といい，外接円の中心を**外心** (circumcenter) という[*14]．数学 A で学ぶように，1 つの三角形に対し，外接円と外心は 1 つに定まる．



次のように，外心が O である鋭角三角形 △ABC を考え，直径 BD を引こう．



線分 BD は円の直径なので ∠BCD = 90° であり，△DBC は直角三角形と分かり，$\sin D = \dfrac{a}{2R}$ である．円周角の定理より $A = D$ であるので

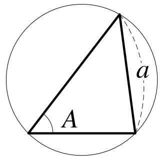
$$\frac{a}{2R} = \sin D = \sin A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

同様に，$\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ も成り立つ．これらの等式を，**正弦定理** (sine theorem) という．

正弦定理では，頻繁に複分数 (p.149）の計算を必要とするので，よく練習しよう．

【例題 56】 △ABC の外接円の半径を R とする．以下の問に答えなさい．

1. $a = 4$, $\sin A = \dfrac{1}{3}$ のとき，R を求めよ．
2. $a = \sqrt{7}$, $A = 30°$ のとき，R を求めよ．
3. $a = \sqrt{6}$, $A = 60°$ のとき，R を求めよ．

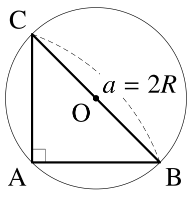


【解答】 いずれも，正弦定理より

◀ $2R = \dfrac{a}{\sin A}$

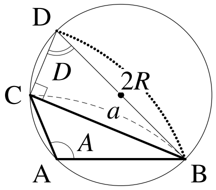
1. $2R = \dfrac{4}{\frac{1}{3}} = \dfrac{4 \times 3}{\frac{1}{3} \times 3} = 12$ なので，$\boldsymbol{R = 6}$.
2. $2R = \dfrac{\sqrt{7}}{\sin 30°} = \dfrac{\sqrt{7} \times 2}{\frac{1}{2} \times 2} = 2\sqrt{7}$ なので，$\boldsymbol{R = \sqrt{7}}$.
3. $2R = \dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60°} = \dfrac{\sqrt{6} \times 2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2} = \dfrac{2\cancel{\sqrt{6}}^{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{2}$ なので，$\boldsymbol{R = \sqrt{2}}$.

B. 直角三角形・鈍角三角形の正弦定理



A が直角のときは $\sin A = \sin 90° = 1$ である．また，$a = 2R$ である．つまり $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ は両辺とも a と一致し成立する．

[*14] 外心は 3 辺の垂直二等分線の交点に一致する．詳しくは，数学 A で扱う．



A が鈍角のとき，左図のように △ABC の外接円に直径 BD を引くと

$A = \angle\mathrm{DAC} + \angle\mathrm{DAB}$
$\quad = \angle\mathrm{DBC} + \angle\mathrm{DCB}$ （いずれも，円周角の定理）
$\quad = 180^\circ - D$ （△DCB に着目）

である[*15]ので，『180° − θ の三角比』(p.170) から，$\sin A = \sin(180^\circ - D) = \sin D$ とわかる．

直角三角形 △DBC について $\sin D = \dfrac{a}{2R}$ であるから，次のようにして正弦定理が示される．

$$\sin A = \sin D = \frac{a}{2R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

C. 正弦定理のまとめ

3 つの等式 $\dfrac{a}{\sin A} = 2R,\ \dfrac{b}{\sin B} = 2R,\ \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ から，次のようにまとめることができる．

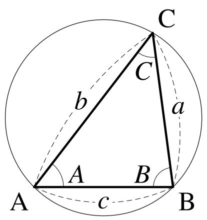
正弦定理

△ABC の外接円の半径 R について

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立つ．特に，辺と角について次の 3 つの式が成り立つ．

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$



【例題 57】

1. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ を a について解け．また，$\sin A = \dfrac{1}{3}$, $b = 6$, $\sin B = \dfrac{2}{5}$ のとき，a の値を求めよ．
2. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ を $\sin A$ について解け．また，$a = 2$, $b = 3$, $\sin B = \dfrac{3}{7}$ のとき，$\sin A$ の値を求めよ．

【解答】

1. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ の両辺に $\sin A$ を掛けて，$\boldsymbol{a = \dfrac{b \sin A}{\sin B}}$．よって，$a = \dfrac{b\sin A}{\sin B} = \dfrac{6 \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{\frac{2}{5}} = \mathbf{5}$
2. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ について，両辺の逆数をとれば

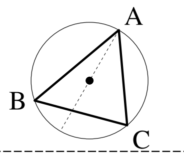
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sin A = \frac{a \sin B}{b}}$$

よって，$\sin A = \dfrac{a\sin B}{b} = \dfrac{2 \times \frac{3}{7}}{3} = \dfrac{\frac{6}{7}}{3} = \mathbf{\dfrac{2}{7}}$．

[*15] 一般に，円に内接する四角形においては，向かい合う 2 角の和は 180° となる (p.188)．詳しくは，数学 A でも取り扱われる．

【暗記 58：正弦定理の証明】

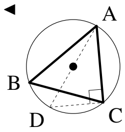
右図について，円の半径を R とする．
$b = 2R\sin B$ を証明しなさい．



【解答】　直径 AD をとれば，$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{B}$ である．また，$\triangle\mathrm{ACD}$ は $\angle\mathrm{C}$ が直角なので $\sin\angle\mathrm{ADC} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DA}} = \dfrac{b}{2R}$，以上より

$$\frac{b}{2R} = \sin B \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 2R\sin B$$

◀



等式 $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$ を確認できるようにしよう．

5.　三角形の決定（２）

A.　三角形の決定条件・その３～１辺とその両端の角が与えられた場合

1 辺とその両端の角が与えれば，三角形はただ 1 つに決定し，残りの辺の長さ，角度またはその余弦を求められる．これは，三角形の合同条件「1 辺とその両端の角が等しい(2 角夾(きょう)辺相等)」に対応している．

【練習 59：正弦定理の利用～その２～】

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$c = 12$，$C = 45°$，$A = 60°$ のとき，a の値と，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を求めよ．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$b = 7$，$B = 60°$，$c = 6$ のとき，$\sin C$ の値と，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を求めよ．

【解答】

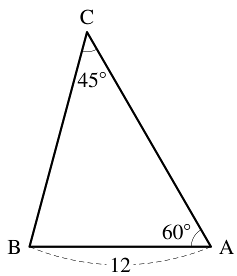
(1) 正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A}$，$\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ より

$$a = \frac{c\sin A}{\sin C} = \frac{12\times\sin 60°}{\sin 45°} = \frac{12\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}\times 2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \mathbf{6\sqrt{6}}$$

$$2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{12}{\sin 45°} = \frac{12\times 2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2} = 12\sqrt{2} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{R = 6\sqrt{2}}$$

◀



(2) 正弦定理より $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin B}{b}$ であるので

$$\sin C = \frac{c\sin B}{b} = \frac{6\sin 60°}{7} = \frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{7}}$$

また，$2R = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{7}{\sin 60°} = \dfrac{7\times 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2} = \dfrac{14}{\sqrt{3}}$ から $R = \boldsymbol{\dfrac{7}{\sqrt{3}}}$．

◀ 有理化すれば $R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$．形が複雑になるので，有理化してもしなくてもよい．

正弦定理から 4 つのことが分かる．上のように辺の長さを求めること，角の（正弦の）大きさを求めること，さらに，外接円の半径を求めること (p.178) と，正弦の比と辺の比が等しいこと (p.182) である．

B.　三角形の決定条件・その４～２辺とその間でない角が与えられた場合

p.177 でも取り上げた，2 辺とその間でない角が与えられた場合を再び考えよう．

【練習 60：2 辺とその間でない角が与えられた場合】

(1) $A = 30°$，$a = \sqrt{2}$，$b = 2$ である三角形を考えよう．正弦定理を用いて，$B = \boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$（ア＜イ）とわかる．一方，余弦定理を用いて，$c = \boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$（ウ＜エ）とわかる．

ここで，$B = \boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ のときの図をそれぞれ描けば，$B = \boxed{\text{オ}}$ のときの方が c が大きいので，

$B = \boxed{\text{ア}}$ ならば $c = \boxed{\text{カ}}$，$B = \boxed{\text{イ}}$ ならば $c = \boxed{\text{キ}}$ とわかる．

(2) $A = 45°$，$a = 2$，$b = \sqrt{2}$ である三角形を考えよう．

正弦定理を用いると B の値は 2 つ求められるが，このうち $B = \boxed{\text{ク}}$ のみ適する．

実際，余弦定理を用いると c の値は 2 つ求められるが，このうち $c = \boxed{\text{ケ}}$ のみ適している．

【解答】

(1) 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ を用いて

$$\sin B = \frac{2\sin 30°}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

より，$B = \underline{\mathbf{45°}}_{(\text{ア})}$，$\underline{\mathbf{135°}}_{(\text{イ})}$．次に，点 A についての余弦定理から

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 + c^2 - 2\cdot 2\cdot c\cos 30°$$

$$\Leftrightarrow\ 2 = 4 + c^2 - \cancel{2}\cdot 2c\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ c^2 - 2\sqrt{3}c + 2 = 0 \qquad \therefore\quad c = \frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-8}}{2} = \sqrt{3}\pm 1$$

となるから，$c = \underline{\mathbf{\sqrt{3}-1}}_{(\text{ウ})}$，$\underline{\mathbf{\sqrt{3}+1}}_{(\text{エ})}$ である．

ここで，それぞれの B について図を描くと右欄外の図のようになり，

$B = \underline{\mathbf{45°}}_{(\text{オ})}$ のときの方が c が長いと分かる．つまり

$B = 45°$ のとき $c = \underline{\mathbf{\sqrt{3}+1}}_{(\text{カ})}$

$B = 135°$ のとき $c = \underline{\mathbf{\sqrt{3}-1}}_{(\text{キ})}$ である．

(2) 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ を用いて

$$\sin B = \frac{\sqrt{2}\sin 45°}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \qquad \therefore\quad B = 30°,\ 150°$$

$B = 150°$ のときは，$A + B = 45° + 150° > 180°$ となって不適．よって，

$B = \underline{\mathbf{30°}}_{(\text{ク})}$ となる．また，点 A からみる余弦定理より

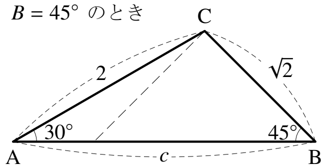
$$2^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + c^2 - 2\sqrt{2}c\cos 45°$$

$$\Leftrightarrow\ 4 = 2 + c^2 - \cancel{2}\sqrt{2}c\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

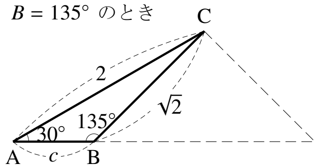
$$\Leftrightarrow\ c^2 - 2c + 2 = 0 \qquad \therefore\quad c = 1\pm\sqrt{3}$$

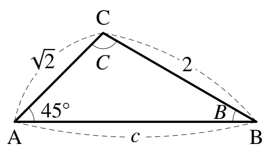
$c > 0$ であるから，$c = \underline{\mathbf{1+\sqrt{3}}}_{(\text{ケ})}$．

$B = 45°$ のとき



$B = 135°$ のとき





C. 正弦の比と辺の比

【発展 61：正弦定理と正弦の比】

$\triangle$ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 2:4:5$ であるとき，次の問いに答えよ．

① 3 辺の長さの比 $a:b:c$ を求めよ．　② $\cos A$ を求めよ．

【解答】

① $\triangle$ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より $a = 2R\sin A$，$b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ であるから

$$\begin{aligned} a:b:c &= 2R\sin A : 2R\sin B : 2R\sin C \\ &= \sin A : \sin B : \sin C = \mathbf{2:4:5} \end{aligned}$$

② ①より，ある実数 k を用いて $a = 2k$, $b = 4k$, $c = 5k$ と書けるので，余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} &= \frac{(4k)^2+(5k)^2-(2k)^2}{2\cdot 4k\cdot 5k} \\ &= \frac{37k^2}{40k^2} = \mathbf{\frac{37}{40}} \end{aligned}$$

◂ 1 : 2 : 3 のそれぞれの値を 2 倍すれば 2 : 4 : 6 になるように，$a:b:c$ を何倍かすれば 2 : 4 : 5 になる，それを k 倍とおく．

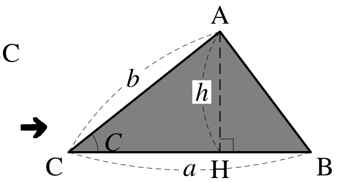
①から分かるように，$a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C$ である．また，②で計算できたように，3 辺の比さえ分かれば 3 角の大きさは決定される．

3.4 平面図形の計量

1. 三角形の面積と三角比

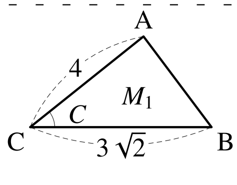
右図において $\triangle$ACH に着目すれば $h = \text{AH} = b\sin C$ であるので，$\triangle$ABC の面積は次のように計算できる．

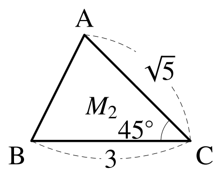
$$\triangle\text{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a\cdot b\sin C = \frac{1}{2}ab\sin C$$



【例題 62】

1. 右の三角形 M_1 の角 C について，$\sin C = \frac{\sqrt{5}}{3}$ であるという．M_1 の面積を求めよ．
2. 左の三角形 M_2 の面積を求めよ．





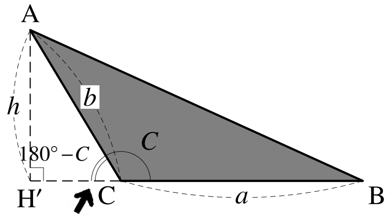
【解答】

1. $S = \frac{1}{\cancel{2}}ab\sin C = \frac{1}{2}\cdot\cancel{3}\sqrt{2}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} = \mathbf{2\sqrt{10}}$

2. $S = \frac{1}{2}ab\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{\frac{3\sqrt{10}}{4}}$

∠A が鈍角の場合も，△ACH′ に着目して

$h = b\sin(180^\circ - C) = b\sin C$



である（『180° − θ の三角比』(p.170) を用いた）ので，

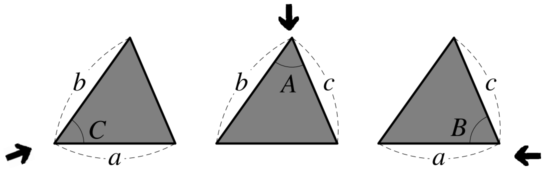
$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

と計算でき，同じ式を得る．また，$\theta = 90^\circ$ の直角三角形の場合も同じ式が成り立つと分かる．

上の面積の公式は，角 C から見て得られた．角 A, B から見た場合も同様の公式が得られる．

三角形の面積

三角形の面積 S は，$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B$ で求めることができる．



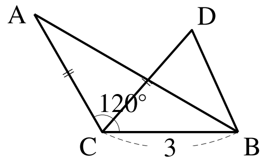
2 辺の長さと，その間の角の sin を掛けて，$\dfrac{1}{2}$ 倍すると面積になる，と理解すればよい．

【練習 63：三角形の面積〜その１〜】

右の図形において，$\mathrm{AC} = \mathrm{DC} = \sqrt{7}$ とする．

(1) △ACB の面積を求めよ．

(2) $\sin\angle\mathrm{DCB} = \dfrac{3}{4}$ のとき，△DCB の面積を求めよ．



【解答】

(1) $\triangle\mathrm{ACB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CB}\sin 120^\circ = \dfrac{1}{2}\sqrt{7}\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{21}}{4}}$

(2) $\triangle\mathrm{DCB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CB}\sin\angle\mathrm{DCB} = \dfrac{1}{2}\sqrt{7}\cdot 3\cdot\dfrac{3}{4} = \boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{7}}{8}}$

$\dfrac{1}{2}$ を掛け忘れないよう注意しよう．特に，発展で学ぶ『ヘロンの公式 (p.185』と区別すること．

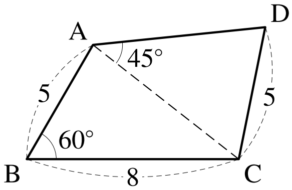
【練習 64：四角形の計量】

四角形 ABCD において，AB = 5，BC = 8，CD = 5，$\angle$ABC = 60°，$\angle$CAD = 45° のとき，次の問に答えよ．

(1) AC の長さを求めよ．

(2) AD の長さを求めよ．

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ．



【解答】

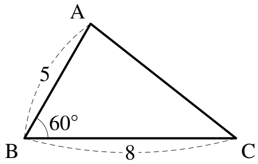
(1) △ABC に $\angle$ABC からみる余弦定理

$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cos \angle \mathrm{ABC}$ を用いて

$$\mathrm{AC}^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ$$
$$= 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 49$$

よって，**AC = 7** である．

◀ 2 辺とその間の角が与えられている

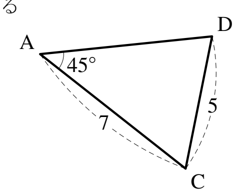


(2) △CAD に $\angle$CAD からみる余弦定理

$\mathrm{DC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{AC} \cos \angle \mathrm{CAD}$ を用いて

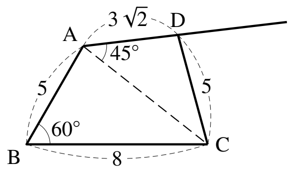
$$5^2 = \mathrm{AD}^2 + 7^2 - 2 \cdot \mathrm{AD} \cdot 7 \cos 45^\circ$$
$$\Leftrightarrow\ 25 = \mathrm{AD}^2 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{AD}$$
$$\Leftrightarrow\ \mathrm{AD}^2 - 7\sqrt{2}\mathrm{AD} + 24 = 0$$
$$\therefore \mathrm{AD} = \frac{7\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(7\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 24}}{2}$$
$$= \frac{7\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} = \mathbf{3\sqrt{2}} \text{ または } \mathbf{4\sqrt{2}}$$

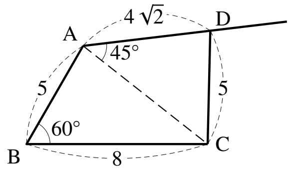
◀ 2 辺とその間でない角が与えられている



◀『解の公式 (p.63)』

◀ それぞれ，図は次のようになる．





(3) △ABC の面積を S_1，△CAD の面積を S_2 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \sin \angle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{AD} \sin \angle \mathrm{CAD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \mathrm{AD} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

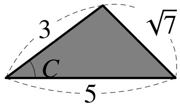
四角形 ABCD の面積は $S_1 + S_2$ に等しいので，

AD = $3\sqrt{2}$ のときは $\mathbf{10\sqrt{3} + \frac{21}{2}}$

AD = $4\sqrt{2}$ のときは $\mathbf{10\sqrt{3} + 14}$ が求める答えになる．

【練習 65：三角形の面積〜その２〜】

右図の三角形について，以下の問いに答えよ．



(1) $\cos C$ を求めよ．　　　(2) 三角形の面積 S を求めよ．

【解答】

(1) $\triangle$ABC に点 C からみた余弦定理を用いて

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{5^2+3^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}{2\cdot5\cdot3} = \frac{\cancel{27}^{\,9}}{2\cdot5\cdot\cancel{3}} = \mathbf{\frac{9}{10}}$$

(2) $\sin C \geqq 0$ より $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1-\frac{81}{100}} = \sqrt{\frac{19}{100}} = \frac{\sqrt{19}}{10}$ で

あるので，$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}5\cdot3\cdot\frac{\sqrt{19}}{10} = \mathbf{\frac{3\sqrt{19}}{4}}$

◀『三角比の相互関係 (p.166)』

【発展 66：ヘロンの公式】

三角形の 3 辺の長さを a, b, c とし，$s = \frac{a+b+c}{2}$ とおくとき，面積 S は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ に等しくなる．これをヘロンの公式という．この公式を用いて，以下の問いに答えなさい．

① 3 辺の長さが 5, 3, 6 である三角形の面積 S_1，4, 3, 2 である三角形の面積 S_2 を求めよ．

② 3 辺の長さが 5, 3, $\sqrt{7}$ である三角形の面積 S_3 を求めよ．

【解答】

① $\frac{5+3+6}{2} = 7$ より，$S_1 = \sqrt{7(7-5)(7-3)(7-6)} = \mathbf{2\sqrt{14}}$.

$\frac{4+3+2}{2} = \frac{9}{2}$ であるので

$$S_2 = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-2\right)} = \sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{15}}{4}}$$

② $\frac{5+3+\sqrt{7}}{2} = \frac{8+\sqrt{7}}{2}$ であるので

$$S_3 = \sqrt{\frac{8+\sqrt{7}}{2}\left(\frac{8+\sqrt{7}}{2}-5\right)\left(\frac{8+\sqrt{7}}{2}-3\right)\left(\frac{8+\sqrt{7}}{2}-\sqrt{7}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{8+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{-2+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{8-\sqrt{7}}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left(8+\sqrt{7}\right)\left(8-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left\{8^2-\left(\sqrt{7}\right)^2\right\}\left\{\left(\sqrt{7}\right)^2-2^2\right\}} = \frac{1}{4}\sqrt{57\cdot3} = \mathbf{\frac{3\sqrt{19}}{4}}$$

3 辺の長さがすべて整数の時は，「ヘロンの公式」を用いると面積の計算が特に簡単になる．
「ヘロンの公式」の証明は p.206 を参考のこと．自分で導こうとするとよい練習になる．

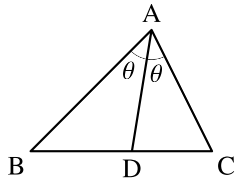
2.　平面図形の重要な問題・定理

A.　角の 2 等分線

【暗記 67：角の 2 等分線の定理】

AB = 4, AC = 3 の $\triangle$ABC において，$\angle$A の 2 等分線と辺 BC との交点を D とする．

1. BD : DC を求めよ．
2. BC = $\sqrt{21}$ のとき，AD の長さを求めよ．



【解答】

1. $\triangle$ABD，$\triangle$ACD の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると

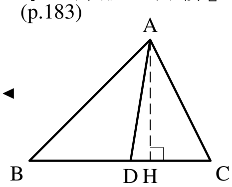
$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot \mathrm{AD}\sin\theta,\qquad S_2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot \mathrm{AD}\sin\theta$$

◀『三角形の面積』(p.183)

と表せるので，$S_1 : S_2 = 4 : 3$ ……… ①

また，A から辺 BC に下ろした垂線 AH の長さを h とおくと

◀



$$S_1 = \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot h,\quad S_2 = \frac{1}{2}\mathrm{DC}\cdot h$$

と表せるので，$S_1 : S_2 = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$ ……… ②

①，②より BD : DC = 4 : 3

2. 1. より，$\mathrm{BD} = \dfrac{4}{4+3}\sqrt{21} = \dfrac{4}{7}\sqrt{21}$，$\mathrm{DC} = \dfrac{3}{4+3}\sqrt{21} = \dfrac{3}{7}\sqrt{21}$ である．

AD = x とおき，$\triangle$ABD と $\triangle$ACD に余弦定理を用いると

$$(\cos\theta =)\ \frac{x^2+4^2-\left(\frac{4}{7}\sqrt{21}\right)^2}{2x\cdot 4} = \frac{x^2+3^2-\left(\frac{3}{7}\sqrt{21}\right)^2}{2x\cdot 3}$$

$$\Leftrightarrow\ 3\left(x^2+16-\frac{48}{7}\right) = 4\left(x^2+9-\frac{27}{7}\right)$$

◀ 両辺に $2x\cdot 4\cdot 3 = 24x$ を掛けた

$$\Leftrightarrow\ \frac{48}{7} = x^2 \qquad \therefore\quad x = \sqrt{\frac{48}{7}} = \boldsymbol{\frac{4}{7}\sqrt{21}}$$

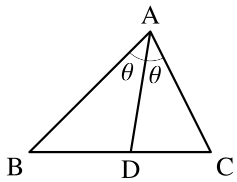
角の 2 等分線の定理

$\triangle$ABC において，$\angle$A の 2 等分線と辺 BC との交点を D とするとき

$\triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{ADC} = \cancel{\frac{1}{2}}\,\mathrm{AB}\cdot\cancel{\mathrm{AD}\sin\theta} : \cancel{\frac{1}{2}}\,\mathrm{AC}\cdot\cancel{\mathrm{AD}\sin\theta}$（「面積の公式」より）

$\triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{ADC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$（底辺の比より）

から，AB : AC = BD : DC が成り立つ．



つまり，角の 2 等分線においては，上の 2 辺の比と下の線分の比が一致する．

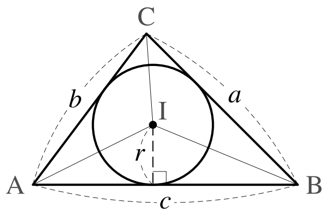
B.　内接円の半径

【暗記 **68**：内接円の半径を求める】

三角形の 3 つの辺すべてに接する円を，その三角形の**内接円** (inscribed circle) という．1 つの三角形に対し，内接円は 1 つに定まる[*16]．

$b = 4$，$c = 5$，$A = 60°$ である $\triangle$ABC について，内接円の半径を r とする．

1. a の値を求めよ．　　2. $\triangle$ABC の面積を求めよ．
3. $\triangle$ABC の内接円の半径を求めよ．



【解答】

1. 点 A からみる余弦定理より

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2ab\cos A \\ &= 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cos 60° \\ &= 16 + 25 - 40 \times \frac{1}{2} = 21 \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a = \sqrt{21}}$ である．

2. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\sin 60° = \boldsymbol{5\sqrt{3}}$

◀『三角形の面積』(p.183)

3. 内接円の中心を I とすると，$\triangle$ABI，$\triangle$BCI，$\triangle$CAI の面積はそれぞれ $\dfrac{1}{2}cr$，$\dfrac{1}{2}ar$，$\dfrac{1}{2}br$ となるから，$\triangle$ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a+b+c) \qquad \cdots\cdots①$$

◀それぞれ，AB，BC，CA を底辺とみて，内接円の半径を高さにとった．

とも表せる．よって 2. と①より

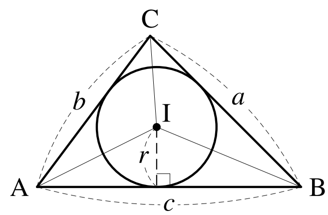
$$\begin{aligned} r &= \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2\cdot 5\sqrt{3}}{\sqrt{21}+4+5} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{21}+9} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}} \end{aligned}$$

三角形の内接円と面積の関係

三角形の面積 S は，内接円の半径 r を用いて

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{BCI} + \triangle\mathrm{CAI} + \triangle\mathrm{ABI} \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \end{aligned}$$

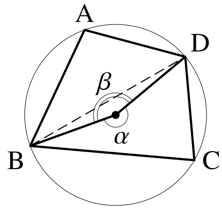
と表すことができる．ここで a，b，c は各辺の長さを表す．



この公式は，必要なときに導くことができれば十分である．ただし，三角形とその内接円を見たら「三角形の面積は計算できる」と連想できるようにしよう．

[*16] 内接円については，数学 A で詳しく取り扱う．

C. 円に内接する四角形



四角形 ABCD が円に内接しているとき，右のように α, β をおくと，中心角は円周角の 2 倍なので

A は右欄外の図の $\dfrac{1}{2}\alpha$ と等しく，C は右欄外の図の $\dfrac{1}{2}\beta$ と等しい.

よって，$A + C = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180°$ [*17]，さらに『$180° - \theta$ の三角比』(p.170) から以下が導かれる.

円に内接する四角形の向かい合う角

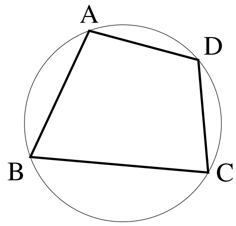
円に内接する四角形において，以下が成立する.

- $A + C = 180°$ （$\Leftrightarrow$ $\angle A = (\angle C$ の外角$)$）

さらに，『$180° - \theta$ の三角比』(p.170) を用いて

- $\cos A = -\cos C$ （$\cos A = -\cos(180° - A)$ より）
- $\sin A = \sin C$ （$\sin A = \sin(180° - A)$ より）

B, D についても同様である[*18].



四角形が円に内接している場合は，たいてい，次の関係のうちいくつかを使う.

- 円周角の定理
- 中心角が円周角の 2 倍（特に，直径に対する円周角は 90°）
- 上で学んだ，向かい合う角の関係

【例題 69】 四角形 ABCD は AB = 3, BC = 4, CD = 3, $B = 60°$ であり，円に内接している.

1. 対角線 AC の長さを求めよ.
2. 辺 AD の長さを求めよ.

【解答】

1. △ABC に点 B から見た余弦定理を用いて
$$\begin{aligned} CA^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos 60° \\ &= 9 + 16 - 12 = 13 \end{aligned}$$
CA > 0 より，$\mathbf{CA = \sqrt{13}}$.

2. 四角形 ABCD は円に内接しているので $D = 120°$，△CDA について余弦定理より
$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{13}\right)^2 = AD^2 + 3^2 - 2 \cdot AD \cdot 3 \cos 120° \\ \Leftrightarrow\ & 13 = AD^2 + 9 - \cancel{2} \cdot AD \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \\ & 0 = AD^2 + 3AD - 4 \end{aligned}$$
これを解いて AD = −4, 1，CA > 0 より，**AD = 1**.

[*17] 『正弦定理』(p.179) の証明 iii) の中で，別の方法で証明した.

[*18] つまり，$\cos B = -\cos D$，$\sin B = \sin D$ が成り立つ.

【暗記 **70**：円に内接する四角形】

円に内接する四角形 ABCD において，$AB = 4$，$BC = 5$，$CD = 3$，$DA = 3$ とする．

1. 対角線 BD の長さを求めよ．
2. 四角形 ABCD の面積を求めよ．

【解答】

1. $\triangle ABD$ に点 A からみる余弦定理を用いて

$$BD^2 = 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cos A = 25 - 24\cos A \quad \cdots\cdots ①$$

$\triangle CBD$ に点 C からみる余弦定理を用いて

$$BD^2 = 5^2 + 3^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cos C = 34 - 30\cos C \quad \cdots\cdots ②$$

①，②，$\cos A = -\cos C$ より

$$25 - 24\cos A = 34 + 30\cos A$$

$$\Leftrightarrow\ \cos A = -\frac{9}{54} = -\frac{1}{6}$$

これを①に代入して

$$BD^2 = 25 - 24\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = 29$$

$BD > 0$ であるので，$\mathbf{BD = \sqrt{29}}$ と分かる．

2. $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$ より

$$\triangle ABD = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{35}}{6} = \sqrt{35}$$

◀『三角形の面積』(p.183)

また，$\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A$ より

◀『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.170)

$$\triangle CBD = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{5}{4}\sqrt{35}$$

◀『三角形の面積』(p.183)

よって，求める面積は $\sqrt{35} + \dfrac{5}{4}\sqrt{35} = \boldsymbol{\dfrac{9}{4}\sqrt{35}}$

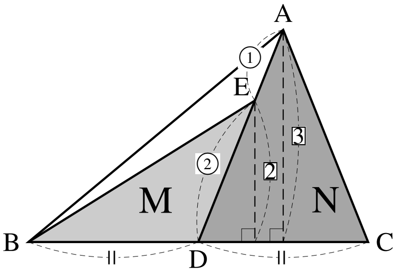
3. 平面図形の面積比

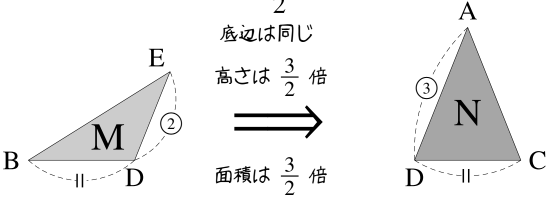
A. 相似でない２つの三角形の面積比

面積比を求めるときには，どこを底辺におくかが重要である．

まず，右の三角形 M，N の面積比を考えてみよう．

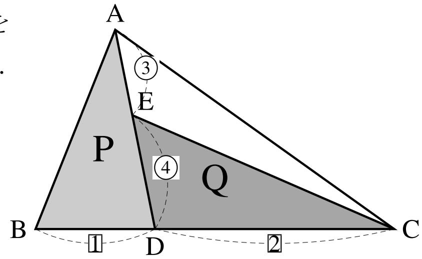
M の底辺を BD，N の底辺を CD とおけば，M，N の底辺の長さは等しく，M の高さの $\dfrac{3}{2}$ 倍が，N の高さになる．

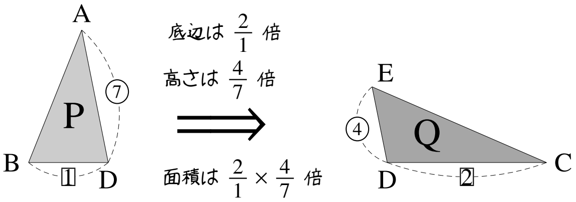




つまり，M の面積を $\dfrac{3}{2}$ 倍すると N の面積に等しいと分かるから，M，N の面積比は 2 : 3 である．

次に，右の三角形 P，Q の面積比を考えてみよう．P の底辺を BD，Q の底辺を CD とすると，次のようにまとめることができる．





P の面積を $\dfrac{2}{1} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{8}{7}$ 倍すると Q の面積に等しいと分かるから，P，Q の面積比は 8 : 7 である．

【練習 71：平面図形の線分の比】

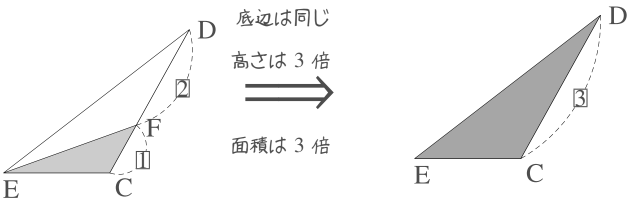
▱ABCD において，辺 BC 上に E を，辺 CD 上に F をとり，BE : EC = 1 : 2，DF : FC = 2 : 1 とする（▱は「平行四辺形」を表す）．

(1) △FEC と △DEC の面積比を求めよ．　(2) △FBC と △DEC の面積比を求めよ．

(3) △FEC と ▱ABCD の面積比を求めよ．

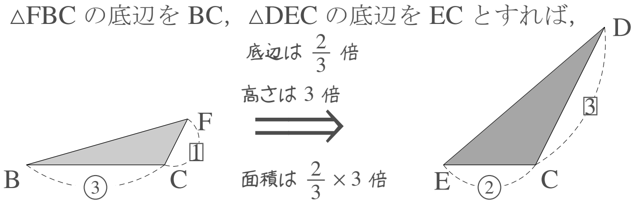
【解答】

(1) 問題文を図示すれば，右欄外のようになる．底辺を EC とすれば

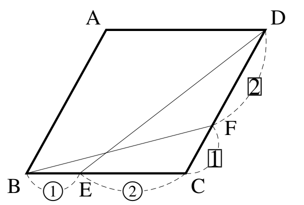


なので，面積比は **1 : 3** である．

(2) △FBC の底辺を BC，△DEC の底辺を EC とすれば，



◀ DC と EC を底辺と考えた場合は，高さが等しくなる．



◀ △FBC の底辺を FC，△DEC の底辺を DC としてもよい．

なので，面積比は **1 : 2** である．

(3)　△FEC $\xrightarrow{3\text{倍}}$ △DEC　　((2) より)

$\xrightarrow{\frac{3}{2}\text{倍}}$ △DBC　　(底辺を EC，BC にとれば，底辺は $\frac{3}{2}$ 倍，高さは等しい)

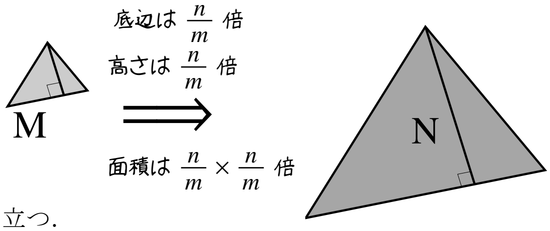
$\xrightarrow{2\text{倍}}$ ▱ABCD

よって △FEC の $3 \times \frac{3}{2} \times 2 = 9$ 倍が ▱ABCD の面積になるので，△FEC と ▱ABCD の面積比は **1 : 9** である．

◀ △FEC $\xrightarrow{\frac{3}{2}\text{倍}}$ △FBC $\xrightarrow{3\text{倍}}$ △DBC $\xrightarrow{2\text{倍}}$ ▱ABCD でもよい．

B.　相似な平面図形の面積比

相似比が $m : n$ である，2 つの三角形の面積比を考えると右のようになる．つまり，M の面積を $\frac{n}{m} \times \frac{n}{m} = \left(\frac{n}{m}\right)^2$ 倍すると N の面積に等しいと分かり，M，N の面積比は $1 : \left(\frac{n}{m}\right)^2 = m^2 : n^2$ である．



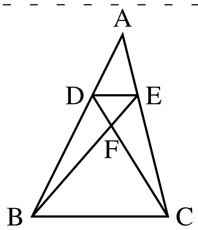
一般に，どんな平面図形においても，次のことが成り立つ．

相似な平面図形の面積比

> 相似比が $m : n$ である 2 つの平面図形について，その面積比は $m^2 : n^2$ である．

【例題 72】 右の図において，AD : DB = 1 : 2，AE : EC = 1 : 2 であるとする．

1. 相似な三角形の組を 2 つ見つけ (証明は無くてよい)，それぞれについて面積の比を求めよ．
2. △DEF と △DBF の面積比を求めよ．
3. △DEF と △ABC の面積比を求めよ．



【解答】

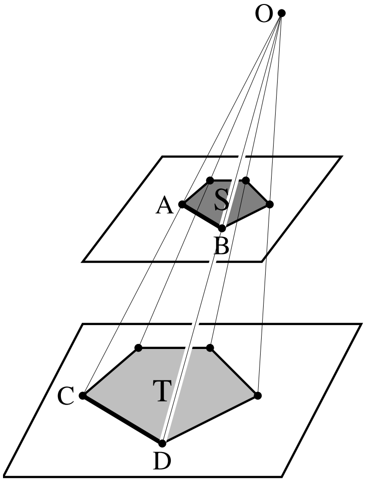
1. AD : AB = AE : AC = 1 : 3，∠A は共通から，**△ADE ∽ △ABC**.
   相似比は 1 : 3，面積比は $1^2 : 3^2 =$ **1 : 9** である．
   また，△ADE ∽ △ABC より ∠ADE = ∠ABC であるので DE // BC，ここから **△FDE ∽ △FBC**.
   相似比は DE : BC = 1 : 3，面積比は $1^2 : 3^2 =$ **1 : 9** である．
2. EF，FB を底辺として考えると EF : FB = 1 : 3 で高さは等しいので △DEF と △ABC の面積比は **1 : 3** になる．
3. △DEF の面積を S とおく．このとき，1. より △FBC = $9S$，2. より △DFB = $3S$ である．また，DF : FC = 1 : 3 より △EFC = $3S$ であるので，四角形 DECB = $S + 3S + 3S + 9S = 16S$.
   ここで，1. より △ADE : △ABC = 1 : 9 なので
   　四角形 DECB : △ABC = 8 : 9
   となるので，△ABC = $16S \times \frac{9}{8} = 18S$.
   よって，△DEF と △ABC の面積比は $S : 18S =$ **1 : 18**.

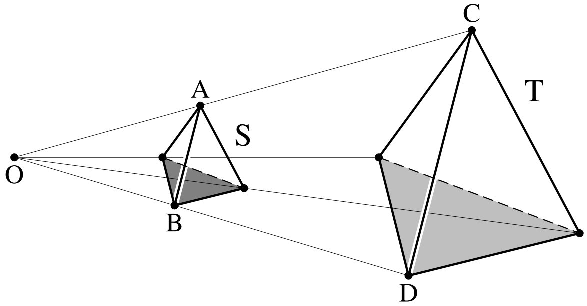
◀ 略証をつけておいた．
◀ 相似比が $m : n$ のとき，面積比は $m^2 : n^2$
◀ △ADE ∽ △ABC を証明せず AD : DB = AE : EC から DE // BC を導いても構わない．

1.　空間図形の表面積比・体積比

A.　空間における相似について

2 つの図形が**相似** (similar) であるとは,「一方の図形を, ある 1 点に対して拡大・縮小すれば, 他方の図形と合同になる」関係のことをいった. この定義は, 空間内における相似にも当てはまる.





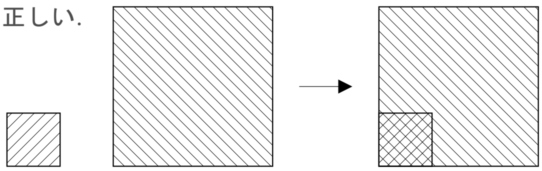
相似な二つの図形の, 対応する辺の長さの比を**相似比** (ratio of similitude) という.
たとえば, 上の図において, 図形 S と図形 T はいずれも相似である. また, S と T の相似比はいずれも AB : CD に等しい.

【例題 73】 以下の, 相似に関する文章は正しいか, 間違いか答えなさい.

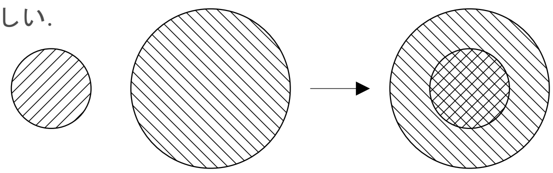
1. どのような 2 つの正方形も, 相似である.
2. どのような 2 つの円も, 相似である.
3. どのような 2 つの直方体も, 相似である.
4. 2 つの立体 S と T が相似ならば, S の表面と T の表面は互いに相似である.

【解答】

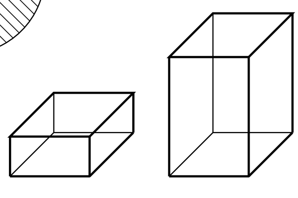
1. **正しい**.



2. **正しい**.



3. **間違い**. たとえば, 右の直方体 2 つは相似ではない (高さのみが異なっている).

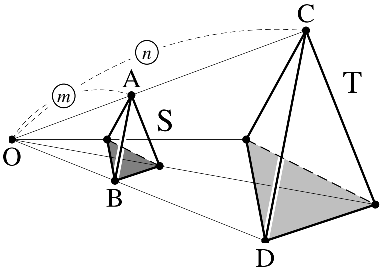


4. **正しい**. S の全体が拡大・縮小されて T になるのだから, S の一部分を拡大・縮小しても T のある一部になる.

◀ 前ページのうち, 立体図形のものを参考にすること.

B.　相似な空間図形の表面積・体積の比

相似比が $m : n$ である，２つの相似な三角錐 S，T について，表面積比と体積比を考えてみよう．



p.4 で考えたように，２つの立体が相似ならば，その表面の図形は互いに相似である．

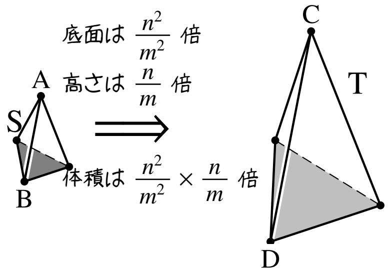
左の S と T の場合，S の４つの表面の図形の面積を S_1，S_2，S_3, S_4 とおけば, T の４つの表面の図形の面積は $\dfrac{n^2}{m^2}S_1$，$\dfrac{n^2}{m^2}S_2$，$\dfrac{n^2}{m^2}S_3$，$\dfrac{n^2}{m^2}S_4$ となるので，次のように分かる．

$$(\text{S の表面積}) : (\text{T の表面積}) = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) : \left\{\frac{n^2}{m^2}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)\right\}$$
$$= 1 : \left(\frac{n^2}{m^2}\right) = m^2 : n^2$$

次に体積比を考えよう．

上で考えたように，S の底面積の $\dfrac{n^2}{m^2}$ 倍が T の底面積になる．

また，S の高さの $\dfrac{n}{m}$ 倍が T の高さになるから，S の体積を $\dfrac{n^2}{m^2} \times \dfrac{n}{m} = \dfrac{n^3}{m^3}$ 倍すると T の体積に等しい[*19]．よって，S，T の体積比は $m^3 : n^3$ である．

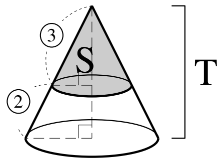


一般に，どんな空間図形においても，次のことが成り立つ．

相似な立体図形の表面積比・体積比

相似比が $m : n$ である２つの立体図形について，
(1) それぞれの表面をなす図形は相似であり，その相似比は $m : n$ である．
(2) 表面積比は $m^2 : n^2$ である．
(3) 体積比は $m^3 : n^3$ である．

【例題 74】 右図のような円錐 T を切り，上にできた円錐を S とする．
1. S と T は相似である．相似比を求めよ．
2. S と T の表面積比を求めよ．
3. T から S を除いた図形を U とする．S と U の体積比を求めよ．



【解答】

1. 母線の長さの比から，**3 : 5**
2. (1) より，表面積比は $3^2 : 5^2 =$ **9 : 25**
3. (1) より，S と T の体積比は $3^3 : 5^3 = 27 : 125$
   つまり，S と U の体積比は $27 : (125 - 27) =$ **27 : 98**

◀ 相似比が $m : n$ のとき，表面積比は $m^2 : n^2$
◀ 相似比が $m : n$ のとき，体積比は $m^3 : n^3$．また，S と U は相似ではないことに注意．

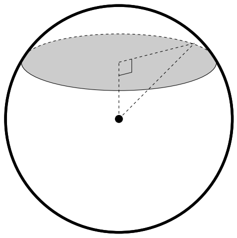
[*19] この例では，体積が $\dfrac{1}{3} \times$ (底面積) $\times$ (高さ) で求められるから分かる．

2. 球

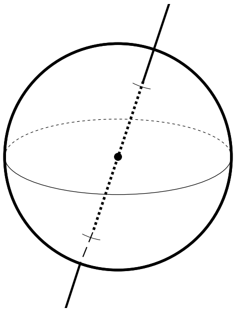
円を空間に広げたものが球，と考えてよい．

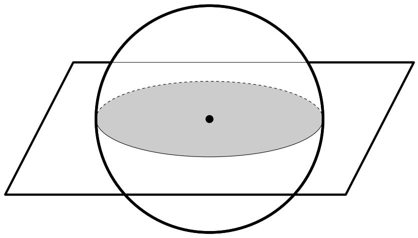
球は，最も美しい図形の 1 つとして，古来から人々の興味を惹いてきた．

球には以下の性質がある．

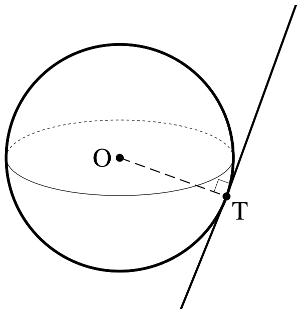


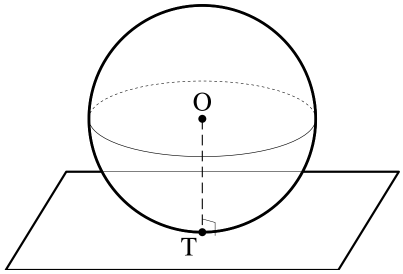
- 球を平面で切れば，その切り口は必ず円である．
- 中心を通るどの直線，平面に対しても，球は対称である．





- O を中心とする球が，球面上の点 T で平面・直線と接するとき，直線 OT はその平面・直線と直交する．





これらは，球の定義[*20]と三平方の定理から証明することができる（ここでは省略する）．

[*20] 「点 O を中心とする半径 r の球」は「点 O から距離 r にある空間上の点を全て集めてできる図形」と定義できる．また，数学 B において球面の方程式を学ぶ．

A. 球の表面積と体積

半径 r の球の体積，表面積は次のようになる[*21].

球の表面積・体積

半径 r の球について，　表面積は $4\pi r^2$，　体積は $\dfrac{4}{3}\pi r^3$　である.

「表面積を表す $4\pi r^2$ の r^2 を $\dfrac{r^3}{3}$ におきかえると，体積を表す $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ になる」と覚えると良い.

【練習 75：球の表面積，体積】

(1) 半径 4 cm の球の，表面積と体積をそれぞれ求めよ.

(2) 1 辺 8 cm の立方体の表面積と直径 10 cm の球の表面積では，どちらが大きいか.

(3) 1 辺 10 cm の立方体に高さ 9 cm まで水を入れてある．この水の中に半径 3 cm の球を静かに入れると，何 cm^3 の水があふれるか．ただし，表面張力は考えない.

【解答】

(1) 表面積は　$4\pi \cdot 4^2 = \mathbf{64\pi\ cm^2}$

体積は　$\dfrac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \mathbf{\dfrac{256}{3}\pi\ cm^3}$

(2) 1 辺 8cm の立方体の表面積は，$6 \times 8^2 = 384\ \text{cm}^2$

直径 10 cm の球の半径は 5 cm なので，表面積は

$4\pi \cdot 5^2 = 100\pi < 100 \times 3.2 = 320 < 384\ \text{cm}^2$

よって，**1 辺 8 cm の立方体の表面積の方が大きい**.

◀ 1 辺 8cm の立方体の表面は，1 辺 8cm の正方形 6 枚でできている.

◀ $\pi = 3.14159265\cdots$ より $\pi < .3.2$

(3) 水中に入れた球の体積は $\dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi\ \text{cm}^3$ なので，

水の体積と球の体積の和は $10 \cdot 10 \cdot 9 + 36\pi = 900 + 36\pi\ \text{cm}^3$ である.

実際には $10^3 = 1000\ \text{cm}^3$ しか入らないので，あふれる水の体積は

$(900 + 36\pi) - 1000 = \mathbf{36\pi - 100\ cm^3}$

[*21] 数学 III の微積分を用いて，これらの計算ができる．体積については，次の発展 のようにして計算できる.

3. 空間図形と三角比

空間図形の問題は，特定の平面を取り出し，平面図形の問題として考えてみよう．

A. 直角が 1 つの頂点に集まった四面体

四面体の頂点の 1 つに，2 つ以上直角を含む場合は比較的簡単である．図形を切ることなく，どれかの面を取り出して考えればたいていうまくいくからである[*22]．

1 つの頂点に直角が 3 つ集まった三角錐のことを**直角三角錐** (rectangular triangular pyramid) という．

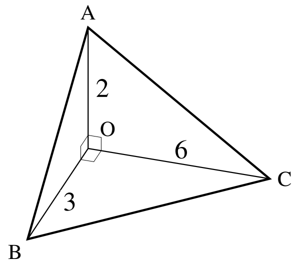
【練習 76：直角三角錐の計量】

右の図のように, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$ の直角三角錐 OABC において，次の問に答えよ．ただし，$OA = 2$，$OB = 3$，$OC = 6$ とする．

(1) 辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ求めよ．

(2) $\angle ACB = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ．



【解答】

(1) $\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCA$ それぞれに，三平方の定理を用いて

$$\mathbf{AB = \sqrt{13},\ BC = 3\sqrt{5},\ CA = 2\sqrt{10}}$$

(2) $\triangle ABC$ に $\angle ACB$ からみる余弦定理を用いて

$$\cos\theta = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \cdot CB} = \frac{40 + 45 - 13}{2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{2}}{5}}$$

(3) (2) より

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{18}{25}} = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

だから，(1) より $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} CA \cdot CB \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{7}}{5} = \mathbf{3\sqrt{14}}$$

【練習 77：三角錐の計量】

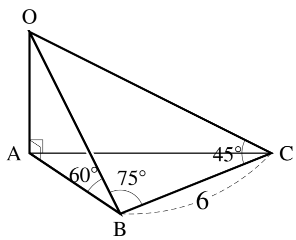
右図のような三角錐 OABC において，次の問に答えよ．

(1) 辺 OB の長さを求めよ．

(2) 辺 OC の長さを求めよ．

(3) 辺 AC の長さを求めよ．

(4) $\angle ABC = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．



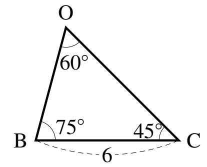
【解答】

[*22] 平面に対し，異なる 2 方向から直角である線分は，平面に対し垂線になっていることに注意すればよい．

(1) $\triangle$OBC に正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{OB}}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 60^\circ}$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{OB} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} \times 6 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 6 = \mathbf{2\sqrt{6}}$$



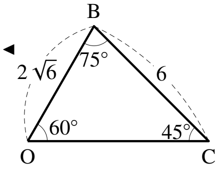
(2) $\triangle$OBC に $\angle$BCO からみた余弦定理を用いて

$$\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 6^2 + \mathrm{OC}^2 - 2 \cdot 6\mathrm{OC}\cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow\ 24 = 36 + \mathrm{OC}^2 - 6\sqrt{2}\mathrm{OC}$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{OC}^2 - 6\sqrt{2}\mathrm{OC} + 12 = 0$$

よって，$\mathrm{OC} = \dfrac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 12}}{2} = 3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}$ である．$\triangle$OBC は角 B が最大なので，辺 OC が一番長い．よって，$\mathrm{OC} = \mathbf{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}$.



∠BOC からみた余弦定理や，∠OBC からみる第 1 余弦定理 (p.205) を用いてもよい．

(3) まず，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}\sin 60^\circ = 2\sqrt{6} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{3\sqrt{2}}$ これより，$\triangle$OAC に三平方の定理を用いて

$$\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{OC}^2 - \mathrm{OA}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2}$$

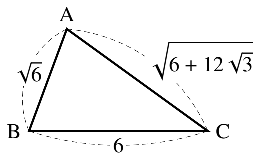
$$= \mathbf{\sqrt{6 + 12\sqrt{3}}}$$

◀ $\sqrt{6 + 12\sqrt{3}}$ はこれ以上簡単にならない

(4) まず，$\mathrm{AB} = \mathrm{OB}\cos 60^\circ = 2\sqrt{6} \cdot \dfrac{1}{2} = \sqrt{6}$. これより，$\triangle$ABC に $\angle$ABC からみる余弦定理を用いて

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC}}$$

$$= \frac{6 + 36 - \left(6 + 12\sqrt{3}\right)}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot 6} = \mathbf{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}}$$



【発展 78：山の高さを求める】

ある山から真北の地点 A と，真東の地点 B があり，この 2 点は 4 km 離れており，共に標高 200 m である．地点 A から山の頂上を見上げると 45° の高さであった．次に，地点 B から山の頂上を見上げると 30° の高さであった．この山の高さは何 km か．

【解答】 山の頂上を T，山の頂上から真下にある標高 200 m の点を O として問題を図に描けば，右欄外のようになる．山の高さを求めるには，OT の長さを求めればよい．

OT の高さを x km とおく．$\triangle$OTA を点 A から見ると

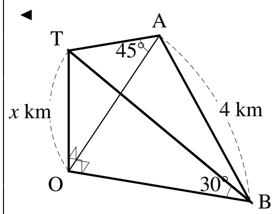
$$\tan 45^\circ = \frac{x}{\mathrm{OA}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{OA} = x \qquad \cdots\cdots ①$$

$\triangle$OTB を点 B から見ると

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{\mathrm{OB}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{OB} = \sqrt{3}x \qquad \cdots\cdots ②$$

$\triangle$AOB における三平方の定理 $\mathrm{AO}^2 + \mathrm{BO}^2 = 4^2$ に①，②を代入して

$$x^2 + \left(\sqrt{3}x\right)^2 = 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$



と解ける．つまり，山の高さは 2 km + 200 m = **2.2 km** である．

B. 正多面体

空間図形において，全ての面が合同な正多角形からなり，各頂点に集まる辺の数が全て等しい多面体のことを**正多面体** (regular polyhedron) という[*23]．

正多面体は，次の 5 つしかない．

正四面体，正六面体（立方体），正八面体，正十二面体，正二十面体

正多面体にはたくさんの二等辺三角形がある．それを上手に生かした切り口を考えよう．

【練習 79：正四面体の計量】

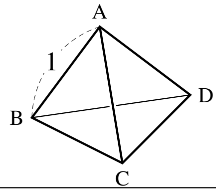
右下図のように，1 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD について以下の問に答えよ．

(1) $\triangle$BCD の面積 S を求めよ．

(2) 頂点 A から $\triangle$BCD に下ろした垂線の長さを求めよ．

(3) 発展 正四面体 ABCD に内接する球の半径を求めよ．

(4) 発展 正四面体 ABCD に外接する球の半径を求めよ．



【解答】

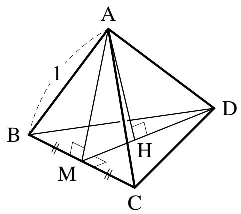
(1) $\angle$CBD = 60° であるから

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BC}\sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

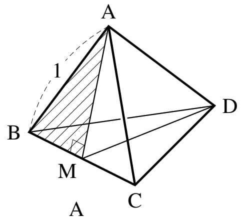
◀『三角形の面積』(p.183)

(2) まず，辺 BC の中点を M とおくと，AM $\perp$ BC，DM $\perp$ BC となり，A から MD におろした垂線の足を H とすると，AH が求める長さである．



まず，$\triangle$ABM に三平方の定理を用いて

$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BM}^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

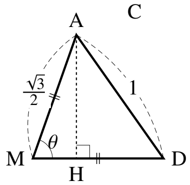


よって，AM = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．同様に，DM = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

次に，$\angle$AMD = θ とおくと，$\triangle$AMD に点 M からみた余弦定理を用いて

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MD}^2 - \mathrm{AD}^2}{2\mathrm{MA}\cdot\mathrm{MD}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$



であり，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

◀『三角比の相互関係』(p.166)

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

[*23] たとえば，正四面体は正多面体であるが，正四面体 2 つを重ねてできる六面体は，頂点に集まる辺の数が 3 つの場合と 4 つの場合があるので，正多面体ではない．

よって，AH の長さは

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AM}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

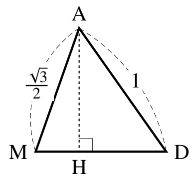
【別解：H が △BCD の重心であることを使う】

$\mathrm{AM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{DM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ までは上の解答と同じ.

次に，正四面体の対称性から，点 H は △BCD の重心となるので MH : HD = 1 : 2，つまり

$$\mathrm{MH} = \frac{1}{3}\mathrm{DM} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

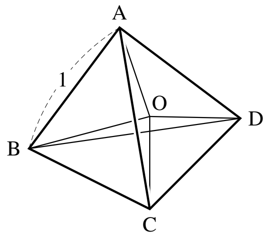
最後に，△AMH に三平方の定理を用いて



$$\begin{aligned}\mathrm{AH}^2 = \mathrm{AM}^2 - \mathrm{MH}^2 &= \frac{3}{4} - \frac{3}{36}\\ &= \frac{27-3}{36} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{AH} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ となる.

(3) 内接球の中心の点を O とし，その半径を r とおく．このとき，正四面体は 4 つの正三角錐 OABC，OACD，OADB，OBCD に分けることができる．これらの正三角錐の体積は，どれも $\dfrac{1}{3}\times S\times r$ であるから，正四面体 ABCD の体積 V は



$$V = 4\times\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}r = \frac{\sqrt{3}r}{3} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

また，(1)，(2) より正四面体 ABCD の体積 V は

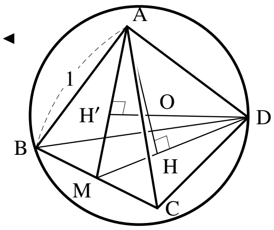
$$V = \frac{1}{3}\times S\times \mathrm{AH} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

よって，①，②より

◀ このやり方は，平面上の三角形における，内接円の半径の導き方 (p.187) と同じ発想である.

$$\frac{\sqrt{3}r}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \iff r = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{12}}$$

(4) M を辺 BC の中点にとり，H，H′ を右図のようにとる．図形の対称性から，外接球の中心 O は AH 上および DH′ 上にあるのがわかる.



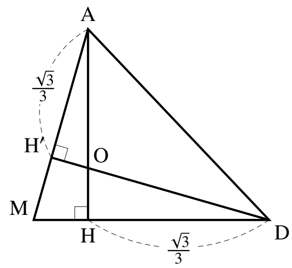
H は △BCD の重心だから

$$\mathrm{DH} = \mathrm{DM}\times\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる．同様に，$\mathrm{AH'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である.

◀ $\mathrm{MH} = \sqrt{\mathrm{AM}^2 - \mathrm{MH}^2}$ から計算してもよい.

ここで，$\mathrm{AO} = R$ とおくと，△AH′O ∽ △AHM より



$$\begin{aligned}&\mathrm{AH'} : \mathrm{AO} = \mathrm{AH} : \mathrm{AM}\\ \iff &\frac{\sqrt{3}}{3} : R = \frac{\sqrt{6}}{3} : \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \iff &\frac{\sqrt{6}}{3}R = \frac{1}{2}\\ \iff &R = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}\end{aligned}$$

C. 正多角錐

角錐のうち，底面が正多角形で，側面が二等辺三角形で作られ，側面の頂点が一点に集まっている多面体のことを**正多角錐** (regular pyramid) という（正角錐ともいう）．底面が正 n 角形の正多角錐のことを正 n 角錐といい，n は 3 以上の自然数をとりうる．

正多角錐においては，頂点からの垂線の足が，底面の中心（対角線の交点）にくる．よって，底面の対角線を通る平面などに着目するとよい．

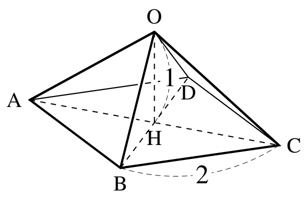
【練習 80：正四角錐の計量】

右図のように，底面の 1 辺の長さが 2，高さ OH が 1 である正四角錐 OABCD について以下の問に答えよ．

(1) AB の中点を M とするとき，∠OMH を求めよ．

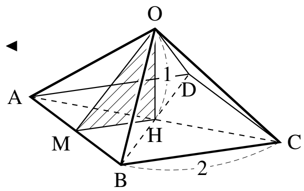
(2) A から辺 OB に下ろした垂線 AE の長さを求めよ．

(3) 辺 OB の中点を E とするとき，∠AEC を求めよ．



【解答】

(1) 直角三角形 OMH において OH = HM = 1 より，**∠OMH = 45°**．

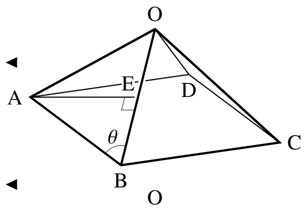


(2) $\angle\mathrm{OBA} = \theta$ とおくと，三平方の定理より

$$\mathrm{OB} = \sqrt{\mathrm{OH}^2 + \mathrm{BH}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$\mathrm{OM} = \sqrt{2}$$

である．△OBM に着目して，$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ となる．ここで，△ABE に着目すれば，$\mathrm{AE} = \mathrm{AB}\sin\theta = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$ である．

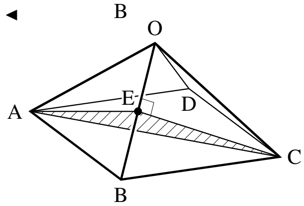


(3) △OAB ≡ △OCB であり，△AEC に余弦定理を用いると

$$\cos\angle\mathrm{AEC} = \frac{\mathrm{AE}^2 + \mathrm{CE}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{CE}} = \frac{2\mathrm{AE}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AE}^2} = 1 - \frac{\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AE}^2}$$

$$= 1 - \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = -\frac{1}{2}$$

よって，**∠AEC = 120°** となる．



(1) の ∠OMH は底面と側面のなす角に，(3) の ∠AEC は側面と側面のなす角に一致している．

D. 球を含んだ空間図形

空間図形に球を含む場合は，「球の中心と，球と他の図形の共有点」を結んだ平面に着目するとよい．

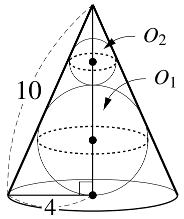
【練習 81：円錐と内接球】

底面の半径が 4，母線の長さが 10 の円錐がある．

(1) この円錐に内接する球 O_1 の半径を求めよ．

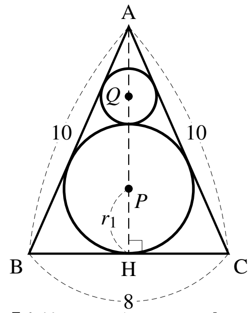
(2) 球 O_1 の上に外接し，さらに円錐に内接する球 O_2 の半径を求めよ．

ただし，球 O_1，O_2 とも，半径はできるだけ大きくなるようにする．



【解答】 円錐の頂点を A，球 O_1，O_2 の中心をそれぞれ P，Q，A から底面に下ろした垂線の足を H とする．このとき，線分 AH は P，Q を通る．

(1) 直線 AH を含み，底面に垂直な面で切ると，断面図は右欄外の図のようになり，球 O_1 の断面は，△ABC の内接円になる．



△ABC の面積を S，球 O_1 の半径 r_1 とすると

$$S = \frac{1}{2}(10 + 10 + 8)r_1 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．面積 S は，$AH = \sqrt{10^2 - 4^2} = 2\sqrt{21}$ より

◄『内接円の半径 (p.187)』

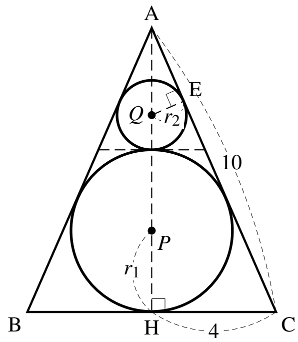
$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{21} = 8\sqrt{21}$$

であるので，これを①に代入して

$$8\sqrt{21} = \frac{1}{2}(10 + 10 + 8)r_1$$

$$\therefore\ r_1 = \frac{8}{14}\sqrt{21} = \boldsymbol{\frac{4}{7}\sqrt{21}}$$

(2) (1) と同じ断面を考え，右欄外の図のように E をとると △AQE ∽ △ACH である．よって，球 O_2 の半径を r_2 とすれば



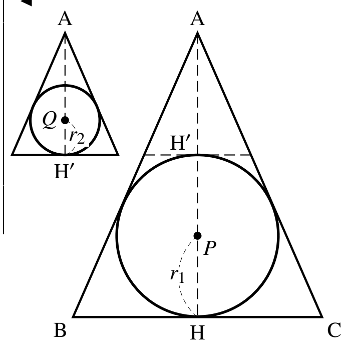
$$AQ : QE = AC : CH$$

$$(AH - 2r_1 - r_2) : r_2 = \cancel{10}^5 : \cancel{4}^2$$

$$2\left(2\sqrt{21} - \frac{8}{7}\sqrt{21} - r_2\right) = 5r_2$$

$$\frac{12}{7}\sqrt{21} = 7r_2 \qquad \therefore\ r_2 = \boldsymbol{\frac{12}{49}\sqrt{21}}$$

【別解】 球 O_1，O_2 の接点を H′ とし，右のように断面図を 2 つ考える．すると，左図を A について拡大したものが右図になる．



2 つの断面図の相似比は

$$AH' : AH = \left(2\sqrt{21} - \frac{8}{7}\sqrt{21}\right) : 2\sqrt{21} = 3 : 7$$

である．ここから，$r_2 = \frac{3}{7}r_1 = \frac{12}{49}\sqrt{21}$.

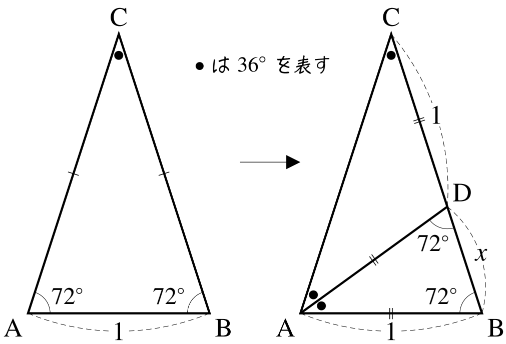
別解では断面が相似であることを使っているが，2 つの断面図のもとになる立体をそれぞれ考えても，やはり互いに相似である．

3.6　第３章の補足

1.　36°，72° などの三角比

A.　36°，72°，72° の三角形を考える

18° に関する三角比を考えるため，まず，右図の二等辺三角形 ABC について BC，AC の長さを求めよう[*24].



ここで，右図の奥のように ∠A の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする．このとき，

$\angle DAC = \angle DCA = 36°$

より △DAC は二等辺三角形になる．また

$\angle ADB = \angle ABD = 72°$

より △ABD も二等辺三角形になる．これらより，$CD = AD = AB = 1$ が成り立つ．

さらに，$\triangle CAB \backsim \triangle ABD$ であるから，$CB : AB = AB : BD$ が成り立つ．よって，$AB^2 = CB \times BD$ であるので，$BD = x$ とおくと

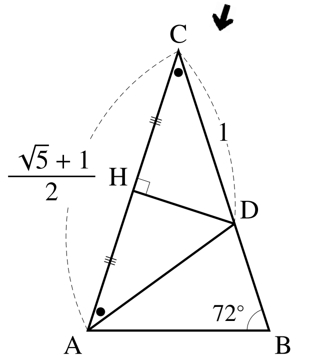
$1 \times 1 = (1 + x) \times x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$

$x > 0$ であるから，解の公式より $BD = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ と求められる．これより

$BC = BD + 1 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} + 1 = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$

となる．また，$AC = BD = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$ である．

B.　36° の三角比とその周辺



△ACD に着目し，右図のように．点 D から辺 AC へ垂線 DH を引く．

直角三角形 DCH に，余弦の定義を用いて

$\cos 36° = \dfrac{CH}{DC} = \dfrac{\frac{1}{2}CA}{1} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{4}$

さらに，三角比の相互関係 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて

$\sin^2 36° = 1 - \cos^2 36° = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{6 + 2\sqrt{5}}{16} = \dfrac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$

であり，$\sin 36° > 0$ であるから，$\sin 36° = \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ である．

また，これらより $\tan 36° = \dfrac{\sin 36°}{\cos 36°} = \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}} =$ (計算省略) $= \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ である．

[*24] 18° に関する三角比を求めるためには，AB の長さはいくつでもよい．ここでは，考えやすくするため 1 とした．

【練習 82：36° とその周辺の三角比】

$\sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$，$\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，$\tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ を利用して次の三角比の値を求めよ.

(1) $\sin 54^\circ$，$\cos 54^\circ$，$\tan 54^\circ$

(2) $\sin 126^\circ$，$\cos 126^\circ$，$\tan 126^\circ$

(3) $\sin 144^\circ$，$\cos 144^\circ$，$\tan 144^\circ$

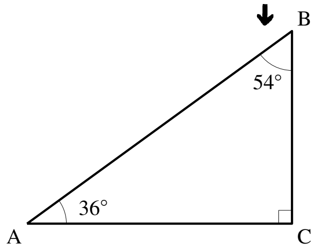
【解答】

(1) $54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$ であるから，『$90^\circ - A$ の三角比』(p.158) より次のように求めることができる.

$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\cos 54^\circ = \sin 36^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\tan 54^\circ = \frac{1}{\tan 36^\circ} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}}$$

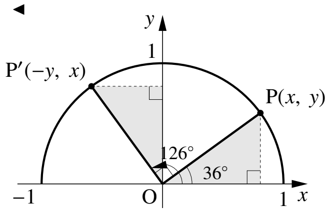


(2) $126^\circ = 90^\circ + 36^\circ$ であるから，『$90^\circ + \theta$ の三角比』(p.171) より次のように求めることができる.

$$\sin 126^\circ = \cos 36^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\cos 126^\circ = -\sin 36^\circ = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\tan 126^\circ = -\frac{1}{\tan 36^\circ} = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}}$$

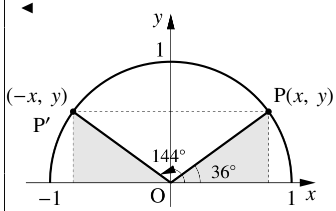


(3) $144^\circ = 180^\circ - 36^\circ$ であるから，『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.170) より次のように求めることができる.

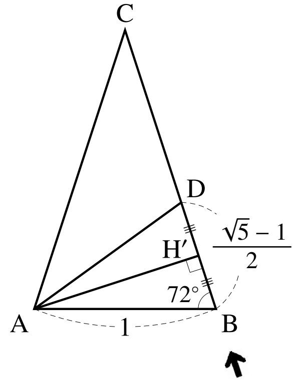
$$\sin 144^\circ = \sin 36^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\cos 144^\circ = -\cos 36^\circ = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\tan 144^\circ = -\tan 36^\circ = \boldsymbol{-\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$



C. 72° の三角比とその周辺



今度は △ABD に着目し，右図のように．点 A から辺 BD へ垂線 AH′ を引く．直角三角形 ABH′ に，余弦の定義を用いて

$$\cos 72^\circ = \frac{\mathrm{BH'}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{BD}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

さらに，三角比の相互関係 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて

$$\sin^2 72^\circ = 1 - \cos^2 72^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

であり，$\sin 72^\circ > 0$ であるから，$\sin 72^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ である．

また，これらより $\tan 72^\circ = \dfrac{\sin 72^\circ}{\cos 72^\circ} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} =$（計算省略）$= \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ である．

【練習 83：72° とその周辺の三角比】

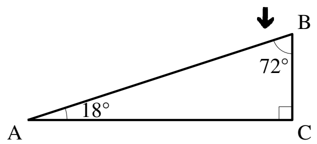
$\sin 72^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$，$\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\tan 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ を利用して次の三角比を求めよ．

(1) $\sin 18^\circ$，$\cos 18^\circ$，$\tan 18^\circ$　(2) $\sin 108^\circ$，$\cos 108^\circ$，$\tan 108^\circ$

(3) $\sin 162^\circ$，$\cos 162^\circ$，$\tan 162^\circ$

【解答】

(1) $18^\circ = 90^\circ - 72^\circ$ であるから，『$90^\circ - A$ の三角比』(p.158) より次のように求めることができる．

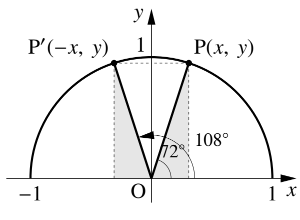


$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \mathbf{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

$$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \mathbf{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\tan 18^\circ = \frac{1}{\tan 72^\circ} = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}}$$

(2) $108^\circ = 180^\circ - 72^\circ$ であるから，『$180^\circ - \theta$ の三角比』(p.170) より次のように求めることができる．



$$\sin 108^\circ = \sin 72^\circ = \mathbf{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\cos 108^\circ = -\cos 72^\circ = \mathbf{-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

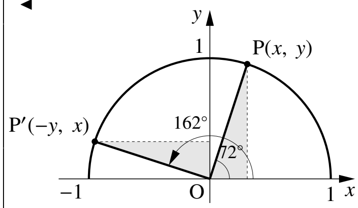
$$\tan 108^\circ = -\tan 72^\circ = \mathbf{-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

(3) $162^\circ = 90^\circ + 72^\circ$ であるから，『$90^\circ + \theta$ の三角比』(p.171) より次のように求めることができる．

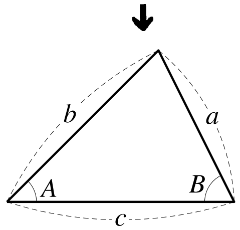
$$\sin 162^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 162^\circ = -\sin 72^\circ = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\tan 162^\circ = -\frac{1}{\tan 72^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$



2. 第 1 余弦定理

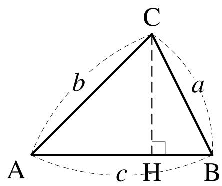


三角形の 2 つの角と 2 辺の長さの間に次の関係式が成り立つ．

$c = b\cos A + a\cos B$

これを，**第 1 余弦定理** (first cosine theorem) という．

A が鋭角のときは，線分 AB 上に垂線 CH をひいて（A が直角の時は H と A が一致する）



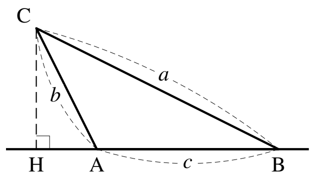
（右辺）$= b\cos A + a\cos B = \mathrm{AH} + \mathrm{BH} = \mathrm{AB} = c =$（左辺）

となり成立する（A が直角の時は $a\cos A = 0$ なので $\mathrm{AH} = 0$）．

【暗記 84：第 1 余弦定理の導出】
上の続きとして，A が鈍角のときも第 1 余弦定理が成り立つことを証明せよ．

【解答】 直線 AB 上に，右欄外の図のように垂線 CH をひくと

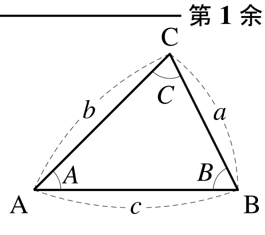
（右辺）$= b\cos A + a\cos B$
$= -b\cos(180^\circ - A) + a\cos B$
$= -\mathrm{AH} + \mathrm{BH} = \mathrm{AB} = c =$（左辺） ■



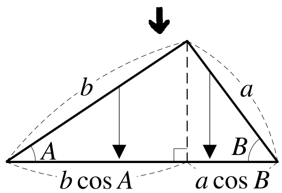
第 1 余弦定理

△ABC において次の等式が成り立つ．

$c = b\cos A + a\cos B$
$b = a\cos C + c\cos A$
$a = c\cos B + b\cos C$



この定理は，ある角から見たときに左右 2 つの辺を向かいの辺に押しつぶす感じで覚えると良い．
また，上の暗記例題のように自分で垂線の引けるならば，公式を覚えなくてもよい．



3. ヘロンの公式の証明

【発展 85：ヘロンの公式の導出】

3 辺の長さが a, b, c である三角形について，以下の問いに答えなさい．

① 長さ c の辺の対角 C について，$\sin C$ を a, b, c で表せ．式は整頓しなくてよい．

② $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ としたとき，三角形の面積 S が $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ に等しいことを示せ．

【解答】

① 余弦定理より $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ であり，$\sin C > 0$ なので

$$\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$$

② 三角形の面積の公式より $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ なので

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}a^2b^2\left\{1-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}(a^2+2ab+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\{(a^2+2ab+b^2)-c^2\}\{c^2-(a^2-2ab+b^2)\}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\})} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}$$

◀ $\dfrac{1}{2}ab$ を根号の中へ

◀ 平方の差についての因数分解

◀ 平方の差についての因数分解

◀ $-a+b+c = a+b+c-2a = 2s-2a$ などを用いた

三角比の表

0°	1.0000	0.0000	0.0000	**角**	**cos**	**sin**	**tan**
1°	0.9998	0.0175	0.0175	46°	0.6947	0.7193	1.0355
2°	0.9994	0.0349	0.0349	47°	0.6820	0.7314	1.0724
3°	0.9986	0.0523	0.0524	48°	0.6691	0.7431	1.1106
4°	0.9976	0.0698	0.0699	49°	0.6561	0.7547	1.1504
5°	0.9962	0.0872	0.0875	50°	0.6428	0.7660	1.1918
6°	0.9945	0.1045	0.1051	51°	0.6293	0.7771	1.2349
7°	0.9925	0.1219	0.1228	52°	0.6157	0.7880	1.2799
8°	0.9903	0.1392	0.1405	53°	0.6018	0.7986	1.3270
9°	0.9877	0.1564	0.1584	54°	0.5878	0.8090	1.3764
10°	0.9848	0.1736	0.1763	55°	0.5736	0.8192	1.4281
11°	0.9816	0.1908	0.1944	56°	0.5592	0.8290	1.4826
12°	0.9781	0.2079	0.2126	57°	0.5446	0.8387	1.5399
13°	0.9744	0.2250	0.2309	58°	0.5299	0.8480	1.6003
14°	0.9703	0.2419	0.2493	59°	0.5150	0.8572	1.6643
15°	0.9659	0.2588	0.2679	60°	0.5000	0.8660	1.7321
16°	0.9613	0.2756	0.2867	61°	0.4848	0.8746	1.8040
17°	0.9563	0.2924	0.3057	62°	0.4695	0.8829	1.8807
18°	0.9511	0.3090	0.3249	63°	0.4540	0.8910	1.9626
19°	0.9455	0.3256	0.3443	64°	0.4384	0.8988	2.0503
20°	0.9397	0.3420	0.3640	65°	0.4226	0.9063	2.1445
21°	0.9336	0.3584	0.3839	66°	0.4067	0.9135	2.2460
22°	0.9272	0.3746	0.4040	67°	0.3907	0.9205	2.3559
23°	0.9205	0.3907	0.4245	68°	0.3746	0.9272	2.4751
24°	0.9135	0.4067	0.4452	69°	0.3584	0.9336	2.6051
25°	0.9063	0.4226	0.4663	70°	0.3420	0.9397	2.7475
26°	0.8988	0.4384	0.4877	71°	0.3256	0.9455	2.9042
27°	0.8910	0.4540	0.5095	72°	0.3090	0.9511	3.0777
28°	0.8829	0.4695	0.5317	73°	0.2924	0.9563	3.2709
29°	0.8746	0.4848	0.5543	74°	0.2756	0.9613	3.4874
30°	0.8660	0.5000	0.5774	75°	0.2588	0.9659	3.7321
31°	0.8572	0.5150	0.6009	76°	0.2419	0.9703	4.0108
32°	0.8480	0.5299	0.6249	77°	0.2250	0.9744	4.3315
33°	0.8387	0.5446	0.6494	78°	0.2079	0.9781	4.7046
34°	0.8290	0.5592	0.6745	79°	0.1908	0.9816	5.1446
35°	0.8192	0.5736	0.7002	80°	0.1736	0.9848	5.6713
36°	0.8090	0.5878	0.7265	81°	0.1564	0.9877	6.3138
37°	0.7986	0.6018	0.7536	82°	0.1392	0.9903	7.1154
38°	0.7880	0.6157	0.7813	83°	0.1219	0.9925	8.1443
39°	0.7771	0.6293	0.8098	84°	0.1045	0.9945	9.5144
40°	0.7660	0.6428	0.8391	85°	0.0872	0.9962	11.4301
41°	0.7547	0.6561	0.8693	86°	0.0698	0.9976	14.3007
42°	0.7431	0.6691	0.9004	87°	0.0523	0.9986	19.0811
43°	0.7314	0.6820	0.9325	88°	0.0349	0.9994	28.6363
44°	0.7193	0.6947	0.9657	89°	0.0175	0.9998	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	0.0000	1.0000	な　し
角	**cos**	**sin**	**tan**	**角**	**cos**	**sin**	**tan**

これらの値を計算するには，大学で学習することになるテイラー展開（または，マクローリン展開）が必要となる．

索引